再訪:Pitaevskii-Stringariの定理

キヤノン株式会社光学技術研究所　藤嶋　浩史 (Hironobu FUJISHIMA)*
Optics R&D Center, CANON INC.
宇都宮大学工学研究科 情報システム科学専攻　矢嶋　徹 (Tetsu YAJIMA)†
Department of Information Systems Science, Graduate School of Engineering,
Utsunomiya University

ここ数十年膨大な研究成果が蓄積されてきている冷却中性原子気体によるBEC系は、相転移現象の本質について、いまだ議論の絶えない系である。3次元においては、BECは原子間相互作用がなくてもボーズ統計性が持つバンチングの性質によって達成されると考えることができる。実際当初ボーズとアインシュタインは相互作用のない光子気体の研究からBEC現象を予言しており、純粋に低エネルギー極限において発散するボーズ分布関数の性質からくる帰結を意図していた。この相互作用なしの描像に立って、二次元以下の有限温度で相転移の発生を禁止する定理がホーヘンバーグの定理であり [1]、この定理は状態密度が低次元で定数（二次元）、マイナス二分の一乗（一次元）に比例するために粒子数積分が発散することによって証明される。

一方、BECの本質を短距離相互作用による大域的U(1)ゲージ対称性の破れによる通常の相転移として記述するという見方もある。一般に、短距離相互作用する二次元以下の平坦な系では、連続的対称性の自発的な破れの描像に基づく相転移はマーミン＝ワグナーの定理によって禁止されることがよく知られている [2]。この場合にも定性的には、低次元特有の強い量子揺らぎが非対角長距離秩序（ODLRO）の形成を阻害すると説明される。この定理は磁性の分野をはじめとしてさまざまな物理系に対して一般的に適用することが出来るが、BEC系に対してこの定理を適用すると、「2次元以下では有限温度でBEC転移は起こらない」となる。この定理の証明はボゴリューボフの不等式とf–総和則を活用することにより、

$$n_{\mathbf{p}} \geq \frac{Mk_BT}{p^2}\frac{|\langle \hat{a}_0\rangle|^2}{N} - \frac{1}{2} \tag{1}$$

を示して行われる。ここで M は原子質量、N は原子の個数である。左辺の $n_{\mathbf{p}}$ は運動量 $\mathbf{p}$ をもつ原子の個数密度を表す。有限温度で長波長極限をとり、左辺を積分して比零運動量をもつ非凝縮相の原子個数を求めると (上限は適当でよい)、$\langle \hat{a}_0\rangle$ が0にならない限り、非凝縮相の原子数が発散してしまう。この定理が有効なのは温度 T が有限のときのみであって、二次元系の場合、絶対零度での相転移を禁止するものではない。

*E-mail address:fujishima.hironobu@canon.co.jp
†E-mail address:yajimat@is.utsunomiya-u.ac.jp

ところが斥力相互作用する一次元系ボーズ系ではより強いことがいえる。すなわち絶対零度であっても、ボーズ凝縮が起こらない。すなわち熱的影響がない純粋な量子相転移の存在を排除することが出来る。最も端的な証明は、リーブ・リニガーモデルによるものであろう。リーブ・リニガーの積分方程式により、相互作用を繰り込まれた運動量分布（ラピディティ）が 0 に局在しないことが示される [3]。また、一粒子密度行列が無限遠方で 0 になることを示すことが出来る ($\lim_{|x|\to\infty}\langle\psi^\dagger(x)\psi(0)\rangle \to 0$)[4]。これによりペンローズ・オンサーガーの基準 [5] に従う BEC が排除されたことになる。では、このような可積分模型の方法によらず、マーミン＝ワグナーの定理と同様の方式でこの定理を証明できないものであろうか？この問題に対する答えは 1991 年にピタエフスキーとストリンガリによって与えられた [6]。彼らの方法で示される不等式は

$$n_{\mathbf{p}} \geq \frac{Mc}{2}\frac{|\langle\hat{a}_0\rangle|^2}{pN} - \frac{1}{2} \tag{2}$$

である。上式中で c は音速である。これも $\langle\hat{a}_0\rangle$ が 0 にならない限り、非凝縮相の原子数が発散することをいうものである。

しかし、もともとのマーミン＝ワグナーの定理もピタエフスキー＝ストリンガリの定理も次のような深刻な問題をはらんでいる。まず、第一に場の演算子と粒子描像の関係がはっきりしないことである。彼らは論文中で

$$[\hat{a}_q, \rho_q] = \hat{a}_0$$

なる表現を用いているので（$\hat{a}$ はボーズ粒子の消滅演算子）、$\hat{a}_0$ を c 数ではなく演算子として考えていることになる。また ρ_q は良くなされるように

$$\sum \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k+q}$$

と定義されていると考えられる。場の演算子の定義には粒子描像の取り方によっていろいろあるのでここで整理しておかなくてはならない。まず、凝縮相が存在していることを表す c 数場（オーダーパラメタ）を場の演算子の展開の中に含ませるかどうかという問題がある。かたや凝縮相をあらわす c 数場をいれ、そこから量子揺らぎの展開を始める。もう一方は凝縮体がないものとしていきなり演算子の展開を始める。

$$\hat{\rho}_k = \int \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)e^{-ikx}dx$$

であるので、仮に場の演算子の展開に c 数場が入っていたら、ρ は c 数と、生成消滅演算子それぞれ一個のみを含む項を持つはずである。しかし、ピタエフスキー＝ストリンガリの論文中では

$$\sum \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k+q}$$

となっている。これは、彼らが凝縮体がはじめから存在しないものとして、場の演算子の展開を始めているということを意味する。彼らの論文によると、$\hat{a}_0$ を演算子として扱っておいたうえで、且つ、$\langle\hat{a}_0\rangle = \sqrt{N_0}$ を仮定する（ボゴリューボフ近似）と矛盾が発生する (非凝縮相の原子数が長波長極限で発散する) のでやはり $\langle\hat{a}_0\rangle = \sqrt{N_0} = 0$ でなくてはならないという論理を用いている。しかし、ボゴリューボフ近似は $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = 0$ のように場の

理論の要である正準交換関係を破壊する。そればかりか、もし $\langle\rangle$ が通常の生の原子に対する真空だとすると、$\hat{a}_0$ が演算子であることと $\langle\hat{a}_0\rangle = \sqrt{N_0}$ であることとはそもそも両立しないことが自明な仮定である。彼らは最初から $\hat{a}_0$ をc数ではない演算子として扱っているのだから、この期待値が0となるのは最初からトリビアルであるのである。さらに、一般には $\langle\hat{a}_0\rangle \neq \langle\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0\rangle = N_0$ である。そもそも、$\langle\rangle$ がどんな粒子描像について取られた平均値なのかということも明らかではない。

筆者は、この定理がU(1)ゲージ対称性の自発的破れを否定するものである以上、つぎのような手続きを踏むべきではないかと考える。つまり凝縮相の存在を仮定しておいて場の演算子をc数から展開し、オーダーパラメタが現れる粒子描像を明確にしたうえで、そこから矛盾を導き、背理法的に凝縮体の存在を否定するべきである。講演では以上の視点にかんがみ、論理的に破たんのないようにピタエフスキー＝ストリンガリの定理の再証明を試みた。そして以下のような結論を得た。すなわち $p = 0$ のコヒーレント状態を

$$|0(\theta)\rangle \equiv \exp(-\frac{1}{2}N_c)\exp(\sqrt{N_c}\hat{a}_0^\dagger)|0\rangle \tag{3}$$

のように定義してその真空 $|0(\theta)\rangle$ による平均を $\langle\rangle$ とした時、平坦な一次元Bose系では

$$n_p \geq \frac{Mc}{N}\frac{|\langle\sqrt{N_c}\delta_{p0}\rangle|^2}{p} - \frac{1}{2} \ \ (p \to 0) \tag{4}$$

でなくてはならないことが示される。上の式で N_c は存在を仮定された凝縮粒子数である。また δ_{p0} は同じく存在を仮定された凝縮体が存在する一次元領域のスケールを L_c としたときに、幅 $1/L_\mathrm{c}$ の領域で大きさ L_c、をとるような関数である。上の不等式を長波極限 $p < 1/L_\mathrm{c}$ の領域で辺々を積分すると、非凝縮粒子数はまたも発散することが分かる。これはとりもなおさず、仮定に反して $N_c = 0$ でなくてはならないことを意味しており、一次元系に特有の強い量子揺らぎにより、最小不確定なコヒーレント状態を維持することが出来ず、系は通常の粒子数状態にならざるを得ないことを意味しているのである。

参考文献

[1] P. C. Hohenberg: Phys.Rev. **158** (1967) 383.

[2] N. D. Mermin, H. Wagner: Phys. Rev. Lett. **17** (1966) 1133.

[3] E. H. Lieb and W. Liniger: Phys. Rev. **130** (1963) 1605.

[4] F. D. M. Haldane: Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 1840.

[5] O. Penrose and L. Onsager: Phys. Rev. A **104** (1956) 576.

[6] L. Pitaevskii and S. Stringari: J. Low. Temp. Phys **85** (1991) 377.