

# 一次元光学格子中における中性冷却 Bose 原子気体系の非平衡緩和過程

桑原幸朗，中村祐介，山中由也  
早大基幹理工電子光システム

## 1 はじめに

通常，熱的状況における物理量の期待値は混合状態期待値として表される．熱場の量子論に対する定式化の1つである Thermo Field Dynamics (TFD) では，ある生成消滅演算子  $a, a^\dagger$  に対して新たに  $\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$  を導入することで自由度を倍加する．これにより混合状態期待値を，熱的真空と呼ばれる純粋状態による期待値として表すことができる [1]．特に，非平衡な状況を扱う非平衡 TFD では時間依存する分布関数を未知関数として導入し，自己無撞着な繰り込み条件を課すことで量子輸送方程式が導出される [1, 2]．これまでに冷却中性原子気体系に非平衡 TFD を適用することで，non-Markov 型の量子輸送方程式が導出されることが知られている [3–6]．

しかし，非平衡 TFD から導出される量子輸送方程式を用いた非平衡緩和過程の解析において，時間依存する外場が存在するときのモデルに対しての解析はまだ十分に行われていない．そこで本稿では，時間依存する外場中の冷却 Bose 気体系に対する非平衡緩和過程を量子輸送方程式によって解析する．モデルについての詳細は次に述べる．

## 2 ハミルトニアン

弱い調和振動子ポテンシャルに閉じ込められた一次元光学格子中の冷却 Bose 気体系を考える．ただし，Bose-Einstein 凝縮していない場合を考える． $t < 0$  であらかじめ平衡状態を用意しておき， $t = 0$  で調和振動子ポテンシャルの中心を瞬間的にずらす．これにより  $t > 0$  で系は非平衡状態となる．図 1 にモデルの概略図を示す．

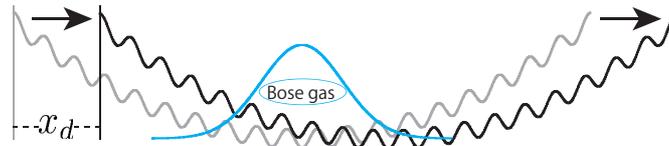


図 1 モデル概略図

上記モデルに対するハミルトニアンは，Bose-Hubbard モデルを用いて次のように記述できる [7]:

$$H(t) = H_0(t) + H_{\text{int}}(t), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} H_0(t) &= \sum_{i=1}^{I_s} \left[ -J\psi_i^\dagger(t)(\psi_{i+1}(t) + \psi_{i-1}(t)) + \{(i - I_c + \theta(-t)d)^2 V - \mu\}\psi_i^\dagger(t)\psi_i(t) \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{I_s} \psi_i^\dagger(t)h_{0,ij}(t)\psi_j(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$H_{\text{int}}(t) = \frac{U}{2} \sum_{i=1}^{I_s} \psi_i^\dagger(t) \psi_i^\dagger(t) \psi_i(t) \psi_i(t). \quad (2.3)$$

ただし,  $i$  はサイト番号を表し,  $\psi_i(t), \psi_i^\dagger(t)$  は同時刻交換関係

$$[\psi_i(t), \psi_j^\dagger(t)] = \delta_{ij}, \quad [\psi_i(t), \psi_j(t)] = 0, \quad [\psi_i^\dagger(t), \psi_j^\dagger(t)] = 0, \quad (2.4)$$

を満たす場の演算子である.  $I_s$  は全サイト数,  $I_c$  は中心サイト番号をそれぞれ表し,  $I_c = (I_s - 1)/2$  である.  $J, \mu, U, V$  はそれぞれホッピング項, 化学ポテンシャル, オンサイトの接触相互作用定数, 調和トラップの強さである. また  $d$  はトラップのずらし幅を表す量であり, 光学格子の格子間隔を  $a_{\text{opt}}$  として  $d = x_d/a_{\text{opt}}$  である. なお, ここでは粒子の移動は隣接サイトへの移動のみを考慮し, 粒子間相互作用はサイトをまたがった相互作用の効果を考えないものとする.

ここで, 式 (2.2) を自由ハミルトニアンにとり, 場の演算子を次のように Schrödinger 方程式に従う完全系  $\{v_{i\ell}(t)\}$  で展開する [5, 6]:

$$\psi_i(t) = \sum_{\ell} v_{i\ell}(t) a_{\ell}(t), \quad (2.5)$$

$$i\dot{v}_{i\ell}(t) = \sum_j h_{0,ij}(t) v_{j\ell}(t). \quad (2.6)$$

このとき, 分布関数は  $n_{\ell}(t) = \langle 0 | a_{\ell}^\dagger(t) a_{\ell}(t) | 0 \rangle$  で定義される. ただし,  $\langle 0 |, | 0 \rangle$  は TFD における熱的真空である.  $\{n_{\ell}(t)\}, \{v_{i\ell}(t)\}$  の初期条件にはトラップをずらす前の平衡状態 ( $t < 0$ ) を用いる. すなわち

$$\sum_j h_{0,ij}^d u_{j\ell} = \omega_{\ell} u_{i\ell}, \quad h_{0,ij}^d = h_{0,ij}(t) \quad (t < 0), \quad (2.7)$$

$$v_{i\ell}(0) = u_{i\ell}, \quad n_{\ell}(0) = \frac{1}{e^{\beta\omega_{\ell}} - 1}, \quad (2.8)$$

とする. ここで,  $\beta$  は逆温度である.

### 3 量子輸送方程式

前章の系に非平衡 TFD を適用し自己エネルギーに自己無撞着な繰り込み条件を課すことで non-Markov 型の量子輸送方程式

$$\begin{aligned} \dot{n}_{\ell}(t) = & 4U^2 \text{Re} \sum_{m_1 m_2 m_3} \int_{-\infty}^t ds I_{\ell m_3; m_2 m_1}(t) I_{\ell m_3; m_2 m_1}^*(s) \\ & \times [n_{m_1} n_{m_2} (1 + n_{m_3}) (1 + n_{\ell}) - (1 + n_{m_1}) (1 + n_{m_2}) n_{m_3} n_{\ell}]_s, \end{aligned} \quad (3.1)$$

が導出される [2–6]. ただし,  $I_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell_4}(t) \equiv \sum_i v_{i\ell_1}^*(t) v_{i\ell_2}^*(t) v_{i\ell_3}(t) v_{i\ell_4}(t)$  である. また,  $[\ ]_s$  は  $[\ ]$  内の分布関数が時刻  $s$  のものであることを意味する.

ここで, 式 (2.6), (3.1) を数値的に解き, 得られた  $\{n_{\ell}(t)\}, \{v_{i\ell}(t)\}$  から気体の重心を計算した結果を図 2 に示す. ただし, 気体の重心は  $N$  を全粒子数として,  $\bar{x}(t) = \sum_{i,\ell} (i - I_c) |v_{i\ell}(t)|^2 n_{\ell}(t) / N$  で計算した.  $U = 0$  では分布関数は時間発展しないため, 時間発展は完全系による式 (2.6) のみとなり緩和の様子は見ら

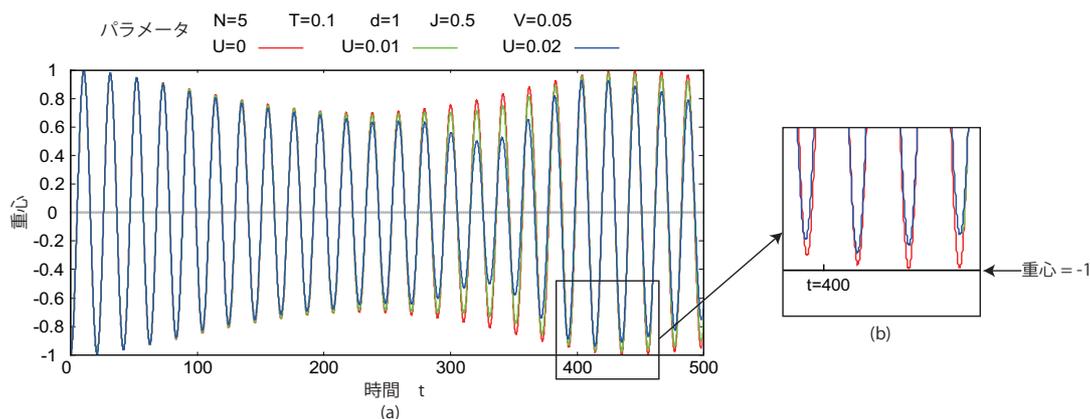


図 2 気体の重心の時間変化 (a) . 小窓はグラフの一部を拡大したものであり , 見やすさのため  $U = 0$  と  $U = 0.02$  のみを表示している (b) .

れない . 重心の振動にうなりが見られるが , このうなりは光学格子による効果である . 一方 ,  $U \neq 0$  では  $U = 0$  の結果と比べると振幅が小さくなっており , 相互作用が強いほど振幅は小さくなるのがわかる . また ,  $t = 400$  を過ぎたところに注目すると  $U \neq 0$  は  $U = 0$  と異なり重心の値が初期値に戻らないことがわかり , 式 (3.1) からの寄与による熱緩和過程の様子を確認できる (図 2(b)) .

## 4 まとめと展望

弱い調和振動子ポテンシャルに閉じ込められた一次元光学格子中の冷却 Bose 気体系においてあらかじめ平衡状態を用意しておき ,  $t = 0$  で調和振動子ポテンシャルの中心をずらすことで非平衡状態にした時間依存する外場モデルを考えた . そのモデルに対する非平衡緩和過程を非平衡 TFD から導出された non-Markov 型量子輸送方程式を用いて解析した . 気体の重心の時間変化を数値計算した結果 , 重心は振動し光学格子の効果によるうなりが見られ , 特に  $U \neq 0$  のときは熱緩和過程を確認できた . 今後の課題としては , エネルギーの繰り込みによる結果への影響を調べたり , 凝縮体がある場合への拡張などがある .

## 参考文献

- [1] H. Umezawa, *Advanced Field Theory - Micro, Macro, and Thermal Physics* (AIP, New York, 1993).
- [2] H. Chu and H. Umezawa, *Int. J. Mod. Phys. A* **10**, 163 (1995).
- [3] Y. Nakamura, T. Sunaga, M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **325**, 426 (2010).
- [4] Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **326**, 1070 (2011).
- [5] Y. Nakamura (2011). PhD Thesis, Waseda University Graduate School of Advanced Science and Engineering.
- [6] 中村祐介 , 桑原幸朗 , 山中由也 , 日本物理学会 2011 年秋季大会 , 21pEE-12 (2011).
- [7] D. Jaksh, C. Burder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998).