重イオン衝突に於ける相対論的 “揺動” 流体 ～因果律と記憶効果と有色雑音～

村瀬功一[1]、平野哲文[2]
東京大学 大学院理学系研究科[1]、上智大学 理工学部[2]

1 はじめに

クォークとグルーオンから成る系を数兆度の高温に熱すると、クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) ができると考えられている。この QGP は高エネルギー重イオン衝突によって生成され [1]、その輸送的性質が調べられている。相対論的重イオン衝突加速器 (RHIC) では粒子分布の二次の異方性 v_2 において完全流体模型が予想する値に近い値が得られ、強結合の QGP が生成されているという描像が確立した [2, 3, 4]。

最近では、RHIC や近年動き出した大型ハドロン衝突型加速器 (LHC) で、粒子の方位角分布の高次調和成分 v_n $(n > 2)$ が測られ、事象毎の揺らぎを考えなければ説明の付かない値が得られている。原子核同士の衝突時に初期条件に入る、核子分布に由来する揺らぎによって、v_n の振る舞いを説明できる事が事象毎のシミュレーションによって分かって来ており、最近はこの初期の揺らぎと終状態の v_n について活発に研究されている。例えば、これらの v_n の値から初期条件の模型と QGP の比粘性係数 η/s を制限しようという試みが為されている。

しかし、事象毎の揺らぎは、初期条件の核子分布だけでなく、QGP の時空発展中に生じる熱揺らぎである流体力学的揺らぎ (hydrodynamic fluctuation[5]) などによっても引き起こされる [6]。流体力学的揺らぎは、初期の揺らぎと同様に測定量 v_n に影響を与える可能性があり、定量的に η/s などの輸送的性質を決定する為には、この流体力学的揺らぎの効果も定量的に評価する必要があると考えている。現状の相対論的流体模型に流体力学的揺らぎを取り入れる為に、本研究では因果律を満たす二次 (または高次) の相対論的散逸流体に対して、二次 (高次) の相対論的揺動流体力学 (relativistic fluctuating hydrodynamics) を構築する。

2 記憶関数と揺動散逸関係

流体力学的揺らぎは、流体の散逸流場に対して空間の各点で独立に発生する熱揺らぎである。状態方程式や構成方程式で記述される散逸流場の値は平均的な成分に過ぎない。流体力学の様な有限の長さスケールを持つ系においては、各事象毎に熱揺らぎがこの平均からのずれとして発生する。流体力学的揺らぎの強度スペクトルは、ブラウン粒子の揺動力の時と同様に、揺動散逸関係によって構成方程式に含まれる散逸と関係付けられる。

数値計算では、試行毎 (事象毎) に異なる確率過程として流体力学的揺らぎを乱数で決定して計算を行う。即ち、流体方程式はもはや決定論的な偏微分方程式ではなく、Langevin 方程式の様な確率微分方程式となる。

構成方程式に対応する流体力学的揺らぎの強度を調べる為に、先ず構成方程式を散逸流に対して陽な形で書き表す。

$$\Pi = -\int_{x^0>x'^0} \mathrm{d}^4x' G_\Pi(x-x')\theta(x') + \delta\Pi, \tag{1}$$

$$\pi^{\mu\nu} = \int_{x^0>x'^0} \mathrm{d}^4x' G_\pi(x-x')^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_{\langle\alpha}u_{\beta\rangle}|_{x'}) + \delta\pi^{\mu\nu}, \tag{2}$$

$$\nu_i^\mu \;=\; -\int_{x^0>x'^0} \mathrm{d}^4x' G_{ij}(x-x')^{\mu\alpha}(T\nabla_\alpha \tfrac{\mu_j}{T}|_{x'}) + \delta\nu_i^\mu. \tag{3}$$

但し、$u^\mu(x)$ は Landau フレームでの四元速度で、$T(x)$ および $\mu_i(x)$ は各点 x の局所平衡系における温度と保存電荷 i の化学ポテンシャルである。また、散逸流 $\Pi(x)$, $\pi^{\mu\nu}(x)$, $\nu_i^\mu(x)$ はそれぞれ、体粘性による圧力の補正、ずれ粘性による偏差応力、保存電荷 i の拡散である。構成方程式は平衡近くでは、この様に現在および過去の熱力学的力と記憶関数 $G(x-x')$ の畳み込みである平均的な成分と、流体力学的揺らぎ $\delta\Pi(x)$, $\delta\pi^{\mu\nu}(x)$, $\delta\nu_i^\mu(x)$ の和で書かれる。

流体力学的揺らぎの強度は揺動散逸関係によって以下の形に決定される。

$$\langle\delta\Pi(x)\delta\Pi(x')\rangle \;=\; TG_\Pi(x-x'), \tag{4}$$

$$\langle\delta\pi^{\mu\nu}(x)\delta\pi^{\alpha\beta}(x')\rangle \;=\; TG_\pi(x-x')^{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{5}$$

$$\langle\delta\nu_i^\mu(x)\delta\nu_j^\alpha(x')\rangle \;=\; TG_{ij}(x-x')^{\mu\alpha}. \tag{6}$$

ここで、記憶関数 $G(x)$ は時刻について偶関数となる様に $x^0<0$ の領域に拡張した物とする。

一次の散逸流体の場合は、$G_\Pi(x) = 2\zeta\delta^{(4)}(x)$, $G_\pi(x)^{\mu\nu\alpha\beta} = 4\eta\delta^{(4)}(x)\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}$, $G_{ij}(x)^{\mu\alpha} = -2\kappa_{ij}\delta^{(4)}(x)\Delta^{\alpha\beta}$ に対応する。但し、$\Delta^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - u^\mu u^\nu$, $\Delta^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Delta^{\mu\alpha}\Delta^{\nu\beta} + \Delta^{\mu\alpha}\Delta^{\nu\beta}) - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta^{\alpha\beta}$ は各散逸流の空間への射影子である。この時、記憶関数は時間について局所的であり、構成方程式は現在の熱力学的力で書かれる。従って、流体力学的揺らぎの時間相関は同時刻のみで非零であり、即ち流体力学的揺らぎは白色雑音 (white noise) となる。

3　二次の散逸流体の場合

しかし、一次の散逸流体は長波長で因果律を破る解を持つ事が知られている [7] 為、相対論的流体模型においては好ましくない。因果律を守る為には、緩和時間の効果を持つ二次または高次の散逸流体が必要である。

ここでは、因果律を守る最も簡単な二次の構成方程式として、以下の物を考える。

$$\tau_\Pi \mathrm{D}\Pi + \Pi \;=\; -\zeta\theta, \tag{7}$$

$$\tau_\pi \Delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\mathrm{D}\pi^{\alpha\beta} + \pi^{\mu\nu} \;=\; 2\eta\partial^{\langle\mu}u^{\nu\rangle}, \tag{8}$$

$$\tau_{ij}\Delta^\mu{}_\alpha \mathrm{D}\nu_j^\alpha + \nu_i^\mu \;=\; \kappa_{ij}T\nabla^\mu\frac{\mu_j}{T}. \tag{9}$$

但し、$\mathrm{D} = u^\alpha\partial_\alpha$ は物質と共に動く系での時間微分である。この構成方程式を陽な形に解くと記憶関数は以下の様になる。

$$G_\Pi(x-x') \;=\; \delta^{(3)}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}')|\tfrac{\partial\sigma^\mu}{\partial x^\nu}|\Theta(\tau-\tau')\cdot\tfrac{1}{\tau_\Pi}e^{-\frac{\tau-\tau'}{\tau_\Pi}}\zeta, \tag{10}$$

$$G_\pi(x-x')^{\mu\nu\alpha\beta} \;=\; \delta^{(3)}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}')|\tfrac{\partial\sigma^\mu}{\partial x^\nu}|\Theta(\tau-\tau')\cdot\tfrac{1}{\tau_\pi}e^{-\frac{\tau-\tau'}{\tau_\pi}}\cdot 2\eta\Delta(\tau;\tau')^{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{11}$$

$$G_{ij}(x-x')^{\mu\alpha} \;=\; \delta^{(3)}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}')|\tfrac{\partial\sigma^\mu}{\partial x^\nu}|\Theta(\tau-\tau')\cdot\tau_{ij}^{-1}[\mathrm{T}e^{-\int_{\tau'}^{\tau}\mathrm{d}\tau''\tau_{jk}^{-1}|_{\tau''}}]_{jk}\kappa_{kl}\Delta(\tau;\tau')^{\mu\alpha}. \tag{12}$$

但し、τ と $\boldsymbol{\sigma}$ は物質と共に動く座標系での時刻と座標であり、

$$\Delta(\tau_\mathrm{f};\tau_\mathrm{i})^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \;:=\; \lim_{N\to\infty}\Delta(\tau_\mathrm{f})^{\mu\nu}_{\alpha_0\beta_0}\Big[\textstyle\prod_{k=0}^{N-1}\Delta(\tau_\mathrm{f}+\frac{\tau_\mathrm{i}-\tau_\mathrm{f}}{N}k)^{\alpha_k\beta_k}_{\alpha_{k+1}\beta_{k+1}}\Big]\Delta(\tau_\mathrm{i})^{\alpha_N\beta_N}_{\alpha\beta}, \tag{13}$$

$$\Delta(\tau_\mathrm{f};\tau_\mathrm{i})^{\mu}_{\alpha} \;:=\; \lim_{N\to\infty}\Delta(\tau_\mathrm{f})^{\mu}_{\alpha_0}\Big[\textstyle\prod_{k=0}^{N-1}\Delta(\tau_\mathrm{f}+\frac{\tau_\mathrm{i}-\tau_\mathrm{f}}{N}k)^{\alpha_k}_{\alpha_{k+1}}\Big]\Delta(\tau_\mathrm{i})^{\alpha_N}_{\alpha} \tag{14}$$

は、τ' から τ の各時刻で散逸流の空間に射影するテンソルとなっている。また $\mathrm{T}e^{-\int_{\tau'}^{\tau}\mathrm{d}\tau''\tau_{jk}^{-1}|_{\tau''}}$ は時間順序積による指数関数である。

時間相関に着目すると何れも指数関数的な減少 $\frac{1}{\tau_{\mathrm{r}}}e^{-\frac{\tau-\tau'}{\tau_{\mathrm{r}}}}$ の形になっている。一般に因果律を保持する高次の散逸流体の場合、この様に記憶関数 $G(x)$ は異なる時間に対して非零の値を持つ、即ち記憶効果が存在する。これに伴って、流体力学的揺らぎも異なる時刻間について非零の相関 $TG(x)$ を持ち、流体力学的揺らぎは有色雑音 (colored noise) となる。

4 まとめと展望

相対論的な系で散逸とそれに対応する流体力学的揺らぎを取り扱う場合、因果律を保持する為に緩和時間を考慮に入れなければならない。この時、構成方程式は現在及び過去の熱力学的力に対する応答で書かれ、その応答関数は記憶関数と呼ばれる。流体力学的揺らぎの強度は揺動散逸関係によってこの記憶関数を用いて表され、一般に異なる時刻の間で流体力学的揺らぎに相関がある事が分かる。つまり、流体力学的揺らぎは白色雑音ではなく有色雑音として計算に取り入れる必要がある。

また、QGP の時空発展の途中に現れる熱揺らぎである流体力学的揺らぎは、初期の揺らぎと同様に事象毎の計算で測定量 v_n に影響を与えうる。定量的に η/s などの輸送的性質を決定する際には、この流体力学的揺らぎの効果を考慮に入れて事象毎の計算をし、その影響の大きさを見積もる必要がある。今後は、簡単な二次の構成方程式の下で、相対論的流体模型の数値計算の枠組に散逸と流体力学的揺らぎを実装し、実際に事象毎の計算によって流体力学的揺らぎの v_n に対する影響を調べる。

参考文献

[1] I. Arsene *et al.* [BRAHMS Collaboration], Nucl. Phys. A **757**, 1 (2005); B. B. Back *et al.* [PHOBOS Collaboration], Nucl. Phys. A **757**, 28 (2005); J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], Nucl. Phys. A **757**, 102 (2005); K. Adcox *et al.* [PHENIX Collaboration], Nucl. Phys. A **757**, 184 (2005).

[2] P. F. Kolb, P. Huovinen, U. W. Heinz and H. Heiselberg, Phys. Lett. B **500**, 232 (2001); P. Huovinen, P. F. Kolb, U. W. Heinz, P. V. Ruuskanen and S. A. Voloshin, Phys. Lett. B **503**, 58 (2001); P. F. Kolb, U. W. Heinz, P. Huovinen, K. J. Eskola and K. Tuominen, Nucl. Phys. A **696**, 197 (2001).

[3] D. Teaney, J. Lauret and E. V. Shuryak, Phys. Rev. Lett. **86**, 4783 (2001); nuclth/0110037.

[4] T. Hirano, Phys. Rev. C **65**, 011901 (2002); T. Hirano and K. Tsuda, Phys. Rev. C **66**, 054905 (2002).

[5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, New York, 1959).

[6] J. I. Kapusta, B. Muller and M. Stephanov, Phys. Rev. C **85**, 054906 (2012) [arXiv:1112.6405 [nucl-th]]; Acta Phys. Polon. B **43**, 781 (2012) [arXiv:1201.3405 [nucl-th]].

[7] W. A. Hiscock and L. Lindblom, Phys. Rev. D **31**, 725 (1985).