AdS/CFT 対応に基づいた Schwinger 効果の解析

佐藤芳紀*

平成 25 年 5 月 14 日

京都大学大学院理学研究科

概 要

AdS/CFT 対応は Maldacena によって提唱されて以来、強結合領域におけるゲージ理論の解明に役立っている。近年になり、Semenoff-Zarembo が AdS/CFT 対応の文脈で Schwinger 効果を議論し、興味深い結果を得た [14]。本稿では、この論文を読む上で必要となる基礎的事項から解説し、クォーク対生成、モノポール対生成、ダイオン対生成を AdS/CFT 対応に基づいて解析した論文 [14, 15] のレビューを行う。[1]

目 次

1 はじめに **2**

2 量子電磁気学における対生成 **4**

2.1 Schwinger 効果の直観的理解と電場の上限 4

2.2 Schwinger による導出 5

2.3 世界線の経路積分形式に基づいた対生成 6

2.4 任意の結合定数への拡張 12

2.5 スピノル量子電磁気学の場合 15

3 AdS/CFT 対応 **17**

3.1 ゲージ側 18

3.2 重力側 20

3.3 開弦の作用・運動方程式・境界条件 21

3.4 D-string と R-R 場の相互作用 22

*E-mail: yoshiki@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

[1]本稿は平成 24 年度京都大学大学院理学研究科に提出した修士論文に加筆、修正したものである。

4 Wilson ループ **22**
4.1 一般論 23
4.2 直線 Wilson ループ 24
4.3 円形 Wilson ループ 25
4.4 クォーク・反クォークポテンシャル 26

5 Holographic Schwinger effect **29**
5.1 クォーク・反クォーク対生成 30
5.1.1 DBI 作用から期待される電場の性質 30
5.1.2 ゲージ理論での対生成 31
5.1.3 ホログラフィックな記述 34
5.1.4 議論・まとめ 35
5.2 モノポール・反モノポール対生成 36
5.2.1 DBI 作用から期待される磁場の性質 36
5.2.2 ホログラフィックな記述 36
5.2.3 議論・まとめ 38
5.3 ダイオン・反ダイオン対生成 38
5.3.1 DBI 作用から期待される電場・磁場の性質 38
5.3.2 ホログラフィックな記述 39
5.3.3 議論・まとめ 42

6 まとめ **42**

1 はじめに

量子電磁気学における非摂動論的な現象として、外電場中における電子·陽電子の対生成（Schwinger 効果）が知られている [1]。電子・陽電子の対生成が起きる単位体積・単位時間当たりの確率は、外場が定電場 E のとき

$$P \simeq \frac{1}{(2\pi)^3}\left(\frac{eE}{\hbar c}\right)^2 \exp\left(-\frac{\pi m^2 c^3}{\hbar e E}\right) \tag{1.1}$$

と表されるので、対生成が起きる電場のスケールは

$$E_{\mathrm{Schw}} = \frac{m^2 c^3}{e\hbar} \tag{1.2}$$

$$\simeq 1.3 \times 10^{18}\ [\mathrm{V/m}] \tag{1.3}$$

である。e は電荷、m は電子の質量、c は光速度、$\hbar$ は Planck 定数（を 2π で割ったもの）である。第 1 章のみ、自然単位系を用いない。E_{Schw} は原子のイオン化が起きるスケール

$$E_{\mathrm{ion}} = \frac{m^2 e^5}{(4\pi\varepsilon_0)^3 \hbar^4} \tag{1.4}$$

$$\simeq 5.2 \times 10^{11}\ [\mathrm{V/m}] \tag{1.5}$$

に比べて極めて大きく、実験室で作られる電場では、ほとんど電子・陽電子の対生成は起きない。よって、現在のところ、Schwinger 効果は実験では確認されていない。しかし、DESY の XFEL 計画やヨーロッパの ELI 計画で、E_{Schw} の 1/10 ∼ 1/100 程度の強さの電場を作ることが決まっており、Schwinger 効果の観測が期待されている [12]。

本稿では、AdS/CFT 対応に基づいて Schwinger 効果[2]を議論する。その動機は主に二つある。一つ目は、電場の振る舞いである。通常の $U(1)$ ゲージ理論では電場に上限値は知られていない。一方、弦理論では電場に上限が存在する。弦理論での電場の上限は次のようにして分かる。

弦理論には、Dp-ブレーンという p 次元空間に広がった高次元物体が存在する。D-ブレーン上にはゲージ場が存在し、開弦の端点がゲージ場にとっての荷電粒子に対応する。開弦は向きを持っており、それぞれの端点は逆符号の電荷を持っている。場の量子論の真空と同じように、真空は、D-ブレーン上で開弦の生成と消滅が繰り返している状態と考えられる。D-ブレーン上に外電場を印加していくと、開弦の端は逆符号の電荷を持っているので、逆方向に引っ張られる。開弦が電場によって得るエネルギーが開弦の張力より大きくなると、開弦は不安定な状態となり、分裂してしまう。開弦の張力よりも大きい電場では、開弦が分裂する方が安定なので、弦理論には電場の上限値が存在する [17, 18]。

よって、AdS/CFT 対応の文脈で双対な関係にあるゲージ理論と弦理論において一見矛盾しているように見える。逆に AdS/CFT 対応が正しいとすれば、強結合領域におけるラージ N ゲージ理論における新しい側面を示唆しており、興味深い。

二つ目は、弦理論の描像を用いるとモノポールやダイオンへの拡張が容易な点である。AdS/CFT 対応に基づいた見方では、クォーク・反クォークの対生成は、背景場としてゼロでない NS-NS 場 B_2 がある場合のプローブ D3-ブレーン上に端を持つ開弦（F-string）を用いて記述できる（第 5.1 節）。$SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性を考えると、モノポール・反モノポールの対生成は背景場としてゼロでない R-R 場 C_2 がある場合のプローブ D3-ブレーン上に端を持つ D1-ブレーン（D-string）を考えればよい（第 5.2 節）。

本稿の構成について説明する。まず、第 2 章では量子電磁気学における電子・陽電子の対生成についてレビューする。初めに Schwinger による生成率の導出を簡単にレビューする。次に「世界線の経路積分形式」に基づく生成率の導出のレビューを行う。「世界線の経路積分形式」に基づく導出方法は Schwinger による導出とは異なるが、計算過程に Wilson ループが現れるので、AdS/CFT 対応に基づいて何を計算すればよいかの示唆を与えてくれる。

第 3 章では、後の章で必要となる AdS/CFT 対応についての事項を簡単にまとめる。

第 4 章では、ゲージ理論で重要な Wilson ループについてまとめる。初めに、$\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論での Wilson ループを与える。AdS/CFT 対応に基づいて計算する方法を述べ、直線と円形

[2]Schwinger 効果は量子電磁気学に限った話ではない。もっと一般に、外場中の粒子・反粒子の対生成、ストリング対生成、ブレーン対生成のことも Schwinger 効果という。

の Wilson ループの期待値とクォーク・反クォークポテンシャルを求める。

第 5 章では、$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論でのクォーク・反クォークの対生成を議論する。初めに、DBI 作用から期待される電場の性質を見る。そして、AdS/CFT 対応に基づいてクォーク・反クォークの対生成を議論する。同様にして、モノポール・反モノポールの対生成、ダイオン・反ダイオンの対生成についても議論する。

第 6 章では、まとめを行う。

2　量子電磁気学における対生成

第 2 章では、量子電磁気学における電子・陽電子の対生成のレビューを行う。第 2.1 節では、Schwinger 効果が非摂動論的現象であること、電場に上限が存在すると期待される理由を簡単に説明する。第 2.2 節では、Schwinger による導出を簡単にレビューする。第 2.3 節以降は、「世界線の経路積分形式」に基づいた導出法のレビューを行う。第 2 章以降は、自然単位系（$c=\hbar=1$）を用いる。

2.1　Schwinger 効果の直観的理解と電場の上限

まず、Schwinger 効果が非摂動論的現象であることの直観的な説明をする。また、量子電磁気学でも電場に上限があると期待される簡単な説明をしよう [14]。

真空の揺らぎによって生じた電子・陽電子の仮想粒子の対が実粒子になるためには、外電場から静止質量以上のエネルギーを得なければならない。仮想粒子の対が距離 d 離れたとき、外電場から eEd のエネルギーを得る。よって、Coulomb 相互作用を無視した場合、ポテンシャル障壁は

$$V(d)=2m-eEd \tag{2.1}$$

である。$eEd\sim 2m$ となるとき、つまり $d\sim 2m/eE$ 離れたとき実粒子となる。この過程は高さ $\sim 2m$、幅 $\sim 2m/eE$ の障壁のトンネル現象である（図 1）。よって、生成率は

$$\Gamma\sim\exp\left(-\frac{m^2}{eE}\right)$$

という指数関数で抑えられる。指数関数の引数を見ると、結合定数 e が分母にある。e に関して摂動展開できないので、Schwinger 効果は非摂動論的現象である。

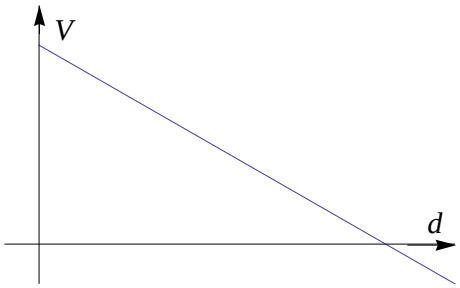

図 1: Coulomb 相互作用がない場合のポテンシャルの形。

次に Coulomb 相互作用を加えた場合を考察しよう。Coulomb 相互作用がある場合、ポテンシャル障壁は

$$V(d) = 2m - eEd - \frac{\alpha}{d}\,, \qquad \alpha：微細構造定数 \tag{2.2}$$

と表される（図 2）。電場が小さいとき（図 2 の青線）、ポテンシャルはある領域で正になっており、障壁を超えたところの零点で粒子は実粒子になる。そのため、電場が小さい場合、対生成はトンネル過程であり、生成率は指数関数で抑えられる。しかし、電場がある値以上では（図 2 の赤線と緑線）、ポテンシャルは全領域で負になり、ポテンシャル障壁を透過することなく対生成が生じる。この場合、真空崩壊が起きており、生成率は指数関数で抑えられていない。電場の上限は真空崩壊が起き始める電場（図 2 の赤線）である。

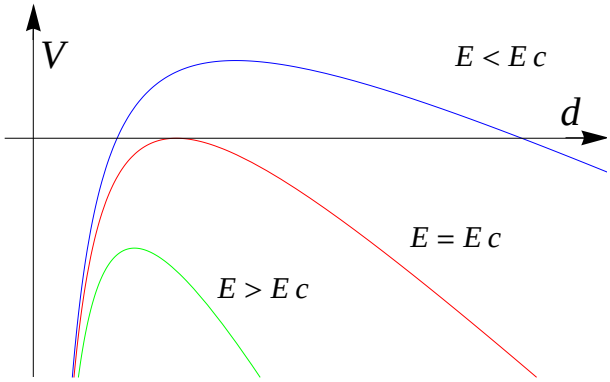

図 2: Coulomb 相互作用がある場合のポテンシャルの形。青線は電場が上限値より小さいとき（$E < E_{\rm c}$）のポテンシャル障壁。赤線は電場が上限値の時（$E = E_{\rm c}$）のポテンシャル障壁。緑線は電場が上限値の時（$E > E_{\rm c}$）のポテンシャル障壁。

2.2 Schwinger による導出

Schwinger は固有時形式を用いてスピノル量子電磁気学の繰り込みを考慮した有効ラグランジアン

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s^3}\,\mathrm{e}^{-m^2 s}\left((es)^2\mathcal{G}\frac{\mathrm{Re}\cosh esX}{\mathrm{Im}\cosh esX} - 1 - \frac{2}{3}(es)^2\mathcal{F}\right)\,, \\ \mathcal{F} &= \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 = \frac{\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2}{2}\,, \qquad \mathcal{G} = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\,, \qquad X^2 = 2\mathcal{F} + i\mathcal{G} \end{aligned} \tag{2.3}$$

を書いた [1]。スカラー量子電磁気学の場合も Schwinger は求めているが、ここでは省略する[3]。

定電場 E のみの場合、ラグランジアン (2.3) は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}E^2 - \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s^3}\,\mathrm{e}^{-m^2 s}\left(eEs\cot(eEs) - 1 + \frac{1}{3}(eEs)^2\right) \tag{2.4}$$

[3] (2.3) 式の有効ラグランジアンを初めて書いたのは Schwinger ではなく、Heisenberg-Euler であり [2]、スカラー量子電磁気学の場合は、Weisskopf である [3]。詳しくは、[13] を見るとよい。

となる。(2.4) 式の積分は被積分関数に

$$s_n = \frac{n\pi}{eE}\,, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

という極があるため well-defined ではない。そのため、Schwinger はこれらの極を $i\epsilon$ ずらして計算を行った。つまり、

$$\frac{1}{s-s_n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{s-s_n-i\epsilon} = P\frac{1}{s-s_n} + i\pi\delta(s-s_n) \tag{2.6}$$

という置き換えをする。P は主値を表す。(2.6) 式の置き換えを行うと、(2.4) 式の積分は有限となり、well-defined になる。その代りに、ラグランジアンに虚部

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L} = \frac{2(eE)^2}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}n\right) \tag{2.7}$$

が現れる。真空から真空への振幅は

$$\left|\exp\left(i\int \mathrm{d}^3x'\int_0^t \mathrm{d}t'\mathcal{L}\right)\right|^2 = \exp\left(-\int \mathrm{d}^3x'\int_0^t \mathrm{d}t'\,2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}\right) \tag{2.8}$$

であるため、ラグランジアンの虚部は真空の崩壊を示唆していると解釈できる。よって、電子・陽電子の対生成が起きる確率 $p(t)$ は

$$\begin{aligned} p(t) &= 1 - \exp\left(-\int \mathrm{d}^3x'\int_0^t \mathrm{d}t'\,2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}\right) \\ &\simeq \int \mathrm{d}^3x'\int_0^t \mathrm{d}t'\,2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L} \end{aligned} \tag{2.9}$$

と与えられる。ここで、一般に $\int \mathrm{d}^3x'\int \mathrm{d}t'\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}$ は 1 に比べて十分小さいことを用いた。そのため、対生成が起きる確率 $p(t)$ とラグランジアンの虚部 $\Gamma = 2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}$ は等しいので、Γ も生成率と呼ぶ。単位体積・単位時間当たりに電子・陽電子の対生成が起きる確率は

$$\Gamma = 2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L} = \frac{2(eE)^2}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}n\right) \tag{2.10}$$

で与えられる。

Schwinger によって求められた生成率の一般的な公式は、

Schwinger の公式

$$\Gamma = \frac{(eE)^2(2j+1)}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)(2j+1)}}{n^2}\exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}n\right), \qquad j: \text{粒子のスピン} \tag{2.11}$$

である。

2.3 世界線の経路積分形式に基づいた対生成

Feynman によって提唱された「世界線の経路積分形式」[4–6] に基づいて、Affleck-Alvarez-Manton は Schwinger の公式 (2.11)（ただし、スカラー量子電磁気学の場合）を再導出し、さらに補正項を見つけた [8]。第 2 章の残りでは、[8–11] に基づいて、量子電磁気学での電子・陽電子の対生成を議論する。最初にスカラー量子電磁気学、次にスピノル量子電磁気学を扱う。

スカラー量子電磁気学は $U(1)$ ゲージ場 $A_\mu(x)$ と電荷 e の複素スカラー場 $\phi(x)$ が結合した系である。時空は Euclid 時空とし、座標は x_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ とする。Euclid 化された作用は

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu \phi|^2 + m^2 |\phi|^2 \right) \tag{2.12}$$

で与えられる。共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + ieA_\mu^{\mathrm{ex}} \tag{2.13}$$

であり、ベクトル場を動的な部分 A_μ と外場の部分 A_μ^{ex} に分けている。

一般に生成率 Γ は真空のエネルギー密度 ε_0 を用いて

$$\Gamma = 2\,\mathrm{Im}\,\varepsilon_0 \tag{2.14}$$

と表される。今の場合 $\mathrm{e}^{-\varepsilon_0 V_4} = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\,\mathrm{e}^{-S}$ なので（V_4 は 4 次元時空間の体積を表す）、

$$V_4\Gamma = -2\,\mathrm{Im}\log \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\phi\,\mathrm{e}^{-S} \tag{2.15}$$

である。ϕ に関して経路積分を行うと、

$$V_4\Gamma = -\,2\,\mathrm{Im}\log \int \mathcal{D}A\,\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{eff}}} \tag{2.16}$$

$$S_{\mathrm{eff}} = \int \mathrm{d}^4x\,\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \mathrm{tr}\log\left(-D^2 + m^2\right) \tag{2.17}$$

となる。結合定数が十分小さいとき（$e^2/4\pi \ll 1$）、ベクトル場の動的な部分は無視でき、

$$V_4\Gamma = 2\,\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\log\left(-\left(\partial + ieA^{\mathrm{ex}}\right)^2 + m^2\right) \tag{2.18}$$

$$= -2\,\mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}T}{T}\,\mathrm{tr}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\partial + ieA^{\mathrm{ex}}\right)^2 T - \frac{m^2 T}{2}\right) \tag{2.19}$$

と近似できる。ここで、

$$\log\alpha = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \tag{2.20}$$

を用いて固有時積分に書き換えた。ただし、α は演算子であり、物理的でない無限大は無視している。

$\exp(-\frac{1}{2}(\partial + ieA^{\mathrm{ex}})^2 T)$ は e^{-HT} という形をしている。ここで $H = (\partial + ieA^{\mathrm{ex}})^2/2$ であり、外場のある 4 次元空間の中で運動する粒子（インスタントン）のハミルトニアンを表している。量子力学での経路積分を用いると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,\mathrm{e}^{-HT} &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\langle p|\mathrm{e}^{-HT}|p\rangle \\
&= \int \mathcal{D}x\,\exp\left[-\int_0^T \mathrm{d}\tau\,\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - ieA_\mu^{\mathrm{ex}}\dot{x}_\mu\right)\right] \\
&= \int \mathcal{D}x\,\exp\left(-\frac{1}{2T}\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2 + ie\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,A_\mu^{\mathrm{ex}}\dot{x}_\mu\right)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

と表される。経路積分は、$x_\mu(0)$ を固定した上で $x_\mu(1) = x_\mu(0)$ の周期境界条件を満たす経路について積分し、さらに $x_\mu(0)$ についての積分することを表す。また、経路積分の規格化は

$$\int \mathcal{D}x\,\exp\left(-\frac{1}{2T}\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2\right) = \mathrm{tr}\,\exp\left(-\frac{1}{2}p^2 T\right) = \frac{V_4}{(2\pi T)^2} \tag{2.22}$$

で行う。

以上の計算をまとめると

$$V_4\Gamma = -2\,\mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}T}{T}\int \mathcal{D}x\,\exp\left(-\frac{1}{2T}\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2 - \frac{m^2T}{2} + ie\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,A_\mu^{\mathrm{ex}}\dot{x}_\mu\right) \tag{2.23}$$

と表される。$x(\tau)$ はインスタントンの軌跡を表す。

次に積分を実行する。最初に T 積分を行い、そのあとに $x(\tau)$ 経路積分を行う。逆の順番で積分を行えば、Schwinger による導出となる。(2.23) 式のうち T 積分に寄与する項は

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}T}{T}\,\exp\left(-\frac{m^2T}{2} - \frac{1}{2T}\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2\right) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}T}{T}\,\exp\left(-T - \frac{m^2}{4T}\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2\right)\\ &= 2K_0\left(m\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2}\right)\end{aligned} \tag{2.24}$$

である。$K_0(x)$ は変形 Bessel 関数で、積分表示では

$$K_0(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\exp\left(-t - \frac{x^2}{4t}\right) \tag{2.25}$$

と表される。また $K_0(x)$ は x が十分大きいとき

$$K_0(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\mathrm{e}^{-x} \tag{2.26}$$

と振る舞う。

唐突ではあるが、

$$m\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2} \gg 1 \tag{2.27}$$

と仮定して話を進めよう。(2.27) 式は後で見るように外場が弱いという条件である。(2.23) 式は

$$V_4\Gamma = -\,2\,\mathrm{Im}\int \mathcal{D}x\,\frac{1}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T_0}}\exp\left(-S_{\mathrm{particle}}\right) \tag{2.28}$$

$$S_{\mathrm{particle}} = m\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2} - ie\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,A_\mu^{\mathrm{ex}}\dot{x}_\mu \tag{2.29}$$

$$T_0 = \frac{\sqrt{\int \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2}}{m} \tag{2.30}$$

と近似できる。

$x(\tau)$ の経路積分を次のように評価する。まず、作用 (2.29) の運動方程式を解いて、古典解を求める。そして、(2.29) を古典解周りで展開して、揺らぎの部分を積分する。つまり、

$$\int \mathcal{D}x\,\frac{1}{\sqrt{T_0}}\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{particle}}} \Longrightarrow \sum_n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T_0}}\,\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{cl}}^{(n)}}}_{\text{古典解を代入}}\int \mathcal{D}x\,\exp\left(-\int \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\tau'\,x_\mu^{(n)}(\tau)M_{\mu\nu}^{(n)}(\tau,\tau')x_\nu^{(n)}(\tau')\right)$$

という評価を行う。ここで、$S_{\mathrm{cl}}^{(n)}$ は作用 (2.29) に古典解を代入した古典的作用、$M_{\mu\nu}^{(n)}(\tau,\tau')$ は作用 (2.29) の二階変分演算子で、詳細は計算するときに与える。添え字 n は古典解のラベルである。(2.28) 式の指数関数の前に $x(\tau)$ に依存した項 $1/\sqrt{T_0}$ があるが、古典解を求めるときにはあまり効かないので、揺らぎの部分を経路積分するときはすでに古典解を代入している。

$x_\mu(0) = x_\mu(1)$ という周期境界条件を満たす、作用 (2.29) の古典解を求めよう。運動方程式は、

$$\frac{m\ddot{x}_\mu}{\sqrt{\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2}} = -ieF_{\mu\nu}\dot{x}_\nu \tag{2.31}$$

である。(2.31) 式に $\dot{x}_\mu$ をかけて積分すると、

$$\dot{x}^2 = \text{const.} = a^2 \tag{2.32}$$

が分かる。(2.32) 式から、(2.27) 式の仮定（$m\sqrt{\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2} \gg 1$）は

$$ma \gg 1 \tag{2.33}$$

と表される。A_μ^{ex} として、

$$A_1^{\mathrm{ex}}(x_0) = -iEx_0\,, \qquad \text{他の成分} = 0 \tag{2.34}$$

というものを考える。i は Euclid 化によるものである。これは、1 方向に電場が印加されている状況を表している。(2.31) 式に代入すると、運動方程式の解として

$$x_0 = \frac{m}{eE}\cos\left(\frac{aeE}{m}\tau\right)\,, \qquad x_1 = \frac{m}{eE}\sin\left(\frac{aeE}{m}\tau\right)\,, \qquad x_2 = x_3 = 0 \tag{2.35}$$

が得られる。周期境界条件から

$$\frac{aeE}{m} = 2n\pi\,, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{2.36}$$

である。a の値を決めることができたので、(2.33) 式の物理的意味を理解できる。(2.33) 式は

$$ma = \frac{2n\pi m^2}{eE} \gg 1 \quad \Longleftrightarrow \quad E \ll \frac{2n\pi m^2}{e} = nE_{\mathrm{Schw}} \tag{2.37}$$

となる。$E_{\mathrm{Schw}} = 2\pi m^2/e$ であり、（数倍の係数を除いて）Schwinger 効果の起こると期待されるスケールである。よって、(2.33) 式は外電場が弱いという条件

$$E \ll E_{\mathrm{Schw}} \tag{2.38}$$

である。

運動方程式 (2.31) の解をまとめると、

$$x_0^{(n)} = R\cos(2n\pi\tau)\,, \qquad x_1^{(n)} = R\sin(2n\pi\tau)\,, \qquad x_2^{(n)} = x_3^{(n)} = 0 \tag{2.39}$$

となる。$R = m/eE$ はインスタントン解の表す円の半径である。n はインスタントンが時間 $0 \leq \tau < 1$ の間に回る回数を表している。また、n は生成された電子対の数に対応する。(2.39) 式を作用 (2.29) に代入すると、

$$S_{\mathrm{cl}}^{(n)} = 2n\pi mR - n\pi eER^2 = \frac{\pi m^2}{eE}n \tag{2.40}$$

が得られる。

次に指数関数の前の係数の 1 ループ項を求める。そのためには二階変分作用素

$$M_{\mu\nu}^{(n)}(\tau,\tau') := \left.\frac{\delta^2 S}{\delta x_\mu(\tau)\delta x_\nu(\tau')}\right|_{x_{\mathrm{cl}}^{(n)}} \tag{2.41}$$

を求める必要がある。ベクトル場が (2.34) 式の場合、作用 (2.29) は

$$S = m\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2} - ie \oint A_\mu^{\mathrm{ex}}\, \mathrm{d}x_\mu = m\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2} + \frac{ie}{2}\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, F_{\mu\nu}^{\mathrm{ex}} x_\nu \dot{x}_\mu \tag{2.42}$$

と書けているので、一階の変分は

$$\delta S = \frac{m}{\left(\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2\right)^{1/2}} \int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}_\mu(\tau)\delta\dot{x}_\mu(\tau) + \frac{ie}{2}\int \mathrm{d}\tau\, F_{\mu\nu}^{\mathrm{ex}}(\delta x_\nu(\tau)\dot{x}_\mu(\tau) + x_\nu(\tau)\delta\dot{x}_\mu(\tau)) \tag{2.43}$$

であり、二階の変分は

$$\begin{aligned}
\delta^2 S &= -\frac{m}{\left(\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2\right)^{3/2}} \int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}_\mu(\tau)\delta\dot{x}_\mu(\tau) \int \mathrm{d}\tau'\, \dot{x}_\nu(\tau')\delta\dot{x}_\nu(\tau') + \frac{m}{\left(\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2\right)^{1/2}} \int \mathrm{d}\tau\, \delta\dot{x}_\mu(\tau)\delta\dot{x}_\mu(\tau) \\
&\quad + \frac{ie}{2}\int \mathrm{d}\tau\, F_{\mu\nu}^{\mathrm{ex}}(\delta x_\nu(\tau)\delta\dot{x}_\mu(\tau) + \delta x_\nu(\tau)\delta\dot{x}_\mu(\tau)) \\
&= -\frac{m}{\left(\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2\right)^{3/2}} \int \mathrm{d}\tau\, \ddot{x}_\mu(\tau)\delta x_\mu(\tau) \int \mathrm{d}\tau'\, \ddot{x}_\nu(\tau')\delta x_\nu(\tau') \\
&\quad - \frac{m}{\left(\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2\right)^{1/2}} \int \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\tau'\, \delta x_\mu(\tau)\delta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\delta x_\nu(\tau')\delta(\tau-\tau') \\
&\quad - ie\int \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\tau'\, F_{\mu\nu}^{\mathrm{ex}}\delta x_\mu(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta x_\nu(\tau')\delta(\tau-\tau')
\end{aligned} \tag{2.44}$$

となる。よって、二階変分作用素は

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu}^{(n)}(\tau,\tau') &= -\frac{m}{\left(\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2\right)^{3/2}}\ddot{x}_\mu(\tau)\ddot{x}_\nu(\tau') - \frac{m}{\left(\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2\right)^{1/2}}\delta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\delta(\tau-\tau') - ieF_{\mu\nu}^{\mathrm{ex}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta(\tau-\tau')\Big|_{x_{\mathrm{cl}}^{(n)}} \\
&= -\left(\frac{eE}{2n\pi}\delta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} + ieF_{\mu\nu}^{\mathrm{ex}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right)\delta(\tau-\tau') - \frac{2n\pi eE}{R^2}x_{\mu,\mathrm{cl}}^{(n)}(\tau)x_{\nu,\mathrm{cl}}^{(n)}(\tau')
\end{aligned} \tag{2.45}$$

である。具体的に行列で表すと

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu}^{(n)}(\tau,\tau') &= eE\begin{pmatrix} -\frac{1}{2n\pi}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} & 0 & 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} & -\frac{1}{2n\pi}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2n\pi}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2n\pi}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} \end{pmatrix}\delta(\tau-\tau') \\
&\quad - 2n\pi eE\begin{pmatrix} \cos(2n\pi\tau)\cos(2n\pi\tau') & \cos(2n\pi\tau)\sin(2n\pi\tau') & 0 & 0 \\ \sin(2n\pi\tau)\cos(2n\pi\tau') & \sin(2n\pi\tau)\sin(2n\pi\tau') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

である。次に二階変分作用素 (2.46) の固有値を求める。固有関数を $v_\mu(\tau)$、固有値を λ とすると、固有方程式は

$$\int \mathrm{d}\tau'\, M_{\mu\nu}^n(\tau,\tau')v_\nu(\tau') = \lambda v_\mu(\tau) \tag{2.47}$$

と表される。ただし、

$$\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, v_\mu^i(\tau)v_\mu^j(\tau) = \delta_{ij}\,, \qquad v_\mu(0) = v_\mu(1) \tag{2.48}$$

という規格化条件と周期境界条件を満たすとする。i は固有関数のラベルである。

二階変分作用素 (2.46) の固有値・固有関数は次の通りである。

<u>固有値が負</u>

$\boldsymbol{\lambda = -2n\pi eE}$ 古典解の半径を変えるモード

$$(\cos(2n\pi\tau), \sin(2n\pi\tau), 0, 0) \tag{2.49}$$

$\boldsymbol{\lambda = 2\pi eE\left(\frac{k^2}{n} - k\right), \quad k < n}$

$$(\cos(2k\pi\tau), \sin(2k\pi\tau), 0, 0), \qquad (\sin(2k\pi\tau), -\cos(2k\pi\tau), 0, 0) \tag{2.50}$$

<u>固有値がゼロ</u>

$\boldsymbol{\lambda = 0}$ 古典解の原点の位置を変える並進に対応

$$(1, 0, 0, 0), \qquad (0, 1, 0, 0), \qquad (0, 0, 1, 0), \qquad (0, 0, 0, 1) \tag{2.51}$$

$\boldsymbol{\lambda = 0}$ τ の並進に対応

$$(\sin(2n\pi\tau), -\cos(2n\pi\tau), 0, 0) \tag{2.52}$$

<u>固有値が正</u>

$\boldsymbol{\lambda = 2\pi eE\frac{k^2}{n}, \quad k \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} &(0, 0, \cos(2k\pi\tau), 0), \qquad (0, 0, \sin(2k\pi\tau), 0), \\ &(0, 0, 0, \cos(2k\pi\tau)), \qquad (0, 0, 0, \sin(2k\pi\tau)) \end{aligned} \tag{2.53}$$

$\boldsymbol{\lambda = 2\pi eE\left(\frac{k^2}{n} - k\right), \quad k > n}$

$$(\cos(2k\pi\tau), \sin(2k\pi\tau), 0, 0), \qquad (\sin(2k\pi\tau), -\cos(2k\pi\tau), 0, 0) \tag{2.54}$$

$\boldsymbol{\lambda = 2\pi eE\left(\frac{k^2}{n} + k\right), \quad k \in \mathbb{N}}$

$$(\cos(2k\pi\tau), -\sin(2k\pi\tau), 0, 0), \qquad (\sin(2k\pi\tau), \cos(2k\pi\tau), 0, 0) \tag{2.55}$$

正しく規格化するには、(2.22) 式を用いる。規格化に必要な二階変分作用素は

$$M^{(n)}_{\mu\nu,0}(\tau, \tau') = -\frac{1}{T_0}\delta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\delta(\tau - \tau') = -\frac{eE}{2n\pi}\delta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\delta(\tau - \tau') \tag{2.56}$$

である。二階変分作用素 (2.56) の固有値と固有関数は次の通りである。

<u>固有値が正</u>

$\boldsymbol{\lambda = 2\pi eE\frac{k^2}{n}, \quad k \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} &(\cos(2k\pi\tau), 0, 0, 0), \qquad (\sin(2k\pi\tau), 0, 0, 0), \qquad (0, \cos(2k\pi\tau), 0, 0), \\ &(0, \sin(2k\pi\tau), 0, 0), \qquad (0, 0, \cos(2k\pi\tau), 0), \qquad (0, 0, \sin(2k\pi\tau), 0), \\ &(0, 0, 0, \cos(2k\pi\tau)), \qquad (0, 0, 0, \sin(2k\pi\tau)) \end{aligned} \tag{2.57}$$

<u>固有値がゼロ</u>

$\boldsymbol{\lambda = 0}$

$$(1, 0, 0, 0), \qquad (0, 1, 0, 0), \qquad (0, 0, 1, 0), \qquad (0, 0, 0, 1) \tag{2.58}$$

規格化を考慮して、揺らぎの部分を経路積分すると

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\int \mathcal{D}x\,\exp\left(-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau\int \mathrm{d}\tau'\,x_\mu(\tau)M^{(n)}_{\mu\nu}(\tau,\tau')x_\nu(\tau')\right)\\
&=\frac{V_4}{(2\pi T_0)^2}\,\mathrm{Im}\,\frac{\displaystyle\int \mathcal{D}x\,\exp\left(-\frac{1}{2}\int xM^{(n)}x\right)}{\displaystyle\int \mathcal{D}x\,\exp\left(-\frac{1}{2}\int xM^{(n)}_0x\right)}=-\frac{V_4}{(2\pi T_0)^2}N\sqrt{\frac{\prod\lambda_0}{\prod|\lambda|}}(-1)^{n+1}
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

ここで、λ は M^n のゼロでない固有値、λ_0 は M^n_0 のゼロでない固有値である。M の負の固有値が $2(n-1)+1$ 個あるので、そのうちの一つは $-i$ になる。そのため、虚部を拾って、全体として -1 倍される。残りの $2(n-1)$ 個から $(-1)^{n+1}$ が現れる。N は時間並進に対応する固有値ゼロのモード (2.52) を集団座標に変えたことによって生じる項で

$$
N=\frac{2n\pi R}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{1/n}\mathrm{d}\tau=\sqrt{2\pi}R \tag{2.60}
$$

である。$1/\sqrt{2\pi}$ は経路積分の規格化による項、$2n\pi R$ は固有値ゼロのモードの規格化による項（$x=\dot{x}_{\mathrm{cl}}/2n\pi R$ だから）、$\int_0^{1/n}\mathrm{d}\tau$ は集団座標の中心の位置による項である。

無限積の部分は

$$
\frac{\prod\lambda_0}{\prod|\lambda|}=\frac{2\pi eE\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{n}\right)^8}{n\displaystyle\prod_{k\neq n}\left[k^2\left(1-\frac{k}{n}\right)^2\right]\prod_{k=1}^{\infty}\left[k^2\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\right]\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{n}\right)^4}=\frac{2n\pi eE}{4} \tag{2.61}
$$

となる。M の固有値ゼロのモード (2.52) があるので、分子に $2n\pi eE$ が現れる。1/4 は無限積からの寄与である。Mathematica を使うと、容易に無限積を計算できる。

経路積分での計算をまとめると、生成率 (2.28) は

$$
\begin{aligned}
V_4\Gamma&=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T_0}}\frac{-V_4}{(2\pi T_0)^2}\sqrt{2\pi}R(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2n\pi eE}}{2}\mathrm{e}^{-S^{(n)}_{\mathrm{cl}}}\\
&=V_4\frac{(eE)^2}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}n\right)
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

となる。両辺を V_4 で割ると、

$$
\Gamma=\frac{(eE)^2}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}n\right) \tag{2.63}
$$

が得られる。(2.63) は Schwinger の公式 (2.11)（のスピンゼロの場合）と一致している。

2.4 任意の結合定数への拡張

Affleck-Manton によって Georgi-Glashow 模型（$SU(2)$ ゲージ場と Higgs 場が結合した系）でのモノポール・反モノポール対の生成率が求められた [7]。外磁場 B が印加されている場合、生成率は

$$
\Gamma=\frac{(gB)^2}{(2\pi)^3}\exp\left(-\frac{\pi M^2}{gB}+\frac{g^2}{4}\right) \tag{2.64}
$$

と表される。$M = 4\pi m/e^2$ はモノポールの質量、$g = 4\pi/e$ は磁荷である。

この結果は $e^2/4\pi \ll 1$, $g^3 B \ll M^2$ という二つの条件が満たされているときに正しい。一つ目の条件 $e^2/4\pi \ll 1$ は、磁場の結合定数で見ると、$g^2/4\pi \gg 1$ という条件である。つまり、結合定数が十分大きいという条件である。二つ目の条件 $g^3 B \ll M^2$ は、電子の質量 m と電荷 e を用いると、$B \ll 4\pi m^2/e$ となるので、外場が弱いという条件である。外場が弱いという二つ目の条件は電子・陽電子の対生成と同じ条件である。しかし、結合定数に関する一つ目の条件は電子・陽電子の対生成の場合と逆である。そのため、電子・陽電子の対生成では、外場が弱いという条件が成り立っていれば、任意の大きさの結合定数で

$$\Gamma = \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE} + \frac{e^2}{4}\right) \tag{2.65}$$

と期待される [8]。

第 2.3 節の計算では結合定数が十分小さいとして、A_μ の動的な寄与は無視した。ここでは、A_μ の寄与も考慮する。結合定数が十分小さいと仮定しない場合、(2.18) 式は

$$V_4\Gamma = -2\,\mathrm{Im}\log\left\langle \exp\left[-\mathrm{tr}\,\log\left(-\left(\partial + ieA + ieA^{\mathrm{ex}}\right)^2 + m^2\right)\right]\right\rangle \tag{2.66}$$

に置き換わる。ここで

$$\langle g(A)\rangle = \frac{\displaystyle\int \mathcal{D}A\,\exp\left(-\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\,F^2\right) g(A)}{\displaystyle\int \mathcal{D}A\,\exp\left(-\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\,F^2\right)} \tag{2.67}$$

である。(2.66) 式は

$$\begin{aligned} V_4\Gamma &= -2\,\mathrm{Im}\,\log\left\langle \exp\left[-\mathrm{tr}\,\log\left(-\left(\partial + ieA + ieA^{\mathrm{ex}}\right)^2 + m^2\right)\right]\right\rangle \\ &\simeq -2\,\mathrm{Im}\,\log\left[1 - \left\langle \mathrm{tr}\,\log\left(-\left(\partial + ieA + ieA^{\mathrm{ex}}\right)^2 + m^2\right)\right\rangle\right] \\ &\simeq 2\,\mathrm{Im}\,\left\langle \mathrm{tr}\,\log\left(-\left(\partial + ieA + ieA^{\mathrm{ex}}\right)^2 + m^2\right)\right\rangle \end{aligned} \tag{2.68}$$

と近似できる。2 行目は指数関数を、3 行目は対数関数を Taylor 展開した。指数関数の Taylor 展開は Feynman 図でいうと、電子のループの数で展開することに対応している。今の場合、電子のループの 2-ループ以上を無視することに対応している。（これは外場が弱い場合であればいい近似になっている。）(2.20) 式を用いて、固有時積分に書き換えると

$$\begin{aligned} V_4\Gamma &= -2\,\mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}T}{T}\,\mathrm{tr}\,\left\langle \exp\left[\left(-\left(\partial + ieA + ieA^{\mathrm{ex}}\right)^2 + m^2\right)T\right]\right\rangle \\ &= -2\,\mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}T}{T}\int \mathcal{D}x\,\exp\left(-\frac{1}{2T}\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2 - \frac{m^2T}{2} + ie\oint A_\mu^{\mathrm{ex}}\,\mathrm{d}x_\mu\right)\left\langle \exp\left(ie\oint A_\mu\,\mathrm{d}x_\mu\right)\right\rangle \\ &= -2\,\mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}T}{T}\int \mathcal{D}x\,\exp\left(-\frac{1}{2T}\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2 - \frac{m^2T}{2} + ie\oint A_\mu^{\mathrm{ex}}\,\mathrm{d}x_\mu - \frac{e^2}{8\pi^2}\oint\oint \frac{\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y}{(x-y)^2}\right) \end{aligned} \tag{2.69}$$

となる。(2.23) 式との違いは、(2.69) 式には、Coulomb 相互作用による寄与が含まれていること

であり、それに伴い Wilson ループが現れている。最後の行に書き換えるのに

$$\left\langle \exp\left(ie \oint A_\mu \, \mathrm{d}x_\mu \right) \right\rangle = \exp\left(-\frac{e^2}{8\pi^2} \oint\!\!\oint \frac{\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y}{(x-y)^2} \right) \tag{2.70}$$

を用いた。これは次のようにして示すことができる。まず、

$$\left\langle \exp\left(ie \oint A_\mu \, \mathrm{d}x_\mu \right) \right\rangle = \frac{\displaystyle\int \mathcal{D}A \exp\left(-\frac{1}{4} \int \mathrm{d}^4x \, F^2 + ie \oint A_\mu \, \mathrm{d}x_\mu \right)}{\displaystyle\int \mathcal{D}A \exp\left(-\frac{1}{4} \int \mathrm{d}^4x \, F^2 \right)} \tag{2.71}$$

である。右辺の分子の指数関数の引数は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int \mathrm{d}^4x \, F^2 + ie \oint A_\mu \, \mathrm{d}x_\mu &= \int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{4} F^2 + ie \int \mathrm{d}\tau \, \delta(x - x(\tau)) A_\mu \dot{x}_\mu(\tau) \right) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu D_{\mu\nu} A_\nu + A_\mu j_\mu \right) \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$D_{\mu\nu} = \partial^2 \eta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \,, \qquad j_\mu = ie \int \mathrm{d}\tau \, \delta(x - x(\tau)) \dot{x}_\mu(\tau) \tag{2.73}$$

である。$A_\mu = A'_\mu - D^{-1}_{\mu\nu} j_\nu$ として A'_μ で書き直すと

$$\frac{1}{2} A_\mu D_{\mu\nu} A_\nu + A_\mu j_\mu = \frac{1}{2} A'_\mu D_{\mu\nu} A'_\nu - \frac{1}{2} j_\mu D^{-1}_{\mu\nu} j_\nu \tag{2.74}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \left\langle \exp\left(ie \oint A_\mu \, \mathrm{d}x_\mu \right) \right\rangle &= \frac{\displaystyle\int \mathcal{D}A' \, \exp\left(-\frac{1}{4} \int \mathrm{d}^4x \, F'^2 - \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x \, j_\mu D^{-1}_{\mu\nu} j_\nu \right)}{\displaystyle\int \mathcal{D}A \, \exp\left(-\frac{1}{4} \int \mathrm{d}^4x \, F^2 \right)} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x \, j_\mu D^{-1}_{\mu\nu} j_\nu \right) = \exp\left(-\frac{e^2}{8\pi^2} \oint\!\!\oint \frac{\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y}{(x-y)^2} \right) \end{aligned} \tag{2.75}$$

が得られる。

まず T 積分を評価する。T 積分に寄与する項は (2.23) 式と同じである。

$$\begin{aligned} V_4 \Gamma &= -4 \, \mathrm{Im} \int \mathcal{D}x \, K_0 \left(m \sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}\tau \, \dot{x}^2} \right) \exp\left(ie \oint A^{\mathrm{ex}}_\mu \, \mathrm{d}x_\mu - \frac{e^2}{8\pi^2} \oint\!\!\oint \frac{\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y}{(x-y)^2} \right) \\ &\simeq -2 \, \mathrm{Im} \int \mathcal{D}x \, \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{T_0}} \exp\left(-S_{\mathrm{particle}} - \frac{e^2}{8\pi^2} \oint\!\!\oint \frac{\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y}{(x-y)^2} \right) \end{aligned} \tag{2.76}$$

二行目では、$m\sqrt{\int \mathrm{d}\tau \, \dot{x}^2} \gg 1$ として近似した。後で確かめるが、$m\sqrt{\int \mathrm{d}\tau \, \dot{x}^2} \gg 1$ は外場が弱いという条件 (2.38) と同じである。

次に $x(\tau)$ の経路積分をする。Coulomb 相互作用が加わっているので、一般に古典解は変わる。しかし、Coulomb 相互作用の項は他の項に比べて寄与が小さいので、Coulomb 相互作用のない場合の古典解でよい近似になっている[4]。よって、古典解は (2.39) 式である。古典解が Coulomb 相互作用のない場合と同じなので、もちろん $m\sqrt{\int \mathrm{d}\tau \, \dot{x}^2} \gg 1$ は外場が弱いという条件 (2.38) と同じである。また、Coulomb 相互作用の項は古典解の円のある面内で回転不変で、さらにスケール不変なので、古典解の半径に依存しない。そのため、摂動として Wilson ループを加えた場合、古

[4]Coulomb 相互作用の項が、Coulomb 相互作用のない場合の解 (2.39) を代入した項に比べて小さいというので、循環論法である。

典解は変わらない。

新たに加わった項に古典解 (2.39) を代入すると

$$-\frac{e^2}{8\pi^2}\oint\!\!\oint\frac{\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y}{(x-y)^2}=n\frac{e^2}{4} \tag{2.77}$$

となる。これは次のようにして確かめられる。

$$x=R(\cos(2n\pi\tau),\sin(2n\pi\tau),0,0)\,,\quad y=R(\cos\left(2n\pi\tau'\right),\sin\left(2n\pi\tau'\right),0,0) \tag{2.78}$$

とパラメーター表示すると、

$$\begin{aligned}\oint\!\!\oint\frac{\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y}{(x-y)^2}&=(2n\pi)^2\int\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}\tau'\,\frac{\cos(2n\pi\tau)\cdot\cos(2n\pi\tau')+\sin(2n\pi\tau)\cdot\sin(2n\pi\tau')}{(\cos(2n\pi\tau)-\cos(2n\pi\tau'))^2+(\sin(2n\pi\tau)-\sin(2n\pi\tau'))^2}\\&=\frac{(2n\pi)^2}{2}\int\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}\tau'\,\frac{\cos(2n\pi(\tau-\tau'))}{1-\cos(2n\pi(\tau-\tau'))}\\&=-\frac{(2n\pi)^2}{2}+\frac{(2n\pi)^2}{2}\int\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}\tau'\,\frac{1}{1-\cos(2n\pi(\tau-\tau'))}\end{aligned} \tag{2.79}$$

となる。第 2 項は発散しているので、この項を無視すると (2.77) 式が得られる。

Coulomb 相互作用の寄与を含めると、古典的作用は

$$S_{\mathrm{cl}}^{(n)}=\left(\frac{\pi m^2}{eE}-\frac{e^2}{4}\right)n \tag{2.80}$$

となる。次に指数関数の前の係数を求める。Coulomb 相互作用の項は他の項に比べて小さいので、指数関数の前の係数は (2.63) 式と同じである。よって、生成率は

$$\Gamma=\frac{(eE)^2}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\exp\left(-\left(\frac{\pi m^2}{eE}-\frac{e^2}{4}\right)n\right) \tag{2.81}$$

と表される。(2.81) 式を見ると、電場が $E=4\pi m^2/e^3$ の値で生成率が指数関数で抑えられなくなるので、この値は電場の上限値であると思われるかもしれない。しかし、通常の量子電磁気学では $e^2/4\pi\ll 1$ なので、$E\ll E_{\mathrm{Schw}}$ という仮定を破ってしまう。そのため、$E\ll E_{\mathrm{Schw}}$ という範囲内では、通常の量子電磁気学には電場の上限値は存在しない。

2.5 スピノル量子電磁気学の場合

第 2.3、2.4 節では、スカラー量子電磁気学の場合を扱った。第 2.5 節ではスピノル量子電磁気学の対生成をレビューする [9]。スピノル量子電磁気学がスカラー量子電磁気学と異なる点は粒子の統計性（スピン）である。それにより、変更点がある。

Euclid 化されたスピノル量子電磁気学の作用は

$$S=\int\mathrm{d}^4x\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2+\psi^\dagger(\gamma^\mu D_\mu+im)\psi\right) \tag{2.82}$$

である。Euclid 化しているが、添え字は $0,1,2,3$ を用いる。共変微分はスカラー量子電磁気学と同じく、$D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu+ieA_\mu^{\mathrm{ex}}$ である。γ 行列は 4×4 の行列で

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&i\\i&\mathbf{0}\end{pmatrix},\qquad\gamma^i=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\sigma^i\\-\sigma^i&\mathbf{0}\end{pmatrix},\qquad\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=-2\delta_{\mu\nu} \tag{2.83}$$

である。生成率は

$$V_4\Gamma = -2\,\mathrm{Im}\,\log\int\mathcal{D}A\,\mathcal{D}\psi\,\mathrm{e}^{-S} = -2\,\mathrm{Im}\,\log\int\mathcal{D}A\,\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{eff}}} \tag{2.84}$$

$$S_{\mathrm{eff}} = \int\mathrm{d}^4x\,\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}^2 + \log\,\det(\gamma^\mu D_\mu + im) \tag{2.85}$$

と表される。$\log\,\det(\gamma^\mu D_\mu + im)$ は

$$\begin{aligned}
\log\,\det\,(\gamma^\mu D_\mu + im) &= \frac{1}{2}\log\,\det\,(\gamma^\mu D_\mu + im)(\gamma^\nu D_\nu - im)\\
&= \frac{1}{2}\log\,\det(\gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu + m^2)\\
&= \frac{1}{2}\log\,\det\left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}D_\mu D_\nu + \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][D_\mu,D_\nu] + m^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\log\,\det\left(-D^2 + m^2 + \frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathrm{op}}\,\mathrm{tr}_\Gamma\,\log\left(-D^2 + m^2 + \frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{2.86}$$

と評価される。$\mathrm{tr}_{\mathrm{op}}$ は演算子に対するトレースであり、tr_Γ は γ 行列に対するトレースである。簡単のため、結合定数が十分小さいとして近似し、固有時積分 (2.20) を用いると

$$\begin{aligned}
V_4\Gamma &= -2\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathrm{op}}\,\mathrm{tr}_\Gamma\,\log\left(-\left(\partial + ieA^{\mathrm{ex}}\right)^2 + m^2 + \frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right)\\
&= \mathrm{Im}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}T}{T}\,\mathrm{tr}_\Gamma\,\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\partial + ieA^{\mathrm{ex}}\right)^2 T - \frac{m^2T}{2}\right)\cdot\exp\left(\frac{ie}{8}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}T\right)
\end{aligned} \tag{2.87}$$

となる。量子力学での経路積分を用いると、

$$V_4\Gamma = \mathrm{Im}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}T}{T}\int\mathcal{D}x\,\exp\left(-\frac{1}{2T}\int_0^1\mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2 - \frac{m^2T}{2} + ie\int A_\mu^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}x_\mu\right)S[x;A] \tag{2.88}$$

$$S[x;A] = \mathrm{tr}_\Gamma\,\exp\left(\frac{ie}{8}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\int_0^T\mathrm{d}\tau\,F_{\mu\nu}\right) \tag{2.89}$$

となる。スカラー量子電磁気学との違いはスカラー場とスピノル場の Gauss 積分の違いから全体に $-1/2$ 倍されること、経路積分にスピン項 $S[x;A]$ が加わることの 2 点である。$F_{01} = -iE$ の定電場の場合（A_μ^{ex} として (2.34) 式を用いる）、

$$\frac{ie}{8}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\int_0^T\mathrm{d}\tau\,F_{\mu\nu} = -\begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0\\ 0 & i\sigma^1\end{pmatrix}\frac{eET}{2} \tag{2.90}$$

となるので、スピン項 $S[x;A]$ は

$$S[x;A] = \mathrm{tr}_\Gamma\,\exp\left[-\begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0\\ 0 & i\sigma^1\end{pmatrix}\frac{eET}{2}\right] = 4\cos\left(\frac{eET}{2}\right) \tag{2.91}$$

である。

(2.91) 式を (2.88) 式に代入して、T 積分をする。(2.88) 式のうち T 積分に寄与する項は

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}T}{T}\,\exp\left(-\frac{(m^2+ieE)T}{2} - \frac{1}{2T}\int_0^1\mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2\right) &= \int_0^\infty\frac{\mathrm{d}T}{T}\,\exp\left(-T - \frac{m^2+ieE}{4T}\int_0^1\mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2\right)\\
&= 2K_0\left(\sqrt{(m^2+ieE)\int_0^1\mathrm{d}\tau\,\dot{x}^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.92}$$

と、この複素共役である。ここで、$m^2 \gg eE$、$m\sqrt{\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2} \gg 1$ という仮定を置こう。これらの条件は後で確認するが同じ条件である。T 積分に寄与する項は

$$
\begin{aligned}
2K_0\left(\sqrt{(m^2+ieE)\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2}\right) &\simeq 2K_0\left(m\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2} + \frac{ieE}{m}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2}\right) \\
&\simeq \sqrt{\frac{2\pi}{m\sqrt{\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2}}}\exp\left(-m\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2} - \frac{ieE}{m}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2}\right)
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

と近似できる。よって、(2.88) 式は

$$
V_4\Gamma = 4\,\mathrm{Im}\int \mathcal{D}x\, \frac{1}{m}\sqrt{\frac{2\pi}{T_0}}\exp\left(-S_{\mathrm{particle}}\right)\cos\left(\frac{eE}{m}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2}\right) \tag{2.94}
$$

となる。cos の項は指数関数の他の項に比べて小さいので、古典解を求めるときには無視できる。よって、古典解は (2.39) 式である。(2.39) 式を代入すると、$m^2 \gg eE$、$m\sqrt{\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2} \gg 1$ は外場が弱いという条件 (2.38) と（数倍の係数を除いて）同じであると分かる。(2.39) 式を代入すると、スピン項は

$$
\cos\left(\frac{eET_0}{2}\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n \tag{2.95}
$$

となる。まとめると、生成率は

$$
\Gamma = \frac{2(eE)^2}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}n\right) \tag{2.96}
$$

と表される。(2.96) は Schwinger の公式 (2.11)（のスピン 1/2 の場合）と一致している。Coulomb 相互作用がある場合も、第 2.4 節と同じ議論をすればよい。

3 AdS/CFT 対応

第 3 章では、後の章で必要となる AdS/CFT の基礎的事項や記号についてまとめる。弦理論や AdS/CFT 対応については [20–25] などを参考にした。

AdS/CFT 対応とは「4 次元 $\mathcal{N}=4$ $U(N)$ 超対称ゲージ理論」と「$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 上の IIB 型超弦理論」が等価という主張である [19]。4 次元 $\mathcal{N}=4$ $U(N)$ 超対称ゲージ理論のことをゲージ側、$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 上の IIB 型超弦理論のことを重力側と呼ぶ。ゲージ側のパラメーターは、結合定数 g_{YM} とゲージ群のランク N であり、一方、重力側のパラメーターは、結合定数 g_{s} と AdS 半径 L である。二つの理論の結合定数は

$$
g_{\mathrm{YM}}^2 = 4\pi g_{\mathrm{s}} \tag{3.1}
$$

という関係にある。AdS 半径は $L^4 = 4\pi g_{\mathrm{s}} N \alpha'^2$ であり、ゲージ側のパラメーターを用いて表すことができる。

ラージ N 極限での議論を行うためには't Hooft 結合定数 λ

$$
\lambda = g_{\mathrm{YM}}^2 N = 4\pi g_{\mathrm{s}} N \tag{3.2}
$$

を定義すると便利である。ラージ N 極限では、ゲージ理論の有効な結合定数は $g_{\rm YM}$ ではなく、't Hooft 結合定数 λ である。

まず、λ を固定したまま

$$N \to \infty \qquad (\lambda = \text{fixed}) \tag{3.3}$$

という極限（ラージ N 極限・'t Hooft 極限）をとる。λ は固定したままなので、$g_{\rm s}$ は十分小さくなる。ラージ N 極限は弦のループ補正を無視することに対応する。さらに、

$$\lambda \to \infty \tag{3.4}$$

という極限（プラナー極限）を考える。プラナー極限では、$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ の曲率半径は大きくなるので、量子補正を無視する近似に対応する（第 3.2 節で確認する）。よって、超重力理論がいい近似になっている。

ゲージ側は強結合の $\mathcal{N} = 4$ $U(N)$ 超対称ゲージ理論となり、重力側は $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 上の超重力理論となる。それぞれの理論についてみていく。

3.1 ゲージ側

N 枚の D3-ブレーンの束の低エネルギー有効理論は 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ $U(N)$ 超対称ゲージ理論である。ゲージ群の部分群 $U(1) \simeq U(N)/SU(N)$ は D3-ブレーンの位置に対応するので、D3-ブレーン上のダイナミクスを考える場合は無視できる。そのため、4 次元 $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ 超対称ゲージ理論を考える。

4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論は 10 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称ゲージ理論を次元還元して得られる。10 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称ゲージ理論に含まれる物質場はゲージ場 A_M $(M = 0, \cdots, 9)$ と Majorana-Weyl スピノル場 Ψ で、どちらもゲージ群の随伴表現に属する。その作用は

$$S = \frac{1}{2g_{\rm YM}^2} \int \mathrm{d}^{10}x \, \mathrm{tr} \left(-\frac{1}{2} F_{MN}^2 - i\bar{\Psi}\Gamma^M D_M \Psi \right) \tag{3.5}$$

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M - i[A_M, A_N] \tag{3.6}$$

$$D_M \Psi = \partial_M \Psi - i[A_M, \Psi] \tag{3.7}$$

で与えられる。ただし、ゲージ群の生成子 T^a は

$$\mathrm{tr}\, T^a T^b = \delta_{ab} \tag{3.8}$$

と規格化されているとする[5]。

この理論を T^6 コンパクト化する。時空を $\mathbb{R}^4 \times T^6$ のように 4 次元 Minkowski 時空と 6 次元トーラスに分解し、$x^\mu \in \mathbb{R}^4$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$、$y^I \in T^6$ $(I = 1, \cdots, 6)$ のように座標を取る。ただし、$y^I \sim y^I + 1$ と同一視されているとする。場 A_M, Ψ を

$$A_{M=0\sim3}(x, y) \quad \longrightarrow \quad A_\mu(x)\,, \quad (\mu = 0, \cdots, 3)$$

[5] 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論のゲージ群が自発的に $SU(N) \times U(1)$ と破れたときに、$U(1)$ のゲージ場の運動項の係数が $-1/4$ になるような規格化を採用した。

$$
\begin{aligned}
A_{M=4\sim 9}(x,y) \quad &\longrightarrow \quad \Phi_I(x)\,, \quad (I=1,\cdots,6) \\
\Psi(x,y) \quad &\longrightarrow \quad \Psi(x)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
F_{MN}^2 &= F_{\mu\nu}^2 + F_{IJ}^2 + 2F_{\mu I}^2 \\
&= F_{\mu\nu}^2 - [\Phi_I,\Phi_J]^2 + 2(D_\mu\Phi_I)^2 \qquad (3.10)\\
\bar{\Psi}\Gamma^M D_M\Psi &= \bar{\Psi}\Gamma^\mu D_\mu\Psi + \bar{\Psi}\Gamma^I D_I\Psi \\
&= \bar{\Psi}\Gamma^\mu D_\mu\Psi - i\bar{\Psi}\Gamma^I[A_I,\Psi] \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

となるので、次元還元すると作用は

$$
S_{\mathcal{N}=4} = \frac{1}{2g_{\rm YM}^2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{tr}\left(-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^2 - (D_\mu\Phi_I)^2 + \frac{1}{2}[\Phi_I,\Phi_J]^2 - i\bar{\Psi}\Gamma^\mu\hat{D}_\mu\Psi - \bar{\Psi}\Gamma^I[\Phi_I,\Psi]\right) \tag{3.12}
$$

となる。(3.12) 式が 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の作用である。また、4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論に含まれる場は、

- ゲージ場 A_μ
- 実スカラー場 Φ_I , $(I=1,\cdots,6)$
- 10 次元 Majorana-Weyl スピノル Ψ

であり、すべてゲージ群の随伴表現に属する。

後の章で、ゲージ群が $SU(N+1)$ から $SU(N)\times U(1)$ へと破れた場合を議論するので、ここでまとめておく[6]。ゲージ群を自発的に $SU(N)\times U(1)$ へ破るために $\hat{\Phi}_I$ に

$$
\langle\hat{\Phi}_I\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m\theta_I \end{pmatrix}, \qquad \sum_{I=1}^{6}(\theta_I)^2 = 1 \tag{3.13}
$$

という真空期待値を与える[7]。場を

$$
\hat{A}_\mu = \begin{pmatrix} A_\mu & \omega_\mu \\ \omega_\mu^\dagger & a_\mu \end{pmatrix}, \qquad \hat{\Phi}_I = \begin{pmatrix} \Phi_I & \omega_I \\ \omega_I^\dagger & m\theta_I + \phi_I \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \Psi & \chi \\ \chi^\dagger & \psi \end{pmatrix} \tag{3.14}
$$

と展開して、理論を書き直す。$A_\mu\,,\Phi_I\,,\Psi$ は $SU(N)$ の随伴表現として変換する。$\omega_\mu\,,\omega_I\,,\chi$ は $SU(N)$ の基本表現で変換し、$U(1)$ 電荷 $g_{\rm YM}$ を持つ。$\omega_\mu\,,\omega_I\,,\chi$ は 1/2-BPS 粒子で、$\mathcal{N}=4$ 超対称性代数の多重項（W-多重項と呼ぶ）を組んでいる。W-多重項のうち、ω_μ は Higgs 機構によって質量を持つベクトル粒子なので、W ボソンである。そのため、W-多重項に含まれる ω_I はスピン 0 のスカラー粒子であっても慣習的に「W ボソン」と呼ばれる。また、ω_I は $SU(N)$ の基本表現で変換し、$U(1)$ 電荷を持つので、「クォーク」とも呼ばれる。これらの用語はどれも紛らわしいが、以後 ω_I のことを「クォーク」と呼ぶことにしよう。

展開した場で作用を表すと、（ここでは、Euclid 化した作用とする）

$$
\hat{S}_{\mathcal{N}=4} = S_{\mathcal{N}=4}^{SU(N)} + S_{\mathcal{N}=4}^{U(1)} + S_{\rm W} \tag{3.15}
$$

[6]本稿で「$SU(N)\times U(1)$ $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論」という場合は、「Higgs 機構によりゲージ群が $SU(N+1)$ から $SU(N)\times U(1)$ へと破れた $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論」を意味する。

[7]ゲージ群が $SU(N+1)$ の場や作用に関してはハット（ˆ）をつけておく。

となる [31,37]。$S^{SU(N)}_{\mathcal{N}=4}, S^{U(1)}_{\mathcal{N}=4}$ はそれぞれゲージ群が $SU(N)\,, U(1)$ の $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の作用である。$S_{\rm W}$ は W-多重項の作用で

$$S_{\rm W} = \frac{1}{g^2_{\rm YM}} \int {\rm d}^4 x \left((D_\mu \omega_I)^\dagger D^\mu \omega^I + \omega_I^\dagger \left(\Phi_K - m\theta_K\right)^2 \omega_I - m^2 \omega_I^\dagger \theta_I \theta_J \omega_J + \cdots \right) \tag{3.16}$$

である。$\cdots$ は W-多重項のベクトル場やフェルミオン場の運動項と高次の相互作用項である。共変微分は

$$D_\mu \omega_I = \partial_\mu \omega_I - i A_\mu \omega_I + i a_\mu \omega_I \tag{3.17}$$

である。

ゲージ群を $SU(N+1) \to SU(N) \times U(1)$ と破ることは、D-ブレーンでは、$N+1$ 枚に重なった D3-ブレーンの束から 1 枚だけ D3-ブレーンを離すことに対応する。W-多重項の粒子は、N 枚の D3-ブレーンの束と 1 枚の D3-ブレーンをつなぐ開弦（F-string）に対応する。

モノポール

Higgs 場とゲージ場からなる系において、Higgs 場の真空期待値によりゲージ群が $SU(N+1)$ から $SU(N) \times U(1)$ に自発的に破れた場合、't Hooft-Polyakov モノポールが存在する。モノポールを表す非自明な配位が安定に存在するためには、S^2（3 次元空間の無限遠方）から G/H（今の場合 $G = SU(N+1)\,, H = SU(N) \times U(1)$）への写像がトポロジカルな量子数で分類されればよい [26]。S^2 から $SU(N) \times U(1)$ への写像は

$$\pi_2(SU(N+1)/(SU(N) \times U(1))) \simeq \pi_1(SU(N) \times U(1)) \simeq \pi_1(U(1)) \simeq \mathbb{Z} \tag{3.18}$$

のように、$\mathbb{Z}$ で分類される。よって、ゲージ群が $SU(N+1)$ から $SU(N) \times U(1)$ に自発的に破れた場合、モノポールが存在する[8]。

ゲージ群が自発的に $SU(N+1)$ から $SU(N) \times U(1)$ へ破れた $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の場合にも、モノポールが存在することが知られている [27]。W-多重項の粒子と同様にモノポールが D-ブレーンを用いると、どのように表されるか見よう。

IIB 型超弦理論には、F-string と D-string（D1-ブレーン）があり、それぞれ NS-NS 場 B_2 と R-R 場 C_2 と結合する[9]。$SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性によって、F-string と D-string を入れ替えることができるので、電場と結合していた F-string に双対な D-string は磁場に結合する [28–30]。そのため、モノポールは N 枚の D3-ブレーンの束と 1 枚の D3-ブレーンをつなぐ D-string に対応する。

3.2 重力側

N 枚の D3-ブレーンの束は、ラージ N 極限では $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 時空に置き換わる。$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 時空の計量は

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{r^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + L^2 \left(\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2} + \mathrm{d}\Omega_5^2 \right), \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1) \tag{3.19}$$

[8] モノポールが存在するための条件として運動方程式の解を満たす、有限のエネルギーを持つなども必要である。

[9] 本稿では、NS-NS 場は B_2、R-R 場は C_0, C_2, C_4 と表す。イタリック体の添え字は場の形式を表す。例えば、B_2 は 2 形式場である。B_2 の成分は B_{01} のように書くことにする。

と表される。$z = L^2/r$ と変数変換して計量を書き換えると、

$$\mathrm{d}s^2 = \underbrace{\frac{L^2}{z^2}\left(\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + \mathrm{d}z^2\right)}_{\mathrm{AdS}_5} + \underbrace{L^2 \mathrm{d}\Omega_5^2}_{S^5} \tag{3.20}$$

となる。(3.20) 式から実際に計量が $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 時空を表しており、L が AdS_5 と S^5 の両方の曲率半径であると分かる。よって、プラナー極限（$\lambda \to \infty$）では、曲率半径が大きくなる。

N 枚の D3-ブレーンを $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ の背景時空に置き換えた場合、W-多重項の粒子は 1 枚の D3-ブレーンに端を持ち、そこから $r = 0$ のホライズン（N 枚の D3-ブレーンの束のあった位置）へとのびた開弦に対応する。

3.3 開弦の作用・運動方程式・境界条件

第 3.3 節では、開弦（F-string）の作用・運動方程式・境界条件を与えておく。ホログラフィックにモノポール対生成やダイオン対生成を議論する場合には D-string の作用・運動方程式・境界条件が必要となるが、本稿で扱うのは F-string の場合と張力の形を除いて変更がないので、省略する。D-string の相互作用については第 3.4 節にまとめる。

まず、開弦に対する Euclid 化された作用を与えておこう。背景場として B_2 がある場合、作用は南部・後藤作用と B_2 と開弦の相互作用項の和として

$$S = S_{\mathrm{NG}} + S_{B_2} \tag{3.21}$$

$$S_{\mathrm{NG}} = T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{\det G}\,, \qquad G_{ab} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^b} \tag{3.22}$$

$$S_{B_2} = -T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma\, B_{\mu\nu}\partial_\tau x^\mu \partial_\sigma x^\nu \tag{3.23}$$

と書ける。G_{ab} は誘導計量であり、$\det G$ はその行列式である。本稿では簡単のため、S_{B_2} を $\int B_2$ と書くこともある。

次に、運動方程式を求めよう。まず南部・後藤作用 (3.22) の変分は

$$\begin{aligned}
\delta S_{\mathrm{NG}} &= T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma\, \delta\sqrt{\det G} \\
&= T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{\det G}\, G^{ab}\left(g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a}\frac{\partial \delta x^\nu}{\partial \sigma^b} + \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^b}\right) \\
&= -T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma^b}\left(\sqrt{\det G}G^{ab}g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a}\right)\delta x^\nu + \frac{T_{\mathrm{F}}}{2}\int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{\det G}G^{ab}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^b}\delta x^\rho \\
&\qquad + T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma^b}\left(\sqrt{\det G}G^{ab}g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a}\delta x^\nu\right) \\
&= -T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \sigma^b}\left(\sqrt{\det G}G^{ab}g_{\mu\rho}\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\det G}G^{ab}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^b}\right]\delta x^\rho \\
&\qquad + T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\sqrt{\det G}G^{a\sigma}g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a}\delta x^\nu\right)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

である。最後の式に書き換えるために、τ の境界での変分の値は 0 としているので、τ の全微分は消えることを用いた。次に、B_2 と開弦の相互作用項 (3.23) の変分を行う。簡単のため、B_2 の成

分は定数としよう。

$$\delta S_{B_2} = -T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma\, B_{\mu\nu} \delta \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma} \right) = -T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma\, B_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial \sigma} \right) \tag{3.25}$$

τ 積分の境界での変分は 0 であることに注意して $\partial \delta x / \partial \tau$ の項を部分積分すると

$$\delta S_{B_2} = -T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma\, B_{\mu\nu} \left(-\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \tau \partial \sigma} \delta x^\mu + \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial \sigma} \right) = -T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma\, B_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \delta x^\nu \right) \tag{3.26}$$

となる。

南部・後藤作用の変分 (3.24) から、運動方程式として

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^b} \left(\sqrt{\det G} G^{ab} g_{\mu\rho} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\det G} G^{ab} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^b} = 0 \tag{3.27}$$

が得られる。変分問題が well-defined であるために、

$$\begin{aligned} \text{Robin 境界条件}: \quad & \sqrt{\det G} G^{a\sigma} g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a} - B_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = 0 \\ \text{Dirichlet 境界条件}: \quad & \delta x^\mu = 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

のどちらかの境界条件が満たされなければならない。B_2 があるので、Neumann 境界条件の代わりに、Robin 境界条件となる。

3.4 D-string と R-R 場の相互作用

モノポール対生成とダイオン対生成を AdS/CFT 対応に基づいて議論するときに、D-string と R-R 場の相互作用が必要になる。F-string と NS-NS 場の相互作用と異なる点があるのでまとめておく。

Dp-ブレーンと R-R 場 C の相互作用は

$$\mu_p \int \left(C\, \mathrm{e}^{B_2 + (2\pi\alpha')F_2} \right)_{p+1}, \qquad \mu_p^2 = 2\pi (4\pi^2 \alpha')^{3-p} \tag{3.29}$$

で与えられる。C は R-R 場の形式的な和で

$$C = \sum_p C_p \tag{3.30}$$

である。D1-ブレーンの場合に、相互作用を書き下すと、

$$\mu_1 \int \left[C_2 + C_0 \left(B_2 + (2\pi\alpha') F_2 \right) \right] \tag{3.31}$$

となる。

4 Wilson ループ

ゲージ理論において重要な演算子として Wilson ループ

$$W[\mathcal{C}] = \mathrm{tr}\, \mathcal{P} \exp \left(i \int \mathrm{d}\tau\, A_\mu(x) \dot{x}^\mu \right) \tag{4.1}$$

がある。Wilson ループは 4 次元時空中の閉じた経路 $\mathcal{C}$ に依存している。また、tr はゲージ群のある表現に関する和であり、$\mathcal{P}$ は経路順序積を表す。本稿では基本表現の場合のみ扱う。

物理的には、Wilson ループは基本表現に属する非常に重いクォークの伝播に対するゲージ場の寄与を表す。クォークの経路 $\mathcal{C}$ を固定したので、ゆらぎを無視できるほどクォークは重くなければならない。経路 $\mathcal{C}$ が時間方向に T、空間方向に U 拡がった長方形（$T \gg U$ とする）であれば、Wilson ループの期待値は

$$\langle W[\mathcal{C}] \rangle \sim \mathrm{e}^{-TV(U)} \tag{4.2}$$

と振る舞う。ここで、$V(U)$ はクォーク・反クォークポテンシャルである。

第 4 章では、まず $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論での Wilson ループを与える。$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論では、ゲージ場に加え、スカラー場からの寄与もある。次に、直線と円形の軌跡を持つ Wilson ループの期待値を求める。最後に $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論でのクォーク・反クォークポテンシャルを求める。第 4 章を書く上で、[32] を参考にした。

4.1 一般論

4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の Wilson ループは 10 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称ゲージ理論から得られる。10 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称ゲージ理論の Wilson ループは

$$\begin{aligned} W[\mathcal{C}] &= \frac{1}{N} \operatorname{tr} \mathcal{P} \exp \left(i \int \mathrm{d}\tau \, A_M(x) \dot{x}^M \right) \\ &= \frac{1}{N} \operatorname{tr} \mathcal{P} \exp \left(i \int \mathrm{d}\tau \, \left(A_\mu(x) \dot{x}^\mu + \Phi_I(x) \dot{y}^I \right) \right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

と表される。第 3 章で次元還元したように場は $x \in \mathbb{R}^4$ のみに依存するとした。(4.3) 式が 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の Wilson ループの一般的な形であり、ベクトル場 A_μ だけでなく、スカラー場 Φ_I からの寄与もある。

AdS/CFT 対応の枠組みで用いられる Wilson ループは

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0 \tag{4.4}$$

を満たすものである [37,38]。この場合、Wilson ループは

$$W[\mathcal{C}] = \frac{1}{N} \operatorname{tr} \mathcal{P} \exp \left(i \int \mathrm{d}\tau \, \left(A_\mu(x) \dot{x}^\mu + \theta^I(\tau) \Phi_I(x) \sqrt{-\dot{x}^2} \right) \right) , \qquad \theta^I = \frac{y^I}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \tag{4.5}$$

と表される。$\sum_{I=1}^{6} (\theta^I)^2 = 1$ を満たすので、θ^I は S^5 上の点とみなすことができる。4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の Wilson ループは 4 次元時空中の閉じた経路 $\mathcal{C}$ と $\theta^I(\tau)$ に依存している。

(4.5) 式の Wilson ループは時空が Lorentzian の場合である。AdS/CFT 対応では主に Euclidean の場合の Wilson ループが用いられる。Euclidean の場合、Wilson ループは

$$W[\mathcal{C}] = \frac{1}{N} \operatorname{tr} \mathcal{P} \exp \left(\int \mathrm{d}\tau \, \left(i A_\mu(x) \dot{x}^\mu + \theta^I(\tau) \Phi_I(x) \sqrt{\dot{x}^2} \right) \right) \tag{4.6}$$

と表される。スカラー場の係数に i があるかないかで Lorentzian か Euclidean か判断できる。

Wilson ループの期待値は、AdS/CFT 対応では開弦の世界面の境界が $\mathcal{C}$ であるような弦理論の分配関数を計算して得られる。つまり

$$\langle W[\mathcal{C}] \rangle = Z_{\text{string theory}}[\mathcal{C}] \tag{4.7}$$

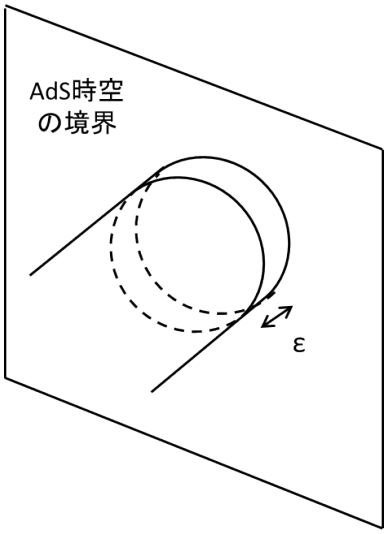

図 3: AdS 時空のカットオフ。

である。プラナー極限では、弦理論の分配関数は境界が $\mathcal{C}$ の世界面の極小面積で表されるので、

$$\langle W[\mathcal{C}]\rangle \simeq \mathrm{e}^{-T_{\mathrm{F}}(\mathrm{Area}[\Sigma])} \tag{4.8}$$

である [33, 34]。Area[Σ] は境界が $\mathcal{C}$ である世界面の極小となる面積を表す。よって、Wilson ループの期待値を AdS/CFT 対応を用いて計算するには、AdS 時空上の極小となる面積を求めればよい。世界面の面積は、南部・後藤作用 (3.22) を用いて、

$$T_{\mathrm{F}}(\mathrm{Area}[\Sigma]) = S_{\mathrm{NG}} = T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{\det G} \tag{4.9}$$

と表される。

AdS 時空の計量は (3.20) 式なので、境界 ($z = 0$) 付近で計量は発散する。そのため、世界面の面積は発散する。世界面の面積を正則化するため、AdS 時空の動径座標にカットオフ $z = \epsilon$ を導入する。幾何学的には AdS 時空中の高さ ϵ の円筒の面積を極小となる世界面の面積から引くことに対応する（図 3）。

4.2 直線 Wilson ループ

境界が直線の場合、

$$x_0 = \tau\,, \qquad z = z(\sigma) \tag{4.10}$$

が運動方程式を満たしている。誘導計量は

$$[G_{ab}] = \frac{L^2}{z^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z'^2 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

と書けるので、古典的作用は

$$S_{\mathrm{cl}} = T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma\, \frac{L^2}{z^2} z' = T_{\mathrm{F}} L^2 \int \mathrm{d}\tau \int_{\epsilon}^{\infty} \mathrm{d}z\, \frac{1}{z^2}$$

$$= T_{\mathrm{F}} L^2 \left[-\frac{1}{z} \right]_{\epsilon}^{\infty} \int \mathrm{d}\tau = \frac{T_{\mathrm{F}} L^2}{\epsilon} \int \mathrm{d}\tau \tag{4.12}$$

となる。一般論で述べたように、カットオフスケール ϵ をゼロに持っていくと、古典的作用（世界面の面積）は発散する。発散部分を引くと $S_{\mathrm{cl}} = 0$ となるので、Wilson ループの期待値は

$$\langle W[\mathcal{C}] \rangle_{\mathrm{ren}} = 1 \tag{4.13}$$

となる。

4.3 円形 Wilson ループ

境界が円形の Wilson ループは、Drukker-Gross-大栗と Berenstein-Corrado-Fischler-Maldacena によって求められた [35,36]。極小面積を求めるには南部・後藤作用から得られる運動方程式の解で、境界で円形となるものを求めればよい。しかし、境界が円形の場合は適当な ansatz を置いて運動方程式を簡略化しても、解くのは容易ではない。そのため、第 4.2 節で得られた直線の解 (4.10) を特殊共形変換して得ることにする [36]。そして特殊共形変換で得られた解が実際に運動方程式を満たしていることを確認する。

特殊共形変換は

$$x_i' = \frac{x_i + b_i(x^2 + z^2)}{1 + 2b \cdot x + b^2(x^2 + z^2)}\,, \qquad z' = \frac{z}{1 + 2b \cdot x + b^2(x^2 + z^2)} \tag{4.14}$$

で与えられる。$x_1\,, x_2\,, x_3 = 0$ で表される直線を特殊共形変換すると（ただし、$b_0\,, b_1 \neq 0\,, b_2\,, b_3 = 0$ とする）、

$$x_0' = \frac{x_0 + b_0(x^2 + z^2)}{1 + 2b \cdot x + b^2(x^2 + z^2)}\,, \quad x_1' = \frac{b_1(x^2 + z^2)}{1 + 2b \cdot x + b^2(x^2 + z^2)}\,, \quad z' = \frac{z}{1 + 2b \cdot x + b^2(x^2 + z^2)}$$

に移される。ここで、$x^2 = x_0^2\,, b^2 = b_0^2 + b_1^2$ である。

$$\begin{aligned}
(x_0')^2 + (x_1')^2 + (z')^2 &= \frac{x^2 + 2b \cdot x(x^2 + z^2) + b^2(x^2 + z^2)^2 + z^2}{\left(1 + 2b \cdot x + b^2(x^2 + z^2)\right)^2} \\
&= \frac{x^2 + z^2}{1 + 2b \cdot x + b^2(x^2 + z^2)} \\
&= \frac{x_1'}{b_1}
\end{aligned}$$

から直線の解を特殊共形変換すれば、原点が $(x_0', x_1', z') = (0, -1/2b_1, 0)$ であり、半径が $1/2b_1$ の円が得られる。よって、境界で円形の解は、原点の位置や半径をうまく選べば、

$$x_0 = x(\sigma)\cos\tau\,, \qquad x_1 = x(\sigma)\sin\tau\,, \qquad z = z(\sigma)\,, \qquad x^2 + z^2 = c^2 = \mathrm{const.} \tag{4.15}$$

と表される。特殊共形変換で得られた解 (4.15) が運動方程式を満たしていることを確認しよう。

まず

$$x_0 = x(\sigma)\cos\tau\,, \qquad x_1 = x(\sigma)\sin\tau\,, \qquad z = z(\sigma) \tag{4.16}$$

という ansatz を置いて、$x(\sigma)\,, z(\sigma)$ の運動方程式を求める。誘導計量は

$$[G_{ab}] = \frac{L^2}{z^2}\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x'^2 + z'^2 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

と書けるので、南部・後藤作用 (3.22) は

$$S = T_{\mathrm{F}} L^2 \int \mathrm{d}^2\sigma\, \frac{x}{z^2}\sqrt{x'^2 + z'^2} = T_{\mathrm{F}} L^2 \int \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}x\, \frac{x}{z^2}\sqrt{1 + z'^2} \tag{4.18}$$

である。$z(x)$ が満たすべき運動方程式は

$$2x(1 + z'^2) + z(z' + z'^3 + xz'') = 0 \tag{4.19}$$

である。$z = \sqrt{c^2 - x^2}$ を代入すると、確かに運動方程式を満たしていることが分かる。

古典的作用は

$$S_{\mathrm{cl}} = T_{\mathrm{F}} L^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\sigma\, \frac{x}{z^2}\sqrt{x'^2 + z'^2} = T_{\mathrm{F}} L^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\tau \int_\epsilon^c \mathrm{d}z\, \frac{c}{z^2} = \sqrt{\lambda}\left(\frac{c}{\epsilon} - 1\right) \tag{4.20}$$

となる。発散部分を引くと、$S_{\mathrm{cl}} = -\sqrt{\lambda}$ となるので

$$\langle W[\mathcal{C}]\rangle_{\mathrm{ren}} = \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}} \tag{4.21}$$

となる。Wilson ループの期待値は古典解に含まれていた長さのスケール c（古典解の半径）に依存しない。これは理論のスケール不変性から期待されることと一致する。

4.4 クォーク・反クォークポテンシャル

クォーク・反クォークポテンシャルは Rey-Yee と Maldacena によって求められた [33, 34]。第 4.4 節では Maldacena の議論 [34] に従う。

クォークは N 枚の D3-ブレーンの束と 1 枚の D3-ブレーンをつなぐ開弦なので（つまり、W-多重項のスカラー場）、クォーク・反クォークポテンシャルを求めるためには、図 4 のブレーンの配位を考えればよい。時間方向は省略しているので、時間方向を含めると、クォーク・反クォークのプローブ D3-ブレーン上での軌跡は長方形となる。ラージ N 極限では、N 枚の D3-ブレーンの束は AdS 時空に置き換えられ、図 5 の配位になる。図 5 のエネルギー（世界面の面積）からクォーク・反クォークポテンシャルを求められるが、クォークの無限大の静止質量により図 5 のエネルギーは無限大となる。そのため、図 5 から静止質量を引いたものがクォーク・反クォークポテンシャルに対応する。

世界面の座標として、

$$x_0 = \tau\,, \qquad x_1 = \sigma\,, \qquad r = r(\sigma) \tag{4.22}$$

という静的な配位を考える。$-T/2 < \tau < T/2$ とし、T は十分大きいとする。$x_1 = x$ とし、$x = -U/2$ にクォークを、$x = +U/2$ に反クォークを置く。また、θ^I は定数 θ_0^I とする。誘導計量は

$$[G_{ab}] = \begin{pmatrix} \dfrac{r^2}{L^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{r^2}{L^2} + \dfrac{L^2}{r^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

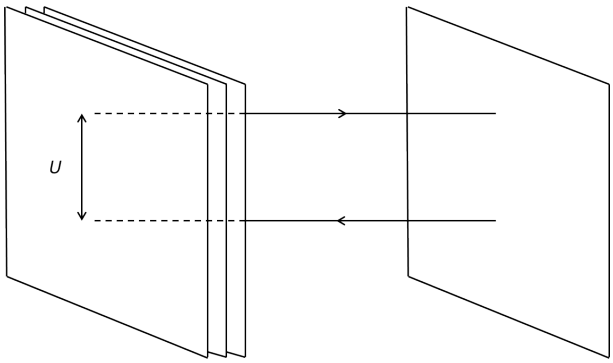

図 4: クォーク・反クォークポテンシャルを求めるときのブレーンの配位。

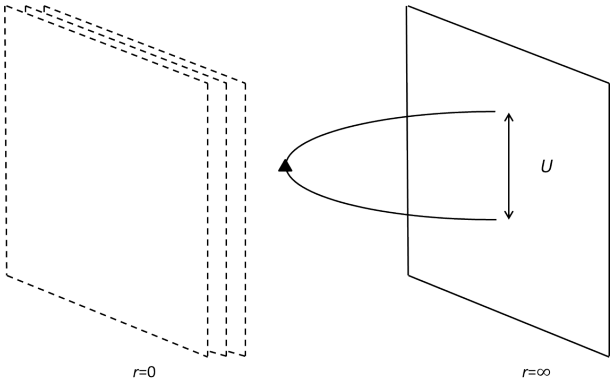

図 5: ラージ N 極限を取った場合の図 4。点線はもともと D3-ブレーンがあったことを表している。

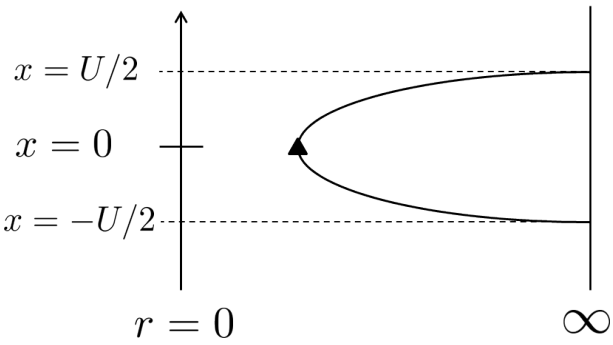

図 6: クォーク・反クォークポテンシャルを計算するときの開弦の形。

である。よって、弦の世界面の作用は

$$
\begin{aligned}
S &= T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 + \frac{r^4}{L^4}} \\
&= 2T_{\mathrm{F}} T \int_0^{U/2} \mathrm{d}x \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{r^4}{L^4}}
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

となる。$\mathcal{L}=\sqrt{(\mathrm{d}r/\mathrm{d}x)^2+r^4/L^4}$ とすると、$\mathcal{L}$ は x にあらわに依存しないので、

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x r)}\partial_x r-\mathcal{L}=\frac{(\mathrm{d}r/\mathrm{d}x)^2}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{r^4}{L^4}}}-\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{r^4}{L^4}}=-\frac{r^4/L^4}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{r^4}{L^4}}} \tag{4.25}$$

は保存量である。$x=0$ で $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x=0, r=r_0$ であるとすれば、

$$\frac{r^4/L^4}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{r^4}{L^4}}}=\frac{r_0^2}{L^2}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=\frac{r^2}{L^2}\sqrt{\frac{r^4}{r_0^4}-1} \tag{4.26}$$

となる。$y=r/r_0$ と変数変換すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{r_0}{L^2}y^2\sqrt{y^4-1} \tag{4.27}$$

が得られる。(4.27) 式を積分すると

$$x=\frac{L^2}{r_0}\int_1^y\frac{\mathrm{d}y}{y^2\sqrt{y^4-1}} \tag{4.28}$$

が得られる。r_0 は $y\to\infty$ とした

$$\frac{U}{2}=\frac{L^2}{r_0}\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}y}{y^2\sqrt{y^4-1}}=\frac{L^2}{r_0}\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2} \tag{4.29}$$

から求まる。ここで、

$$\begin{aligned}\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}y}{y^2\sqrt{y^4-1}}&=\frac{1}{4}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}t}{t^{1/2}(1+t)^{5/4}}=\frac{1}{4}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\\&=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)}=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{2}\pi}{\frac{1}{4}\Gamma(1/4)^2}\\&=\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\frac{1}{4}\Gamma(1/4)^2}\end{aligned} \tag{4.30}$$

を用いた。最初の等式で $t=y^4-1$ と変数変換し、$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}\,,\Gamma(3/4)=\sqrt{2}\pi/\Gamma(1/4)\,,\Gamma(5/4)=\Gamma(1/4)/4$ を用いた。また、$B(x,y)$ はベータ関数であり、積分表示では

$$B(x,y)=\int_0^\infty\mathrm{d}t\,\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} \tag{4.31}$$

と表される。

Euclid 化しているので、作用はエネルギー E と $S=ET$ という関係にある。よって

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{\pi\alpha'}\int_0^{U/2}\mathrm{d}x\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{r^4}{L^4}}=\frac{1}{\pi\alpha'}\int_{r_0}^\infty\mathrm{d}r\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{r^4}{L^4}}\\&=\frac{1}{\pi\alpha'}\int_{r_0}^\infty\mathrm{d}r\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\frac{r^4}{L^2r_0^2}=\frac{1}{\pi\alpha'}\int_{r_0}^\infty\mathrm{d}r\,\frac{r^2}{r^2\sqrt{r^4/r_0^4-1}}\frac{r^4}{L^2r_0^2}=\frac{r_0}{\pi\alpha'}\int_1^\infty\mathrm{d}y\,\frac{y^2}{\sqrt{y^4-1}}\end{aligned} \tag{4.32}$$

である。エネルギー (4.32) は発散するので正則化しなければならない。開弦が単独で存在する場合の静止質量の寄与を引くと

$$E=\frac{r_0}{\pi}\int_1^\infty\mathrm{d}y\,\frac{y^2}{\sqrt{y^4-1}}-\frac{r_0}{\pi}\int_0^\infty\mathrm{d}y=\frac{r_0}{\pi}\left[\int_1^\infty\mathrm{d}y\,\left(\frac{y^2}{\sqrt{y^4-1}}-1\right)-1\right]$$

$$= -\frac{4\pi^2(2g_{\rm YM}^2 N)^{1/2}}{\Gamma(1/4)^4 U} \tag{4.33}$$

という有限のエネルギーが得られる。$\int_1^\infty \mathrm{d}y\,(y^2/\sqrt{y^4-1}-1)$ を評価するには、y^ϵ をかけてそれぞれ分けて積分するとよい。初項は

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \mathrm{d}y\,\frac{y^{2+\epsilon}}{\sqrt{y^4-1}} &= \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^{1/2}(1+t)^{(1-\epsilon)/4}} = \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{2},-\frac{1+\epsilon}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(-(1+\epsilon)/4)}{\Gamma((1-\epsilon)/4)}\end{aligned} \tag{4.34}$$

であり、第二項は

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \mathrm{d}y\,y^\epsilon &= \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^{(1-\epsilon)/4}} = \frac{1}{4}B\left(1,-\frac{1+\epsilon}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4}\frac{\Gamma(1)\Gamma(-(1+\epsilon)/4)}{\Gamma((3-\epsilon)/4)}\end{aligned} \tag{4.35}$$

である。$\epsilon \to 0$ とすると、

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \mathrm{d}y\,\left(\frac{y^2}{\sqrt{y^4-1}}-1\right) &= \frac{1}{4}\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4)}-\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3/4)}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}}{4\Gamma(1/4)^2}+1\end{aligned} \tag{4.36}$$

が得られる。ここで、$\Gamma(-1/4) = -4\Gamma(3/4)$ を用いた。

得られた結果の物理的意味を考察しよう。エネルギーは $E \propto \sqrt{\lambda}/U$ と振る舞う。$E \propto 1/U$ という振る舞いは理論の共形不変性から期待される結果と一致しており、自然である。驚くべきことは、$E \propto \sqrt{\lambda}$ という振る舞いである。摂動論的な計算では $E \propto g_{\rm YM}^2 \propto \lambda$ となるはずである。しかし、$E \propto \sqrt{\lambda}$ と振る舞っており、摂動論の結果と異なっている。そのため、この振る舞いは非摂動論的である。

AdS/CFT 対応に基づいて重力側の計算によりエネルギーの λ 依存性が分かったが、Erickson-Semenoff-Zarembo によって、ゲージ側でも無限個のゲージ場のプロパゲーターを足しあげると同じ λ 依存性を持つことが示された [39, 40]。

5 Holographic Schwinger effect

AdS/CFT 対応の文脈で Schwinger 効果を議論したのは、Gorsky-Saraikin-Selivanov が初めてである [16]。その後、Semenoff-Zarembo は「世界線の経路積分形式」に基づいて $\mathcal{N}=4$ $SU(N)\times U(1)$ 超対称ゲージ理論でのクォーク対の生成率の表式を求めた [14]。生成率の計算過程に Wilson ループが現れることから、AdS/CFT 対応を用いて生成率を計算する提案をして、生成率と電場の上限値を求めた。なお、Semenoff-Zarembo の提案は Gorsky-Saraikin-Selivanov の提案と同じである。([16] では、様々な Schwinger 効果を計算する提案をしている。Semenoff-Zarembo の提案と同じ提案はそのうちの一つである。) しかし、Gorsky-Saraikin-Selivanov は、その提案が正しいと思われる根拠を提示しておらず、さらに計算結果は誤っていた。

Semenoff-Zarembo によって提案された AdS/CFT 対応の方法をモノポール対生成やダイオン対生成、有限温度でのクォーク対生成の場合に拡張したのが、Bolognesi-Kiefer-Rabinovici である [15]。

第 5 章ではクォーク対生成に関しては [14] に基づいてレビューする。モノポールやダイオンの場合は後述するように [15] での扱いは不十分と思われるので、[15] のレビューをした後に、独自の考察をする。

5.1 クォーク・反クォーク対生成

$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論において Schwinger 効果を考えたいので、$U(1)$ ゲージ理論が必要である。第 3.1 節で述べたように、Higgs 機構により、ゲージ群を $SU(N+1)$ から $SU(N)\times U(1)$ へ破る。

最初にプローブ D3-ブレーンを記述する DBI 作用から期待される電場の性質を見る。次に第 2 章の「世界面の経路積分形式」に基づいて、$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論でのクォーク対の生成率を計算する。そして、ホログラフィックに計算する方法を述べ、実際に生成率を計算する。

5.1.1 DBI 作用から期待される電場の性質

$N+1$ 枚の D3-ブレーンの束から離した 1 枚の D3-ブレーンをプローブとして考える。ラージ N、プラナー極限では、N 枚の束の D3-ブレーンを $\mathrm{AdS}_5\times S^5$ 時空に置き換えられるので、プローブ D3-ブレーンをその曲がった時空に埋め込まれた古典的な物体として扱える。プローブ D3-ブレーンは 4 次元時空 x^μ 方向に広がっており、動径方向の位置は r_0 で、S^5 上のある一点 $\theta^I=\mathrm{const.}$ にあるとする。プローブ D3-ブレーン上にはゲージ場 A_μ がある。場の強さ $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ だけではゲージ不変ではないので、物理的に意味のある場の強さは $F_{\mu\nu}$ と $B_{\mathscr{2}}$ を組み合わせた

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}=B_{\mu\nu}+2\pi\alpha' F_{\mu\nu} \tag{5.1}$$

である [23]。$\mathcal{F}_{\mu\nu}$ は $1+3$ 次元時空間上の電磁場を表している。プローブ D3-ブレーン上に電場 $E=\mathcal{F}_{01}/2\pi\alpha'$ を印加すると[10]、プローブ D3-ブレーンを記述する DBI 作用は

$$S=-T_{\mathrm{D3}}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-\det(g_{\mu\nu}+\mathcal{F}_{\mu\nu})} \tag{5.2}$$

$$=-T_{\mathrm{D3}}\frac{r_0^4}{L^4}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{1-\frac{(2\pi\alpha')^2L^4}{r_0^4}E^2} \tag{5.3}$$

と書ける。$T_{\mathrm{D3}}=1/g_{\mathrm{s}}(2\pi)^3\alpha'^2$ は D3-ブレーンの張力である。Wess-Zumino 作用の寄与もあるが、ここでは省略した。

AdS 時空を考察する前に平坦な場合を考えよう。時空が平坦な場合、$g_{\mu\nu}$ は Minkowski 時空の

[10] 第 5 章以降では、電磁場の中に結合定数 g_{YM} を含める。

計量 $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$ なので、作用は (5.3) の代わりに

$$S = -T_{\mathrm{D3}} \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu})} = -T_{\mathrm{D3}} \int \mathrm{d}^4x \sqrt{1-(2\pi\alpha' E)^2} \tag{5.4}$$

となる。時空が平坦であれば、電場が $1/2\pi\alpha'$ のとき作用はゼロになる。$1/2\pi\alpha'$ より大きい電場では作用が ill-defined になるため、電場に上限値 $E_{\mathrm{DBI,flat}} = 1/2\pi\alpha'$ が存在する。電場の上限値は第 1 章での期待通り平坦時空上での開弦の張力に等しい。AdS 時空では、warp factor r_0^2/L^2 があるので、作用は (5.3) 式となり電場の上限値は $E_{\mathrm{DBI,flat}}$ に warp factor r_0^2/L^2 がかかった

$$E_{\mathrm{DBI}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{r_0^2}{L^2} \tag{5.5}$$

となる。(5.5) 式をゲージ理論のパラメーターを用いて書き直す。クォークの質量は $r = r_0$ にあるプローブ D3-ブレーンと $r = 0$ のホライズンの間に張られた開弦のエネルギーである。この開弦の誘導計量は $g_{ab} = \mathrm{diag}(-r^2/L^2, L^2/r^2)$ なので、質量は

$$m = T_{\mathrm{F}} \int_0^{r_0} \mathrm{d}r \sqrt{-\det g} = \frac{r_0}{2\pi\alpha'} \tag{5.6}$$

で与えられる。(5.6) 式を用いて電場の上限値 (5.5) の r_0 を消去すると

$$E_{\mathrm{DBI}} = \frac{2\pi m^2}{\sqrt{\lambda}} \tag{5.7}$$

と表される。

5.1.2 ゲージ理論での対生成

第 2 章と同様に「世界線の経路積分形式」に基づいて、クォーク対の生成率を求める。$U(1)$ ゲージ場の部分に外場を与える。ラージ N、プラナー極限での $\mathcal{N} = 4$ $SU(N) \times U(1)$ 超対称性ゲージ理論なので、

- クォークの数に比例した N 倍の係数が生成率 Γ にかかる。
- W-多重項の粒子のループは $1/N$ で抑えられるので、ラージ N 極限で無視できる。
- $U(1)$ の光子のループの寄与は $g_{\mathrm{YM}}^2 = \lambda/N$ に比例するので、ラージ N 極限で無視できる。

という変更点がある。これらの点を考慮して、クォーク対の生成率を求めよう。

第 3 章で述べたが、$\mathcal{N} = 4$ $SU(N) \times U(1)$ 超対称ゲージ理論の作用は

$$S_{\mathcal{N}=4}^{SU(N)} + S_{\mathcal{N}=4}^{U(1)} + S_{\mathrm{W}} \tag{5.8}$$

のように、ゲージ群が $SU(N)$ の作用、ゲージ群が $U(1)$ の作用、W-多重項の作用の和で書ける。W-多重項の作用は

$$S_{\mathrm{W}} = \frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2} \int \mathrm{d}^4x \left[(D_\mu \omega_I)^\dagger D^\mu \omega_I + \omega_I^\dagger (\Phi_K - m\theta_K - \phi_K)^2 \omega_I - m^2 \omega_I^\dagger \theta_I \theta_J \omega_J + \cdots \right] \tag{5.9}$$

である。$U(1)$ ゲージ場に外場を入れているので共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu + ia_\mu^{\mathrm{ex}} \tag{5.10}$$

である。$U(1)$ ゲージ場の動的な部分の寄与はラージ N 極限では無視できる。そのため、以下の計算では $U(1)$ の外場の以外の項（共変微分や $S^{U(1)}_{\mathcal{N}=4}$ など）は無視する。真空のエネルギーは

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon_0 V_4} = \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\Phi\,\mathcal{D}\omega\,\mathrm{e}^{-(S^{SU(N)}_{\mathcal{N}=4}+S_{\mathrm{W}})} \tag{5.11}$$

と表されるので、生成率は

$$V_4\Gamma = -2\,\mathrm{Im}\,\log\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\Phi\,\mathcal{D}\omega\,\mathrm{e}^{-(S^{SU(N)}_{\mathcal{N}=4}+S_{\mathrm{W}})} \tag{5.12}$$

となる。次に、ω_I について積分すると、

$$V_4\Gamma = -\,2\,\mathrm{Im}\,\log\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\Phi\,\mathrm{e}^{-(S^{SU(N)}_{\mathcal{N}=4}+S_{\mathrm{eff}})} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{eff}} &= -\log\int \mathcal{D}\omega\,\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{W}}} \\
&= -\log\int \mathcal{D}\omega\,\exp\left[-\frac{1}{g^2_{\mathrm{YM}}}\left((D_\mu\omega_I)^\dagger D^\mu\omega_I + \omega_I^\dagger(\Phi_K - m\theta_K)^2\omega_I - m^2\omega_I^\dagger\theta_I\theta_J\omega_J\right)\right] \\
&= -\frac{5N}{2}\log\,\det{}'\det\left(-D_\mu D^\mu + (\Phi_K - m\theta_K)^2\right)^{-1} \\
&= \frac{5N}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathrm{op}}\,\mathrm{tr}_{SU(N)}\,\log\left(-D_\mu D^\mu + (\Phi_K - m\theta_K)^2\right)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

が得られる。$\det'$ は演算子に関する行列式を表し、$\det$ は $N\times N$ 行列の行列式を表す。$\mathrm{tr}_{\mathrm{op}}$ は演算子の固有値についてのトレースであり、$\mathrm{tr}_{SU(N)}$ は $SU(N)$ ゲージ群についてのトレースである。$5N/2$ は、質量がゼロでない ω_I から生じる。よって生成率は

$$\begin{aligned}
V_4\Gamma &= -2\,\mathrm{Im}\,\log\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\Phi\,\mathrm{e}^{-(S^{SU(N)}_{\mathcal{N}=4}+S_{\mathrm{eff}})} \\
&= -2\,\mathrm{Im}\,\log\langle\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{eff}}}\rangle \simeq -2\,\mathrm{Im}\,\log\left(1-\langle S_{\mathrm{eff}}\rangle\right) \simeq 2\,\mathrm{Im}\,\langle S_{\mathrm{eff}}\rangle \\
&= 5N\,\mathrm{Im}\,\left\langle\,\mathrm{tr}_{\mathrm{op}}\,\mathrm{tr}_{SU(N)}\,\log\left(-D_\mu D^\mu + (\Phi_K - m\theta_K)^2\right)\right\rangle
\end{aligned} \tag{5.15}$$

と表される。期待値 $\langle\cdots\rangle$ の意味は

$$\langle g(A,\Phi)\rangle = \frac{\displaystyle\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\Phi\,\mathrm{e}^{-S^{SU(N)}_{\mathcal{N}=4}}\,g(A,\Phi)}{\displaystyle\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\Phi\,\mathrm{e}^{-S^{SU(N)}_{\mathcal{N}=4}}} \tag{5.16}$$

である。

次に、固有時積分 (2.20) 及び量子力学の経路積分を用いて (5.15) 式を書き直すと、

$$\begin{aligned}
V_4\Gamma &= -5N\,\mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}T}{T}\left\langle \mathrm{tr}_{SU(N)}\,\mathcal{P}\exp\left(-\frac{1}{2}D_\mu D^\mu T + \frac{1}{2}(\Phi_K - m\theta_K)^2 T\right)\right\rangle \\
&= -5N\,\mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}T}{T}\int \mathcal{D}x \\
&\quad\times\left\langle \mathrm{tr}_{SU(N)}\,\mathcal{P}\exp\left[-\int_0^T \mathrm{d}\tau\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - iA_\mu\dot{x}_\mu + ia^{\mathrm{ex}}_\mu\dot{x}_\mu + \frac{1}{2}(\Phi_K - m\theta_K)^2\right)\right]\right\rangle
\end{aligned} \tag{5.17}$$

となる。$SU(N)$ ゲージ場が非可換なので、経路順序積 $\mathcal{P}$ がつく。

次に質量 m が十分大きいとして、$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の Wilson ループが現れることを確認しよう。以下の導出は [37] の Appendix A の Wilson ループの導出と少しの変更（$\mathrm{d}T/T$ である

か $\mathrm{d}T$ であるか）を除いて同じである。T 積分を含む項は

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}T}{T} \exp\left[-\int_0^T \mathrm{d}\tau \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - iA_\mu \dot{x}_\mu + ia_\mu^{\mathrm{ex}} \dot{x}_\mu + \frac{1}{2}(\Phi_K - m\theta_K)^2\right)\right] \tag{5.18}$$

である。指数関数の引数で、第 1 項と第 4 項はパラメーター τ の変換に対して不変でない。$\tilde{\tau}(0) = 0\,, \tilde{\tau}(T) = T$ を満たすような変換 $\tau \to \tilde{\tau}(\tau)$ をする。$c(\tau) = \mathrm{d}\tilde{\tau}/\mathrm{d}\tau$ と定義すれば、(5.18) 式は

$$\begin{aligned}&\int \mathcal{D}c\, \frac{1}{c} \exp\left[-\int_0^T \mathrm{d}\tau \left(\frac{1}{2c}\dot{x}^2 + \frac{c}{2}(\Phi_K - m\theta_K)^2\right)\right] \\ &\quad = \int \mathcal{D}c\, \frac{1}{c} \exp\left[-\int_0^1 \mathrm{d}\tau \left(\frac{1}{2c}\dot{x}^2 + \frac{c}{2}(\Phi_K - m\theta_K)^2\right)\right]\end{aligned} \tag{5.19}$$

のように T 積分を $c(\tau)$ の経路積分に書き換えることができる。パラメーターの取り換えに対して不変な項は省略した。$c(\tau)$ に関する停留点は、m が十分大きいことに注意すると

$$c(\tau) = \frac{\sqrt{\dot{x}^2(\tau)}}{m} \tag{5.20}$$

となる。(5.20) 式を (5.19) 式に代入すると、指数部分として

$$\exp\left[-\int_0^1 \mathrm{d}\tau \left(m\sqrt{\dot{x}^2} - \Phi_K \theta_K \sqrt{\dot{x}^2}\right)\right] \tag{5.21}$$

が得られる。Φ^2 の項は m が十分大きいとき無視できるので省略した。(5.21) 式を (5.17) 式に代入すれば、

$$V_4\Gamma = -5N\,\mathrm{Im} \int \mathcal{D}x\, g[x(\tau)] \exp\left(-m\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, \sqrt{\dot{x}^2} - i\int_0^1 \mathrm{d}\tau\, a_\mu^{\mathrm{ex}} \dot{x}_\mu\right) \langle W[x]\rangle \tag{5.22}$$

$$W[x] = \mathrm{tr}_{SU(N)} \exp\left(\int_0^1 \mathrm{d}\tau \left(iA_\mu \dot{x}_\mu + \Phi_K \theta_K \sqrt{\dot{x}^2}\right)\right) \tag{5.23}$$

が得られる。$g[x(\tau)]$ は、$x(\tau)$ の汎関数であり、$x(\tau)$ の経路積分を鞍点法で見積もるときには、効いてこない。$\langle W[x]\rangle$ は $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論の Wilson ループである。$SU(N)$ ゲージ場の揺らぎを考慮したため、生成率の表式に $SU(N)$ の Wilson ループが表れている。

次に、$x(\tau)$ の経路積分をしよう。Wilson ループがない場合の $x(\tau)$ の古典解は (2.39) 式である。Wilson ループは古典解の円のある面内の回転において不変であり、古典解の半径に依存しない。そのため、摂動として Wilson ループを加えた場合、古典解は変わらない（第 2.4 節の議論と同様）。よって、円形 Wilson ループを求めればよい[11]。鞍点近似がうまくいくために、弱い電場の条件

$$E \ll m^2$$

が必要である。円形 Wilson ループの期待値は第 4 章で求めた。簡単のため (2.39) 式の古典解で $n = 1$ だけを考えると

$$\langle W[x]\rangle = \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}} \tag{5.24}$$

である。よって、生成率は

$$\Gamma \sim \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{cl}}} = \exp\left(-\frac{\pi m^2}{E} + \sqrt{\lambda}\right) \tag{5.25}$$

[11]ただし、インスタントンを表す作用が少し変わっている。また、$g[x(\tau)]$ も考慮しなければならないが、この項は鞍点法を用いるときには効いてこないとする。

である。電場が

$$E = \frac{\pi m^2}{\sqrt{\lambda}} \tag{5.26}$$

に達すると、生成率は指数関数で抑えられなくなるので、これは電場の上限値である。しかし、この電場の上限値は第 5.1.1 節で得られた DBI 作用の上限値 (5.7) と 2 倍ずれている。そこで、Semenoff-Zarembo は AdS/CFT 対応に基づいて Schwinger 効果の生成率を求め、この問題を解決した。

5.1.3 ホログラフィックな記述

ゲージ理論の計算（円形 Wilson ループの評価だけ AdS/CFT 対応を用いた）では、弱い電場の条件が必要となる。そのため、電場の上限値が DBI 作用の上限値 (5.7) と異なってしまった。

そこで、円形 Wilson ループだけ AdS/CFT 対応を用いるのではなく、インスタントンの作用ごと AdS/CFT 対応を用いて計算しよう。第 5.1.2 節では、円形 Wilson ループの期待値を計算すればよかった。円形 Wilson ループの期待値は、AdS 時空の境界にくっついた円形の開弦の世界面の面積を計算すれば求められる（第 4.3 節）。そこで、Schwinger 効果の生成率を求める計算として Semenoff-Zarembo は次のような提案をした。

Semenoff-Zarembo の提案 [14]

AdS/CFT 対応に基づいて $\mathcal{N} = 4$ $SU(N) \times U(1)$ 超対称ゲージ理論でのクォーク対の生成率を求めるには（ラージ N、プラナー極限以外は仮定しない）、次のようにすればよい。まず、$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 時空の動径座標 $r = r_0$ にプローブ D3-ブレーンがあり、背景場としてゼロでない NS-NS 場 B_2 があるとする。そのプローブ D3-ブレーンに端を持ち、プローブ D3-ブレーン上で円形の開弦の世界面の面積を求めればよい（図 7 の赤色の面積）。そのとき、生成率 Γ は

$$\Gamma \sim \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{NG}} - S_{B_2}} \tag{5.27}$$

と表される。ここで、S_{NG} は古典解を南部・後藤作用 (3.22) に代入したものであり、開弦の世界面の面積を表している。S_{B_2} は開弦の端点と NS-NS 場 B_2 との結合を表す。

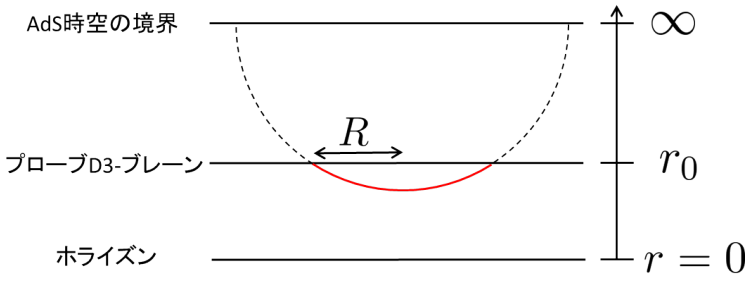

図 7: AdS/CFT 対応に基づいて生成率を求めるときのプローブ D3-ブレーンと開弦の図。

まず、$r = r_0$ のプローブ D3-ブレーンに円形の境界をもつ開弦の世界面の極小面積を求める。図 7 に示したようなプローブ D3-ブレーンと開弦を考える。プローブ D3-ブレーン（$r = r_0$）上で半

径 R の円であれば、解は、

$$
\begin{aligned}
&x_0 = x(\sigma)\cos(2n\pi\tau)\ , \qquad x_1 = x(\sigma)\sin(2n\pi\tau)\ , \qquad z = z(\sigma)\,, \\
&x^2 + z^2 = R^2 + \left(\frac{L^2}{r_0}\right)^2
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

である。図 7 の赤線が (5.28) 式に対応し、その世界面の面積が Schwinger 効果の生成率に寄与する。点線は (5.28) 式の解を分かりやすくするために AdS 時空の境界まで外挿したものであり、生成率には寄与しない。

古典解を代入して、古典的作用を計算する。まず、南部・後藤作用は

$$
S_{\mathrm{NG}} = 2n\pi T_{\mathrm{F}} L^2 \left(\sqrt{\left(\frac{Rr_0}{L^2}\right)^2 + 1} - 1\right) \tag{5.29}
$$

となる。次に開弦と NS-NS 場 B_2 の相互作用項を計算する。$B_{01} \neq 0$ とする。相互作用項は

$$
S_{B_2} = -n\pi E R^2\,, \qquad E = T_{\mathrm{F}} B_{01} \tag{5.30}
$$

である。$T_{\mathrm{F}} B_{01}$ を電場 E と解釈する。よって、全作用は

$$
S = S_{\mathrm{NG}} + S_{B_2} = 2n\pi T_{\mathrm{F}} L^2 \left(\sqrt{\left(\frac{Rr_0}{L^2}\right)^2 + 1} - 1\right) - n\pi E R^2 \tag{5.31}
$$

となる。R は境界条件 (3.28) から決まり、

$$
R = \frac{L^2}{r_0}\sqrt{\frac{E_{\mathrm{c}}^2}{E^2} - 1}\,, \qquad E_{\mathrm{c}} = T_{\mathrm{F}} \frac{r_0^2}{L^2} = \frac{2\pi m^2}{\sqrt{\lambda}} \tag{5.32}
$$

である。$R \geq 0$ でなければならないので、電場には E_{c} という上限値が存在する。作用から R を消去すると

$$
S_{\mathrm{cl}}^{(n)} = n\pi L^2 T_{\mathrm{F}} \left(\sqrt{\frac{E_{\mathrm{c}}}{E}} - \sqrt{\frac{E}{E_{\mathrm{c}}}}\right)^2 = \frac{n\sqrt{\lambda}}{2}\left(\sqrt{\frac{E_{\mathrm{c}}}{E}} - \sqrt{\frac{E}{E_{\mathrm{c}}}}\right)^2 \tag{5.33}
$$

よって、生成率は

$$
\Gamma \sim \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{cl}}^{(1)}} = \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left(\sqrt{\frac{E_{\mathrm{c}}}{E}} - \sqrt{\frac{E}{E_{\mathrm{c}}}}\right)^2\right) \tag{5.34}
$$

と振る舞う。

5.1.4 議論・まとめ

第 5.1.3 節で得られた結果と第 5.1.2 節で得られた結果を比較しよう。$E \ll E_{\mathrm{c}}$ のとき、生成率は

$$
\Gamma \sim \exp\left(-\frac{\pi m^2}{E} + \sqrt{\lambda}\right) \tag{5.35}
$$

と近似できる。この振る舞いはゲージ理論の計算で得られた (5.25) 式と同じである。

ゲージ群は異なるが、第 2.4 節と比較してみよう。(2.69) 式の $n = 1$ の場合は

$$
\Gamma \sim \exp\left(-\frac{\pi m^2}{E} + \frac{e^2}{4}\right) \tag{5.36}
$$

である。ただし、(5.36) 式では eE を E と再定義している。(5.35) 式と (5.36) 式の指数関数の引数の第 1 項 $\pi m^2/E$ は同じである。第 2 項は、Coulomb 相互作用の寄与である。$\sqrt{\lambda}$ に比例するのは第 4 章で指摘した通りである。次に、電場の上限値に注目しよう。(5.32) 式で得られた電場の上限値は、プローブ D3-ブレーンの DBI 作用から得られた電場の上限値 (5.7) と等しい。

Semenoff-Zarembo は

- $E \ll E_{\rm c}$ で生成率がゲージ理論の計算によるものと一致する。
- 第 5.1.3 節の解析で得られた電場の上限値 (5.32) が第 5.1.1 節の解析で得られた電場の上限値 (5.7) と等しい。

という二つの結果から、彼らの提案に基づく解析は正しいと結論した。しかし、指数関数の部分しか得られていない。本当に生成率が求められたことを確認するためには、指数関数の前の係数を求めなければならない。指数関数の前の係数を求めるためには、開弦の古典解周りの揺らぎを積分しなければならないが、これは、外電場の有無に関わらず

- 円形の古典解周りの揺らぎの固有値を見つけるのが困難である。
- どのような規格化がよいか非自明である。

という 2 点で難しい。いくつかの試みはあるが、まだうまくいっていない [42–44]。

5.2 モノポール・反モノポール対生成

まず、プローブ D3-ブレーンを記述する DBI 作用から期待される磁場の性質を見る。そして、モノポール・反モノポール対生成をホログラフィックに計算する方法を述べ、実際に生成率を計算する。

5.2.1 DBI 作用から期待される磁場の性質

$N+1$ 枚の D3-ブレーンの束から離した 1 枚の D3-ブレーンをプローブとし、動径方向 $r = r_0$ の位置にあるとする。ラージ N、プラナー極限では、N 枚の D3-ブレーンの束は $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 時空に置き換えれる。磁場 $B = \mathcal{F}_{23}/2\pi\alpha'$ がある場合、プローブ D3-ブレーンを記述する DBI 作用は

$$S_{\rm DBI} = -T_{\rm D3}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-\det(g_{\mu\nu}+\mathcal{F}_{\mu\nu})} = -T_{\rm D3}\frac{r_0^4}{L^4}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{1+\frac{(2\pi\alpha')^2L^4}{r_0^4}B^2} \tag{5.37}$$

と書ける。磁場の値 B をどんなに大きくしても作用は ill-defined にならないので、磁場には上限が存在しない。

5.2.2 ホログラフィックな記述

モノポール対生成を AdS/CFT 対応に基づいた見方で議論する。第 3.2 節で述べたように、D-string はモノポールを表している。ラージ N、プラナー極限の $\mathcal{N}=4$ $SU(N)\times U(1)$ 超対称ゲージ理論におけるモノポール対の生成率を求めるには、次のようにすればよい。

モノポール対の生成率を求める提案

まず、$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 時空の動径座標 $r = r_0$ にプローブ D3-ブレーンがあり、背景場としてゼロでない R-R 場 C_2 があるとする。そのプローブ D3-ブレーンに端を持ち、プローブ D3-ブレーン上で円形の D-string の世界面の面積を求めればよい。そのとき、生成率 Γ は

$$\Gamma \sim \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{DBI}} - S_{\text{R-R}}} \tag{5.38}$$

と表される。ここで、S_{DBI} は古典解を DBI 作用に代入したものであり、D-string の世界面の面積を表している。$S_{\text{R-R}}$ は開弦の端点と R-R 場 C_2 との結合を表す。

D-string を記述する DBI 作用

$$S_{\mathrm{DBI}} = T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma\, \mathrm{e}^{-\phi} \sqrt{\det G} \tag{5.39}$$

は、F-string を記述する南部・後藤作用とディラトン場の分だけ異なる。$\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論に双対な重力解では、ディラトン場は定数なので、$\mathrm{e}^{\phi} = g_{\mathrm{s}}$ と弦の結合定数で書ける。よって、DBI 作用

$$S_{\mathrm{DBI}} = T_{\mathrm{D}} \int \mathrm{d}^2\sigma\, \sqrt{\det G_{ab}}\,, \qquad T_{\mathrm{D}} = \frac{T_{\mathrm{F}}}{g_{\mathrm{s}}} \tag{5.40}$$

は南部・後藤作用と張力の分だけ異なる。そのため、古典解や古典的作用は F-string の場合と張力を除いて変わらない。第 3.4 節で述べたように、D-string は NS-NS 場 B_2 とは結合せず、R-R 場 C_2 と結合する。よって相互作用項は

$$S_{\text{R-R}} = \mu_1 \int \mathrm{d}^2\sigma\, C_{\mu\nu}\, \partial_\tau x^\mu \partial_\sigma x^\nu \tag{5.41}$$

である。相互作用項 (5.41) は B_2 の相互作用と同じく運動方程式には寄与しない。第 5.2.3 項で得られた結果の読み換えをすれば、古典的作用は

$$S_{\mathrm{cl}}^{(n)} = 2n\pi L^2 T_{\mathrm{D}} \left(\sqrt{\left(\frac{R r_0}{L^2}\right)^2 + 1} - 1 \right) + n\mu_1 C_{01} \pi R^2 \tag{5.42}$$

となる。$C = -\mu_1 C_{01}$ とおく。R は境界条件 (3.28) から決まり（ただし、第 5.1.3 節の南部・後藤作用に含まれる張力 T_{F} を T_{D} に、外場との相互作用の $T_{\mathrm{F}} B_2$ を $-\mu_1 C_2$ に読み換える）、

$$R = \frac{L^2}{r_0} \sqrt{\frac{C_{\mathrm{c}}^2}{C^2} - 1}\,, \qquad C_{\mathrm{c}} = T_{\mathrm{D}} \frac{r_0^2}{L^2} \tag{5.43}$$

である。$R \geq 0$ なので、C_2 には C_{c} という上限が存在する。作用から R を消去すると

$$S_{\mathrm{cl}}^{(n)} = n\pi L^2 T_{\mathrm{D}} \left(\sqrt{\frac{C_{\mathrm{c}}}{C}} - \sqrt{\frac{C}{C_{\mathrm{c}}}} \right)^2 \tag{5.44}$$

が得られる。

(5.43) 式と (5.44) 式をゲージ理論のパラメーターで書き換える。r_0 はモノポールの質量 m_{mono} と関係している。モノポールの質量は $r = r_0$ にあるプローブ D3-ブレーンと $r = 0$ のホライズンの間に張られた D-string のエネルギーである。D-string の誘導計量は $g_{ab} = \mathrm{diag}(r^2/L^2, L^2/r^2)$ な

ので、質量は

$$m_{\mathrm{mono}} = T_{\mathrm{D}} \int_0^{r_0} \mathrm{d}r \, \sqrt{\det g} = T_{\mathrm{D}} r_0 \tag{5.45}$$

で与えられる。(5.43) 式と (5.44) 式は

$$S_{\mathrm{cl}}^{(n)} = \frac{n\sqrt{\lambda}}{2} \left(\sqrt{\frac{C_{\mathrm{c}}}{C}} - \sqrt{\frac{C}{C_{\mathrm{c}}}} \right)^2 , \qquad C_{\mathrm{c}} = \frac{2\pi m_{\mathrm{mono}}^2}{\sqrt{\lambda}} \tag{5.46}$$

となる。

5.2.3 議論・まとめ

Bolognesi-Kiefer-Rabinovici は C_{01} を磁場と解釈し、第 5.2.2 節での計算が正しい範囲内では磁場にも上限が存在してしまうと結論した [15]。一方、DBI 作用から期待されることは磁場には上限がないということであった。そのため、D3-ブレーン上の低エネルギー有効理論の解析（第 5.2.1 節）と弦の世界面の解析（第 5.2.2 節）とで得られた結果が異なっており、矛盾している。

Bolognesi-Kiefer-Rabinovici は、磁場の上限値付近では反作用（ゼロでない C_2 があるので、背景時空は $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ からずれてしまう）が無視できないので、反作用を正しく取り込めば上限値は現れず、矛盾は生じないと予想している。しかし、正しくは C_{01} ではなく B_{23} を（定数倍を除いて）磁場と解釈すべきである。そのため、C_{01} と B_{23} を結びつける関係式があればよいと考えられる。

5.3 ダイオン・反ダイオン対生成

ダイオンの場合の対生成も [15] で議論されている。まず、[15] のレビューを行う。しかし、彼らの議論は $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論で期待されるような置き換えをしただけであり、不十分と思われる点がある。そのため、独自に考察をする。

まず、初めに電場と磁場の両方が印加されている場合のプローブ D3-ブレーンを記述する DBI 作用から得られる性質についてみる。次に、AdS/CFT 対応に基づいて議論する。

5.3.1 DBI 作用から期待される電場・磁場の性質

電場 E が 1 方向にあるとする。そして電場と並行な方向に B、垂直な方向に $B_\perp$（簡単のため、向きは 2 方向とする）の磁場があるとしよう。プローブ D3-ブレーンを記述する DBI 作用の根号の中は

$$-\det \begin{pmatrix} -r_0^2/L^2 & 2\pi\alpha' E & & \\ -2\pi\alpha' E & r_0^2/L^2 & 2\pi\alpha' B_\perp & \\ & -2\pi\alpha' B_\perp & r_0^2/L^2 & 2\pi\alpha' B \\ & & -2\pi\alpha' B & r_0^2/L^2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{r_0^2}{L^2}\right)^4 - (2\pi\alpha')^2 \left(\frac{r_0^2}{L^2}\right)^2 (E^2 - B^2 - B_\perp^2) + (2\pi\alpha')^4 E^2 B^2 \tag{5.47}$$

である。電場の上限はこれがゼロになる値

$$E_{\rm c} = \frac{r_0^2}{2\pi\alpha' L^2} \sqrt{1 + \frac{B_\perp^2}{\left(\frac{r_0^2}{2\pi\alpha' L^2}\right)^2 + B^2}} = \frac{2\pi m^2}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{1 + \frac{B_\perp^2}{\frac{4\pi^2 m^4}{\lambda} + B^2}} \tag{5.48}$$

である。(5.6) 式を用いてゲージ理論のパラメーターで書き換えた。電場と並行な磁場だけの場合は電場の上限値に変更はないが、垂直な磁場がある場合、電場の上限は (5.7) 式に比べ増加することが分かる。一方、電場 E を固定して、磁場の値を大きくしても作用は ill-defined にはならないので、磁場に上限はない。

5.3.2 ホログラフィックな記述

次に、AdS/CFT 対応に基づいてダイオン対生成を考えよう。ダイオンは電荷と磁荷を持った粒子である。電荷と磁荷をそれぞれ n_e、n_m とする。ダイオンを表す状態は、n_e 本の F-string と n_m 本の D-string が束縛した状態だと考えられる。ダイオン対の生成率を求めるには、$r = r_0$ にあるプローブ D3-ブレーンに端を持つ F-string と D-string の束縛状態の世界面の面積を求めればよい。ただし、プローブ D3-ブレーン上で円形とする。まず、張力を F-string と D-string の束縛状態の

$$T_{\rm dyon} = T_{\rm F} \sqrt{n_e^2 + \frac{n_m^2}{g_{\rm s}^2}} \tag{5.49}$$

に置き換えればよい。DBI 作用は南部・後藤作用と張力の分を除いて変更はない。また、F-string の場合の B_2 の項は $\pi E R^2$ と、D-string の場合の C_2 の項は $\pi B R^2$ と解釈できた。よって、電荷 n_e、磁荷 n_m を持つダイオンの場合、電場と磁場がともに印加されていれば、相互作用項は

$$\pi(n_e E + n_m B) R^2 \tag{5.50}$$

と解釈できるであろう。よって、古典的作用は

$$S_{\rm cl} = 2n\pi L^2 T_{\rm dyon} \left(\sqrt{\left(\frac{R r_0}{L^2}\right)^2 + 1} - 1 \right) - n\pi F R^2 \,, \qquad F = n_e E + n_m B \tag{5.51}$$

となる。R を作用の停留点（$\mathrm{d}S_{\rm cl}/\mathrm{d}R = 0$ となる点）として求めると、

$$R = \frac{L^2}{r_0} \sqrt{\frac{F_{\rm c}^2}{F^2} - 1} \,, \qquad F_{\rm c} = T_{\rm dyon} \frac{r_0^2}{L^2} \tag{5.52}$$

である。作用から R を消去すると

$$S_{\rm cl}^{(n)} = n\pi L^2 T_{\rm dyon} \left(\sqrt{\frac{F_{\rm c}}{F}} - \sqrt{\frac{F}{F_{\rm c}}} \right)^2 \tag{5.53}$$

(5.52) 式と (5.53) 式をゲージ理論のパラメーターで書き換える。r_0 はダイオンの質量 $m_{\rm dyon}$ と

$$m_{\rm dyon} = T_{\rm dyon} \int_0^{r_0} \mathrm{d}r \, \sqrt{\det g} = \frac{r_0}{2\pi\alpha'} \sqrt{n_e^2 + \frac{n_m^2}{g_{\rm s}^2}} = m \sqrt{n_e^2 + \frac{n_m^2}{g_{\rm s}^2}} \tag{5.54}$$

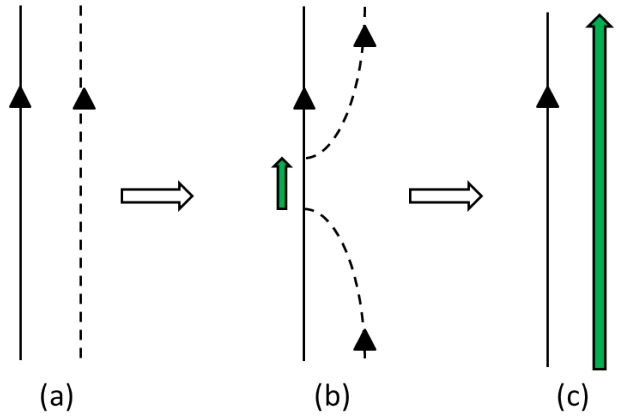

図 8: D-string と F-string の束縛状態を表す図。(a) 並行な D-string（実線）と F-string（破線）。(b) F-string が D-string に端を持つ。F-string の端点は電荷を持っているので、D-string 上に $\mathcal{F}$ が生じる（緑色の矢印）。(c) 最終的に F-string が D-string 上の場の強さ $\mathcal{F}$ になる。

という関係にある。ダイオンの誘導計量は $g_{ab} = \mathrm{diag}(r^2/L^2, L^2/r^2)$ である。(5.54) 式を用いると、(5.52) 式と (5.53) 式は

$$S_{\mathrm{cl}}^{(n)} = \frac{n\sqrt{\lambda}}{2}\left(\sqrt{\frac{F_{\mathrm{c}}}{F}} - \sqrt{\frac{F}{F_{\mathrm{c}}}}\right)^2 \sqrt{n_e^2 + \frac{n_m^2}{g_{\mathrm{s}}^2}}\,, \qquad F_{\mathrm{c}} = \frac{2\pi m^2}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n_e^2 + \frac{n_m^2}{g_{\mathrm{s}}^2}} \tag{5.55}$$

となる。この結果は $SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性を持っているので、[15] では正しいと結論している。ただし、磁場 B に上限が表れているが、[15] では反作用を無視したためとしている。これが Bolognesi-Kiefer-Rabinovici の議論である。

しかし、Bolognesi-Kiefer-Rabinovici の議論は次のような不満な点がある。ダイオンを表す状態は、F-string と D-string の束縛状態とした。この束縛状態は単純に F-string と D-string が重なった状態ではなく、D-string 上に場の強さ $\mathcal{F}$ がある状態である（図 8）[20, 28]。よって、クォーク対生成やモノポール対生成と同じ方法を採用するならば、D-string 上に $\mathcal{F}$ がある場合の世界面の考察をすべきである。また、D-string 上に $\mathcal{F}$ がある場合、D-string は C_2 と C_0B_2 に結合するが、B_2 には結合しない。そのため、R-R 場 C_2 と C_0B_2 から $\pi(n_eE + n_mB)R^2$ という項が出るかは自明ではない。また、第 5.3.1 節の結果と大きく矛盾している。第 5.3.2 節の残りでは、独自の考察に基づいて、ダイオン対生成を議論しよう。

話を簡単にするために、1 本の D-string 上に場の強さ $\mathcal{F}$ がある状態を考えよう。F_2 と NS-NS 場 B_2 がある場合の D-string を記述する DBI 作用は

$$S_{\mathrm{DBI}} = T_{\mathrm{F}} \int \mathrm{d}^2\sigma\, \mathrm{e}^{-\phi}\sqrt{\det\left[G + i\mathcal{F}\right]} = T_{\mathrm{D}} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{\det G - \mathcal{F}_{\tau\sigma}^2} \tag{5.56}$$

である。ここで、$\mathcal{F}_{ab} = B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab}, B_{ab} = \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu B_{\mu\nu}$ である。計量は Wick 回転しているが、$\mathcal{F}_{ab}$ は Wick 回転していない。R-R 場と D-string の相互作用項は $\mu_1 \int C_2$ に加えて

$$\mu_1 \int C_0 \mathcal{F}_2 \tag{5.57}$$

がある。後で分かるように C_0 は θ 項を表しているので、$\mu_1 C_0/2\pi\alpha' = \theta = \mathrm{const.}$ とする。相互

作用項を含めると D-string を記述する作用は

$$S = T_{\mathrm{D}} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{\det G - \mathcal{F}_{\tau\sigma}^2} + \mu_1 \int C_{\mathscr{2}} + \frac{\theta}{2\pi\alpha'} \int \mathcal{F}_{\mathscr{2}} \tag{5.58}$$

である。

D-string 上に何本の F-string が束縛していたかを読み取るために量子化条件を置く。$F_{\tau\sigma}$ に共役な運動量 Π は

$$\Pi = \frac{\delta S}{\delta F_{\tau\sigma}} = T_{\mathrm{D}} \frac{2\pi\alpha' \mathcal{F}_{\tau\sigma}}{\sqrt{\det G - \mathcal{F}_{\tau\sigma}^2}} + \theta \tag{5.59}$$

である。量子化条件 $\Pi = q \in \mathbb{Z}$ を課す。整数 q が D-string に束縛している F-string の数を表している。量子化条件を書き直すと

$$\frac{T_{\mathrm{D}}}{\sqrt{\det G - \mathcal{F}_{\tau\sigma}^2}} = \frac{T_{(q-\theta,1)}}{\sqrt{\det G}} \tag{5.60}$$

が得られる。ここで、$T_{(q-\theta,1)} = \sqrt{(q-\theta)^2 + 1/g_{\mathrm{s}}^2}$ であり、ダイオンの場合の張力を表している。張力を見れば、$C_{\mathscr{0}}$ は θ 項を表していることが分かる。

D-string 上に $\mathcal{F}$ があるので、ダイオンの場合はクォークやモノポールの場合と異なる点がある。それは、世界面の面積を求める際に、作用として Legendre 変換した

$$\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\tau\sigma}} \cdot F_{\tau\sigma} = \frac{T_{\mathrm{D}}}{\sqrt{\det G - \mathcal{F}_{\tau\sigma}^2}} \det G = T_{(q-\theta,1)} \sqrt{\det G} \tag{5.61}$$

を考えなければならない点である [41]。

よって、対生成で考える作用は

$$S = T_{(q-\theta,1)} \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{\det G} + \mu_1 \int C_{\mathscr{2}} \tag{5.62}$$

である。作用はモノポールの場合の作用と張力を除いて変わらない。よって、モノポールの場合の張力を $T_{(q-\theta,1)}$ に置き換えればよい。古典的作用は

$$S_{\mathrm{cl}} = 2\pi L^2 T_{(q-\theta,1)} \left(\sqrt{\left(\frac{R r_0}{L^2}\right)^2 + 1} - 1 \right) - \pi C R^2 \,, \qquad C = -\mu_1 C_{01} \tag{5.63}$$

となる。R は境界条件 (3.28) から決まり、

$$R = \frac{L^2}{r_0} \sqrt{\frac{C_{\mathrm{c}}^2}{C^2} - 1} \,, \qquad C_{\mathrm{c}} = T_{(q-\theta,1)} \frac{r_0^2}{L^2} \tag{5.64}$$

である。ここから、C には C_{c} という上限値が存在する。作用から R を消去すると

$$S_{\mathrm{cl}} = \pi L^2 T_{(q-\theta,1)} \left(\sqrt{\frac{C_{\mathrm{c}}}{C}} - \sqrt{\frac{C}{C_{\mathrm{c}}}} \right)^2 \tag{5.65}$$

と表される。(5.64) 式と (5.65) 式をゲージ理論のパラメーターで書き換えよう。ダイオンの質量 m_{dyon} は $r = r_0$ にあるプローブ D3-ブレーンとホライズンの間に張られた $\mathcal{F}$ がある D-string のエネルギーである。D-string のエネルギーを求める場合も、Legendre 変換した作用を用いなければならない。ダイオンの誘導計量は $g_{ab} = \mathrm{diag}(r^2/L^2, L^2/r^2)$ なので、

$$m_{\mathrm{dyon}} = T_{(q-\theta,1)} \int_0^{r_0} \mathrm{d}r \sqrt{\det g} = T_{(q-\theta,1)} r_0 \tag{5.66}$$

である。(5.64) 式と (5.65) 式はそれぞれ

$$S_{\rm cl} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\sqrt{(q-\theta)^2 + \frac{1}{g_{\rm s}^2}}\left(\sqrt{\frac{C_{\rm c}}{C}} - \sqrt{\frac{C}{C_{\rm c}}}\right)^2, \qquad C_{\rm c} = \frac{2\pi m_{\rm dyon}^2}{\sqrt{\lambda}\sqrt{(q-\theta)^2 + 1/g_{\rm s}^2}} \tag{5.67}$$

となる。

5.3.3 議論・まとめ

まず、[15] と我々の考察の結果を比較しよう。世界面の面積の寄与は同じである。我々は、[15] にない θ 項の寄与を含めている。次に外場との相互作用項 C_2 に注目しよう。[15] では C_2 の寄与を

$$-\pi(n_e E + n_m B)R^2 \tag{5.68}$$

と電場や磁場と解釈している。そのため、D3-ブレーン上の低エネルギー有効理論の解析（第 5.3.1 節）と弦の世界面の解析（第 5.3.2 節）で大きな矛盾が生じている。しかし、第 5.2.3 節で述べたように電場や磁場と解釈すべきは B_2 である。

6 まとめ

本稿では、AdS/CFT 対応の文脈での Schwinger 効果に関する最近の研究 [14,15] のレビューを行った。[14] では、AdS/CFT 対応の文脈で、クォーク・反クォーク対の生成率を計算する提案がなされた。その提案に基づくと、DBI 作用から期待される電場の上限値と同じ電場の上限値が得られることが分かった（第 5.1.3 節）。また、電場が十分に小さい場合、生成率はゲージ理論の計算と同じ指数関数の振る舞いをすることも分かった。そのため、[14] の解析はうまくいっている。しかし、指数関数の前の係数が Schwinger の公式のようになることは確かめられていないなど改善すべき点は多い。

[15] では、[14] の解析を外磁場中のモノポール・反モノポール対生成、外電磁場中のダイオン・反ダイオン対生成、有限温度における外電場中のクォーク・反クォーク対生成に拡張した。モノポールやダイオンの対生成の場合、[14] と同じ方法では、磁場にも上限が現れることが指摘された。これは、DBI 作用から期待される磁場の性質と矛盾している（第 5.2 節）。矛盾した結果が得られた理由は、D-string の世界面の解析において安易に外場の C_2 の成分 C_{01} を磁場と解釈したからである。磁場と解釈すべき量は B_{23} なので、外場の C_{01} を B_{23} に読み換える関係式が必要である。

本稿では、モノポール・反モノポール対生成、ダイオン・反ダイオン対生成しか扱わなかったが、[15] では、磁気回転不安定性や有限温度における外電場中のクォーク・反クォーク対生成から分かる電場の上限値（生成率は求めていない）についても述べてある。

本稿では述べなかったが、著者は吉田氏との共同研究により [45,46] という二つの論文を書き上げた。最後に [45,46] について簡単に説明しよう。

[45] では、[14] の解析を電場に対し平行な磁場と垂直な磁場があるという一般的な場合に拡張した。磁場を導入する方法として、Lorentz 変換による方法と、弦の世界面を表す古典解が新たなパラメーターを含むように一般化し、そのパラメーターを磁場と解釈する方法の二通りがあることを示した。そして、(5.48) 式の磁場に依存した電場の上限値が得られることを示した。

次に、[46] について説明しよう。$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論のクォーク・反クォークポテンシャル（第 4.4 節）を用いて、全ての d に対して $V(d)=2m-Ed-\alpha/d\leq 0$ となる電場の値を求めると、$E_{\rm c}$ の 0.7 倍である。つまり、第 2.1 節で述べた直観的な解析と [14] の解析には電場の上限に関してずれがある。[46] では、プローブ D3-ブレーンを [14] と同じく、AdS 時空の境界とホライズンの間に置いて、クォーク・反クォークポテンシャルを求めた。得られたクォーク・反クォークポテンシャルを用いると、$E_{\rm c}$ でポテンシャル障壁 $V(d)$ がなくなることを確認できた。以上はゼロ温度の解析である。有限温度の場合も同様の解析を行い、DBI 作用が well-defined であるような電場の上限値で、ポテンシャル障壁が消えることを確認した。[46] の解析は、[14] の解析と異なるアプローチで電場に上限が存在し、さらに DBI 作用の結果と一致していることを示しており、Semenoff-Zarembo の提案に対して強い根拠を与えている。

謝辞

本稿を書くにあたり、京都大学理学研究科素粒子論研究室の方々に様々な助言を頂きました。特に、吉田健太郎氏には修士論文の指導や助言をしていただき、また、共同研究から多くのことを学ばさせて頂きました。同研究科の菅沼秀夫氏には、お忙しい中、議論をして頂き、大変参考になりました。中村真氏との議論は、非常に有益なものであり、本稿を書く上でも参考になりました。

ここに深く感謝致します。

参考文献

[1] J. S. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization,” Phys. Rev. **82** (1951) 664.

[2] W. Heisenberg and H. Euler, “Consequences of Dirac’s theory of positrons,” Z. Phys. **98** (1936) 714 [physics/0605038].

[3] V. Weisskopf, “The electrodynamics of the vacuum based on the quantum theory of the electron,” In *Miller, A.I.: Early quantum electrodynamics* 206-226

[4] R. P. Feynman, “The Theory of positrons,” Phys. Rev. **76** (1949) 749.

[5] R. P. Feynman, “Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction,” Phys. Rev. **80** (1950) 440.

[6] R. P. Feynman, “An Operator calculus having applications in quantum electrodynamics,” Phys. Rev. **84** (1951) 108.

[7] I. K. Affleck and N. S. Manton, "Monopole Pair Production In A Magnetic Field," Nucl. Phys. B **194** (1982) 38.

[8] I. K. Affleck, O. Alvarez and N. S. Manton, "Pair Production At Strong Coupling In Weak External Fields," Nucl. Phys. B **197** (1982) 509.

[9] G. V. Dunne and C. Schubert, "Worldline instantons and pair production in inhomogeneous fields," Phys. Rev. D **72** (2005) 105004 [hep-th/0507174].

[10] G. V. Dunne, Q. -h. Wang, H. Gies and C. Schubert, "Worldline instantons. II. The Fluctuation prefactor," Phys. Rev. D **73** (2006) 065028 [hep-th/0602176].

[11] G. V. Dunne and C. Schubert, "Pair creation in inhomogeneous fields from worldline instantons," AIP Conf. Proc. **857** (2006) 240 [hep-ph/0604089].

[12] G. V. Dunne, "New Strong-Field QED Effects at ELI: Nonperturbative Vacuum Pair Production," Eur. Phys. J. D **55** (2009) 327 [arXiv:0812.3163 [hep-th]].

[13] G. V. Dunne, "The Heisenberg-Euler Effective Action: 75 years on," Int. J. Mod. Phys. A **27** (2012) 1260004 [Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. **14** (2012) 42] [arXiv:1202.1557 [hep-th]].

[14] G. W. Semenoff and K. Zarembo, "Holographic Schwinger Effect," Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 171601 [arXiv:1109.2920 [hep-th]].

[15] S. Bolognesi, F. Kiefer and E. Rabinovici, "Comments on Critical Electric and Magnetic Fields from Holography," arXiv:1210.4170 [hep-th].

[16] A. S. Gorsky, K. A. Saraikin and K. G. Selivanov, "Schwinger type processes via branes and their gravity duals," Nucl. Phys. B **628** (2002) 270 [hep-th/0110178].

[17] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, "Quantum String Theory Effective Action," Nucl. Phys. B **261** (1985) 1.

[18] C. Bachas and M. Porrati, "Pair creation of open strings in an electric field," Phys. Lett. B **296** (1992) 77 [hep-th/9209032].

[19] J. M. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity," Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231 [Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113]. [arXiv:hep-th/9711200].

[20] J. Polchinski, "Tasi lectures on D-branes," hep-th/9611050.

[21] 今村洋介、『超弦理論の基礎～ 弦とブレーンの導入から ～』、（サイエンス社、2011）.

[22] 今村洋介、『AdS/CFT—基本的な考え方とその応用—』、`http://genshikaku.jp/52sp1PDF/imamura.pdf`.

[23] B. Zwiebach, "A first course in string theory," Cambridge, UK: Univ. Pr. (2009) 673 p

[24] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity," Phys. Rept. **323** (2000) 183 [hep-th/9905111].

[25] J. Polchinski, "Introduction to Gauge/Gravity Duality," arXiv:1010.6134 [hep-th].

[26] P. Goddard and D. I. Olive, "Magnetic monopoles in gauge field theories," Rep. Prog. Phys. **41** (1978) 1357.

[27] H. Osborn, "Topological Charges for N=4 Supersymmetric Gauge Theories and Monopoles of Spin 1," Phys. Lett. B **83** (1979) 321.

[28] E. Witten, "Bound states of strings and p-branes," Nucl. Phys. B **460** (1996) 335 [hep-th/9510135].

[29] A. Strominger, "Open p-branes," Phys. Lett. B **383** (1996) 44 [hep-th/9512059].

[30] M. B. Green and M. Gutperle, "Comments on three-branes," Phys. Lett. B **377** (1996) 28 [hep-th/9602077].

[31] J. Gomis and F. Passerini, "Wilson Loops as D3-Branes," JHEP **0701** (2007) 097 [hep-th/0612022].

[32] J. Mcgreevy, "String Theory," MIT OpenCourseWare.

`http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-821-string-theory-fall-2008/`

"More on 3-point functions, the chiral anomaly, and Wilson loops,"

`http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-821-string-theory-fall-2008/lecture-notes/lecture17.pdf`,

"Wilson Loops,"

`http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-821-string-theory-fall-2008/lecture-notes/lecture18.pdf`.

[33] S. -J. Rey and J. -T. Yee, "Macroscopic strings as heavy quarks in large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity," Eur. Phys. J. C **22** (2001) 379 [hep-th/9803001].

[34] J. M. Maldacena, "Wilson loops in large N field theories," Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 4859 [hep-th/9803002].

[35] N. Drukker, D. J. Gross, and H. Ooguri, announced by Gross at the Conference "Strings' 98," `http://online.kitp.ucsb.edu/online/strings98/`.

[36] D. E. Berenstein, R. Corrado, W. Fischler and J. M. Maldacena, "The Operator product expansion for Wilson loops and surfaces in the large N limit," Phys. Rev. D **59** (1999) 105023 [hep-th/9809188].

[37] N. Drukker, D. J. Gross and H. Ooguri, "Wilson loops and minimal surfaces," Phys. Rev. D **60** (1999) 125006 [hep-th/9904191].

[38] H. Ooguri, "Wilson loops in large N theories," Class. Quant. Grav. **17** (2000) 1225 [hep-th/9909040].

[39] J. K. Erickson, G. W. Semenoff and K. Zarembo, "Wilson loops in N=4 supersymmetric Yang-Mills theory," Nucl. Phys. B **582** (2000) 155 [hep-th/0003055].

[40] N. Drukker and D. J. Gross, "An Exact prediction of N=4 SUSYM theory for string theory," J. Math. Phys. **42** (2001) 2896 [hep-th/0010274].

[41] C. Bachas and M. Petropoulos, "Anti-de Sitter D-branes," JHEP **0102** (2001) 025 [hep-th/0012234].

[42] N. Drukker, D. J. Gross and A. A. Tseytlin, "Green-Schwarz string in AdS(5) x S**5: Semiclassical partition function," JHEP **0004** (2000) 021 [hep-th/0001204].

[43] J. Ambjorn and Y. Makeenko, "Remarks on Holographic Wilson Loops and the Schwinger Effect," Phys. Rev. D **85** (2012) 061901 [arXiv:1112.5606 [hep-th]].

[44] C. Kristjansen and Y. Makeenko, "More about One-Loop Effective Action of Open Superstring in $AdS_5 \times S^5$," JHEP **1209** (2012) 053 [arXiv:1206.5660 [hep-th]].

[45] Y. Sato and K. Yoshida, "Holographic description of the Schwinger effect in electric and magnetic fields," JHEP **1304** (2013) 111 [arXiv:1303.0112 [hep-th]].

[46] Y. Sato and K. Yoshida, "Potential Analysis in Holographic Schwinger Effect," arXiv:1304.7917 [hep-th].