量子渦の非可換統計
– $SO(N)$ 対称性を持つマヨラナフェルミオン –

広野雄士 ^{A}、安井繁宏 ^{B}、板倉数記 ^{B}、新田宗土 ^{C}
東京大/理研 ^{A}、KEK^B、慶応大 ^{C}

1. はじめに

ある種の超伝導や超流動における量子渦は、内部にマヨラナフェルミオン的なゼロエネルギー束縛状態を持っている。このようなゼロエネルギー状態があると、基底状態に縮退が生じ、非可換エニオンと呼ばれる特異な統計性を持つ粒子が現れることが知られている。3+1 次元では、統計性で粒子を分類するとボソン若しくはフェルミオンの二つの可能性しかない。粒子はローレンツ群の規約表現に属することから整数または半整数のスピンを持ち、さらにスピン統計性の定理により整数（半整数）のスピンを持つ粒子はボソン（フェルミオン）であることが帰結するからである。しかし、2+1 次元ではこの限りではない。空間が 3 次元の世界では、二つの同種粒子を 2 回交換する操作が、一度も交換をしないという操作と等価であったが、空間次元が 2 のときは等価ではないからである。

2+1 次元では、ボソンとフェルミオンに加えて、同種粒子の交換に際して任意の位相がつく（可換）エニオンの存在も理論的に可能である。そして、複数の縮退した状態を持ち、それらの状態が交換操作の下で行列によって変換を受けるのが非可換エニオンである。変換行列は一般には非可換なので、渦の交換順序に依存して終状態が変わる、ということが有り得る。これは可換エニオンや通常のボソン・フェルミオンでは起こり得ない、特異な性質である。このように非可換エニオンは理論的に興味深いが、応用面でもトポロジカルな量子計算をするためのプラットフォームとなることがわかっており、理論と実験の両面において現在研究が盛んである [1]。

この非可換エニオンを実現する物理系の候補として、マヨラナフェルミオンを内部に持つ超伝導渦がある。この系が非可換統計を示すことは Ivanov [2] によって 2002 年に初めて指摘された。一方で、カラー超伝導や超対称 QCD に現れる量子渦内には複数のマヨラナフェルミオンが束縛される場合がある。本研究の目的は、複数個、特に奇数個のマヨラナフェルミオンを束縛した量子渦の量子統計の性質を明らかにすることである。カラー超伝導における量子渦は、$N = 3$ の実現例となる。我々は、奇数個のマヨラナフェルミオンを内部に持つ量子渦の示す非可換統計性が、交換する渦の数や N の値に依存しない、ある普遍的な構造を持つことを示した。本稿ではその主な結果を記す。導出や詳細については論文 [3] を参照のこと。

2. 超伝導量子渦と非可換統計

$2m$ 個の量子渦が z 軸に平行に延びている状況を考える。系は z 方向に並進対称であるとし、k 番目と $k+1$ 番目の渦を反時計周りに交換する操作を T_k と呼ぶことにする。任意の渦同士の交換は、隣り合う渦同士の交換 T_k の組み合わせによって実現することができる。z 方向の対称性から系は 2 次元空間と見なすことができる。どちら周りに交換するかが区別される、すなわち $T_k \neq (T_k)^{-1}$ であることに注意。k 番目の渦に束縛されたマヨラナフェルミオンを演算子 γ_k^a とする ($k = 1 \sim 2m, a = 1 \sim N$)。本研究では N 個のフェルミオンが一つの渦内にる場合を考えるのだが、それを表すのが添字 a である。これらのフェルミオン演算子 γ_k^a はクリフォード代数 $\{\gamma_k^a, \gamma_l^b\} = 2\delta^{ab}\delta_{kl}$ を満たしており、さらに渦

の交換操作 T_k の下で

$$T_k : \begin{cases} \gamma_k^a & \to \gamma_{k+1}^a \\ \gamma_{k+1}^a & \to -\gamma_k^a \end{cases} , \quad \text{for all } a, \tag{1}$$

のように変換する。負符号がつくのは、渦の存在下でフェルミオンの波動関数が 2 価になることに由来する。フェルミオン演算子を式 (1) のように変換する演算子を、次のように書くことができる。

$$\tau_k^{[N]} \equiv \prod_{a=1}^{N} \tau_k^a, \tag{2}$$

ここで τ_k^a は次式で定義されている。

$$\tau_k^a \equiv \exp\left(\frac{\pi}{4}\gamma_{k+1}^a\gamma_k^a\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\gamma_{k+1}^a\gamma_k^a\right). \tag{3}$$

この交換演算子 $\tau_k^{[N]}$ 同士が、$k \neq \ell$ の場合に非可換になり得ることを見るためには、明示的にヒルベルト空間を構成し、交換演算子を行列表示してみればよい。ヒルベルト空間を同定するのに、二つの渦にあるマヨラナフェルミオンを次のように組み合わせてディラック演算子を構成すると便利である。

$$\Psi_K^a \equiv \frac{1}{2}(\gamma_{2K-1}^a + i\gamma_{2K}^a). \tag{4}$$

このように定義したディラック演算子は通常のディラックフェルミオンの反交換関係を満たす。したがって、

$$\Psi_K^a|0\rangle = 0 \quad \text{for all } a \text{ and } K, \tag{5}$$

によって ” 真空 ” 状態 $|0\rangle$ を定義し、$|0\rangle$ に対して生成演算子を作用するという通常の手続きによりヒルベルト空間の基底を作ることが出来る。

3. 交換演算子の分解

任意の N（奇数）の場合において、式 (2) で書かれる交換演算子は、次のように二つの演算子の積に分解出来ることを示すことが出来る。

$$\tau_k^{[N]} = \sigma_k^{[N]} h_k^{[N]}. \tag{6}$$

ここで $\sigma_k^{[N]}$ と $h_k^{[N]}$ は次のように定義されている。

$$\sigma_k^{[N]} \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{N-1}\left(1+\Gamma_k^{(2)}+\Gamma_k^{(4)}+\cdots+\Gamma_k^{(N-1)}\right), \tag{7}$$

$$h_k^{[N]} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\Gamma_k^{(N)}\right). \tag{8}$$

上記では、表記の簡略化のために次式で定義される記号 $\Gamma_k^{(n)}$ を用いた。

$$\Gamma_k^{(n)} \equiv \frac{1}{(n!)^2} e^{\frac{\pi}{2}i(n-1)} \epsilon^{a_1\cdots a_N}\epsilon^{b_1\cdots b_N}\,\delta_{b_{n+1}}^{a_{n+1}}\cdots\delta_{b_N}^{a_N}\,\gamma_{k+1}^{a_1}\cdots\gamma_{k+1}^{a_n}\,\gamma_k^{b_1}\cdots\gamma_k^{b_n}. \tag{9}$$

$\epsilon^{a_1 \cdots a_N}$ は N 階の完全反対称テンソルである。

交換演算子を分解して現れる二つの演算子 $h_k^{[N]}$ と $\sigma_k^{[N]}$ はそれぞれ意味を持っている。演算子 $h_k^{[N]}$ は、Ivanov によって議論された、一つの渦内に束縛されるフェルミオン数が 1 個の場合の演算子と等価であることを示すことが出来る。一方、$\sigma_k^{[N]}$ は対称群の生成元である。すなわち、対称群の生成元が満たすべき以下の関係式、

$$
\begin{aligned}
(\sigma_k^{[N]})^2 &= 1, & (10)\\
(\sigma_k^{[N]}\sigma_l^{[N]})^3 &= 1 \quad \text{for} \quad |k-l| = 1, & (11)\\
(\sigma_k^{[N]}\sigma_l^{[N]})^2 &= 1 \quad \text{for} \quad |k-l| > 1, & (12)
\end{aligned}
$$

を $\sigma_k^{[N]}$ が満足することを示せる。

さらに、交換演算子を行列表示した場合に、ある基底を取るとその表現行列が、渦上のフェルミオンが一個の場合の交換演算子の表現行列と、対称群の生成子の表現行列とのテンソル積で与えられることを示すことが出来る。

参考文献

[1] レビューとして、 C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman and S. Das Sarma, Rev. Mod. Phys. **80**, 1083 (2008) [arXiv:0707.1889 [cond-mat.str-el]].
[2] D. A. Ivanov, Phys. Rev. Lett. **86**, 268 (2001) [arXiv:cond-mat/0005069 [cond-mat.supr-con]].
[3] Y. Hirono, S. Yasui, K. Itakura and M. Nitta, Phys. Rev. B **86**, 014508 (2012) [arXiv:1203.0173 [cond-mat.supr-con]].