PNJL 模型によるメソンガスの状態方程式

山崎加奈子, 松井哲男
東大駒場

1 導入

QCD 相図を解明することは、QCD の重要な課題の一つである。相図の理解には、カイラル相転移と非閉じ込め相転移が相図上のどこで起こるかを調べることが不可欠である。そのための第一歩として、本研究では有効模型を用いゼロ密度で状態方程式の計算を行った。我々は、有効模型を用いてこれらの相転移を計算した。この二つの相転移を取り扱うことの出来る有効模型として、Nambu-Jona-Lasinio model with Polyakov loop (PNJL 模型)[1] を用いた。PNJL 模型は、カイラル相転移を特徴づけるカイラル凝縮と非閉じ込め相転移を特徴づける Polyakov loop の期待値を持つことで、これら二つの相転移を同時に計算することが出来る。しかし、もし我々が平均場近似を行った場合、低温相でメソンやバリオンを取り扱うことが出来ない。そこで本研究ではメソン励起を取り込んだ計算を行った。

2 PNJL 模型

修正された NJL 模型の分配関数は以下のように定義される。

$$Z(T,A_4)=\int[d\bar{q}][dq]\mathrm{exp}\Big[\int_0^\beta d\tau\int d^3x\mathcal{L}_{NJL}(q,\bar{q},A_4)\Big] \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_{NJL}(q,\bar{q},A_4)=\bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu-m_0)q+G\big[(\bar{q}q)^2+(i\bar{q}\gamma_5\tau q)^2\big] \tag{2}$$

この Lagrangian は、NJL 模型 [2, 3] の Lagrangian とは異なりゲージ場の第 4 成分を含む。この模型ではグルーオンはダイナミカルな自由度としてではなく、単なる外場として扱われる。この分配関数は、クォーク場の 4 次の項を含むため、このままでは積分を実行することが出来ない。そこで、補助場としてボソン場 ϕ をガウス積分の形で導入する。積分測度を適当に選ぶことで、クォーク場の 4 次の項を打ち消すことができ、フェルミオン積分の実行が可能となる。$q,\bar{q}$ がグラスマン数であることに注意し、フェルミオン場についての積分を実行すると、有効作用 I が補助場として導入したメソン場 ϕ とゲージ場の第 4 成分の関数として得られる。メソン励起からの寄与を計算するために、有効作用をボソン場の揺らぎの二次まで展開し、揺らぎについて積分することで熱力学ポテンシャルを得る。

$$\Omega(T,A_4)=T\Big(I_0+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_M\ \ln\frac{\delta^2 I}{\delta\phi_i\delta\phi_j}\Big) \tag{3}$$

第一項目は平均場からの寄与、第二項目はメソン励起からの寄与である。

3 状態方程式

3.1 平均場近似

圧力への平均場近似からの寄与は、式 (3) の第一項目から求まる。I_0 はゲージ場の関数だが、ゲージ場について統計平均を取ることで、Polyakov loop の期待値で書き直すことができ、温度と Polyakov loop の関数として状態方程式が得られる。

$$p_{MF}(T,\Phi) = p^0_{MF}(M_0) + 4\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p^2}{3E_p} f_\Phi(E_p) - \mathcal{U}(T,\phi) \tag{4}$$

M_0 は構成クォーク質量、E_p はクォークのエネルギーで $E_p = \sqrt{p^2+M_0^2}$、f_Φ は Polyakov loop の期待値 Φ の関数として書かれたフェルミ分布関数である。第一項目は真空の圧力、第二項目は熱励起からの寄与、第三項目の $\mathcal{U}$ は、グルーオンのダイナミクスを表すために導入された有効ポテンシャルで、各パラメーターは $T=0$ で $\Phi=0$ を満たし、高温でグルーオンの圧力を再現するように選ばれる。

3.2 メソン励起

メソン励起の圧力への寄与は、式 (3) の二項目から計算される。

$$p_M(T,A_4) = -\frac{T}{2}\sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\Big\{\ln\big[\beta^2\big(\frac{1}{2G} - \Pi_\sigma(\omega_n,q,A_4)\big)\big] + 3\ln\big[\beta^2\big(\frac{1}{2G} - \Pi_\pi(\omega_n,q,A_4)\big)\big]\Big\} \tag{5}$$

式 (5) はメソンの松原周波数についての和と、メソンの運動量についての積分を含む。第一項目はシグマメソンの寄与、第二項目はパイオンの寄与で、二項目のファクター 3 はパイオンの縮退度である。ギャップ方程式を用いると、

$$\frac{1}{2G} - \Pi_\pi(\omega_n,q,A_4) = (\omega_n^2+q^2)F(\omega_n,q,A_4) + \frac{m_0}{2GM_0} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}F(\omega_n,q,A_4) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p 2E_{p+q}}\Big[&\Big(\frac{1}{\omega+E_p-E_{p+q}} - \frac{1}{\omega-E_p+E_{p+q}}\Big)\mathrm{tr}_c\big(f(E_p-igA_4) - f(E_{p+q}-igA_4)\big)\\ &+\Big(\frac{1}{\omega+E_p+E_{p+q}} - \frac{1}{\omega-E_p-E_{p+q}}\Big)\mathrm{tr}_c\big(1 - f(E_p-igA_4) - f(E_{p+q}-igA_4)\big)\Big]\end{aligned} \tag{7}$$

と書ける。ここで関数 $F(\omega_n,q,A_4)$ は non-collective mode を表す関数である。シグマメソンについても、質量の違いを除いて、同様の書き換えが出来る。第一項目は collective mode と non-collective な個別励起で構成されており、第二項目は裸のクォーク質量に比例する。従ってカイラル極限では、第二項目は消え、かつ $\frac{1}{2G}-\Pi$ が log の引数であるので、collective mode と non-collective mode を分離することができ、それぞれの圧力への寄与を別々に計算出来る。数値計算の結果、collective mode が主に圧力に寄与し、non-collective mode からの寄与は非常に小さい。クォークが質量を持つ場合、このような分離は出来ないが、$\mathcal{M}_1 \equiv \mathrm{Re}\Big[\frac{1}{2G}-\Pi\Big] = 0,\ \mathcal{M}_2 = \mathrm{Im}\Big[\frac{1}{2G}-\Pi\Big] = 0$ を計算することで、メソンポールの有無を計算出来る。

4 数値計算

図 1 は、$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ を ω/q の関数としてプロットした図である (ω はメソンのエネルギー、q はメソンの運動量)。$T<T_c$ では $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ ともにゼロになる点が time-like 領域に存在し、この点がメソンポールに対応する。一方 $T>T_c$ では、$\mathcal{M}_1$ は常に正であり、低温で $\mathcal{M}_2$ がゼロであった領域も無くなる。このことは、高温でメソンポールが個別励起の continuum に飲み込まれ無くなったことを意味している。

図 2 は圧力を温度の関数としてプロットした図である。赤い線が平均場の寄与にメソン励起の寄与を加えた圧力、青い線が平均場の寄与だけを含んだ圧力である。平均場のみの計算では、低温では Polyakov loop によってクォークの単独の励起が抑えられるため圧力はほぼゼロであるのに対し、メソン励起を取り込んだ計算では、メソンが圧力に寄与していることがわかる。

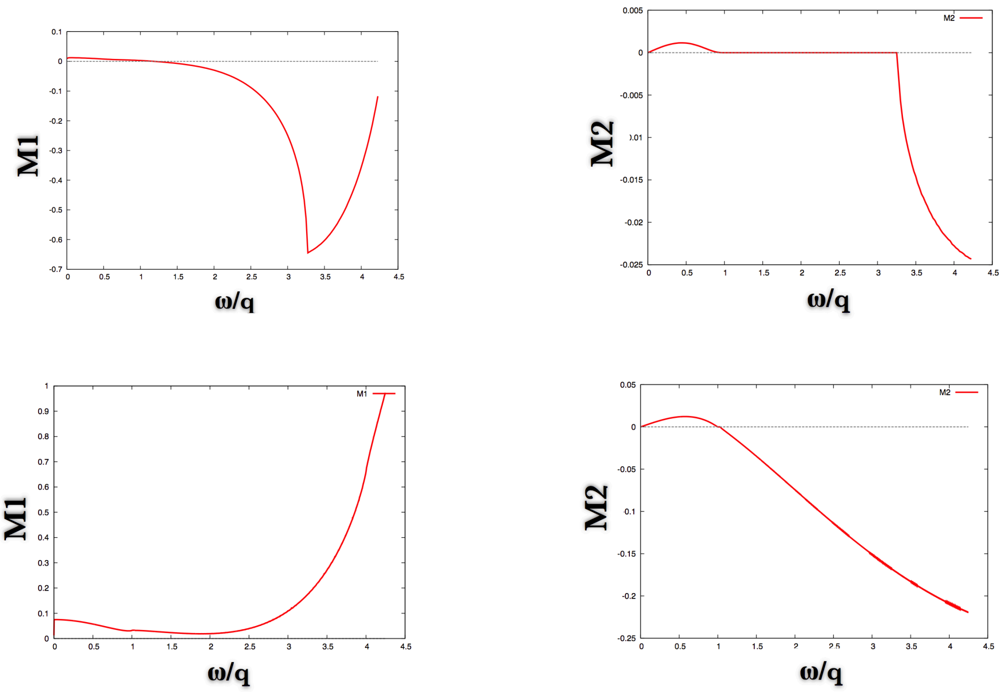

図 1: $T < T_c$ での $\mathcal{M}_1$ (左上), $T < T_c$ での $\mathcal{M}_2$(右上), $T > T_c$ での $\mathcal{M}_1$ (左下), $T > T_c$ での $\mathcal{M}_2$ (右下).

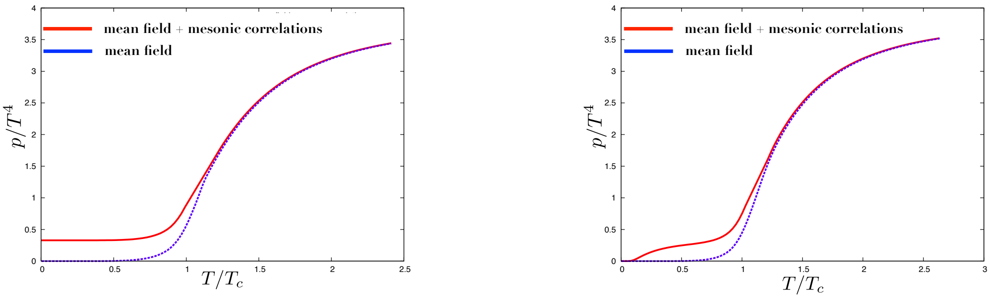

図 2: 状態方程式。右：カイラル極限、左：クォーク質量 140MeV.[4]

5　まとめ

本研究では、PNJL 模型を用いてメソン励起を取り込み、状態方程式の計算を行った。メソン励起を取り込んだ場合、カイラル極限では collective mode と non-collective mode を分離することができ、collective mode からの寄与が支配的であることがわかった。有限のクォーク質量を持たせた場合、2 つのモードの分離は出来ないが、しかし、ポールの有無の計算から高温でのメソン励起からの寄与が小さいことがわかった。

参考文献

[1] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591**, 277 (2004) [hep-ph/0310121].
[2] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
[3] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
[4] K. Yamazaki and T. Matsui, arXiv:1206.4921 [hep-ph].