物性物理におけるスカーミオン

慶應義塾大学日吉物理学教室・自然科学研究教育センター

新田宗土

E-mail: nitta (at) phys-h.keio.ac.jp

アブストラクト

Skyrme が核子の模型としてスカーミオンを提唱してから半世紀ほどが過ぎた [1]。物性物理においては、2 次元の「おもちゃの」スカーミオンが様々な系で現れる。古くは量子ホール効果で知られていたが、最近では磁性体におけるスカーミオン格子が話題になった。しかしながら、本来の 3 次元のスカーミオンを安定的に作ることは難しかった。一方、最近、レーザーで冷却された原子気体を用いて、ある種の非可換ゲージ場を人工的に作ることが理論と実験で盛んに研究されている。$SU(2)$ の非可換ゲージ場を作ることで、3 次元のスカーミオンを安定的につくることが出来る。

1　場の理論におけるスカーミオン

ここでは，場の理論においてスカーミオンがどのように記述されているかを１，２，３次元のスカーミオンの順番に紹介する。教科書 [3] を合わせて参考にするとよい。

1.1　$O(2)$ シグマ模型における Sine-Gordon キンク

最も簡単なスカーミオンの典型例として，sine-Gordon 模型を考える [2]。sine-Gordon 模型の Lagrangian は次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\theta)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\theta)^2 - \frac{m^2}{2}(1-\cos\theta) \tag{1.1}$$

静的な配位を考えることにして、時間微分を落とす。エネルギー密度は

$$2\varepsilon \;=\; (\partial_x\theta)^2 + m^2(1-\cos\theta) \tag{1.2}$$

となる。ここで、Bogomol'nyi のトリックを用いて次のように平方完成の形に書き換える。

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= (\partial_x\theta)^2 + m^2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ &= \left(\partial_x\theta \pm m\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 \mp 2m\partial_x\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ &\geq 2|t_{\rm SG}| \end{aligned} \tag{1.3}$$

ここで、トポロジカル電荷密度を以下のように定義した。

$$t_{\rm SG} \equiv m\partial_x\theta\sin\frac{\theta}{2} = -2m\partial_x\left(\cos\frac{\theta}{2}\right). \tag{1.4}$$

これを空間積分すると

$$T_{\mathrm{SG}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx t_{\mathrm{SG}} = -2m \left[\cos\frac{\theta}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} \tag{1.5}$$

となり、確かに空間の無限遠点での境界条件によってのみ決まるのでトポロジカル電荷と呼べるものである。上式 (1.3) の不等号が成立するのは，次の Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) 方程式が成立するときである。

$$\partial_x\theta \pm m\sin\frac{\theta}{2} = 0. \tag{1.6}$$

エネルギーが式 (1.3) のように不等号で表されるために，与えられた境界条件のうち最もエネルギーが低い安定解が BPS 方程式 (1.6) を満たすことがわかる。このとき，エネルギーはトポロジカル電荷そのものになっている。

例えば，1 キンク解は

$$\theta(x) = 4\arctan\exp\frac{m}{4}(x - X) + \frac{\pi}{2} \tag{1.7}$$

のように解ける。ここで，X はキンクの位置を表す定数で，集団座標とかモジュライパラメーターと呼ばれている。これのトポロジカル電荷は

$$T_{\mathrm{SG}} = \int dx\, t_{\mathrm{SG}} = 2m - (-2m) = 4m \tag{1.8}$$

と計算される。

一般には，n 回巻くことができ，1 次のホモトピー群で特徴づけられる。

$$n \in \pi_1(S^1) = \mathbf{Z}. \tag{1.9}$$

式 (1.1) で与えられるラグランジアンは、実は次のように $O(2)$ 非線形シグマ模型に書き換えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\mathbf{n}\cdot\partial^\mu\mathbf{n} - \frac{m^2}{2}(1 - n_2), \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2), \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1. \tag{1.10}$$

これを，$(n_1, n_2) = (\cos\theta, \sin\theta)$ とパラメトライズすれば，式 (1.1) に戻る。ただし，$O(2)$ 対称性は勾配項のみが持っており，ポテンシャルによって陽に破られている。

物性物理においては，例えば，超伝導の Josephson 接合に sine-Gordon キンクが現れることがよく知られている。

1.2 $O(3)$ シグマ模型における 2 次元スカーミオン

次に，2 次元のスカーミオンを考える。$O(3)$ 非線形シグマ模型を考える。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\mathbf{n}\cdot\partial^\mu\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3), \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1 \tag{1.11}$$

これは，物性では通常 Heisenberg 模型と呼ばれている。$O(3)$ 対称性を用いると，基底状態は次のように取れる。

$$\langle \mathbf{n} \rangle = (0, 0, 1). \tag{1.12}$$

これより，$O(3)$ 対称性は，

$$G = O(3) \to H = O(2) \tag{1.13}$$

と自発的に破れていることがわかる。よって，オーダーパラメーター空間は，

$$\mathrm{OPS} = G/H = O(3)/O(2) \simeq S^2 \tag{1.14}$$

のように 2 次元球面であることがわかる。

このオーダーパラメーター空間（ターゲット空間）は，２次のホモトピー群が非自明である。

$$\pi_2(\mathrm{OPS}) = \pi_2(S^2) = \mathbf{Z}. \tag{1.15}$$

Belavin と Polyakov によって，このトポロジカル電荷をもった位相励起が発見された [4]。場の理論においては，今日，ランプと呼ばれているが，物性系ではただ単にスカーミオンを呼ばれていることが多い。ここでは，２次元スカーミオンと呼ぶことにしよう。

また，時間 1 次元空間 1 次元の系で，この配位を考えることもできて，その場合は 2 次元インスタントンとかシグマ模型インスタントンと呼ばれている。(弦理論のコンテクストでは，世界面インスタントンと呼ばれているものである。)

解を構成するために，次のようなステレオグラフィック座標

$$u \equiv \frac{n_1 + in_2}{1 + n_3} = \frac{1 - n_3}{n_1 - in_2} \tag{1.16}$$

を用いるのが便利である。ここで，u は複素場である。$u = 0$ と $u = \infty$ が，それぞれ球面の北極 N と南極 S に対応する。この u を用いると，ラグランジアンは次のように書き換えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu u^* \partial^\mu u}{(1 + |u|^2)^2} \tag{1.17}$$

これは，$\mathbf{C}P^1$ 模型と呼ばれているものである。(特に，$\mathbf{C}P^1$ の Fubini-Study 計量を用いた表式である。)

球面を完全に覆うには，別の座標が必要で $v \equiv 1/u$ を用いると，ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu v^* \partial^\mu v}{(1 + |v|^2)^2} \tag{1.18}$$

のように同じ形でかける。ここで，$v = \infty$ と $v = 0$ が，それぞれ球面の北極 N と南極 S に対応する。

さて，前節と同じように，Bogomol'nyi のトリックを用いて，BPS バウンドを求めよう。

$$\begin{aligned} E &= \int d^2x \frac{\partial_x u^* \partial_x u + \partial_y u^* \partial_y u}{(1+|u|^2)^2} \\ &= \int d^2x \left[\frac{|\partial_x u \mp i\partial_y u|^2}{(1+|u|^2)^2} \pm \frac{i(\partial_x u^* \partial_y u - \partial_y u^* \partial_x u)}{(1+|u|^2)^2} \right] \\ &\geq \left| \int d^2x \, \frac{i(\partial_x u^* \partial_y u - \partial_y u^* \partial_x u)}{(1+|u|^2)^2} \right| \equiv |T_v|. \end{aligned} \tag{1.19}$$

トポロジカル電荷を以下のように定義した。

$$\begin{aligned} T_v &= \int d^2x \, \frac{i(\partial_x u^* \partial_y u - \partial_y u^* \partial_x u)}{(1+|u|^2)^2} \\ &= \oint dx^i \frac{-i(u^* \partial_i u - \partial_i u^* \cdot u)}{2(1+|u|^2)}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

ここで，２行目は無限遠の境界での積分に書き換えた。このことからも，境界条件で決まるトポロジカル電荷であることがわかる。このトポロジカル電荷は，微分形式を用いれば，次のように書くことができる。

$$T_v = \int dx^i \wedge dx^j \, \frac{i\partial_i u^* \partial_j u}{(1+|u|^2)^2} = \int_{S^2} \frac{idu^* \wedge du}{(1+|u|^2)^2} = \int_{S^2} \omega \tag{1.21}$$

ここで，ω はケーラー形式という２形式である。

$$\omega = \frac{idu^* \wedge du}{(1+|u|^2)^2}. \tag{1.22}$$

ケーラー形式の存在は，$\mathbf{C}P^1$ がケーラー多様体であることを意味している。式 (1.21) の表式は，トポロジカル電荷が実は，ケーラー形式の引き戻しで書けることを意味している。

また，もともとの $\mathbf{n}$ の場を用いると，トポロジカル電荷は次のように書ける。

$$T_v = \int d^2x \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot (\partial_x \mathbf{n} \times \partial_y \mathbf{n} - \partial_y \mathbf{n} \times \partial_x \mathbf{n}) = \int_{S^2} dx^i \wedge dx^j \mathbf{n} \cdot (\partial_i \mathbf{n} \times \partial_j \mathbf{n}) \tag{1.23}$$

エネルギーの下限 $E = |T_v|$(BPS バウンド) は，BPS 方程式

$$\partial_x u \mp i\partial_y u = 0 \tag{1.24}$$

が満たされるときにのみ成立する。実空間の座標から，$z \equiv x + iy$ のように複素座標を定義すると，このＢＰＳ方程式は

$$\begin{aligned} & \partial_z u = 0 \quad \text{anti-BPS} \\ \text{または} \qquad & \bar{\partial}_{\bar{z}} u = 0 \quad \text{BPS} \end{aligned} \tag{1.25}$$

と書き換えることが出来る。よって，u はそれぞれ，

$$\begin{aligned} & u = u(\bar{z}) \quad \text{anti-BPS} \\ \text{または} \qquad & u = u(z) \quad \text{BPS} \end{aligned} \tag{1.26}$$

のように反正則または正則関数であることがわかる。

ここでは，BPS 解のみ考えよう。1 ソリトン解は，次のように与えられる。

$$u(z) = \kappa + \frac{\lambda}{z - z_1} \tag{1.27}$$

ここで，z_1 はソリトンの位置を表す複素定数，λ は絶対値がソリトンのサイズ，位相がソリトンの持っている $U(1)$ 位相を表す定数であり，これらはソリトンの集団座標（モジュライパラメーター）である。一方，κ は境界条件であり，ソリトンのモジュライではない。より一般に，k ソリトン解は次のように書ける。

$$u(z) = \kappa + \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{z - z_i} \tag{1.28}$$

z_i は i 番目のソリトンの位置，λ_i はソリトンのサイズと $U(1)$ 位相である。この解のトポロジカル電荷は，

$$T_v = 2\pi k, \quad k \in \pi_2(S^2) \simeq \mathbf{Z} \tag{1.29}$$

となっている。このことからも，k 個ソリトンは，好き勝手な位置においても，全エネルギーは同じであることがわかる。これは，ソリトン間に相互作用が存在しないことを意味している。

次節の Skrme 項に類似の 4 階微分項とポテンシャル項を同時に導入することで，スカーミオンのサイズを固定することが出来る。これは，ベービー・スカーミオンと呼ばれている [5]。この場合は，スカーミオン間に複雑な相互作用が存在している。

1.3 $O(4)$ シグマ模型における 3 次元スカーミオン

詳しくは述べないが，ＱＣＤの持っているカイラル対称性という対称性が，基底状態で自発的に破れ，$SU(2)$ の南部 Goldstone(NG) 粒子が現れる。$SU(2)$ カイラル・ラグランジアンは，そのNG 粒子を記述する低エネルギー有効理論である。$SU(2)$ 群の要素に値を持つ場 $U(x) \in SU(2)$ を用いて，

$$\mathcal{L} = -\frac{f_\pi^2}{16}\mathrm{tr}\,(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) = \frac{f_\pi^2}{16}\mathrm{tr}\,(U^\dagger \partial^\mu U)^2 \tag{1.30}$$

と書かれる。Skyrme は，次のように $SU(2)$ カイラル・ラグランジアンに変更を加えることでスカーミオンを考えた [1]。

$$\mathcal{L} = -\frac{f_\pi^2}{16}\mathrm{tr}\,(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U)^2 + \mathcal{L}^{(4)} - V(U) \tag{1.31}$$

ここで，$\mathcal{L}^{(4)}$ は Skyrme 項と呼ばれる 4 階微分を含んだ項で次のように与えられる。

$$\mathcal{L}^{(4)}(U) = \frac{1}{32e^2}\mathrm{tr}\,([U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2). \tag{1.32}$$

（この項を考えた理由は後で述べる。）ポテンシャル項は特になくてもよいが，クォークの質量により

$$V = m^2[(U + U^\dagger - \mathbf{1}_2) \tag{1.33}$$

という項が生じるので，よく考えられる。

スカーミオンのトポロジカル電荷は，

$$k \in \pi_3(SU(2)) \simeq \pi_3(S^3) \simeq \mathbf{Z} \tag{1.34}$$

である。スカーミオンの解は，次のように与えられる。

$$U = \exp\left(\frac{if(r)\sigma \cdot \mathbf{r}}{r}\right) \tag{1.35}$$

$\mathbf{r}$ は実空間における３次元の位置ベクトルで，$r = |\mathbf{r}|$ である。f は運動方程式で決められる関数で，k ソリトン解の場合は，境界条件として，

$$\begin{aligned} &f \to 0 \quad (U \to +\mathbf{1}_2), \quad r \to \infty \\ &f \to k\pi \quad (U \to -\mathbf{1}_2), \quad r = 0 \end{aligned} \tag{1.36}$$

を課す。$k = 1$ は安定な解を与えるが，k が２以上は k ソリトンが同じ位置に重なっており不安定であることが知られている。

$O(4)$ 非線形シグマ模型との関係を知るために，

$$U(x) = n_4(x)\mathbf{1}_2 + \sum_{i=1}^{3} n_i(x)\sigma_i \tag{1.37}$$

と場の再定義をしてやると，次のように書き換えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\mu \mathbf{n} + \mathcal{L}^{(4)}(\mathbf{n}) - V(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n}^2 = 1. \tag{1.38}$$

ここで，ポテンシャル項と Skyrme 項はそれぞれ

$$V(\mathbf{n}) = m^2(1 - n_4), \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(4)}(\mathbf{n}) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n})(\partial^\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\nu \mathbf{n}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\mu \mathbf{n})^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\mu \neq \nu}(\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n})(\partial^\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\nu \mathbf{n}), \end{aligned} \tag{1.40}$$

と書き換えられる。

また，２成分のＢＥＣとの関係を知るためには，次の表式が便利である。

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

という複素２成分のスカラー場を用意して，

$$U = \begin{pmatrix} \Psi_1 & -\Psi_2^* \\ \Psi_2 & \Psi_1^* \end{pmatrix} \in SU(2) \simeq S^3, \tag{1.42}$$

$$\det U = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 = 1. \tag{1.43}$$

２成分のＢＥＣでは，この２つのスカラー場を２成分の波動関数とみなす。

場の理論において，Skyrme が Skyrme 項 $\mathcal{L}^{(4)}$ を入れた理由は，スカーミオンの安定性のためである。Derick の定理によると，Skyrme 項がない場合は，３次元のスカーミオンはスケール変換で小さくするとエネルギーが下がる。よって，どんどん小さくなる不安定性がある。Skyrme 項があるとこれを支えることが出来て安定なサイズが存在する。

2　物性物理におけるスカーミオン

トークではここまでを場の理論からの準備として，物性物理でどのようなスカーミオンが現れるかを紹介した。

1. １次元のスカーミオン (sine-Gordon ソリトン) は，超伝導の Josephson 接合において現れることがよく知られている。これは，実は２つの超伝導体の間に挟まれた，Abrikosov 渦であり，Josephson 渦と呼ばれている。銅酸化物高温超電導体では，多層構造を持っており，このような Josephson 渦が現れる。

2. ２次元のスカーミオンは，様々な物性系に現れる。そのためか，物性で，単にスカーミオンと言うと，この２次元のスカーミオンを指す場合が多い。古くから知られているのは，量子ホール効果，磁性体，超流動ヘリウム３などである。最初に理論的に予言されたのが，磁性体においてであったことからもわかるように，様々な磁性体でスカーミオンが実験的にも発見されている。特に，最近，スカーミオンの格子構造が見つかって話題になった。また，最近スピンが１のスピノールＢＥＣにおいて，実験的に作られた [6]。

3. ３次元のスカーミオンは，２成分のＢＥＣにおいて考えられていた [7]–[14]。しかし，Skyrme 項がないために，一般には不安定である。安定化させる様々な方法が考案されてきたが，非常に難しかった。せいぜい準安定になるくらいであった。

   - 最近，我々のグループは非可換ゲージ場を用いることで，３次元のスカーミオンが安定に存在することを見出した [15]。しかも，これは基底状態として完全に安定に存在する。詳しくは論文を見ていただきたい。
   - それとは別に，２成分ＢＥＣにおいて，ドメイン壁と反ドメイン壁の衝突を用いて，３次元スカーミオンを実験的に構成する方法を最近提唱した [16]。

詳しい説明は，ページの都合上割愛させていただき別の機会に譲るが，研究会で話した内容については，研究会のスライドを見ていただきたい。

参考文献

[1] T. H. R. Skyrme, "A Nonlinear field theory," Proc. Roy. Soc. Lond. A **260**, 127 (1961); "A Unified Field Theory of Mesons and Baryons," Nucl. Phys. **31**, 556 (1962).

[2] T. H. R. Skyrme, "Particle states of a quantized meson field," Proc. Roy. Soc. Lond. A **262**, 237 (1961).

[3] N. S. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*, *Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004) 493 p*

[4] A. M. Polyakov and A. A. Belavin, "Metastable States of Two-Dimensional Isotropic Ferromagnets," JETP Lett. **22**, 245 (1975) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **22**, 503 (1975)].

[5] B. M. A. Piette, B. J. Schroers and W. J. Zakrzewski, "Multi - Solitons In A Two-Dimensional Skyrme Model," Z. Phys. C **65**, 165 (1995) [arXiv:hep-th/9406160]; B. M. A. Piette, B. J. Schroers and W. J. Zakrzewski, "Dynamics of baby skyrmions," Nucl. Phys. B **439**, 205 (1995) [arXiv:hep-ph/9410256].

[6] L. S. Leslie, A. Hansen, K. C. Wright, B. M. Deutsch, and N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **103**, 250401 (2009); J. Choi, W. J. Kwon, and Y. Shin Phys. Rev. Lett. **108**, 035301 (2012).

[7] J. Ruostekoski and J. R. Anglin, "Creating vortex rings and three-dimensional skyrmions in Bose-Einstein condensates," Phys. Rev. Lett. **86**, 3934 (2001).

[8] R. A. Battye, N. R. Cooper and P. M. Sutcliffe, "Stable skyrmions in two-component Bose-Einstein condensates," Phys. Rev. Lett. **88**, 080401 (2002).

[9] U. A. Khawaja and H. T. C. Stoof, "Skyrmions in a ferromagnetic Bose-Einstein condensate," Nature (London) **411**, 918 (2001), "Skyrmion physics in Bose-Einstein ferromagnets," Phys. Rev. A **64**, 043612 (2001).

[10] C. M. Savage and J. Ruostekoski, "Energetically stable particle-like skyrmions in a trapped Bose-Einstein condensate," Phys. Rev. Lett. **91**, 010403 (2003).

[11] J. Ruostekoski, "Stable particlelike solitons with multiply-quantized vortex lines in Bose-Einstein condensates," Phys. Rev. A **70**, 041601 (2004).

[12] S. Wuster, T. E. Argue, and C. M. Savage, "Numerical study of the stability of skyrmions in Bose-Einstein condensates," Phys. Rev. A **72**, 043616 (2005).

[13] I. F. Herbut and M. Oshikawa, "Stable Skyrmions in spinor condensates," Phys. Rev. Lett. **97**, 080403 (2006) [arXiv:cond-mat/0604557]; A. Tokuno, Y. Mitamura, M. Oshikawa, I. F. Herbut, "Skyrmion in spinor condensates and its stability in trap potentials," Phys. Rev. A **79**, 053626 (2009).

[14] M. A. Metlitski and A. R. Zhitnitsky, "Vortex rings in two-component Bose-Einstein condensates," JHEP **0406**, 017 (2004) [arXiv:cond-mat/0307559].

[15] T. Kawakami, T. Mizushima, M. Nitta and K. Machida, "Stable Skyrmions in SU(2) Gauged Bose-Einstein Condensates," Phys. Rev. Lett. **109**, 015301 (2012) [arXiv:1204.3177 [cond-mat.quant-gas]].

[16] M. Nitta, K. Kasamatsu, M. Tsubota and H. Takeuchi, "Creating vortons and three-dimensional skyrmions from domain wall annihilation with stretched vortices in Bose-Einstein condensates," Phys. Rev. A **85**, 053639 (2012) [arXiv:1203.4896 [cond-mat.quant-gas]].