

# 強結合格子格子 QCD に基づいた QCD 相図

市原 輝一<sup>A</sup>, 中野 嵩士<sup>A,B</sup>, 大西 明<sup>B</sup>  
京大理<sup>A</sup>, 京都大学基礎物理学研究所<sup>B</sup>

## 概要

強結合格子 QCD に基づいて、平均場近似を越えた手法を開発する。強結合極限における定式化を行い、系のサイズが  $4 \times 4^3$  の時の結果を示す。また、有限結合効果の Next-Leading-Order の定式化も行う。

## 1 はじめに

初期宇宙や中性子星の物理とも関連する QCD(量子色力学) 相図を得る事は重要な課題である。しかし、第一原理計算である格子 QCD は、符号問題により高密度領域においては大きな成功を収めていない。そのため、高密度領域を理論的に研究する手法として、QCD の対称性を尊重した有効模型や、強結合格子 QCD(格子 QCD の強結合展開、つまり格子 QCD における作用を  $1/g^2$  のべきで展開する手法)[2, 3, 4, 5] 等による研究が行われてきた。得に近年、この有効模型や強結合格子 QCD において、平均場近似を越えた解析が行われるようになってきた。そこで、本研究では強結合格子 QCD に基づいて、平均場近似を越えた議論を行う。現在、強結合格子 QCD の強結合極限 ( $1/g^2 = 0$ ) において、平均場近似を越えた研究は W. Unger ら [1] によりすでに行われている。しかし、強結合展開の有限結合効果を取り入れるには、彼らの手法はそのまま適用できない。そこで今回の研究では、有限結合効果を考慮する事が直接的な手法を採用する。まずは強結合極限で今回の手法を確立し、有限結合効果への適用を睨む。その際、今回の定式化に現れる "符号問題" についても考察をする。

## 2 平均場近似を越えた強結合格子 QCD の作用

Staggered fermion の作用を用い、まずは強結合展開の強結合極限を考える ( $1/g^2 = 0$ )。温度を連続的に変化させる為、非等方格子を導入する [4]。つまり、時間方向の格子間隔  $a_\tau$  は、空間方向の格子間隔  $a$  とは  $a_\tau = a/\gamma$  との関係にある。但し、以下では格子間隔  $a$  は顕わに書かない。この時作用は、(反)クォーク場  $(\bar{\chi})\chi$ 、リンク変数の第 0 成分  $U_0$ 、化学ポテンシャル  $\mu$ 、裸の質量  $m_0$ 、カラー  $N_c = 3$ 、メソン場  $M_x = \bar{\chi}_x \chi_x$  とすると

$$Z = \int \mathcal{D}[\chi, \bar{\chi}, U_0] e^{-S_{\text{eff}}}, \quad (2.1)$$

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sum_x [V_x^+(\mu) - V_x^-(\mu)] - \frac{1}{4N_c \gamma^2} \sum_{x,y} M_x V_{x,y} M_y + \frac{m_0}{\gamma} \sum_x M_x, \quad (2.2)$$

で与えられる [2, 3, 4, 5]。  $S_{\text{eff}}$  の初項は運動項、第 2 項はメソンホッピング項、第 3 項は質量項を表す。ここで、  $V_x^+(\mu) = e^{\mu/\gamma^2} \bar{\chi}_x U_0 \chi_{x+\hat{0}}$ 、  $V_x^-(\mu) = -e^{-\mu/\gamma^2} \bar{\chi}_{x+\hat{0}} U_0^\dagger \chi_x$ 、  $V_{x,y} = \frac{1}{2} \sum_j (\delta_{x+\hat{j},y} + \delta_{x-\hat{j},y})$  と定義した。式 (2.2) 第 2 項のメソンの 2 体場を 1 体場に帰着させる為に補助場を導入する。空間方向のフーリエ変換  $M_x = \sum_k e^{-ik \cdot x} \tilde{M}_{k,\tau}$  をして、この第 2 項における  $V_{x,y}$  の正固有値と負固有値の 2 つの項に分ける。この 2

項それぞれに対し、拡張された Hubbard-Stratnovich(EHS) 変換 [2] を適用し、それぞれの項に対応した 2 種類の補助場を導入する。最終的な有効作用は、連続理論の  $\gamma_5$  に対応する  $\epsilon_x = (-1)^{\tau+x_1+\dots+x_d}$  を用い、フェルミオン積分  $\cdot U_0$  積分 [3] を行うと、

$$Z = \int \mathcal{D}[\Sigma, \Pi] e^{-S_{\text{eff}}}, \quad (2.3)$$

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{4N_c \gamma^2} \sum_{x,j} \left[ \Sigma_x \Sigma_{x+\hat{j}} + \Pi_x \Pi_{x+\hat{j}} \right] - \sum_x \log [X_N(\mathbf{x})^3 - 2X_N + 2 \cosh(3\mu/T)], \quad (2.4)$$

$$I_x = \frac{1}{4N_c \gamma^2} \sum_j \left[ \left( \Sigma_{x+\hat{j}} + i\epsilon_x \Pi_{x+\hat{j}} \right) + \left( \Sigma_{x-\hat{j}} + i\epsilon_x \Pi_{x-\hat{j}} \right) \right] + \frac{m_0}{\gamma}, \quad (2.5)$$

となる。ただし、 $X_{N_\tau} = B_{N_\tau} + B_{N_\tau-2}, B_{N_\tau} = I_{N_\tau} B_{N_\tau-1} + B_{N_\tau-2}, B_1 = I_1, B_2 = I_1 I_2 - 1$  である。ここで導入された  $\Sigma, \Pi$  場について、鞍点で評価すれば、平均場近似を施した事になる。今回はこの  $\Sigma, \Pi$  場をモンテカルロ計算する事で、補助場 (メソン場) の揺らぎを取りこみ、平均場近似を越える。なお、ここで導入した補助場は、平均場近似の場合  $\sigma_x = -\langle M_x \rangle, \pi_x = -\langle i\epsilon_x M_x \rangle$  と導入した事に対応する。また、配位を  $(\omega, k)$  空間ではなく、 $(\tau, k)$  空間で発生させる定式化となっており、数値計算の効率化が実現している。

次に、強結合展開の  $1/g^2$  の Next-Leading-Order(NLO) の定式化をする。NLO の有効作用 [2, 3, 4] から、強結合極限と同様に EHS 変換をし、有限結合効果の NLO まで取り込む事が可能である。今までと同様に、導入される補助場 (NLO の場合は、以下のように空間方向に対して  $\varsigma, \varpi$  場、時間方向に対して  $\mathbb{E}, \mathbb{E}$  場) を鞍点で評価せず、モンテカルロ計算を行い、補助場の揺らぎを取り込む。空間次元  $d, \beta_s = d(d-1)/8N_c^4 g^2, \beta_\tau = d/N_c^2 g^2$  として、NLO の強結合極限に対する補正項を、空間方向は  $\Delta S^{(s)}$ 、時間方向は  $\Delta S^{(\tau)}$  とすると、補正項は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta S^{(s)} = & \frac{2\beta_s}{d(d-1)\gamma^5} \sum_{x,j \neq k} \left[ \varsigma_x \varsigma_{x+\hat{k}} + M_x M_{x+\hat{j}} (\varsigma_{x+\hat{k}} + \varsigma_{x-\hat{k}}) \right. \\ & \left. + \varpi_x \varpi_{x+\hat{k}} + i\epsilon_x M_x M_{x+\hat{j}} (\varpi_{x+\hat{k}} + \varpi_{x-\hat{k}}) \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta S^{(\tau)} = & 2 \frac{\beta_\tau}{4d\gamma} \sum_{x,j > 0} \left[ \mathbb{E}_x \mathbb{E}_{x+\hat{j}} + \frac{i}{2} V_x^+(\mu) (\mathbb{E}_{x+\hat{j}}^* + \mathbb{E}_{x-\hat{j}}^*) + \frac{i}{2} V_x^-(\mu) (\mathbb{E}_{x+\hat{j}} + \mathbb{E}_{x-\hat{j}}) \right. \\ & \left. + \mathbb{E}_x \mathbb{E}_{x+\hat{j}} + \frac{\epsilon_x}{2} V_x^+(\mu) (\mathbb{E}_{x+\hat{j}}^* + \mathbb{E}_{x-\hat{j}}^*) + \frac{\epsilon_x}{2} V_x^-(\mu) (\mathbb{E}_{x+\hat{j}} + \mathbb{E}_{x-\hat{j}}) \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

### 3 結果

まず、今回発生する "符号問題" は、格子 QCD のモンテカルロ計算における符号問題とは違い、補助場を導入する際に発生する [2]。特に式 (2.4) から分かる事は、化学ポテンシャルが大きい程、今回の "符号問題" が弱くなり、通常の格子 QCD とは逆の傾向を示している。強結合極限では、式 (2.5) から  $\Pi$  場の高運動量成分から "符号問題" が発生する。平均場の場合、 $\Pi$  場の寄与が  $\epsilon_x$  の項により、隣接サイト同士で打ち消しあうからである。また、有限結合効果の NLO まで考慮した場合、空間方向においては、強結合極限の時と同様に、補助場  $\varpi$  の高運動量成分から発生する事がわかる。しかし、時間方向に関しては、補助場  $\mathbb{E}$  の全ての運動量成分から "符号問題" が発生する事がわかる。この結果は、平均場において時間方向の補助場が、斥力であるベクトル結合の第 0 成分として導入される事とコンシステントである [2]。

また数値計算結果を以下に記す。条件はカイラル極限  $m_0 = 0$ 、格子サイズ  $4 \times 4^3$  の強結合極限  $1/g^2 = 0$  である。図 1 は average cosine factor  $\langle \cos \theta \rangle$  を表している。横軸は温度  $T$  を表しており、単位はともに lattice unit  $a$  である。この average cosine factor は、1 に近い程符号問題がない事を表している。図 1 から

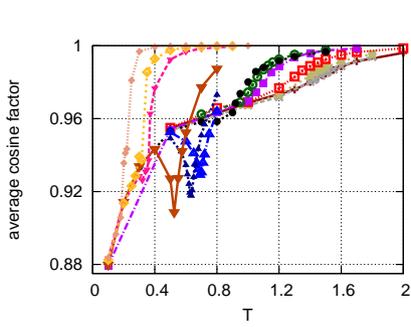


図1 average cosine factor

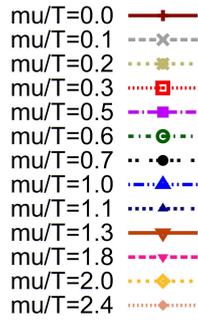


図2 図1における各線の定義

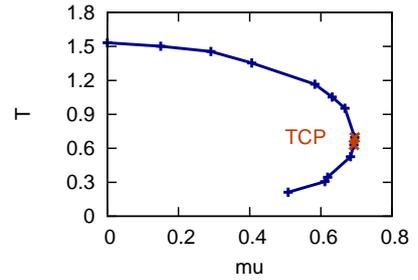


図3 今回得られた QCD 相図

$\langle \cos \theta \rangle \simeq 0.88 \sim 1$  なので、 $4 \times 4^3$  サイズで得られる値は信頼できると考えられる。また、カイラル感受率とクォーク数密度も同様に得られるので、これら 2 つの物理量から強結合極限における QCD 相図が得られる (図 2)。2 次相転移線は感受率のピーク位置、1 次相転移線はクォーク数密度の飛びの位置で定義した。また、2 次相転移と 1 次相転移との境界である TCP (tricritical point) の位置は、クォーク数密度の飛びで定義した。図 2 の大きい  $\times$  印の間 (茶色の線上) に、今回の定義による TCP がある。これは、W. Unger らによる結果 [1] とほぼコンシステントである。

## 4 まとめと展望

今回は、平均場近似を越えた強結合格子 QCD における相図研究に関する進展について報告した。特に、フーリエ変換を空間方向のみに抑える事で数値計算の効率化が実現した。これにより、より大きな体積の系に適用出来る事となった。また、強結合極限において、 $4 \times 4^3$  の格子サイズにおいては、“符号問題” が厳しくない事が分かった。今回の定式化を用いると、有限結合効果を直接的に取り込む事ができる事もみだ。

これからの課題として、一般的に符号問題は大きな格子サイズ程厳しくなるので、大きな格子サイズでの今回の手法の妥当性を検証する必要がある。その次に、有限結合効果を取り入れた場合の考察から、時間方向の補助場から厳しい“符号問題”が出る可能性が示唆されたので、この項の取扱いを繊細に行う必要があると予想される。

## 参考文献

- [1] W. Unger and P. de Forcrand, J.Phys. G 38, 124190 (2011).
- [2] K. Miura, T. Z. Nakano, A. Ohnishi, and N. Kawamoto, Phys. Rev. D80 , 074034(2009).
- [3] G. Falt and B. Peterson, Nucl. Phys. B265, 197 (1986).
- [4] N. Billic, F. Karsch, and K. Redlich, Phys. Rev. D 45, 3228 (1992).
- [5] Y. Nishida, Phys. Rev. D69, 094501 (2004).