

Bose 凝縮体ソリトン束縛状態と輻射成分との 運動量空間における干渉について

峰真如, 藤嶋浩史^A, 奥村雅彦^{B,C}, 矢嶋徹^D

早大本庄学院, A) キヤノン光技研,

B) 原子力機構システム計算科学センター,

C) 理研, D) 宇都宮大学

1 はじめに

中性原子気体の Bose-Einstein 凝縮 (BEC) の系は, マクロなスケールで量子論的現象が観測できるだけでなく, 相互作用が弱く制御可能性にも優れているため理論と実験の詳細な比較ができるという点で魅力的な研究対象となっている. ここで制御可能とは, 外部ポテンシャルの形, 温度, 原子間相互作用にまで及ぶ. たとえば原子の閉じ込めポテンシャルを変化させて擬 1 次元系を作ったり, 原子間の相互作用を斥力から引力まで変えたりすることができる. このことは, 後述するように本研究の出発点となっている.

一方でソリトン理論によると, 非線形シュレーディンガー方程式 (Non-linear Schrödinger Equation, 以後 NLSE と略記) は, 複素数値関数 $\psi = \psi(x, t)$ に対して,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - |\psi|^2 \psi \quad (1)$$

と表されるが, これには, N -ソリトン束縛状態解が存在する [1]. ここで N は自然数である. また, N -ソリトン束縛状態とは異なる初期状態からの時間発展についても, そのふるまいが知られており, 十分大きな振幅を持った初期状態に対して, その後の時間発展が “ソリトン束縛状態 + 小振幅の輻射成分” と表現できる [1]. しかし輻射成分は小振幅なため, 実際の物理系で観測することは困難である.

本研究では, まずこのソリトン束縛状態からずれた初期状態について, その時間発展の結果, 運動量空間で干渉パターンが現れることを示す. 一方で, 中性原子 BEC 系は, その原子分布を与える振幅関数が NLSE に従う (ただし非線形相互作用の強さのパラメータが入る) ことに注目する. また, 先述したように擬 1 次元系を作ったり, 原子間相互作用を引力型に調整することができる. そして, 中性原子 BEC 系では Time of flight 法と呼ばれる観測方法により運動量分布が観測できることに着目し, ソリトン束縛状態と輻射成分との運動量空間での干渉を観測することを提案する.

本稿の構成は以下の通りである. 第 2 節では具体例として 2 ソリトン束縛状態と, それからずれた初期状態について運動量空間での時間発展の様子を数値的に求める. 第 3 節ではまとめを行う.

2 2 ソリトン束縛状態に関する解析

本節では特に, 2 ソリトン束縛状態に注目し, 解析を行う.

2 ソリトン束縛状態の初期状態として,

$$\psi_1(x, 0) = 2 \operatorname{sech}(x) \quad (2)$$

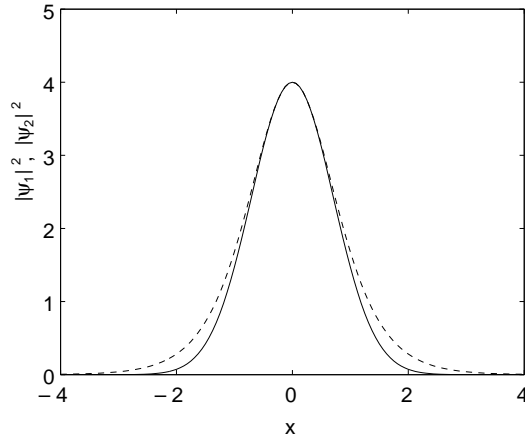


図 1: 初期状態 (2) と (3) をプロットしたもの. 点線が 2 ソリトン束縛状態解 (2) で, 実線が非ソリトン解 (3) である.

を用意する. また, この関数に対して, パルス幅と振幅が似た関数

$$\psi_2(x, 0) = 2 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (3)$$

も考える. (2) 式に対する時間発展は解析的に求められており,

$$\psi_1(x, t) = 4 \exp\left(-\frac{it}{2}\right) \frac{\cosh(3x) + 3 \exp(-4it)\cosh(x)}{\cosh(4x) + 4\cosh(2x) + 3\cosh(4t)} \quad (4)$$

となることが知られている [1]. 一方で, (3) に対する時間発展は逆散乱法を用いて解の厳密な時間発展を積分表示できるが, その表示は複雑であるため, 時間発展は数値的に求める.

図 1 は, 初期状態 (2), (3) について, その絶対値二乗したものをグラフにしたものである. このグラフからわかるとおり, 両者は非常によく似た波束であることがわかる. なお, この絶対値二乗したものは, BEC 系においては粒子の空間分布に対応している.

次に, それぞれの初期状態に対する時間発展について, 運動量空間での分布を見る.

図 2 は, 2 ソリトン束縛状態 (2) の $t = 14$ での運動量分布を見たものである. グラフからわかるように, 運動量空間での構造は見えない. 一方で, 図 3 は, 初期状態 (2) からの時間発展について, $t = 14$ での運動量分布を見たものである. この場合は, 運動量空間での干渉パターンが見える. これは 2 ソリトン束縛状態と輻射との干渉によるものと考えられる. これを以下に定性的に示す.

2 ソリトン束縛状態解を

$$\psi_{\text{sol}}(x, t) = e^{-\frac{1}{2}x^2} (3 - \cos 4t) \quad (5)$$

と置き, 輻射の成分を

$$\psi_{\text{rad}}(x, t) = \int \tilde{f}(k) e^{-\frac{i}{2}k^2 t} e^{ikx} dk \quad (6)$$

と置く. 2 ソリトン束縛状態解については原点付近に局在し周期 $\frac{\pi}{2}$ で振動している関数で近似した. そして輻射成分については振幅が微小なので通常の線形シュレディンガー方程式の一般

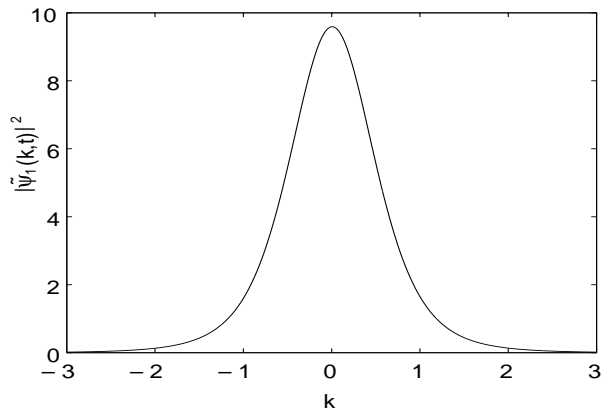


図 2: 2 ソリトン束縛状態 (2) の $t = 14$ での運動量分布.

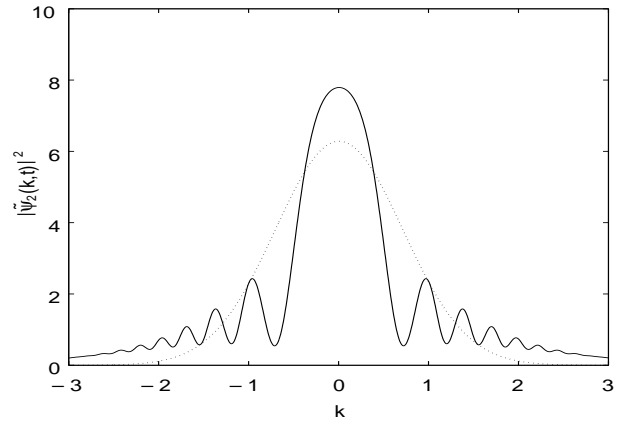


図 3: 初期状態 (3) に対する $t = 14$ での運動量分布. 点線は初期状態を示す.

解で近似した. ここで群速度 0 であることに対応して $\tilde{f}(k)$ は実数値偶関数としている. このとき, 運動量空間での時間発展は次のように書かれる.

$$|\tilde{\psi}_{\text{sol}} + \tilde{\psi}_{\text{rad}}|^2 = (3 + \cos 4t)^2 e^{-k^2} + \tilde{f}^2(k) + 2(3 + \cos 4t)\tilde{f}(k)e^{-\frac{1}{2}k^2} \cos\left(\frac{1}{2}k^2 t\right) \quad (7)$$

このことからわかるように, 干渉項に波数空間での振動が見られる. さらに, 図 3 では波数 k が大きいところで k に関する周期が減少する傾向が見られるが, このことも定性的に説明できている.

3 まとめ

本研究では, NLSE に着目し, N -ソリトン束縛状態からずれた際にソリトン解と非ソリトン解との運動量空間での時間発展に着目した. 特に非ソリトン解に対しては, ソリトン束縛状態と輻射成分との干渉が現れる. BEC 系では運動量分布を観測することができるため, BEC 系でこの干渉が見られれば, 輻射成分を間接的に観測できたことになる. 具体的な実験パラメータについては, 文献 [2] で議論されている. ソリトンは流体, 光学, プラズマなど様々な物理系に現れる現象であるため, 本研究の今後の応用が期待される.

参考文献

- [1] J. Satsuma and N. Yajima, Prog. Theor. Phys. Suppl. **55** (1974) 284.
- [2] H. Fujishima, M. Okumura, M. Mine and T. Yajima, arXiv:1203.5907 [cond-mat.quant-gas], to appear in JPSJ.