

Early onset problem in low temperature finite density QCD

永田桂太郎
広島大学情報メディア教育研究センター

Abstract

ゼロ温度有限密度 QCD の解析にはクォーク数密度が $\mu = m_\pi/2$ 程度から上昇する”early onset”と呼ばれる問題が存在する. フェルミオン行列式の縮約公式を用いて零温度極限を取るアイデアを導入し, $T = 0$ でクォーク化学ポテンシャルが小さい場合のクォーク数密度を考察する.

1 はじめに

温度が低くクォーク化学ポテンシャル μ が小さい QCD の系を考える. 経験的にこの系は希薄なバリオンのガスとなると考えられる. $T = 0$ では化学ポテンシャルがある閾値を越えるまでフェルミ粒子は励起されないので, バリオン数密度は零に留まりその閾値は $3\mu = \mu_B \sim M_N$ となるはずである. 一方, 問題をクォークレベルから考えた場合, ナイーブに考えれば μ がクォーク質量 (m_q) を超えるときにクォークの励起がおきてもよい. $0 \leq \mu \leq M_N/3$ においてクォーク化学ポテンシャルの効果を抑制し, 希薄なバリオンのガスがどのように実現されるかは非自明な問題である.

大正準集団に基づく格子 QCD 計算では, クォーク化学ポテンシャルがパイオン質量の半分を超える ($\mu = m_\pi/2$) ところでクォーク数密度の増加が起きることが報告されている. これはバリオンガスの描像から期待される $\mu_B = M_N$ と inconsistent であり, early onset の問題と呼ばれている [1, 2, 3, 4].

クォークの化学ポテンシャルを導入したにもかかわらず, $\mu = m_q$ ではなく $\mu = M_N/3$ まで化学ポテンシャルの効果が生じない現象は [5] で”Silver Blaze”と呼ばれている. Cohen はアイソスピン化学ポテンシャル ($\mu_u = -\mu_d$) の場合にパイオン凝縮相への相転移が $\mu = m_\pi/2$ で起きることからクォークの最低励起エネルギー¹が $m_\pi/2$ であることを指摘し, それにより $T = 0, \mu < m_\pi/2$ において化学ポテンシャル依存性が生じないことが説明した [5]. クォーク化学ポテンシャル ($\mu_u = \mu_d$) の場合は [6] で研究されている.

格子 QCD の計算 [1, 2, 3, 4] で起きた early onset の問題が格子上の系統誤差に起因しているのか, 或いは物理的な問題なのかは符号問題のためはっきりしなかった. 一方, [5, 6] ではクォークのエネルギースペクトルは実際には計算されていないため QCD に基づく定量的な検証が必要である. しかし, 数値計算と理論的な考察両面でコンシステントな結果が得られているため, early onset の問題は単に数値計算上の問題ではなく冒頭で述べた零温度 QCD の物理的な問題と捉えてよいと思う.

最近の研究 [7] で, 我々はフェルミオン行列式の縮約公式を用いて early onset の問題を考察した. 縮約公式に関する最近の知識 [8] を利用して, クォーク行列式の零温度極限を取るアイデアを導入し, $T = 0, \mu < m_\pi/2$ でクォーク数密度が零であるという結論を得た. 得られた結果は [1, 2, 3, 4, 5, 6] と同じものであるが, 縮約行列の性質を利用した新しい手法を用いている.

¹ $\gamma_0(D + m)$ の最小固有値

本稿では [7] で用いた格子 QCD の低温極限を取るアイデアを紹介し, それを用いて early onset の問題の発生原因を考察する. 以下の議論では $\mu < m_\pi/2$ に注目する.

2 フェルミオン行列式の縮約公式

はじめにフェルミオン行列式の縮約公式を導入する. フェルミオン行列式は時空, カラー, ディラックの添字を持つ多次元行列式であるが, その時間成分を解析的に実行する縮約公式がスタaggeredフェルミオンと Wilson フェルミオンに対して導出されている [8]. 以下では Wilson フェルミオンを考える. Wilson フェルミオン行列を Δ とすると, 縮約公式は

$$\det \Delta(\mu) = C_0 \xi^{-N_{\text{red}}/2} \det(Q + \xi), \quad (1)$$

で与えられる. ここで, C_0 はあるスカラー量, $\xi = \exp(-\mu/T)$ はフガシテイ, $N_{\text{red}} = 4N_c N_s^3$ である. Q は縮約行列と呼ばれ, Wilson フェルミオンの場合は以下の式で定義される

$$Q = (\alpha_1^{-1} \beta_1) \cdots (\alpha_{N_t}^{-1} \beta_{N_t}), \quad (2)$$

ここで

$$\alpha_i = B(t_i) r_- - 2\kappa r_+, \quad (3)$$

$$\beta_i = (B(t_i) r_+ - 2\kappa r_-) U_4(t_i). \quad (4)$$

$B(t_i)$ は Δ の時刻 t_i における対角成分, $r_\pm = (1 \pm \gamma_4)/2$, κ はホッピングパラメータである. 時間方向のリンク変数 $U_4(t_i)$ に注目すると縮約行列は $Q = \prod_{i=1}^{N_t} (\cdots) U_4(t_i)$ という形をもちており, Polyakov loop $P = \prod_{i=1}^{N_t} U_4(t_i)$ との類似があることがわかる. ただし, Q は空間方向の伝搬も含む.

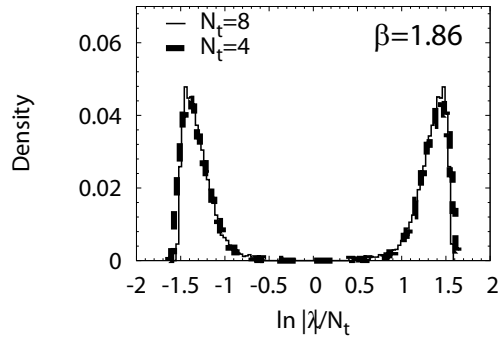


Figure 1: Q の固有値密度. 横軸は $\ln |\lambda|/N_t$. 太い点線および細い実線はそれぞれ $N_t = 4$ および $N_t = 8$ の結果. 図から固有値の3つの性質を読み取ることができる. y 軸対称性は固有値の対称性 $\lambda \leftrightarrow 1/\lambda^*$ を表す. $|\lambda| = 1$ 近傍の固有値密度がゼロの領域はギャップを表す. $N_t = 4$ と $N_t = 8$ の結果の一致は N_t についてのスケーリング則を表す. 格子計算の詳細は [8] を参照.

Q の固有値 λ_n の3つの性質 (i) 対称性, (ii) ギャップ, (iii) N_t スケーリング則を考える.

- (i) Q の2つの固有値 $\lambda_n \leftrightarrow 1/\lambda_n^*$ は対を組む. これは γ_5 -Hermite 性に基づく厳密な対称性である [9]. これに従い, 固有値は1より大きいものと, 小さいものに分類される. 以下それぞれを”大きい固有値”と”小さい固有値”と呼ぶ.
- (ii) Q の固有値分布は複素 λ 平面上の単位円近傍 $|\lambda| \sim 1$ に固有値の存在しないギャップを持つ. ギャップの大きさは単位円内の最大固有値 $\max_{|\lambda_k| < 1} \lambda_k$ によって与えられる. Gibbs によれば [10], ギャップ近傍の固有値とパイオン質量の間に

$$am_\pi = -\frac{1}{N_t} \max_{|\lambda_k| < 1} \ln |\lambda_k|^2, \quad (5)$$

の関係がある。(5)式は演算子レベルの対応で、後に Fodor, Szabo, Tóth らは熱力学的枠組みを用いて上の式が以下のように修正されることを指摘している [11]

$$am_\pi = \lim_{N_t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{N_t} \ln \left\langle \left| \sum \lambda_k \right|^2 \right\rangle \right). \quad (6)$$

ここで $\langle \cdot \rangle$ は熱平均を表す。十分低温 (大きい N_t) において $\max_{|\lambda_k| < 1} \ln \lambda_k$ が主要となり、2つの式が一致すると期待されている [11]。この点についてはまだ議論の余地があるが、 $T = 0$ においてギャップの大きさはパイオン質量と関係している。

- (iii) 最近の研究で我々は λ の N_t に関するスケーリング則を見出した。このスケーリング則は $N_t = 4, 8$ についての固有値分布の比較から得られたもので、より大きな N_t での検証が必要である。しかしながら、 Q の定義 (2) 式や縮約行列と Polyakov loop の類似からもこのスケーリング則が期待されている。

3つの性質は図1に示されている。以下ではこれらの性質を利用して議論を進める。

3 $T = 0$ でのクォーク数密度

縮約公式と固有値 λ の性質を利用してクォーク数密度を考える。クォーク数密度演算子は $\hat{n} = [V_s^{-1} T (\partial/\partial \mu) \det \Delta(\mu)] / \det \Delta(\mu)$ で与えられる。簡単な計算の後、

$$\hat{n} = \sum_{n=1}^{N_{\text{red}}/2} \left(\frac{\lambda_n \xi^{-1}}{1 + \lambda_n \xi^{-1}} - \frac{\lambda_n^* \xi}{1 + \lambda_n^* \xi} \right), \quad (7)$$

を得る。ここで和は小さい固有値のみについて取る。大きい固有値からの寄与は対称性 (i) を利用して小さい固有値で表してある。 N_t スケーリング則を用いて小さい固有値を $\lambda_n = \exp(-\epsilon_n a N_t + i\theta_n)$ とパラメトライズする。ここで $T = 1/(aN_t)$ より、 $\lambda_n = \exp(-\epsilon_n/T + i\theta_n)$ と書くことが出来る。このとき、数密度演算子は

$$\hat{n} = \sum_{n=1}^{N_{\text{red}}/2} \left(\frac{1}{1 + e^{(\epsilon_n - \mu)/T - i\theta_n}} - \frac{1}{1 + e^{(\epsilon_n + \mu)/T + i\theta_n}} \right), \quad (8)$$

と表される。

零温度 $T = 0 (N_t \rightarrow \infty)$ 低密度の場合を考える。本研究では空間体積を固定して考える。体積を固定して零温度極限をとった場合、 μ が小さければ (8) 式は零となる。 \hat{n} が零でない値をとりうるのは μ が最小の ϵ_n を超えたときであるので $\mu < \epsilon_{\min}$ の場合、 $\hat{n} = 0$ となる。(5) を用いれば、 $\epsilon_{\min} a = m_\pi a/2$ であり、したがって

$$\hat{n} = 0, \mu < m_\pi/2, \quad (9)$$

が得られる。これは $T = 0, \mu < m_\pi/2$ においてクォーク数密度は各配位毎に零であることを意味しており、その期待値 $\langle n \rangle$ も零となる。ここで、 $\mu \neq 0$ においては符号問題のため各配位毎の \hat{n} の値と期待値 $\langle n \rangle$ の関係は非自明である。(9) から $\langle n \rangle = 0$ を得ることが出来るのは μ がギャップより小さく各配位毎に $\hat{n} = 0$ となるからである。

次にこの結果の物理的な解釈を考える。(8) 式において固有値の和の記号を積分記号で表す ($\sum_{n=1}^{N_{\text{red}}/2} = \int_{|\lambda| < 1} d\lambda \rho(\lambda)$) と、

$$\hat{n} = \int_{|\lambda| < 1} d\lambda \rho(\lambda) \left(\frac{1}{1 + e^{(\epsilon - \mu)/T - i\theta}} - \frac{1}{1 + e^{(\epsilon + \mu)/T + i\theta}} \right), \quad (10)$$

が得られる. ここで $\rho(\lambda)$ は固有値密度である. 括弧内の 1 項目はクォークのフェルミ分布, 2 項目は反クォークのフェルミ分布と対応することが読み取れる. 既に述べたように縮約行列 Q は Polyakov loop P と類似した形を持っている. Polyakov loop P はクォークの自由エネルギー F と $\langle P \rangle \sim e^{-F/T}$ の関係にある. これらの対応関係から, ϵ はクォークのエネルギー準位を表していると考えられる². ϵ をクォークのエネルギー準位と考えると, ϵ_{\min} はその最低励起エネルギーに対応している. 以上から, クォークの最低励起エネルギーは $m_\pi/2$ であり, $T = 0$ で $\mu < m_\pi/2$ の領域ではクォークを励起することができず, クォーク数密度は零に留まるという結論が得られた.

4 おわりに

零温度有限密度の QCD の性質, 特にクォーク数の early onset の問題を考察した. 本研究で得られた結果は既に知られているものであるが, フェルミオン行列式の縮約公式を利用することで, 格子 QCD の零温度極限をとるアイデアやその物理的な解釈を提示した. 本研究の結果は最近の研究で得られた縮約行列の性質に基づいている. 固有値のギャップとパイオン質量の関係および N_t スケーリング則に関しては今後より現実的な格子計算での検証が必要である. また, 零温度極限を取る際に格子の空間体積を固定した. 熱力学極限とゼロ温度極限の両方を考慮することも物理的に重要である.

本研究では $\mu < m_\pi/2$ に注目した. 最後に $\mu > m_\pi/2$ の領域についての注意点を述べておく. μ が $m_\pi/2$ を超えると \hat{n} は零でない値を取りうる. しかし, \hat{n} は複素数であるため, 各配位毎に $\hat{n} \neq 0$ であってもそれは必ずしも $\langle n \rangle \neq 0$ を意味しない. 様々な配位についての相殺があれば \hat{n} を零にすることは可能である. $m_\pi/2 < \mu < M_N/3$ の領域にはそのような非自明な機構が存在すると考えられる. それがどのように実現され, early onset の問題が解決されるかは今後の課題である.

本研究は科研費 (20340055, 20105003, 23654092) に基づく研究であり, 数値計算には大阪大学の NEC-SX9 を利用した.

References

- [1] I. Barbour, S. Hands, J. B. Kogut, M.-P. Lombardo, and S. Morrison, Nucl. Phys. **B557**, 327 (1999), arXiv:hep-lat/9902033.
- [2] I. M. Barbour, S. E. Morrison, E. G. Klepfish, J. B. Kogut, and M.-P. Lombardo, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **60A**, 220 (1998), arXiv:hep-lat/9705042.
- [3] I. M. Barbour, S. E. Morrison, E. G. Klepfish, J. B. Kogut, and M.-P. Lombardo, Phys. Rev. **D56**, 7063 (1997), arXiv:hep-lat/9705038.
- [4] I. M. Barbour and A. J. Bell, Nucl. Phys. **B372**, 385 (1992).
- [5] T. D. Cohen, Phys. Rev. Lett. **91**, 222001 (2003), arXiv:hep-ph/0307089.
- [6] D. H. Adams, Phys. Rev. **D70**, 045002 (2004), arXiv:hep-th/0401132.
- [7] K. Nagata, arXiv:1204.6480.
- [8] XQCD-J Collaboration, K. Nagata, S. Motoki, Y. Nakagawa, A. Nakamura, and T. Saito, Prog. Theor. Exp. Phys. 01A103, (2012), arXiv:1204.1412, and references therein.
- [9] A. Alexandru and U. Wenger, Phys. Rev. **D83**, 034502 (2011), arXiv:1009.2197.
- [10] P. E. Gibbs, Phys. Lett. **B172**, 53 (1986).
- [11] Z. Fodor, K. Szabo, and B. Toth, JHEP **0708**, 092 (2007), arXiv:0704.2382.

²ただし, ϵ は熱平均量ではなく各配位毎の量であることと, 各配位毎に位相因子 θ が生じることに注意が必要である.