

# 有限密度ランダム行列模型に対する 複素ランジュバン方程式

佐野 崇\*、藤井 宏次†、菊川 芳夫†

平成 24 年 8 月 24 日

## 概要

有限密度格子 QCD シミュレーションは、符号問題のために難しい。符号問題を回避するアルゴリズムとして、複素ランジュバン法がある。この方法には一見して符号問題が存在しないが、正しい定常解を得られるか否かについて、満足のいく証明はない。我々は複素ランジュバン法を、カイラルランダム行列模型に適用し、数値解と厳密解を比較することで、手法の妥当性を調べた。

## 1 イントロダクション

QCD 相構造は、重イオン衝突実験や、中性子星の内部構造に関連して、実験的にも理論的にも興味深い。相構造の解析は、系の基底状態を調べることに他ならず、本質的に非摂動的手法を用いる必要がある。

汎関数積分を計算機によって数値評価する格子 QCD シミュレーションの方法は、強力な非摂動的手法の一つである。しかし、ひとたび有限のクォーク化学ポテンシャルが導入されると、作用が複素化するために、確率解釈が破綻し、インポートランスサンプリング法に基づく通常の格子シミュレーションは困難になる。

インポートランスサンプリング法とは異なるアルゴリズムに、複素ランジュバン法がある。この方法は、複素ランジュバン方程式を逐次的に解くのみであり、一見して符号問題は存在しない。しかし、この手法には数学的基礎が乏しく、具体的な模型に適用した場合も、ランジュバン方程式の収束性が著しく悪かったり、収束結果が正しい値を示さない場合も見つかっている。

我々は、カイラルランダム行列 (ChRM) 模型に対して、複素ランジュバン法を適用した。ChRM 模型は、有限密度でカイラル相転移を示し、かつ符号問題を持つ。一方で解析的に厳密解を導くこともできる。したがって、厳密解と数値解を比較して、複素ランジュバン法の可否を、直接検証することが可能である。

## 2 確率過程量子化法

確率過程量子化法に基づくアルゴリズムを説明するために、次のような一次元積分を考える。

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-S(x)) \quad (1)$$

---

\*発表者、理研 email:tsano@riken.jp

†東大総文

ただし、 $S$  は実関数であるとする。このとき、 $x$  の関数  $f(x)$  に対して、期待値  $\langle f(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int dx f(x) e^{-S}$  を計算したいとする。

このとき、次のような方程式 (ランジュバン方程式) を考える。

$$\frac{d}{d\theta} x(\theta) = -\frac{\partial S(x)}{\partial x} + \eta(\theta) \quad (2)$$

$\theta$  は、ある時間パラメータ (ランジュバン時間) であり、ランジュバン方程式は、ランジュバン時間方向への発展方程式である。右辺第一項は“力”の項であり、 $x$  が与えられると一意に求まる。第二項の  $\eta$  はノイズの項であり、次ような規格化条件を満たす;  $\langle \eta(\theta)\eta(\theta') \rangle = 2\delta(\theta - \theta')$ 。

ランジュバン方程式にはノイズ項があるために、ある時刻  $\theta$  における  $x$  の値は一意には定まらず、分布している。その分布関数を  $P(x, \theta)$  と表す。このとき、充分大きな  $\theta$  に対して、 $P(x, \theta)$  は初期値に依存せず、 $\frac{1}{Z} e^{-S}$  に収束することが知られている [1]。この事実を用いると、ランジュバン方程式 (2) を数値的に解き、熱化後の変数  $x$  をサンプルすることで、任意の  $f(x)$  の平均値を計算することができる。

次に、 $S$  が複素数の場合を考える [2, 3]。  $S$  が複素数でも、ランジュバン方程式 (2) は同様に書き下すことができる。このとき、力の項も複素数になるために、もともと実だった変数  $x$  の虚部を考えないと、方程式は閉じない。複素ランジュバン方程式を数値的に解くことについて、 $S$  の複素化は、表向きには新たな困難を生じない。そして、複素ランジュバン方程式を用いて得られた変数列を用いて、複素重み  $e^{-S}$  の元での期待値が得られれば、複素ランジュバン法によって問題が解けたことになる。これは符号問題の解決に他ならない。

この方法について、数学的な証明はいくども試みられている [4, 5]。一方で、具体的なモデルにおいては、シミュレーションが不安定で、そもそも解が得られなかったり、収束しても、収束先が正しくない解を導くなどの問題が発見されている。ただし、シミュレーションの不安定性の問題については、最近進展があり、一般的にシミュレーションを安定化する工夫が提案されている [6]。

### 3 ランダム行列模型

有限密度 QCD に対するカイラルランダム行列 (ChRM) 模型は、次のように定義できる。 [7, 8]

$$Z = \int [dW] e^{-N\Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W} \prod_{f=1}^{N_f} \det \begin{pmatrix} m & iW + \mu \\ iW^\dagger + \mu & m \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\equiv \int [dW] e^{-N\Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W} \prod_{f=1}^{N_f} (\det D(\mu) + m), \quad (4)$$

ただし、積分の測度は、 $\int [dW] = \prod_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} d(\text{Re}\{W_{ij}\}) d(\text{Im}\{W_{ij}\})$  である。 $\Sigma$  はカイラル対称性の破れのスケールを決めるパラメータで、 $m$  はクォーク質量である。また、 $N_f$  はクォークフレーバ数である。行列のサイズ  $N$  は疑ゼロモード数と呼ばれ、 $N$  は系の体積に比例する大きな数と捉える。

ChRM 模型の一つの利点は、解析的な取り扱いが容易であることである。この模型は、疑ゼロモード数  $N$  が無限に大きい場合に解析的に解かれ、有限の化学ポテンシャル  $\mu_c$  において、カイラル相転移が起きることが知られている。特にカイラル極限では  $\Sigma\mu_c = 0.528$  である。有限の  $N$  についても、適当な変数変換を行うことで、分配関数中の積分変数を減らすことができ、分配関数を厳密に求めることが可能になる。

解析的に容易に取り扱える一方で、有限密度においては、 $\det(D+m)$  は複素数になる。すなわち、ChRM 模型は、QCD と同様に符号問題を持つ。このような特徴から、ChRM 模型は、複素ランジュバン法を適用し、手法を検証する場として適している。

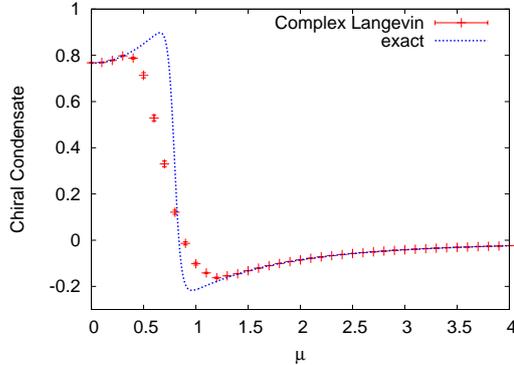


図 1: カイラル凝縮の化学ポテンシャル依存性。曲線が厳密解、点が数値解である。 $m = 0.4$ 。

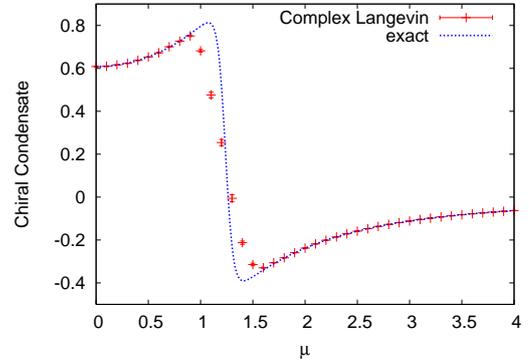


図 2: 図 1 に同じ。ただし  $m = 1.0$  である。

## 4 数値結果

$N_f = 1$ 、 $\Sigma = 1$ 、 $N = 8$  の場合に、複素ランジュバン方程式を数値的に解き、厳密解と数値解を比較した。ランジュバン時間を離散化した際の刻み幅は、 $10^{-4}$  とし、熱化の後、 $4 \times 10^3$  ステップごとに配位をサンプルすることで、自己相関によるエラーの過小評価を避けた。シミュレーションは、我々の試みたすべてのパラメータ領域において、特別な工夫をすることなく、収束した。

$m = 0.4, 1.0$  の時に、 $\mu$  の関数としてカイラル凝縮  $\frac{1}{2N} \text{tr} D^{-1}$  をプロットしたものが、それぞれ図 1、図 2 である。 $\mu$  が 0 に近いが、または相転移 (有限体積なのでクロスオーバ) よりも十分に大きな領域では、数値解は厳密解を再現する。一方で、相転移の起こる近傍では、数値解は厳密解には一致しなかった。また、 $m$  が大きいほど、より小さな  $\mu$  において、両者の不一致が起きることがわかった。

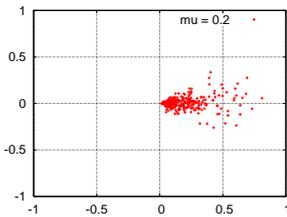


図 3:  $\det(D+m)$  の、シミュレーション中の分布。 $m = 0.4$ 、 $\mu = 0.2$  である。

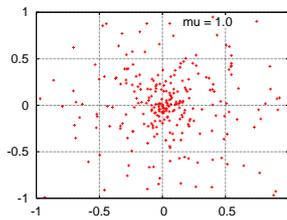


図 4: 図 3 に同じ。ただし  $\mu = 1.0$  である。

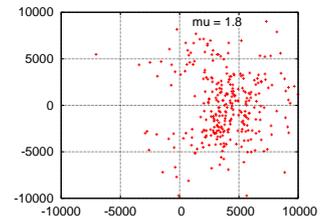


図 5: 図 3 に同じ。ただし  $\mu = 1.8$  である。

シミュレーションによる厳密解の再現の失敗をより詳しく見るために、 $m = 0.4$ におけるシミュレーション中の  $\det(D + m)$  の分布を、図 3( $\mu = 0.2$ )、図 4( $\mu = 1.0$ )、図 5( $\mu = 1.8$ ) にそれぞれ示した。 $\mu$  が小さく、シミュレーションが厳密解を再現するとき、 $\det(D + m)$  は、主に実軸周りに分布する (図 3)。 $\mu$  を大きくし、シミュレーションが破綻するとき、 $\det(D + m)$  は小さくなり、4 象限全体に分布する (図 4)。さらに  $\mu$  を大きくし、シミュレーションが再び厳密解を再現するとき、 $\det(D + m)$  の実部は大きくなり、全体として原点からは離れる (図 5)。

## 5 まとめと議論

我々は、ChRM 模型に対して複素ランジュバン方程式を解き、得られた解を厳密解と比較した。シミュレーションは安定に行うことができたが、主に相転移点の近傍でのみ、シミュレーションは厳密解を再現しない。

厳密解を再現しない領域では、Dirac 演算子の行列式  $\det(D + m)$  は、複素 4 象限にほぼ均等に分布している。 $\det(D + m)$  は、作用の中では対数関数の引数になっており、小さな  $\det(D + m)$  に対して作用は大きくなる。このことが、シミュレーションに不安定性を与え、正しい結果を与えない理由になっている可能性がある。また、対数関数は本来、複素指数に対して多価関数である。文献 [9] では、簡単な模型を用いて、対数関数を一価関数とした場合の特異性 (カット) の効果が重要であり、それを無視した場合にシミュレーションが上手くいかず、その効果を取り込むことで、正しい解が得られることが示されている。ChRM 模型においても、シミュレーションが不正確なのは、対数関数の引数が 4 象限に渡って移動する場合であるため、そのようなカットの効果を見落としていると言える。カット効果の導入は、ChRM 模型に対しても応用できる可能性があり、複素ランジュバン法による符号問題の克服についての手がかりとなり得る。

## 参考文献

- [1] for a review, P. H. Damgaard and H. Huffel, Phys. Rept. **152**, 227 (1987).
- [2] G. Parisi, Phys. Lett. B **131**, 393 (1983).
- [3] J. Klauder, Acta Phys. Austriaca Suppl. **XXXV** (1983) 251.
- [4] G. Aarts, E. Seiler and I. -O. Stamatescu, Phys. Rev. D **81**, 054508 (2010).
- [5] T. Matsui and A. Nakamura, Phys. Lett. B **194**, 262 (1987).
- [6] G. Aarts, F. A. James, E. Seiler and I. -O. Stamatescu, Phys. Lett. B **687**, 154 (2010).
- [7] A. M. Halasz, A. D. Jackson, R. E. Shrock, M. A. Stephanov, J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. **D58**, 096007 (1998).
- [8] for a review, J. J. M. Verbaarschot and T. Wettig, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **50**, 343 (2000) [arXiv:hep-ph/0003017].
- [9] K. Fujimura, K. Okano, L. Schulke, K. Yamagishi and B. Zheng, Nucl. Phys. B **424**, 675 (1994).