

# On the hybrid integrability of squashed sigma model

川口 維男 (京大理)

Based on 1203.3400 [hep-th]

I.K., Takuya Matsumoto, Kentaroh Yoshida

# イントロダクション

## 考えたいこと

AdS/CFT対応の背後に可積分構造



AdS/CFT対応の可積分変形

簡単のために $AdS_3$ の変形を考える

$AdS_3$



Warped  $AdS_3$

## Warped $AdS_3$ を考える動機

最近のAdS/CFT対応の研究でしばしば現れる

EX. 物性系への応用, Kerr/CFT対応  
warped  $AdS_3$ /dipole  $CFT_2$ 対応

## Curious feature of warped $AdS_3$

Warped  $AdS_3$ 上の非線形シグマ模型の可積分構造に注目すると、

Warped  $AdS_3$ は $AdS_3$ の1-parameter変形



Trigonometricな可積分模型

Warped  $AdS_3$ /dipole  $CFT_2$ 対応における  
Virasoro x Virasoro対称性の存在の示唆 ( $AdS_3$ との類似性)



Rationalな可積分模型

2つの異なる可積分構造が共存する模型(?)

Hybrid integrable structure



以下でsquashed  $S^3$ 上の非線形シグマ模型の古典可積分構造を考える

**Note** : Warped  $AdS_3$ はsquashed  $S^3$ とdouble Wick rotationで関係している

# Squashed $S^3$ 上の非線形シグマ模型

作用

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \eta^{\mu\nu} [\text{tr}(J_\mu J_\nu) - \underline{2C} \text{tr}(T^3 J_\mu) \text{tr}(T^3 J_\nu)]$$

Left-invariant one-form :  $J_\mu = g^{-1} \partial_\mu g$ ,  $g \in SU(2)$

$C (>-1)$  は定数,  $C=0$  で  $SU(2)$  principal chiral model

境界条件 :  $g(t, x) \rightarrow g_\infty (= \text{const.})$ , for  $x \rightarrow \pm\infty$

Global symmetry :  $SU(2)_L \times U(1)_R$   $g \rightarrow g_L \cdot g \cdot e^{-T^3 \theta}$

運動方程式 :  $\partial^\mu J_\mu - 2C \text{tr}(T^3 \partial^\mu J_\mu) T^3 - 2C \text{tr}(T^3 J_\mu) [J^\mu, T^3] = 0$

## Hybrid integrable structure

- $SU(2)_L \times U(1)_R$ がYangian x quantum affine algebraへ拡大
- それぞれの無限次元対称性に基づく2つの記述

1) Rational      2) Trigonometric

Global symm.	$SU(2)_L$	$U(1)_R$
Hidden symm.	Yangian	quantum affine
Descriptions	rational	trigonometric

[I.K., K.Yoshida, 1008.0776]

[I.K., K.Yoshida, 1107.3662]

[I.K., T.Matsumoto, K.Yoshida, 1201.3058]

[Cherednik, 1981; Faddeev, Reshetikhin, 1986; etc.]

### 今回の内容

Monodromy matrixの間のmapを構成

# Trigonometric description

Lax pair [Faddeev, Reshetikhin, 1986]

$$L_t^R(x; \lambda_R) = -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 [w_a(\alpha + \lambda_R) J_+^a + w_a(\alpha - \lambda_R) J_-^a] T^a,$$

$$L_x^R(x; \lambda_R) = -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 [w_a(\alpha + \lambda_R) J_+^a - w_a(\alpha - \lambda_R) J_-^a] T^a,$$

$$\tanh \alpha = i\sqrt{C}, \quad J_{\pm} = J_t \pm J_x, \quad J_{\mu} = T^1 J_{\mu}^1 + T^2 J_{\mu}^2 + T^3 J_{\mu}^3$$

$$w_1(\lambda) = w_2(\lambda) = \frac{\sinh \alpha}{\sinh \lambda}, \quad w_3(\lambda) = \frac{\tanh \alpha}{\tanh \lambda}$$

$\lambda_R$ : スペクトルパラメータ



$$\left[ \partial_t - L_t^R(x; \lambda_R), \partial_x - L_x^R(x; \lambda_R) \right] = 0$$



運動方程式とMaurer-Cartan方程式

ここで $\lambda_R$ の定義域を調べる

$$L_{\pm}^R(x; \lambda_R) = -\frac{\sinh \alpha}{\sinh(\alpha \pm \lambda_R)} \left[ T^1 J_{\pm}^1 + T^2 J_{\pm}^2 + \frac{\cosh(\alpha \pm \lambda_R)}{\cosh \alpha} T^3 J_{\pm}^3 \right]$$

$\lambda_R$ の基本領域

$$L_{\mu}^R(x; \lambda_R + 2\pi i) = L_{\mu}^R(x; \lambda_R)$$



$\lambda_R$ の基本領域は幅 $2\pi$ に制限される

ここでは  $-\pi/2 < \text{Im}\lambda_R \leq 3\pi/2$  と選ぶ

Poleの位置

- $\lambda_R = \pm\alpha, \pm\alpha + \pi i$  はLax pairのpole

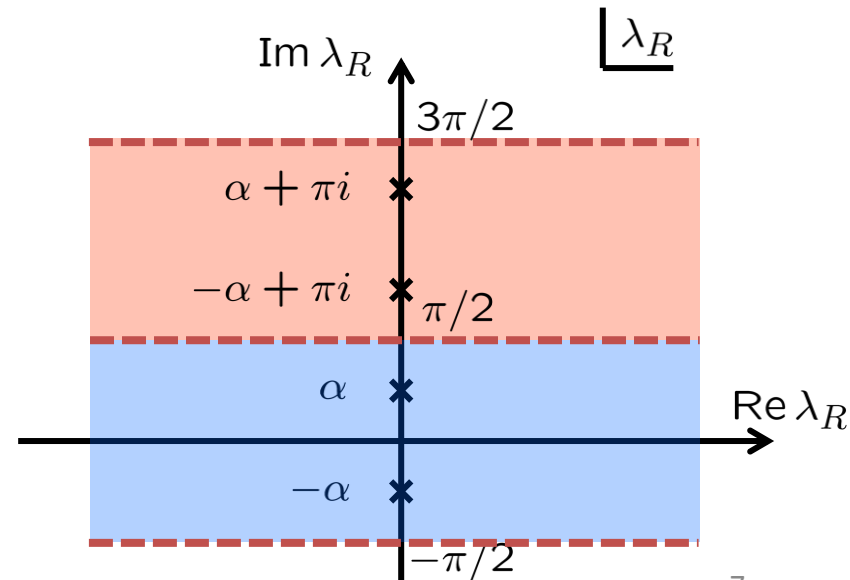


Cylinder with 4 punctures

- $\text{Re}\lambda_R \rightarrow \pm\infty$  でLax pairは収束



Riemann sphere with 4 puncture  
 $\sim$ mapできる



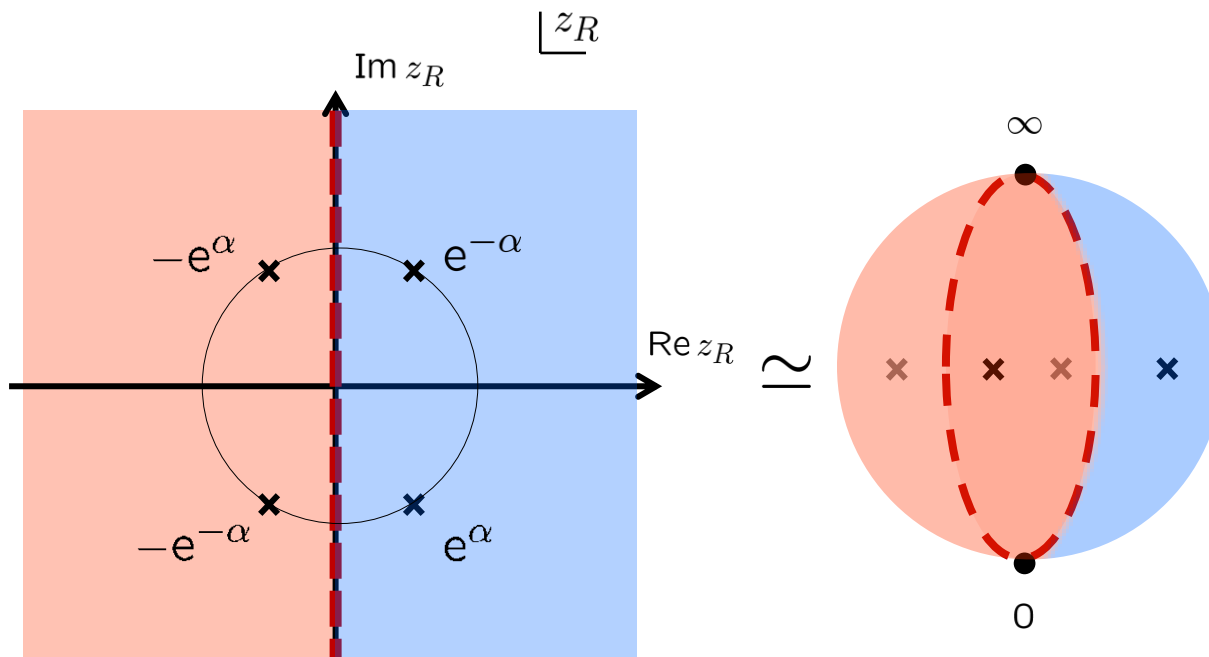
# Riemann sphere with 4 punctures $\hat{\mathcal{O}}$ map

$$z_R = e^{-\lambda_R} \quad \text{を導入}$$



$$z_R \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} - \{e^{\pm\alpha}, -e^{\pm\alpha}\}$$

Riemann sphere with 4 punctures





## Monodromy matrix

$$U^R(\lambda_R) = \text{P exp} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx L_x^R(x; \lambda_R) \right]$$

➡  $\frac{d}{dt} U^R(\lambda_R) = 0$  : 保存量のone-parameter family



$\lambda_R$ (または $z_R$ )で展開すると、無限個の保存量が得られる

**EX.**  $z_R = 0, \infty$ での展開はquantum affine algebraの生成子を与える

[I.K., Matsumoto, Yoshida, 2012]

## Rational description

$SU(2)_L$  保存カレント

$$j_\mu^{L\pm} = gJ_\mu g^{-1} - 2C \text{tr}(T^3 J_\mu) g T^3 g^{-1} \mp \underbrace{\sqrt{C} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu (g T^3 g^{-1})}_{\text{Topological term}}$$

Topological term

Topological termは平坦性条件を満たすように選んだ:

$$\epsilon^{\mu\nu} (\partial_\mu j_\nu^{L\pm} - j_\mu^{L\pm} j_\nu^{L\pm}) = 0$$

**Note** : Topological termの符号に応じて2種類の平坦な $SU(2)_L$ カレントが存在

平坦な $SU(2)_L$ カレントからLax pairが構成できる

2種類の平坦カレント



2種類のLax pair

Lax pair

$$L_t^{L^\pm}(x; \lambda_{L^\pm}) = \frac{1}{1 - \lambda_{L^\pm}^2} \left[ j_t^{L^\pm} - \lambda_{L^\pm} j_x^{L^\pm} \right],$$

$$L_x^{L^\pm}(x; \lambda_{L^\pm}) = \frac{1}{1 - \lambda_{L^\pm}^2} \left[ j_x^{L^\pm} - \lambda_{L^\pm} j_t^{L^\pm} \right],$$

$\lambda_{L^\pm}$  : スペクトルパラメータ



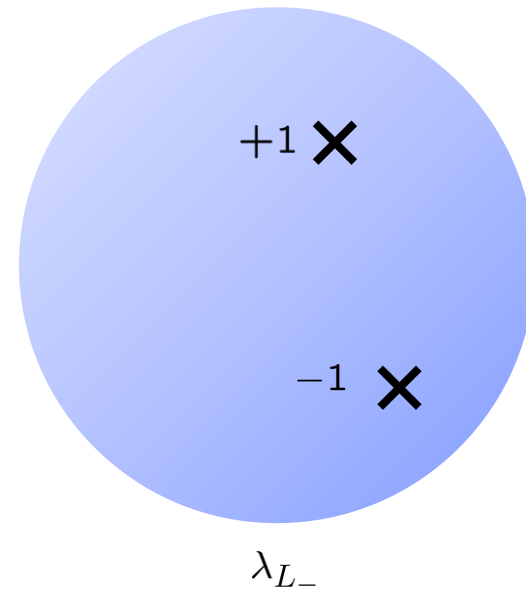
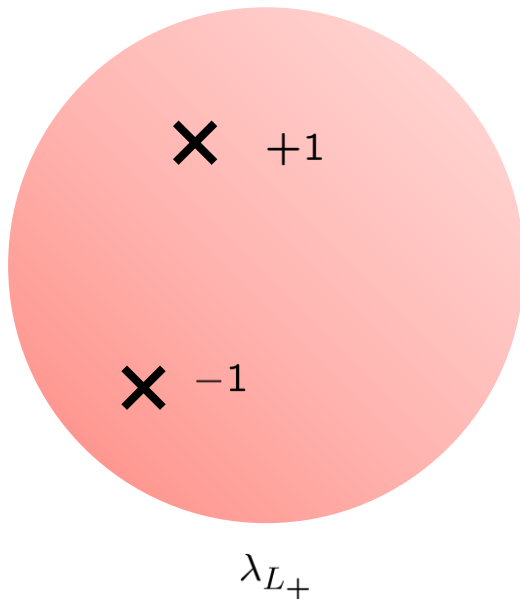
$$\left[ \partial_t - L_t^{L^\pm}(x; \lambda_{L^\pm}), \partial_x - L_x^{L^\pm}(x; \lambda_{L^\pm}) \right] = 0$$

→  $SU(2)_L$  カレントの保存則と平坦性条件

**Note** :  $\lambda_{L^-}$  と  $\lambda_{L^+}$  は独立なスペクトルパラメータ

## $\lambda_{L_{\pm}}$ の定義域

- $\lambda_{L_{\pm}} \rightarrow \infty$  でLax pairは収束  
    ➡  $\lambda_{L_{\pm}}$  はRiemann sphere上で定義される
- $\lambda_{L_{\pm}} = 1, -1$  はLax pairのpole  
    ➡  $\lambda_{L_{\pm}} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} - \{\pm 1\}$   
    Riemann sphere with 2 punctures



## Monodromy matrix

$$U^{L\pm}(\lambda_{L\pm}) = \text{P exp} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx L_x^{L\pm}(x; \lambda_{L\pm}) \right]$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt} U^{L\pm}(\lambda_{L\pm}) = 0$$



$\lambda_{L\pm}$ で展開すると、無限個の保存量が得られる

EX.  $\lambda_{L\pm} = \infty$ での展開はYangianの生成子を与える

## Monodromy matrix間のmap

- $U^R$ の展開からYangianの生成子が得られる
- $U^{L\pm}$ の展開からquantum affine algebraの生成子が得られる



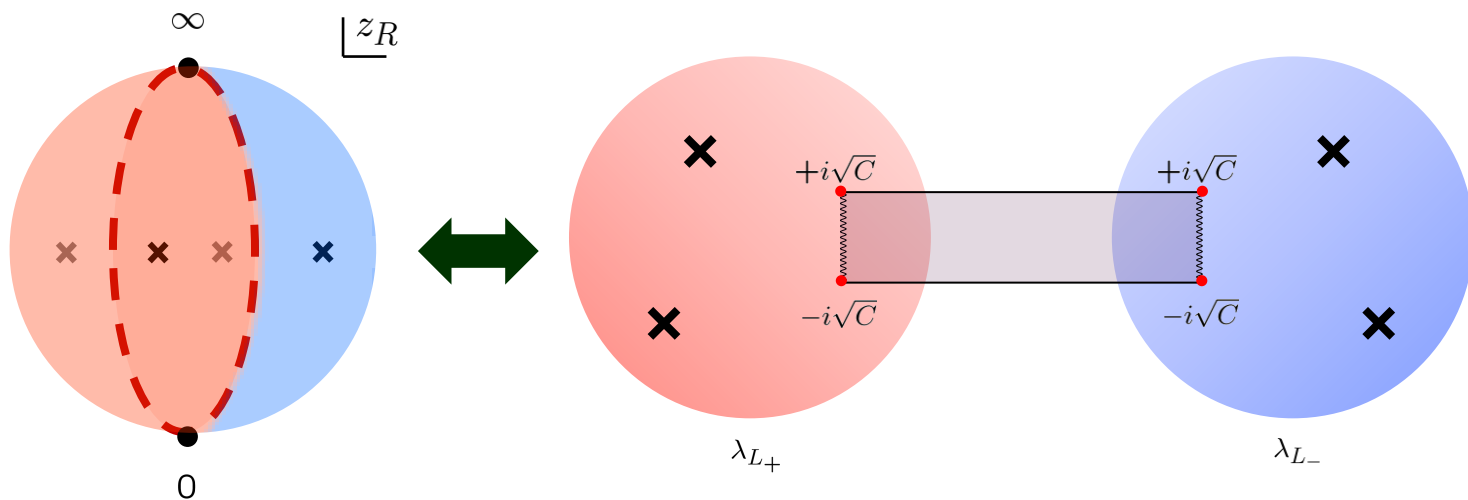
Monodromy matrix間のmapを構成する上で重要な情報

### スペクトルパラメータの関係式

Yangianとquantum affine algebra  
の展開点が、 $z_R$ と $\lambda_L$ で一致する条件から

$$z_R^2 = \frac{\lambda_{L\pm} - i\sqrt{C}}{\lambda_{L\pm} + i\sqrt{C}}$$

# $z_R$ -Riemann sphereと $\lambda_L$ -Riemann spheresの関係



Trigonometricは2つのrationalの貼り合わせと等価

スペクトルパラメータの関係式を考慮すると、次の関係が成り立つ:

$$\begin{aligned} -g^{-1}\partial_\mu g + g^{-1}L_\mu^{L^\pm}(\lambda_{L^\pm})g &\simeq L_\mu^R(\lambda_R) \\ g_\infty^{-1} \cdot U^{L^\pm}(\lambda_{L^\pm}) \cdot g_\infty &\simeq U^R(\lambda_R) \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \text{積分}$$

**Note**: 等号はsl(2)代数の自己同型を除いて成立する

Rationalとtrigonometricの記述はゲージ同値



## 結論と今後の展望

### 結論

- Warped  $\text{AdS}_3$  やsquashed  $S^3$  上の非線形シグマ模型では、2種類の古典可積分構造が共存



Warped  $\text{AdS}_3$  と  $\text{AdS}_3$  の類似性の起源(?)

### 今後の展望

- シグマ模型でVirasoro x Virasoro対称性を実現  
スペクトルパラメータの空間上のVirasoro対称性(?)  
Cf. Lu, Perry, Pope, Sezgin (2008)
- Trigonometric/Rational 対応の  
シグマ模型の枠組みに依らない数学的な定式化