

調和関数展開による 3 次元分配関数の計算

今村洋介

東京工業大学

152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1

2013年9月30日

概要

このノートは2012年10月26日~28日に京都大学物理教室で行った集中講義「M2-ブレーンと Chern-Simons 理論」の講義ノートのうち3次元の分配関数の計算に関する部分を整理したもので、3次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論における分配関数の計算について、指数定理を用いない、調和関数展開による方法に限って解説する。

目次

第1章	\mathbb{R}^4 および \mathbb{R}^3 上の超対称性	4
1.1	スピノル	4
1.2	$SO(n)$ の生成子	6
1.3	\mathbb{R}^4 上の $\mathcal{N} = 1$ 超対称性	7
1.4	\mathbb{R}^3 上の $\mathcal{N} = 2$ 超対称性	9
1.5	チャーン・サイモン項	11
1.6	実質量項	12
第2章	指数	13
2.1	ウィッテン指数	13
2.2	超共形指数	14
2.3	調和振動子	15
2.4	局所化	20
2.5	$\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ 上の分配関数	21
第3章	共形平坦な時空上の超対称性	29
3.1	$S^{n-1} \times \mathbb{R}$ と S^n	29
3.2	一般座標変換・ワイル変換・共形変換	30
3.3	共形平坦な時空上の共形変換	35
3.4	ワイル共変化	37
3.5	共形不変な作用	38
3.6	キリングスピノル	40
3.7	超共形変換の構成	43
3.8	3次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形変換	44
3.9	リジッドな超対称性	47
第4章	球面調和関数	52
4.1	S^n 上の調和関数に関する公式	52
4.2	枠束	53
4.3	平行移動	55
4.4	G/H 上の枠束	58
4.5	アイソメトリーとリー微分	60
4.6	共変微分	61

4.7	スピン接続と多脚場	64
4.8	S^2 上の調和関数	65
4.9	モノポール調和関数	66
4.10	S^3 上の調和関数	67
4.11	左不変枠	70
第 5 章	超共形指数	73
5.1	$S^2 \times \mathbb{R}$ 上の超共形対称性	73
5.2	リジッドな超対称性	75
5.3	作用	77
5.4	局所化による超共形指数の計算	78
5.4.1	鞍点	79
5.4.2	ベクトル多重項の 1 ループ計算	80
5.4.3	カイラル多重項の 1 ループ計算	84
5.4.4	指数の公式	85
第 6 章	S^3 上の超対称理論	88
6.1	S^3 上の超共形対称性	88
6.2	リジッドな超対称性	89
6.3	作用	90
6.4	局所化による S^3 分配関数の計算	91
6.4.1	鞍点	91
6.4.2	ベクトル多重項の 1 ループ計算	93
6.4.3	カイラル多重項の 1 ループ計算	95
6.5	別の作用による導出	97
6.6	ウィルソンループ	102
第 7 章	4 次元の指数と 3 次元の分配関数	105
7.1	4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称性	105
7.2	$S^3 \times S^1$ 上の超対称性	107
7.3	局所化による超対称指数の計算	109
7.3.1	鞍点	109
7.3.2	ベクトル多重項の 1 ループ計算	110
7.3.3	カイラル多重項の 1 ループ計算	112
7.4	指数と S^3 分配関数の関係	114
第 8 章	具体例	117
8.1	超対称 $SU(2)$ チャーン・サイモン理論	117
8.2	Jafferis-Yin 双対性	118
8.3	ABJM モデルの超共形指数	120
8.4	ABJM 行列模型 (I)	123

8.5	ABJM 行列模型 (II)	127
付録 A	Chern-Simons 項に対する 1-loop 補正	130
付録 B	特殊関数	132
B.1	ゼータ関数	132
B.2	二重対数関数	133
B.3	量子ポツホハンマー関数	134
B.4	多重正弦関数	136
B.5	二重正弦関数	138

第1章 \mathbb{R}^4 および \mathbb{R}^3 上の超対称性

この講義ノートでは平坦な時空上の超対称理論の作用および変換則の構成法については知っているものと仮定して話を進めるが、表記法を固定するために平坦な背景上の超対称性について簡単にまとめておく。

1.1 スピノル

まず、4次元のユークリッド空間上でのスピノルおよびディラック行列についてまとめておく。ミンコフスキー時空を考えたい場合には適当にウィック回転を行えばよい。

4次元ユークリッド空間のベクトル添え字には $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ を用いる。後に3次元への次元簡約を考えるが、その際には4方向をコンパクト化し、ベクトル添え字には $m, n, \dots = 1, 2, 3$ を用いる。ウィック回転をしてミンコフスキー時空へ移る場合には x^m のうちのどれかを時間方向に取ることになるが、ここでは特に指定しない。 \mathbb{R}^4 上のディラック行列 γ_μ およびカイラリティ行列 γ_5 としては次のものを用いる。

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_m \\ \sigma_m & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\gamma_{1234}. \quad (1.1)$$

ただし σ_m ($m = 1, 2, 3$) はパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

である。カイラリティが正の成分すなわち4成分スピノルの上半分とカイラリティが負の成分すなわち4成分スピノルの下半分をそれぞれ左巻き、右巻きと呼ぶことにする。

これらディラック行列が作用する縦ベクトルとしてスピノルを定義する。4次元では正のカイラリティを持つ上二成分と負のカイラリティを持つ下二成分は回転(ローレンツ変換)のもとで独立に変換されるから、ワイルスピノルを定義することができる。このノートでは基本的にワイルスピノルを用いることとし、barのある、なしでカイラリティを表す。barはディラック共役ではないことに注意すること。

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

(1.3) のように、片方のカイラリティ成分のみが 0 ではない 4 成分スピノルと片方のカイラリティ成分のみを取り出して定義された 2 成分スピノルに対して同じ文字を用いるが、混乱する恐れはないであろう。

ミンコフスキー時空では、複素共役によってカイラリティが反転するが、このような関係にある二つのスピノルは同じ文字の bar 無しのスピノルと bar 付きのスピノルを用いて表す。一般には単なる複素共役ではなく、適当なユニタリー変換を組み合わせたマヨラナ共役とする必要があるが、時間方向として x^2 を取れば γ_m がウィック回転の後に全て実行列となるので、マヨラナ共役と単なる複素共役が一致して便利である。ただし以下では特に時間方向を固定することはしない。

スピノルは通常グラスマン数を成分とするが、二つのグラスマン数の積の複素共役は次のように定義する。

$$(ab)^* = a^*b^*. \quad (1.4)$$

複素共役を取った際に順序を入れ替える定義もよく用いられるが、ここではそのような入れ替えは行わない。

このノートではスピノルの添え字を頭に書くことはほとんどないが、書く場合には、行列の積は左上と右下の縮約として表す。つまり

$$(\gamma_\mu \bar{\psi})_a = (\gamma_\mu)_a{}^b \bar{\psi}_b \quad (1.5)$$

である。(カイラリティが正の部分に対しては dot なし添え字、カイラリティが負の部分に対しては dot つき添え字を用いる。) 二つのスピノルの積を定義する場合には、

$$\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1 \quad (1.6)$$

によって定義される ϵ^{ab} および ϵ_{ab} を用いてスピノルの添え字の上げ下げを行う。このときも、行列の積と同じルールに従い、左上と右下で縮約を行う。

$$(\chi\psi) = \chi^a \psi_a = (\epsilon^{ab} \chi_b) \psi_a \quad (1.7)$$

この上げ下げルールに従うと、 ϵ^{ab} と ϵ_{ab} も互いの添え字を上げ下げしたのになっている。

以上の約束に従えば、以下の転置公式を示すことができる。

$$\begin{aligned} (\chi\psi) &= (\psi\chi), \\ (\chi\gamma_\mu \bar{\psi}) &= -(\bar{\psi}\gamma_\mu \chi), \\ (\chi\gamma_\mu \gamma_\nu \psi) &= (\psi\gamma_\nu \gamma_\mu \chi), \\ (\chi\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \bar{\psi}) &= -(\bar{\psi}\gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu \chi). \end{aligned} \quad (1.8)$$

これらの公式においては二つのスピノルがグラスマン数であることが考慮されているが、見かけ上はそのことを無視してあたかもディラック行列が反対称行列であるかのように扱えばよい。

このノートで用いられるスピノルに対する複素共役演算には二つの種類がある。一つはマヨラナ共役演算であり、ミンコフスキー時空のフェルミオン場に対して定義されるもの

である。もう一つはユークリッド時空中におけるエルミート共役であり、複素数の成分を持つボゾンのスピノルとして表された超対称変換のパラメータに対してのみ適用される。ここでは前者について簡単に説明する。

ミンコフスキー時空のディラック行列は時間方向のディラック行列を i 倍することで定義することができる。ユークリッド空間のディラック行列に対して上で与えた表示を用いる場合、便利な選択は x^2 を時間方向として選び $i\gamma^2$ を新しい γ^2 として用いるものである。こうすると全てのディラック行列が実になるから、マヨラナ共役は単なる複素共役になる。つまり、左巻きスピノル λ と右巻きスピノル $\bar{\lambda}$ は互いの複素共役になる。このことを踏まえれば、次の公式が得られる。

$$\begin{aligned} (\chi\psi)^* &= (\bar{\chi}\bar{\psi}), \\ (\chi\gamma_\mu\bar{\psi})^* &= (\bar{\chi}\gamma_\mu\psi), \\ (\chi\gamma_\mu\gamma_\nu\bar{\psi})^* &= (\bar{\chi}\gamma_\mu\gamma_\nu\bar{\psi}), \\ (\chi\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\bar{\psi})^* &= (\bar{\chi}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\psi). \end{aligned} \quad (1.9)$$

これらはディラック行列の表現に依存しない公式である。

複数个の添え字を持つディラック行列はウェイト 1 の反対称化によって定義する。

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \quad \gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{6}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho \pm \text{あと 5 項}). \quad (1.10)$$

また、バックスラッシュは次のようにディラック行列を掛けて反対称テンソルの添え字をつぶす操作を表す。

$$D = \gamma^\mu D_\mu, \quad F = \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (1.11)$$

1.2 $SO(n)$ の生成子

このノートでは背景時空の対称性として $SO(n)$ ($n = 2, 3, 4$) が現れる。そこで、その生成子に対していくつか取り決めを行っておこう。生成子としては、二つの反対称な添え字 $M, N = 1, \dots, n$ を持つ T_{MN} を用いる。その規格化はスピノル表現に対する表現行列が

$$T_{MN} = \frac{1}{2}\gamma_{MN} \quad (1.12)$$

となるように定める。直交座標 y_M で張られる \mathbb{R}^n 上のスカラー関数に作用する微分演算子としての表現は

$$T_{MN} = y_M \partial_N - y_N \partial_M \quad (1.13)$$

である。このように定義される生成子は反エルミートである。

特に $SO(3) \sim SU(2)$ に対しては生成子 $\{T_{23}, T_{31}, T_{12}\}$ と同じ交換関係を満足する $\{T_1, T_2, T_3\}$ も用いる。これらは次の交換関係に従う反エルミートな生成子である。

$$[T_a, T_b] = -\epsilon_{abc} T_c. \quad (1.14)$$

レビ・チビタ記号は $\epsilon_{123} = +1$ によって定義する。 $SO(3) \sim SU(2)$ のスピノル表現とベクトル表現に対しての表現行列は次のように与えられる。

$$T_a^{(1/2)} = \frac{i}{2}\sigma_a, \quad (T_a^{(1)})_{bc} = \epsilon_{abc} \quad (1.15)$$

$SO(4) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R$ に関しては、 $SU(2)_L$ の生成子 T_a^L と $SU(2)_R$ の生成子 T_a^R 、さらに対角部分群 $SU(2)_D$ の生成子 $T_a^D = T_a^L + T_a^R$ を定義し、 $SU(2)_D$ を 123 方向の回転と同一視する。 T_{ab} ($a, b = 1, 2, 3$) に対しては

$$T_{ab} = \epsilon_{abc}(T_c^L + T_c^R) = \epsilon_{abc}T_c^D, \quad (1.16)$$

が成り立つ。残りの $SO(4)$ 生成子 T_{a4} については、§1.1 に与えたディラック行列の表示を用い、左巻きと右巻きのスピノル (すなわち上 2 成分と下 2 成分) にそれぞれ $SU(2)_L$ と $SU(2)_R$ が作用するように定義する。たとえば T_{34} のスピノル表現行列は

$$T_{34} = \frac{1}{2}\gamma^{34} = \frac{1}{2}\gamma^5\gamma^{12} = P_L \left(\frac{1}{2}\gamma^{12} \right) - P_R \left(\frac{1}{2}\gamma^{12} \right). \quad (1.17)$$

(1.17) の右辺のそれぞれの項を (1.15) に与えたスピノル表現行列と比較することにより T_{a4} と T_a^L 、 T_a^R の関係が次のように得られる。

$$T_{a4} = T_a^L - T_a^R. \quad (1.18)$$

T_{MN} と T_a はどちらも反エルミートな生成子として定義される。エルミートな生成子を用いる場合には、 J 、 L 、 S などの文字を用いることにし、反エルミートな生成子との関係は $T \sim iJ$ 、 $T \sim iS$ のように符号を選ぶことにする。

1.3 \mathbb{R}^4 上の $\mathcal{N} = 1$ 超対称性

ここでは平坦な 4 次元上の超対称性について基本的事項を天下り的に与える。詳しい導出などは [1] などを参照していただきたい。ユークリッド時空での超対称変換や作用は、まずミンコフスキー時空での式を書き、そこに含まれるディラック行列や計量などをユークリッド時空のものであると再解釈することによって得ることができる。(つまり、見かけ上は何もしない。) 注意すべき点は、そのような再解釈を行った後には複素共役の関係が変化しているという点である。ユークリッド空間へ移った後では複素共役演算を用いない、と約束しておくのが安全である。¹

4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称理論にはベクトル多重項とカイラル多重項の二種類の超対称多重項が存在する。ベクトル多重項はベクトル場 A_μ 、フェルミオン場 λ 、 $\bar{\lambda}$ 、補助場 D よりな

¹ウィック回転 $\tau = it$ を行った後の理論において、もとの複素共役に対応するのは $\phi(\tau, x^i) \rightarrow \phi^*(-\tau, x^i)$ のように時間反転を組み合わせた複素共役である。ラグランジアン密度がこの変換のもとで不変であれば作用および分配関数を実であることが保証されるが、以下ではこのような不変性を持たない理論も考えるので、作用や分配関数を実であるかどうかは以下では気にしないことにする。

り、それらの超対称変換則は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu &= i(\epsilon\gamma_\mu\bar{\lambda}) - i(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda), \\
\delta\lambda &= \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\epsilon F_{\mu\nu} + \mathcal{D}\epsilon, \\
\delta\bar{\lambda} &= -\frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\bar{\epsilon}F_{\mu\nu} + \mathcal{D}\bar{\epsilon}, \\
\delta\mathcal{D} &= -(\epsilon\gamma^\mu D_\mu\bar{\lambda}) - (\bar{\epsilon}\gamma^\mu D_\mu\lambda).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

ユークリッド時空では λ と $\bar{\lambda}$ は互いに複素共役ではなく独立な場であるとみなすため、両方について変換則を与えておいた。共変微分や場の強さは次のように定義される。

$$D = d - i[A, *], \quad F = dA - iA \wedge A. \tag{1.20}$$

カイラル多重項は複素スカラー場 ϕ 、フェルミオン場 ψ 、複素補助場 \mathcal{F} よりなる。カイラル多重項 $(\phi, \psi, \mathcal{F})$ と反カイラル多重項 $(\bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{\mathcal{F}})$ はミンコフスキー時空では互いの複素共役であるが、念のため変換則を別々に与えておく。

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \sqrt{2}(\epsilon\psi), \\
\delta\psi &= -\sqrt{2}\gamma^\mu\bar{\epsilon}D_\mu\phi + \sqrt{2}\epsilon\mathcal{F}, \\
\delta\mathcal{F} &= -\sqrt{2}(\bar{\epsilon}\gamma^\mu D_\mu\psi) - 2(\bar{\epsilon}\bar{\lambda})\phi, \\
\delta\bar{\phi} &= \sqrt{2}(\bar{\epsilon}\bar{\psi}), \\
\delta\bar{\psi} &= -\sqrt{2}\gamma^\mu\epsilon D_\mu\bar{\phi} + \sqrt{2}\bar{\epsilon}\bar{\mathcal{F}}, \\
\delta\bar{\mathcal{F}} &= -\sqrt{2}(\epsilon\gamma^\mu D_\mu\bar{\psi}) - 2\bar{\phi}(\epsilon\lambda).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

これらの変換のもとで不変である作用を与えておく。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{vector}} &= \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \text{tr} \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - (\bar{\lambda}\gamma^\mu D_\mu\lambda) - \frac{1}{2} \mathcal{D}\mathcal{D} \right], \\
\mathcal{L}_{\text{FI}} &= -\frac{\xi}{2\pi} \mathcal{D}, \\
\mathcal{L}_{\text{chiral}} &= D_\mu\bar{\phi}D^\mu\phi - (\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi) + \bar{\phi}\mathcal{D}\phi - \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} - \sqrt{2}\bar{\phi}(\lambda\psi) - \sqrt{2}(\bar{\psi}\bar{\lambda})\phi, \\
\mathcal{L}_{\text{pot}} &= W_i\mathcal{F}^i - \frac{1}{2}W_{ij}(\psi^i\psi^j) + \bar{W}_{\bar{i}}\bar{\mathcal{F}}^{\bar{j}} - \frac{1}{2}\bar{W}_{\bar{i}\bar{j}}(\bar{\psi}^{\bar{i}}\bar{\psi}^{\bar{j}}).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

最後のポテンシャル項については、カイラル多重項が複数ある場合の添え字をあらわに書いた。超ポテンシャル W はカイラル多重項のスカラー場 ϕ^i の任意の正則関数であり、 \bar{W} はその複素共役である。添え字はスカラー場による微分を現す。すなわち $W_i = \partial W(\phi)/\partial\phi^i$ 、 $\bar{W}_{\bar{i}\bar{j}} = \partial^2\bar{W}(\bar{\phi})/\partial\bar{\phi}^{\bar{i}}\partial\bar{\phi}^{\bar{j}}$ などである。 \mathcal{L}_{FI} の係数 ξ は FI パラメータと呼ばれる。3次元で便利な規格化を採用した。

超対称変換 (1.19) と (1.21) は並進対称性とあわせて超対称代数をなす。実際にそれぞれ

の場合上で $\delta = \delta(\epsilon, \bar{\epsilon})$ と $\delta' = \delta(\epsilon', \bar{\epsilon}')$ の交換関係を計算してみると、次の結果を得る。

$$\begin{aligned}
[\delta, \delta']\phi &= 2v^\mu D_\mu \phi = 2(v^\mu \partial_\mu \phi + i(-v^\mu A_\mu)\phi), \\
[\delta, \delta']\psi &= 2v^\mu D_\mu \psi = 2(v^\mu \partial_\mu \psi + i(-v^\mu A_\mu)\psi), \\
[\delta, \delta']F &= 2v^\mu D_\mu F = 2(v^\mu \partial_\mu F + i(-v^\mu A_\mu)F), \\
[\delta, \delta']A_\mu &= 2v^\nu F_{\nu\mu} = 2(v^\nu \partial_\nu A_\mu + D_\mu(-v^\nu A_\nu)), \\
[\delta, \delta']\lambda &= 2v^\mu D_\mu \lambda = 2(v^\mu \partial_\mu \lambda + i[(-v^\mu A_\mu), \lambda]), \\
[\delta, \delta']\mathcal{D} &= 2v^\mu D_\mu \mathcal{D} = 2(v^\mu \partial_\mu \mathcal{D}) + i[(-v^\mu A_\mu), \mathcal{D}]
\end{aligned} \tag{1.23}$$

ただし、ベクトル

$$v^\mu = (\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon') + (\epsilon\gamma^\mu\bar{\epsilon}') \tag{1.24}$$

を定義した。これらは全て次のように表すことができる。

$$[\delta, \delta'] = 2\delta_{\text{gc}}(v^\mu) \tag{1.25}$$

ただし δ_{gc} は座標変換 δ_{gc}^0 とゲージ変換の組み合わせとして次のように定義される。

$$\delta_{\text{gc}}(v^\mu) = \delta_{\text{gc}}^0(v^\mu) - \delta_{\text{gauge}}(v^\mu A_\mu) \tag{1.26}$$

δ_{gc}^0 は共変微分ではない、単なる変微分によって与えられる無限小並進変換を表し、第 2 項は $-v^\mu A_\mu$ をパラメータとするゲージ変換を表す。一般座標変換の定義については §3.2 で詳しく述べる。

1.4 \mathbb{R}^3 上の $\mathcal{N} = 2$ 超対称性

3 次元の $\mathcal{N} = 2$ 超対称性は 4 次元の $\mathcal{N} = 1$ 超対称性から次元簡約によって得ることができる。4 次元時空の座標を x^μ としよう。その中で x^4 方向について次元簡約することで 3 次元ミンコフスキー時空上の理論を構成する。4 次元および 3 次元のベクトルに対して次の添え字を用いる。

$$\mu, \nu, \dots = 1, 2, 3, 4, \quad m, n, \dots = 1, 2, 3. \tag{1.27}$$

ミンコフスキー時空を考える場合には x^4 方向は空間的であるとし、残りの 3 方向に時間的的方向が含まれるとする。ディラック行列については次のようにとる。

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^m \\ \gamma^m & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.28}$$

4×4 の 4 次元ディラック行列と 2×2 の 3 次元ディラック行列に対して同じ文字を用いるが、混乱することはないであろう。

3 次元時空において、レビ・チビタテンソル ϵ^{mnp} のかわりにしばしば γ^{mnp} を用いる。ディラック行列 3 つの反対称積 γ^{mnp} は本来単位行列に比例する 2×2 行列であるが、その固有値の意味でも γ^{mnp} を用いる。

$$\gamma^{mnp} = \gamma^{mnp} \mathbf{1}_2. \quad (1.29)$$

3 次元ユークリッド空間のディラック行列に対して (1.1) の表示を用いれば $\gamma^{mnp} = i\epsilon^{mnp}$ である。 ϵ^{mnp} のかわりに γ^{mnp} を用いることにより、時空のがミンコフスキーかユークリッドかということやディラック行列の具体的表示などに依存しない形で式を書くことができるので便利である。

ゲージ場については、第 4 成分をスカラー場 σ として書き換える。

$$A_\mu \rightarrow (A_m, A_4 = \sigma). \quad (1.30)$$

スピノル場については、4 次元であった左巻き、右巻きの区別がなくなるので、 λ と $\bar{\lambda}$ は回転群の同じ表現に属する。しかし次元簡約を通した 4 次元との関係を付けておくとう便利なことがあるので、4 次元において左巻きであったか右巻きであったかがはっきりしている場合にはそれに従って bar を付けたり付けなかったりする。4 次元と 3 次元のマヨラナ共役演算は基本的に同じであるから、 λ と $\bar{\lambda}$ は 3 次元 (ミンコフスキー時空) においても互いのマヨラナ共役である。

3 次元の超対称変換を得るために、平坦な 4 次元ミンコフスキー時空上の $\mathcal{N} = 1$ 超対称変換則から出発する。4 次元におけるベクトル多重項の変換則は (1.19) である。これを 3 次元の言葉で書き換え、 $\partial_4 \rightarrow 0$ の置き換えを行うことで平坦な 3 次元ミンコフスキー時空における $\mathcal{N} = 2$ 超対称変換則が得られる。

$$\begin{aligned} \delta A_m &= i(\epsilon\gamma_m\bar{\lambda}) - i(\bar{\epsilon}\gamma_m\lambda), \\ \delta\sigma &= (\epsilon\bar{\lambda}) + (\bar{\epsilon}\lambda), \\ \delta\lambda &= \frac{i}{2}\gamma^{mn}\epsilon F_{mn} - \gamma^m\epsilon D_m\sigma + \mathcal{D}\epsilon, \\ \delta\bar{\lambda} &= -\frac{i}{2}\gamma^{mn}\bar{\epsilon}F_{mn} - \gamma^m\bar{\epsilon}D_m\sigma + \mathcal{D}\bar{\epsilon}, \\ \delta\mathcal{D} &= -(\epsilon\gamma^m D_m\bar{\lambda}) - (\bar{\epsilon}\gamma^m D_m\lambda) + (\epsilon[\sigma, \bar{\lambda}]) - (\bar{\epsilon}[\sigma, \lambda]). \end{aligned} \quad (1.31)$$

4 次元におけるカイラル多重項の変換則は (1.21) である。これにも同様の操作を行うことで、3 次元におけるカイラル多重項の変換則が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \sqrt{2}(\epsilon\psi), \\ \delta\bar{\phi} &= \sqrt{2}(\bar{\epsilon}\bar{\psi}), \\ \delta\psi &= -\sqrt{2}\gamma^m\bar{\epsilon}D_m\phi + \sqrt{2}\bar{\epsilon}\sigma\phi + \sqrt{2}\epsilon\mathcal{F}, \\ \delta\bar{\psi} &= -\sqrt{2}\gamma^m\epsilon D_m\bar{\phi} + \sqrt{2}\epsilon\bar{\phi}\sigma + \sqrt{2}\bar{\epsilon}\bar{\mathcal{F}}, \\ \delta\mathcal{F} &= -\sqrt{2}(\bar{\epsilon}\gamma^m D_m\psi) - \sqrt{2}\sigma(\bar{\epsilon}\psi) - 2(\bar{\epsilon}\bar{\lambda})\phi, \\ \delta\bar{\mathcal{F}} &= -\sqrt{2}(\epsilon\gamma^m D_m\bar{\psi}) - \sqrt{2}(\epsilon\bar{\psi})\sigma - 2\bar{\phi}(\epsilon\lambda). \end{aligned} \quad (1.32)$$

これらの超対称変換のもとで不変な 3 次元の作用は、変換則同様 4 次元の作用 (1.22) からの次元簡約によって得ることができる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{YM}} &= \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \text{tr} \left[\frac{1}{4} F_{mn} F_{mn} + \frac{1}{2} D_m \sigma D_m \sigma - (\bar{\lambda} \gamma^m D_m \lambda) - (\bar{\lambda} [\sigma, \lambda]) - \frac{1}{2} \mathcal{D} \mathcal{D} \right], \\
\mathcal{L}_{\text{FI}} &= -\frac{\xi}{2\pi} \mathcal{D}, \\
\mathcal{L}_{\text{chiral}} &= D_m \bar{\phi} D_m \phi + \bar{\phi} \sigma \phi + \bar{\phi} \mathcal{D} \phi - \bar{\mathcal{F}} \mathcal{F} \\
&\quad - (\bar{\psi} \gamma^m D_m \psi) - (\bar{\psi} \sigma \psi) - \sqrt{2} \bar{\phi} (\lambda \psi) - \sqrt{2} (\bar{\psi} \lambda) \phi, \\
\mathcal{L}_{\text{pot}} &= W_i \mathcal{F}^i - \frac{1}{2} W_{ij} (\psi^i \psi^j) + \bar{W}_{\bar{i}} \bar{\mathcal{F}}^{\bar{i}} - \frac{1}{2} \bar{W}_{\bar{i}\bar{j}} (\bar{\psi}^{\bar{i}} \bar{\psi}^{\bar{j}}). \tag{1.33}
\end{aligned}$$

\mathcal{L}_{FI} の係数にある $1/2\pi$ の因子を導入した理由については §1.6 で述べる。超ポテンシャル W はカイラル多重項のスカラー場 ϕ^i の任意の正則関数であり、 \bar{W} はその複素共役である。

1.5 チャーン・サイモン項

3 次元の超対称不変な作用には、4 次元からの次元簡約で得られないものも存在する。その一例が次の Chern-Simons 項である。

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \frac{k}{2\pi} \text{tr}_{\text{fund}} \left[\frac{1}{2} \gamma^{mnp} \left(A_m \partial_n A_p - \frac{i}{3} A_m [A_n, A_p] \right) + (\bar{\lambda} \lambda) - \mathcal{D} \sigma \right]. \tag{1.34}$$

本解説では特に断らない限りゲージ群は $U(N)$ であるものとする。係数 k は Chern-Simons レベルと呼ばれ、大きいゲージ変換、すなわち、単位元と連続的につながらないゲージ変換のもとでのゲージ不変性のためには整数でなければならない。

フェルミオンやゲージ場自身の 1-loop 補正によってレベル k は bare な値からずれる。例えば基本表現に属する複素フェルミオンの 1-loop 効果によるずれは

$$k \rightarrow k' = k \pm \frac{1}{2}. \tag{1.35}$$

である。ただし符号はフェルミオンの実質量の符号に依存する。(カイラル多重項に含まれるフェルミオンに質量を与えるには二つの方法がある。一つは超ポテンシャルに二次の項を加えることによって質量項を導入する方法である。この場合の質量パラメータはカイラル多重項のスカラー成分と見なすことができ、複素である。もうひとつの方法は、ベクトル多重項との結合によって質量を持たせる方法であり、この場合の質量は実である。実質量項についてはこの次の節でもう少し詳しく説明する。) 基本表現以外の表現に属するフェルミオンによる補正の大きさは二次のカシミアに比例する。計算の詳細は §A に与えてある。

半奇数の補正が存在する場合には、補正された後のレベルが整数でなければならないため、必然的に裸のレベルは半奇数である必要があり、パリティ不変性を破ることになる。これはパリティアノマリーと呼ばれる。

1.6 実質量項

(1.33) に与えたように、ベクトル多重項に含まれるスカラー場はカイラル多重項と次の項を通して結合している。

$$\mathcal{L} = \bar{\phi}\sigma\phi - \bar{\psi}\sigma\psi \quad (1.36)$$

従って、 σ に 0 でない真空期待値を持たせることで、カイラル多重項に対する質量項を与えることができる。ここで導入される質量パラメータは、超ポテンシャル中のものとは異なり実である。このため、このように導入される質量項を実質量項と呼ぶ。

実質量項は大域的な $U(1)$ フレーバー対称性と対応しているが、 $U(1)$ 対称性の中には、カイラル多重項に作用するもののほかに、トポロジカルな $U(1)$ 対称性と呼ばれるものがある。これはダイナミカルな $U(1)$ ゲージ場 A があったときに、保存カレント $*dA$ に対応するものである。トポロジカルな $U(1)$ 対称性に対応する実質量項を導入するために、この $U(1)$ 対称性に対するベクトル多重項を導入し、ゲージ場成分を A' とすると、ゲージ場とカレントの結合はチャーン・サイモン項 $\int A'dA$ になる。これを超対称に拡張すると、

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma^{mnp} (A'_m \partial_n A_p) + (\bar{\lambda}'\lambda) + (\bar{\lambda}\lambda') - \mathcal{D}'\sigma - \mathcal{D}\sigma' \right]. \quad (1.37)$$

が得られるが、ここで背景ベクトル多重項のスカラー場に期待値 $\sigma' = \xi$ を持たせると、次の FI term を得る。

$$\mathcal{L}_{\text{FI}} = -\frac{\xi}{2\pi} \mathcal{D} \quad (1.38)$$

つまり、FI term はトポロジカル $U(1)$ 対称性に対する実質量項である。ベクトル多重項 $(A', \lambda', \sigma', \mathcal{D}')$ の規格化は A' に結合するチャージが整数に量子化されるようにとった。このときの σ' の値を FI パラメータとするように FI パラメータの規格化を選ぶことにする。

第2章 指数

2.1 ウィッテン指数

場の理論の非摂動的な性質を調べる上で超対称性が強力な道具となることを最初に示したのはウィッテンによる指数の計算 [2] であろう。この指数は現在ウィッテン指数と呼ばれ、形式的には次のように定義される。

$$I = \text{tr}(-1)^F \quad (2.1)$$

トレースは理論の全ての状態について取り、 F は各状態のフェルミオン数である。これは、状態空間中のボゾン状態とフェルミオン状態の差を与える。この定義においては全ての状態が ± 1 の寄与をするため、無限個の ± 1 を足しあげる必要がある。しかし超対称性があると、ほとんどの状態はボゾンとフェルミオンで対になっており、それらの相殺の結果指数は有限になる。このことを詳しく見ておこう。

超対称理論においてハミルトニアンは次のように与えられる。

$$\hat{H} = \{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} \quad (2.2)$$

ただし \hat{Q} は超対称電荷の演算子であり、 \hat{Q}^\dagger はそのエルミート共役である。さらに $\hat{Q}^2 = (\hat{Q}^\dagger)^2 = 0$ であるとする。このとき

$$[\hat{H}, \hat{Q}] = [\hat{H}, \hat{Q}^\dagger] = 0 \quad (2.3)$$

が示されるので、エネルギーの固有状態ごとに \hat{Q} の作用を定義することができる。状態空間の中で、エネルギーが E である状態によって張られる部分空間に注目しよう。(2.2) の両側をそのような空間に含まれる状態 $|\psi\rangle$ ではさむと、

$$E = |\hat{Q}|\psi\rangle|^2 + |\hat{Q}^\dagger|\psi\rangle|^2 \quad (2.4)$$

が得られる。このことをノルムの正定値性と組み合わせると、エネルギー E は負にはならないことが示される。エネルギーが正 $E > 0$ の場合には \hat{Q} と \hat{Q}^\dagger を適当に規格化するとフェルミオンの生成消滅演算子と同じ反交換関係を満足する。従って、全ての状態は二次元表現に属し、それぞれの表現の二つの状態は \hat{Q} と \hat{Q}^\dagger によって結ばれるから、片方がボゾン、片方がフェルミオンである。(図 2.1) これら対をなす状態の指数に対する寄与は全て相殺するので、指数に寄与するのは $E = 0$ の状態のみである。つまり、ウィッテン指数は次のようにも与えることができる。

$$I = (\text{ボゾンの } E = 0 \text{ 状態の数}) - (\text{フェルミオンの } E = 0 \text{ 状態の数}) \quad (2.5)$$

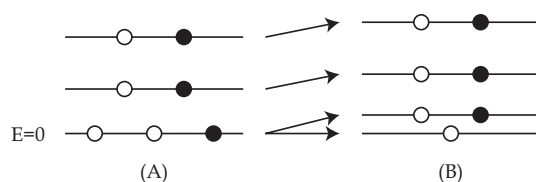


図 2.1: ボゾンの状態 (白丸) とフェルミオンの状態 (黒丸)

ボゾンの、あるいはフェルミオンの $E = 0$ 状態それぞれの数は理論の詳細に依存する。特に、結合定数を変化させたときにそれらはどちらも変化する可能性がある。しかし、 $E > 0$ の状態においては必ずボゾンの状態とフェルミオンの状態が対になっていることから、それらの差は理論の連続的な変形に依存しない。(図 2.1)

(2.4) より $E = 0$ の状態は

$$\hat{Q}|\psi\rangle = \hat{Q}^\dagger|\psi\rangle = 0 \quad (2.6)$$

を満足する。つまり、これらの状態においては超対称性は自発的に破れていない。つまり、もし指数が 0 でなければ、エネルギーが 0 の状態が存在することが保証されるため、超対称性は自発的に破れない。一方指数が 0 の場合には $E = 0$ の状態が存在しないのか、 $E = 0$ のボゾンの状態とフェルミオンの状態が同数存在するかどうかは判別できない。

ウィッテン指数を次のように書くこともできる。

$$I(\beta) = \text{tr}[(-1)^F e^{-\beta\hat{H}}] \quad (2.7)$$

$\beta = 0$ の場合には (2.1) に一致する。 $I(\beta)$ は一見 β の関数に見えるが、 $E > 0$ の状態はボゾンとフェルミオンの間で対を成しているため $E > 0$ の寄与は相殺し、 $I(\beta)$ は β に依存しない。このことを見るために実際に β で微分してみると、

$$\frac{dI}{d\beta} = -\text{tr}[(-1)^F \{Q, Q^\dagger\} e^{-\beta H}] \quad (2.8)$$

となるが、下りてきた $\{Q, Q^\dagger\} = QQ^\dagger + Q^\dagger Q$ の第 1 項 QQ^\dagger に含まれる Q をトレースの周期的性質を利用して一周させると、次のように反交換関係の第 2 項 $Q^\dagger Q$ の寄与と負号が逆になり相殺することがわかる。

$$-\text{tr}[(-1)^F QQ^\dagger e^{-\beta H}] = \text{tr}[Q(-1)^F Q^\dagger e^{-\beta H}] = \text{tr}[(-1)^F Q^\dagger e^{-\beta H} Q] = \text{tr}[(-1)^F Q^\dagger Q e^{-\beta H}] \quad (2.9)$$

従って $dI/d\beta = 0$ であり、 I は β に依存しない。

2.2 超共形指数

ウィッテン指数 I は連続パラメータに依存しない整数であるが、これを次のように一般化することで、基底状態についてより詳細な情報を取り出すことができる。

$$I(\mu_i) = \text{tr}[(-1)^F e^{-\beta H - \mu_i K_i}] \quad (2.10)$$

μ_i は演算子 K_i に対する化学ポテンシャルである。これは次のように書き換えることもできる。

$$I(\mu_i) = \sum_{\text{ボゾンの } E=0 \text{ 状態}} e^{-\mu_i K_i} - \sum_{\text{フェルミオンの } E=0 \text{ 状態}} e^{-\mu_i K_i} \quad (2.11)$$

K_i が Q と可換である場合には (2.7) が β に依存しないことを示したのと同じ方法で、これが β に依存しないことを示すことができる。

今度もやはり指数に寄与するのは $H = 0$ を満足する状態だけであるが、 H の定義によってはそのような状態は必ずしも有限個ではないことを注意しておこう。たとえば H が光錐ハミルトニアン $H = P^0 - P^1$ であれば、 $P^0 = P^1$ を満足する状態が指数に寄与するが、これは $P^0 = 0$ である真空状態とは異なり無限個存在することが許される。指数に寄与する状態が多くなると、それだけ指数が持つ情報量が増えるため、理論のより詳細な情報を指数から取り出すことができる。

指数を計算する際には、赤外発散を除くためにしばしば場の理論を体積が有限な多様体の上で定義する。ウィッテン指数の計算においてはトーラスが用いられるが、他の多様体を用いることもできる。 n 次元の場の理論を定義する多様体としてトーラス T^{n-1} 以外にしばしば用いられるものとしては $n-1$ 次元球面 S^{n-1} がある。(時空の次元を n としている。ここでは正準形式による指数の定義について議論しているので、時間方向は常に \mathbb{R} である。) この場合理論は $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ 上で定義され、指数はこの多様体上の量子状態の情報を与える。 $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ は §3.1 で具体的に見るようにワイル変換によって $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に移ることができるから、理論が共形対称性を持つ場合には $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ 上で定義された量子状態は \mathbb{R}^n の原点に挿入された演算子に対応させることができる。(ただし、このような操作のためには適当なウィック回転を行っておく必要がある。) つまり、指数は超共形場理論の局所的ゲージ不変演算子の情報を担うものと解釈することができる。このような指数は超共形指数 (superconformal index) と呼ばれる。[3, 4]

理論が共形対称性を持たない場合にも $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ 上の量子状態の和によって定義された指数は超共形指数と呼ばれる場合があるが、その場合には \mathbb{R}^n 上の局所的演算子を用いた読み替えはできないので注意が必要である。

2.3 調和振動子

前に述べたように、指数は連続的パラメータに依存しない。このことを用いると、指数を弱結合極限において計算することができる。そのような極限において、系は調和振動子の集合として扱うことができる。そこで調和振動子に対する分配関数についてまとめておこう。

まず、次のラグランジアンで与えられるボゾンの調和振動子を考えよう。

$$L = c \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2 \right). \quad (2.12)$$

ω は固有振動数であり、 c は正の定数である。ユークリッド空間において定義された場の理論のラグランジアンは必ずしもエルミート性を持たないので、その弱結合極限で現れる

調和振動子の固有振動数 ω も必ずしも実数とは限らない。そのような場合の計算は ω が実数である場合からの解析接続で定義することにする。 $\text{Re}\omega$ は正であると仮定しておく。 c は q の規格化を変更することで q に吸収することができるので、もちろん分配関数は c に依存しないはずである。しかし経路積分によって分配関数を評価しようとするれば、 q に対する規格化の変更が経路積分の測度を変化させる可能性がある。そこで、ここでは c を無視せずにそのまま残しておこう。

まずは正準量子化により分配関数を計算しよう。量子化することで得られるエネルギーの固有値は

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

である。従って、逆温度を β とすれば、分配関数は次のように得られる。

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2 \sinh \frac{\beta\omega}{2}}. \quad (2.14)$$

ω の実部が正であるという仮定により、 n に対する無限和は収束する。

同じものを経路積分を用いて導出しておくことも有用である。作用は次のように与えられる。

$$S = c \int \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2 \right) dt \quad (2.15)$$

有限温度系を扱うために、ウィック回転 $t \rightarrow -i\tau$ を行い、 $Z(\beta) = \text{tr} e^{-\beta H}$ のトレースを τ 座標の同一視

$$\tau \sim \tau + \beta \quad (2.16)$$

と解釈する。その結果、ユークリッド空間上の作用関数

$$S_E = -iS|_{t=-i\tau} = c \oint \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{\omega^2}{2} q^2 \right) d\tau \quad (2.17)$$

が得られる。 τ 積分は周期 β の円周上で行われる。分配関数はこの作用を用いて

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}q e^{-S_E} \quad (2.18)$$

と与えられる。

この定義においては正準形式の場合と異なり、分配関数に c 依存性が無いことはそれほど自明ではない。しかし以下で見ると分配関数は c に依存せず、正準形式で求めた (2.14) に一致する。定数 c は q の規格化の変更によって吸収できるから、このことは分配関数が力学変数の規格化に依存しないことを意味する。このことを具体的に確かめておこう。まず、

$$\oint d\tau f_m^*(\tau) f_n(\tau) = \delta_{mn}, \quad f_m^*(\tau) = f_{-m}(\tau) \quad (2.19)$$

を満足するような S^1 上の関数の完全系 $f_n(\tau)$ ($n \in \mathbb{Z}$) を用いて力学変数 q を

$$q(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q_n f_n(\tau) \quad (2.20)$$

と展開する。 q が実であれば

$$q_n^* = q_{-n} \quad (2.21)$$

が成り立つ。

$$q_0 = x_0, \quad q_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_n + iy_n), \quad (n > 0) \quad (2.22)$$

のように実数に分解し、積分測度を

$$\int \mathcal{D}q = \prod_{n=0}^{\infty} \int dx_n \prod_{n=1}^{\infty} \int dy_n \quad (2.23)$$

によって定義する。ここではモード展開を次のように行う。

$$q = \sum_n \frac{1}{\sqrt{\beta}} q_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{\beta}} \quad (2.24)$$

これを作用に代入すると、

$$S_E = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c}{2} \left(\left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + \omega^2 \right) q_n q_{-n} = \sum_n \frac{c}{2} \left(\left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + \omega^2 \right) (x_n^2 + y_n^2) \quad (2.25)$$

となる。ただし最後の表式の n についての和は x_n を含む項については 0 から無限大まで、 y_n を含む項については 1 から無限大まで取るものとする。ガウス積分を実行すれば

$$\begin{aligned} Z &= \int dx dy e^{-\frac{c}{2} \sum_n \left(\left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + \omega^2 \right) (x_n^2 + y_n^2)} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c\omega}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{c \left[\left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + \omega^2 \right]} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c\omega}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta^2}{2\pi c} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\beta\omega}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{n^2}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

が得られる。最後の無限積については、次の恒等式がある。

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a^2}{n^2} \right) = \frac{\sinh a\pi}{a\pi}. \quad (2.27)$$

その他の無限積は発散しているが、 ζ 関数正則化を用いることで有限値を得ることができる。公式は §B.1 に与える。これらの因子を全てあわせれば、次の結果が得られる。

$$Z = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c\omega}} \left(\frac{\sqrt{2\pi c}}{\beta} \right) \left(\frac{1}{2\pi} \right) \left(\frac{\beta\omega}{2 \sinh \frac{\beta\omega}{2}} \right) = \frac{1}{2 \sinh \frac{\beta\omega}{2}} \quad (2.28)$$

これは正準形式で求めた結果に一致している。ここで得られた結果を次のように表わしておこう。

$$\det[c(-\partial_\tau^2 + \omega^2)] = \left(2 \sin \frac{\beta\omega}{2} \right)^2. \quad (2.29)$$

この結果は定数係数 c に依存していないが、これは ζ 関数正則化のもとで次の関係式が成り立つことによる。

$$\det[c] = 1. \quad (2.30)$$

フェルミオンの場合についても見ておこう。振動数 ω のフェルミオン調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \omega \left(b^\dagger b - \frac{1}{2} \right), \quad \{b^\dagger, b\} = 1 \quad (2.31)$$

である。 b と b^\dagger はフェルミオンの昇降演算子である。この系には二つの状態のみが存在し、エネルギーは $\pm\omega/2$ によって与えられるから、分配関数は

$$Z = \text{tr} e^{-\beta H} = e^{-\frac{\beta\omega}{2}} + e^{+\frac{\beta\omega}{2}} = 2 \cosh \frac{\beta\omega}{2} \quad (2.32)$$

となる。指数の計算の場合には、通常の分配関数ではなく、演算子 $(-1)^F$ が挿入された次のものが重要となる。

$$Z' = \text{tr} (-1)^F e^{-\beta H} = e^{\frac{\beta\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\omega}{2}} = 2 \sinh \frac{\beta\omega}{2} \quad (2.33)$$

一般に、基底状態がボゾンのかフェルミオンのかを指定すれば、それ以外の状態の統計性は一意的に決定されるが、基底状態の統計性を一意的に決める一般的な処方存在しない。ここでは基底状態はボゾンのであると仮定しておく。

Z や Z' に関しても、フェルミオン変数の経路積分によって計算することができる。ユークリッド空間におけるフェルミオンの作用は次のように与えることができる。

$$S_E = \int d\tau c \bar{\psi} (\partial_\tau + \omega) \psi \quad (2.34)$$

ただし、 $\bar{\psi}$ と ψ は互いに独立なフェルミオンである。 τ はボゾンの場合と同様に周期 β の S^1 上の座標である。フェルミオンの場合にはこの S^1 に関して周期境界条件をとる場合と反周期境界条件をとる場合の二つが考えられる。分配関数はこの作用を用いて

$$Z_F = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_E} \quad (2.35)$$

と与えられる。ボゾンの場合と同じ関数系を用いて展開しよう。

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_n \psi_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{\beta}}, \quad \bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_n \bar{\psi}_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{\beta}}, \quad (2.36)$$

これを作用に代入すれば、振動子 ψ_n と $\bar{\psi}_n$ を用いて次のように書ける。

$$S_E = c \sum_n \bar{\psi}_{-n} \left(\frac{2\pi i n}{\beta} + \omega \right) \psi_n \quad (2.37)$$

(2.36) や (2.37) における n についての和は、周期境界条件であれば全ての整数値について、反周期境界条件であれば全ての半奇数について取る。経路積分の測度を

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_n \left(\int d\bar{\psi}_{-n} d\psi_n \right) \quad (2.38)$$

とおき、グラスマン数のガウス積分を

$$\int d\bar{\psi} d\psi e^{-c\bar{\psi}\psi} = c \quad (2.39)$$

によって定義する。全てのモードに対するガウス積分は次の値を与える。

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_E} = \prod_n \left[c \left(\frac{2\pi i n}{\beta} + \omega \right) \right]. \quad (2.40)$$

積分測度の定義を λ_n の積とするか $-\lambda_n$ の積とするかは定数 c の定義に吸収することができる。 ψ が周期境界条件に従い、 n が整数について積を取る場合には先ほどボゾンの計算で用いた公式を用いて

$$Z_{\text{periodic}} = (c\omega) \prod_{n=1}^{\infty} \left[c^2 \left(\left(\frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 + \omega^2 \right) \right] = 2 \sinh \frac{\beta\omega}{2} \quad (2.41)$$

を得る。この結果は

$$\det_{\text{periodic}}[c(\partial_{\tau} + \omega)] = 2 \sin \frac{\beta\omega}{2} \quad (2.42)$$

が成り立つことを意味している。ただし \det_{periodic} は周期境界条件を満足する S^1 上の関数の空間における行列式を意味する。今度もボゾンの場合と同様に c 依存性は消える。ボゾンの調和振動の計算から得られた式 (2.29) はこの式から直ちに得ることができる。

一方、境界条件が反周期的な場合には、恒等式

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{a^2}{(n + \frac{1}{2})^2} \right) = \cosh a\pi \quad (2.43)$$

などを用いれば

$$Z_{\text{anti-periodic}} = \prod_{n=0}^{\infty} \left[c^2 \left(\left(\frac{2\pi(n + \frac{1}{2})}{\beta} \right)^2 + \omega^2 \right) \right] = 2 \cosh \frac{\beta\omega}{2} \quad (2.44)$$

を得ることができる。すなわち

$$\det_{\text{anti-periodic}}[c(\partial_{\tau} + \omega)] = 2 \cos \frac{\beta\omega}{2} \quad (2.45)$$

が成り立つ。

こうして、二つの境界条件について得られた結果を (2.32) の Z および (2.33) の Z' と比較すれば、

$$Z = Z_{\text{anti-periodic}}, \quad Z' = Z_{\text{periodic}}. \quad (2.46)$$

が成り立つ。このことは境界条件の選び方とトレースの際のフェルミオンの符号の選び方の間に次の対応があることを意味する。

$$\text{tr}(e^{-\beta H}) \rightarrow \text{anti-periodic b.c.}, \quad \text{tr}((-1)^F e^{-\beta H}) \rightarrow \text{periodic b.c.} \quad (2.47)$$

2.4 局所化

前節で、調和振動子に対して分配関数 Z および演算子 $(-1)^F$ を挿入したトレースとして定義される Z' が経路積分によっても与えられることを見た。同様のことは、一般の場の理論においても成り立つ。すなわち、計量

$$ds^2 = -dt^2 + ds_{\mathcal{M}}^2 \quad (2.48)$$

を持つ時空 $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ 上で定義された理論の分配関数 Z は計量

$$ds^2 = d\tau^2 + ds_{\mathcal{M}}^2 \quad (2.49)$$

を持つユークリッド空間 $\mathcal{M} \times S^1$ 上の経路積分によって与えることができる。ただし S^1 方向の座標 τ の周期を逆温度 β に取る。フェルミオンに対しては S^1 方向について (2.47) のような境界条件を取る必要がある。より一般に

$$\text{tr}[(-1)^F \mathcal{O}] \quad (2.50)$$

を計算することを考えよう。この場合、任意の場に対する境界条件として

$$\mathcal{O}\Phi(\tau, \theta) = \Phi(\tau, \theta) \quad (2.51)$$

を取る必要がある。ただし \mathcal{M} 方向の座標をまとめて θ と表わした。 $\mathcal{O} = e^{-\beta H} = e^{\beta \partial_\tau}$ の場合にはこれは境界条件

$$\Phi(\tau + \beta, \theta) = \Phi(\tau, \theta) \quad (2.52)$$

を意味する。さらに一般のインデックスの場合には

$$\mathcal{O} = e^{-\beta\{Q,S\} - \mu_i K_i} \quad (2.53)$$

の形をしている。ただし Q と S は $\mathcal{M} \times S^1$ 上の超対称変換であり、 K_i はこれら超対称変換と可換なボゾンの演算子である。

このインデックスの経路積分表示は

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi]} \quad (2.54)$$

である。演算子 (2.53) の情報は作用 S ではなく場に対する境界条件としてこの式に含まれている。一般に相互作用がある場合にはこの経路積分を直接積分を実行するのは難しいが、そのような場合でも局所化を用いることで厳密に経路積分を実行できる。そのために、作用に変形項

$$tS_{\text{def}}[\Phi] = tQV[\Phi], \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.55)$$

を加えることで次のように変形した経路積分を考えよう。

$$Z(t) = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi] - tS_{\text{def}}[\Phi]} \quad (2.56)$$

Q は (2.53) に含まれる超対称性変換であり、 $V[\Phi]$ は適当なグラスマン奇の汎関数である。 Q はもとの理論の対称性であるから $QS = 0$ である。さらに変形項も Q のもとで不変であること、すなわち $QS_{\text{def}} = Q^2V = 0$ であることを仮定する。 Q が冪零、すなわち $Q^2 = 0$ であればこの条件は満足されるが、必ずしもそうである必要はない。 $t \geq 0$ は変形のパラメータであり、 $t = 0$ であればもとの分配関数に一致する。一見この経路積分はパラメータ t に依存する。しかし t で微分してみると、次のように 0 になることがわかる。

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \int \mathcal{D}\Phi (-QV) e^{-S-tQV} = \int \mathcal{D}\Phi Q (-V e^{-S-tQV}) = 0 \quad (2.57)$$

最後の等号では Q 変換のもとで積分測度 $\mathcal{D}\phi$ が不変であることを仮定した。従って、 $Z(t)$ は t に依存しない。変形項が半正定値になるようにうまく Q と V を選ぶと、 $t \rightarrow \infty$ の極限において、経路積分は $S_{\text{def}}[\Phi] = 0$ によって定義される鞍点の周りだけが寄与するようになる。そのため、経路積分はこの条件を満足する鞍点 Φ_n の周りでのガウス積分に帰着する。 n は鞍点のラベルである。 Φ_n の周りでのガウス積分を実行するために

$$\Phi = \Phi_n + \frac{1}{\sqrt{t}} \delta\Phi \quad (2.58)$$

と分解しよう。これを作用 $S[\Phi] + tS_{\text{def}}[\Phi]$ に代入し、 $t \rightarrow \infty$ の極限を取ると、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S[\Phi] + tS_{\text{def}}[\Phi]) = S(\Phi_n) + S_{\text{def}}^{(2)}[\Phi_n, \delta\Phi] \quad (2.59)$$

となる。ただし $S_{\text{def}}^{(2)}[\Phi_n, \delta\Phi]$ は $S_{\text{def}}[\Phi_n + \delta\Phi]$ を $\delta\Phi$ で展開したときの二次の項である。これを上記の経路積分に代入すれば、

$$Z = \sum_n e^{-S(\Phi_n)} Z_{1\text{-loop}}(\Phi_n) \quad (2.60)$$

が得られる。ただし $Z_{1\text{-loop}}$ は $\delta\Phi$ を経路積分することで得られる関数である。

$$Z_{1\text{-loop}}(\Phi_n) = \int \mathcal{D}\delta\Phi e^{-S_{\text{def}}^{(2)}[\Phi_n, \delta\Phi]}. \quad (2.61)$$

この積分はガウス積分であり、厳密に実行することができる。ここではゼロモードが存在せず、鞍点が離散的に存在する場合について考えた。経路積分の書き換えにおいて (2.58) に含まれる因子 \sqrt{t} を無視したが、もしゼロモードが存在せず、 Φ の経路積分が完全に $\delta\Phi$ の経路積分に置き換えられる場合には、規格化因子 \sqrt{t} が結果に影響を与えないことは前節の力学変数の規格化の議論から保証される。ゼロモードがある場合には鞍点に対する和が積分に置き換わるが、そのような場合に分配関数の定数因子を決定するには正準形式の結果を再現するように決めればよい。これについては次の節で述べる。

2.5 $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ 上の分配関数

$\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ の構造を持つ背景上の自由場の理論における分配関数

$$Z = \text{tr}[(-1)^F e^{-\beta H}] \quad (2.62)$$

を経路積分を用いて計算する一般的処方を与えておこう。まず、背景時空の計量を次のように置く。

$$ds^2 = d\tau^2 + ds_{\mathcal{M}}^2 \quad (2.63)$$

\mathbb{R} 方向の座標 (時間座標) を τ 、 \mathcal{M} 上の複数の座標をまとめて θ とする。

前節で行ったように、 Q -exact な項により作用を変形することで弱結合極限をとった後は、経路積分は無数個の非ゼロモードに対するガウス積分とゼロモードに対する有限次元の積分に分けられる。ここではゼロモードが存在しない場合についてまず考えよう。この場合作用の中で揺らぎについて二次の項のみを考慮すれば十分であり、モード展開を行って調和振動子の集合として扱うことができる。まずフェルミオンの場合を考えよう。一般に、作用は次のように与えられる。

$$S_E = \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{R}} \bar{\Psi} D_{\Psi} \Psi \quad (2.64)$$

D_{Ψ} は一階の微分演算子である。場 Ψ をモード展開することで調和振動子に分解し、それらの振動数を求めることができれば、この自由場の理論の分配関数はそれらの調和振動子の分配関数の積として得られる。

まずは Ψ が複素であり、 Ψ と $\bar{\Psi}$ が独立な場合を考えよう。 $\Psi(\theta, \tau)$ と $\bar{\Psi}(\theta, \tau)$ を、 \mathcal{M} 上の関数系を用いて次のようにモード展開しよう。

$$\Psi(\theta, \tau) = \sum_n \Psi_n(\tau) Y_n(\theta), \quad \bar{\Psi}(\theta, \tau) = \sum_n \bar{\Psi}_n(\tau) \bar{Y}_n(\theta) \quad (2.65)$$

$Y_n(\theta)$ と $\bar{Y}_n(\theta)$ は次の条件を満足すると仮定しておく。

$$\int_{\mathcal{M}} \bar{Y}_m Y_n = \delta_{mn}. \quad (2.66)$$

この展開を作用に代入すると、 D_{Ψ} は一階の微分演算子であるから展開関数 $Y_n(\theta)$ と $\bar{Y}_n(\theta)$ を適当に選ぶと

$$S = \sum_n c_n \bar{\Psi}_n (-\partial_{\tau} - \omega_n) \Psi_n \quad (2.67)$$

の形の和を得る。この ω_n が調和振動子の振動数と解釈されるものである。ただし ω_n の中には正のものも負のものも存在する。(一般には ω_n は複素数であるが、その場合には実部を見て正負を決めることにする。また、実部が 0 である場合には特別な処理をしなければならないが、ここではそのようなものは存在しないと仮定しておく。) $\omega_n >$ は Ψ の正粒子に対応した調和振動子の振動数であり、 $\omega_n^{(p)}$ と表わすことにする。 $-\omega_n > 0$ はその反粒子、すなわち $\bar{\Psi}$ 粒子に対応した調和振動子の振動数であり、 $\omega_n^{(a)} = -\omega_n$ を定義する。従って、全ての調和振動子からの寄与をあわせた分配関数は次のように与えられる。

$$Z = \prod_{\omega_n} \left(2 \sinh \frac{\beta \omega_n^{(p)}}{2} \right) \prod_{\omega_n} \left(2 \sinh \frac{\beta \omega_n^{(a)}}{2} \right) \quad (2.68)$$

一方、もとのフェルミオン場が実であり、 $\bar{\Psi}$ と Ψ が独立でない場合には、粒子と反粒子の区別がなく、 $\omega_n^{(p)} = \omega_n^{(a)}$ が成り立つ。分配関数の計算ではそれらのうちの片方だけを考慮しておけばよい。

$$Z = \prod_{\omega_n} \left(2 \sinh \frac{\beta \omega_n^{(p)}}{2} \right) = \prod_{\omega_n} \left(2 \sinh \frac{\beta \omega_n^{(a)}}{2} \right) \quad (2.69)$$

次に、ボゾン場の場合を考えよう。作用が二階の微分演算子 D_Φ を用いて次のように与えられるとしよう。

$$S_E = \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{R}} \bar{\Phi} D_\Phi \Phi. \quad (2.70)$$

まずは Φ が複素であり、 Φ と $\bar{\Phi}$ が独立である場合を考える。今度もモード展開

$$\Phi(\theta, \tau) = \sum_n \Phi_n(\tau) Y_n(\theta), \quad \bar{\Phi}(\theta, \tau) = \sum_n \bar{\Phi}_n(\tau) \bar{Y}_n(\theta) \quad (2.71)$$

を行えば、作用を次のように書き換えることができる。

$$S = \sum_n -c_n \bar{\Phi}_n (-\partial_\tau - \omega_n) (-\partial_\tau - \omega'_n) \Phi_n \quad (2.72)$$

時間微分について二次の項が正であるためには $c_n > 0$ でなければならない。また、ポテンシャル部分が正になるためにはそれぞれの n に対して ω_n と ω'_n のどちらかが正、どちらかが負でなければならない。ここでは $\omega_n > 0$ 、 $\omega'_n < 0$ に取ることにしよう。これらはそれぞれ正粒子と反粒子の振動子を表しているので、 $\omega_n^{(p)} = \omega_n$ と $\omega_n^{(a)} = -\omega'_n$ を定義する。分配関数は

$$Z = \prod_{\omega_n} \left(2 \sinh \frac{\beta \omega_n^{(p)}}{2} \right)^{-1} \prod_{\omega_n} \left(2 \sinh \frac{\beta \omega_n^{(a)}}{2} \right)^{-1} \quad (2.73)$$

によって与えられる。一方 Φ が実の場合には正粒子と反粒子の区別はなく、 $\omega_n^{(p)} = \omega_n^{(a)}$ が成り立つので、それらの片方だけを考慮しておけばよい。

$$Z = \prod_{\omega_n} \left(2 \sinh \frac{\beta \omega_n^{(p)}}{2} \right)^{-1} = \prod_{\omega_n} \left(2 \sinh \frac{\beta \omega_n^{(a)}}{2} \right)^{-1} \quad (2.74)$$

以上のように、 Z の一般形は次のようなものである。

$$Z = \frac{\prod_{i \in F} (2 \sinh \frac{\beta \omega_i}{2})}{\prod_{i \in B} (2 \sinh \frac{\beta \omega_i}{2})} = \frac{\prod_{i \in F} (q^{-\frac{\omega_i}{2}} - q^{\frac{\omega_i}{2}})}{\prod_{i \in B} (q^{-\frac{\omega_i}{2}} - q^{\frac{\omega_i}{2}})} \quad (2.75)$$

i は調和振動子のラベルであり、分子はフェルミオンの、分母はボゾンの寄与である。ここで、 $q = e^{-\beta}$ を導入した。この無限積は一般に正則化を必要とする。次のように書き換えよう。

$$Z = q^{E_0} \frac{\prod_{i \in F} (1 - q^{\omega_i})}{\prod_{i \in B} (1 - q^{\omega_i})} \quad (2.76)$$

ただし E_0 は次のように定義される零点エネルギーである。

$$E_0 = \sum_{i \in B} \frac{\omega_i}{2} - \sum_{i \in F} \frac{\omega_i}{2}. \quad (2.77)$$

ω_i の実部は常に正であることを仮定しているから、(2.76) の無限積は $|q| < 1$ においてうまく定義される。従って、(2.75) において必要であった正則化は零点エネルギー (2.77) の計算に帰着する。(2.76) における無限積は plethystic exponential Pexp を用いて簡潔に表わすことができる。

Pexp の定義は以下の通りである。 X_i をいくつかの文字 z_1, z_2, \dots, z_k の任意のべきの積として与えられた単項式とし、それらを整数 N_i を係数として足し合わせることで定義された多項式

$$f(z_1, \dots, z_k) = \sum_i N_i X_i \quad (2.78)$$

があるとする。このとき、 f の plethystic exponential を次のように定義する。

$$\text{Pexp} f(z_1, \dots, z_k) = \prod_i (1 - X_i)^{-N_i} = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z_1^n, \dots, z_k^n)}{n}. \quad (2.79)$$

これを用いると、(2.76) を次のように表わすことができる。

$$Z = q^{E_0} \text{Pexp} I_{\text{sp}}. \quad (2.80)$$

ただし I_{sp} は一粒子インデックスと呼ばれる量で、次のように定義される。

$$I_{\text{sp}} = \text{tr}_{\text{sp}} [(-1)^F e^{-\beta H}] = \sum_{i \in B} q^{\omega_i} - \sum_{i \in F} q^{\omega_i}. \quad (2.81)$$

調和振動子によってモード展開したときの、全てのモードに対する和を tr_{sp} によって表わした。つまり、 tr_{sp} は状態に対する和ではなく、調和振動子のラベルについての和であり、(2.81) の F や H は振動子の量子一つあたりのフェルミオン数とエネルギーを表わす演算子である。インデックスは q に依存しないが、ゲージ対称性が無い場合には I_{sp} も同様に q に依存しない。

$\text{Pexp} I_{\text{sp}}$ の因子は必ず q^{E_0} と一緒に現れるので、それまでひとまとめにして表わすために (2.78) に対して次のものを定義しておくのが便利である。

$$\text{Pexp}' f(z_1, \dots, z_k) = \prod_i (X_i^{-\frac{1}{2}} - X_i^{\frac{1}{2}})^{-N_i} \quad (2.82)$$

ただし上で述べたように、この無限積には正則化が必要である。この記号を用いれば、 Z は次のように与えることができる。

$$Z = \text{Pexp}' I_{\text{sp}} = Z_0 \text{Pexp} I_{\text{sp}}, \quad Z_0 = \prod_i X_i^{\frac{N_i}{2}}. \quad (2.83)$$

(2.53) で与えたような、より一般の \mathcal{O} を用いて定義したインデックスを計算する場合には I_{sp} の定義 (2.81) に含まれる q^D を変更すればよい。たとえば

$$\mathcal{O} = q^D y_i^{K_i} \quad (2.84)$$

のように与えられる場合には次のように変更すればよい。

$$I_{\text{sp}}(y_i) = \text{tr}_{\text{sp}}[(-1)^F q^D y_i^{K_i}] \quad (2.85)$$

I_{sp} は q には依存しないが y_i には依存することに注意。

ここまではゼロモードが存在しない場合、すなわち ω_n の実部が 0 ではない場合のみを見てきた。しかし $\text{Re} \omega_n = 0$ のモードが現れる場合がある。特に重要なのはゲージ理論のウィルソンライン、すなわちゲージ場の τ 成分の定数モードである。 $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ 上のゲージ場の時間成分 $A_\tau(\tau, \theta)$ のうち、 \mathcal{M} の座標 θ に依存しないモードを $\bar{A}_\tau(\tau)$ としよう。

$$\bar{A}_\tau(\tau) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{M})} \int_{\mathcal{M}} dV A_\tau(\tau, \theta). \quad (2.86)$$

$\mathcal{M} \times S^1$ 上のゲージ固定条件として $\partial_\mu A_\mu = 0$ を用いることができる。 μ は τ 方向を含め全ての方向を走る。この条件はゼロモード \bar{A}_τ に対して次の条件を課す。

$$\partial_\tau \bar{A}_\tau = 0. \quad (2.87)$$

この結果、 \bar{A}_τ は τ に依存しない定数となる。この定数を $A^{(0)}$ と置こう。しかし、このゲージ固定条件によってもまだ θ にも τ にも依存しない定数パラメータによるゲージ変換は固定されていない。ここではゲージ群が $U(N)$ であり、 $A^{(0)}$ が $N \times N$ 行列として表わされる場合を考えよう。その場合、残された定数ゲージ変換を用いて $A^{(0)}$ を対角行列にすることができる。そこでさらに次のゲージ固定条件を置く。

$$A_{ij}^{(0)} = 0 \quad (i \neq j). \quad (2.88)$$

残された対角成分を $A_{\text{diag}}^{(0)}$ と表すことにする。

$\bar{A}_\tau(\tau)$ と、そのゲージ固定によって導入されるゴースト場に対する経路積分を行い、分配関数中のどのような因子が現れるかを見ておこう。上記のゲージ固定条件に対応するゲージ固定項とゴースト項は次のように与えることができる。

$$S_{\text{gf}} = \int [(\partial_\tau \bar{A}_\tau)^2 + \bar{c}' \partial_\tau D_\tau c'] d\tau + \sum_{i \neq j} [|A_{ij}^{(0)}|^2 + \bar{c}_{ij} (A_{ii}^{(0)} - A_{jj}^{(0)}) c_{ij}]. \quad (2.89)$$

ここで、 $A_{ii}^{(0)} - A_{jj}^{(0)}$ は c_{ij} に結合する $A_{\text{diag}}^{(0)}$ の成分である。つまり、 $N \times N$ 行列 c のうち ij 成分のみを残し、それ以外を 0 とした行列を $c^{(ij)}$ とすると、 $[A_{\text{diag}}^{(0)}, c^{(ij)}] = (A_{ii}^{(0)} - A_{jj}^{(0)}) c^{(ij)}$ である。一般に、随伴表現の場はカルタン部分代数に対する固有ベクトルに分解することができ、それぞれルートに対応する。ルート α に対応する成分を $c^{(\alpha)}$ としたとき、対応する X の固有値を $\alpha(X)$ で表すことにする。すなわち

$$[X, c^{(\alpha)}] = \alpha(X) c^{(\alpha)} \quad (2.90)$$

である。また、一般の表現に属する場 ϕ については、

$$X\phi^{(\rho)} = \rho(X)\phi^{(\rho)} \quad (2.91)$$

のようにウェイト ρ に対する固有値を $\rho(X)$ と表す。

(2.89) のゴースト c' と \bar{c}' は座標 τ のみに依存する場であり、一つ目のゲージ固定条件 (2.87) ではパラメータが τ に依存しない変換を固定することはできないことに対応し、 c_{ij} と \bar{c}_{ij} は座標依存性を持たない場である。 \bar{c}' と c' からは定数モードを除いてある。このことを強調するためにプライムをつけた。 e^{-S} を経路積分しよう。

$$\begin{aligned} \int [d\bar{A}_\tau] &\equiv \int \mathcal{D}\bar{A}_\tau \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} dc_{ij} d\bar{c}_{ij} e^{-S_{\text{gf}}} \\ &\propto \int dA_{\text{diag}}^{(0)} \prod_{\alpha} \frac{\det'(\partial_\tau(\partial_\tau - i\alpha(A_{\text{diag}}^{(0)})))}{\det' \partial_\tau} \prod_{\alpha \neq 0} \alpha(A_{\text{diag}}^{(0)}) \end{aligned} \quad (2.92)$$

どの因子がどの自由度の積分から現れるかは明らかであろう。 ∂_τ の行列式は分子と分母で相殺する。一つ目の積はカルタン部分も含む全てのウェイトについて、二つ目はカルタン部分を除くルートについて取る。 $A^{(0)}$ の対角成分を $A_{\text{diag}}^{(0)}$ と表わした。次のように書き換えることができる。

$$\int [d\bar{A}_\tau] = \int dA_{\text{diag}}^{(0)} (\det'(\partial_\tau))^{\text{rank}G} \prod_{\alpha} \det(\partial_\tau - i\alpha(A_{\text{diag}}^{(0)})) \quad (2.93)$$

二つ目の因子は公式 (2.42) を用いて

$$\det(\partial_\tau - i\alpha(A_{\text{diag}}^{(0)})) = -i2 \sin \frac{\beta\alpha(A_{\text{diag}}^{(0)})}{2} \quad (2.94)$$

である。一つ目の因子は $\alpha = 0$ となる対角成分からの寄与である。これは定数であるので無視しよう。定数であっても全体の規格化に影響するが、全体の規格化は他の場の寄与を何も挿入せずに $A_{\text{diag}}^{(0)}$ 積分を実行したときに 1 になるようにあとで決めることにする。つまり、

$$\int [d\bar{A}_\tau] 1 = 1 \quad (2.95)$$

を要請する。これは正準形式においてそれぞれの状態を重み 1 で足し上げて定義される分配関数を再現するために必要な条件である。その結果、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \int [d\bar{A}_\tau] &= \frac{1}{|W|} \int \left(\prod_{i=1}^{\text{rank}G} \frac{\beta dA_{ii}^{(0)}}{2\pi} \right) \prod_{\alpha \neq 0} \left| 2 \sin \frac{\beta\alpha(A_{\text{diag}}^{(0)})}{2} \right| \\ &= \frac{1}{|W|} \int \left(\prod_{i=1}^{\text{rank}G} \frac{\beta dA_{ii}^{(0)}}{2\pi} \right) \text{Pexp}' \left[- \sum_{\alpha \neq 0} e^{i\beta\alpha(A_{\text{diag}}^{(0)})} \right] \end{aligned} \quad (2.96)$$

ただし $|W|$ はワイル群の位数であり、ゲージ群が $U(N)$ の場合には $N!$ である。ゲージ場の定数モードに対してこの因子を導入することで、分配関数に対して次の一般式を得る。

$$Z = \int [d\bar{A}_\tau] e^{-S[\Phi_0]} Z_{1\text{-loop}}(A_{\text{diag}}^{(0)}) \quad (2.97)$$

因子 $Z_{1\text{-loop}}(A_{\text{diag}}^{(0)})$ はゲージ場のゼロモード以外、すなわち物質場、ゲージ場の非ゼロモード、およびそれらのゲージ固定に関するゴーストの調和振動子の分配関数の積である。ここで考えた \bar{A}_τ 以外にゼロモードが無いことを仮定すれば、 Z には規格化の不定性はない。¹

ゲージ群の表現 R に属する場の $Z_{1\text{-loop}}(A_{\text{diag}}^{(0)})$ への寄与について考えよう。 $\dim R$ 個の成分は R のウェイトベクトル ρ によってラベルされる。あるウェイト ρ に対応する成分に対して、ゲージ場 $A_{\text{diag}}^{(0)}$ を含む共変微分の作用は次のようになる。

$$D_\tau \Phi_\rho = \partial_\tau \Phi_\rho - i A_{\text{diag}}^{(0)} \Phi_\rho = \partial_\tau \Phi_\rho - i \rho(A_{\text{diag}}^{(0)}) \Phi_\rho \quad (2.98)$$

従って、 ω_n には必ず Wilson line $A_{\text{diag}}^{(0)}$ が次の形で含まれる。

$$\omega_n = -i \rho(A_{\text{diag}}^{(0)}) + \lambda_n \quad (2.99)$$

ω_n から $A_{\text{diag}}^{(0)}$ の寄与を除いた部分を λ_n によって表わした。あるいは単に共変微分 $-D_\tau$ の固有値（これはゲージ不変である。）といってもよい。 ω_n の実部の正負によってそのモードが正粒子、反粒子のどちらであるかが決まるが、Wilson line $A_{\text{diag}}^{(0)}$ は ω_n の虚部に含まれているので、 ω_n の正負の判定には影響せず、 ω_n の正負と λ_n の正負は一致する。一粒子インデックスは次のように $q^{-iA_{\text{diag}}^{(0)}}$ を通して q に依存する。

$$I_{\text{sp}}(q^{-iA_{\text{diag}}^{(0)}}, y_i) = \sum_{\rho \in R} \sum_{\lambda^{(\rho)}} (-1)^F q^{\lambda^{(\rho)} - i\rho(A_{\text{diag}}^{(0)})} y_i^{K_i} + \sum_{\rho \in R} \sum_{\lambda^{(\alpha)}} (-1)^F q^{\lambda^{(\alpha)} + i\rho(A_{\text{diag}}^{(0)})} y_i^{-K_i} \quad (2.100)$$

粒子と反粒子の寄与を分けて書いた。 K_i はそれぞれのモードごとに対応する固有値に置き換える。和は場を \mathcal{M} 上で展開して得られるモードのうち \bar{A}_τ 以外のものについて取る。粒子と反粒子が同一である場合には $\lambda_n^{(\rho)} = \lambda_n^{(\alpha)}$ が成り立つ。しかも、正粒子と反粒子が同じである場合には R は実表現であり、 $R = \bar{R}$ である。従って、(2.100) に含まれる二つの項は同じであり、これらのうちの片方を考慮すればよい。(2.96) を組み合わせればインデックスが次のように与えられる。

$$I(y_i) = \frac{1}{|W|} \int \left(\prod_{i=1}^{\text{rank} G} \frac{\beta dA_{ii}^{(0)}}{2\pi} \right) e^{-S[\Phi_0]} \text{Pexp}' \left[I_{\text{sp}}(q^{-iA_{\text{diag}}^{(0)}}, y_i) - \sum_{\alpha \neq 0} q^{-i\alpha(A_{\text{diag}}^{(0)})} \right] \quad (2.101)$$

$A_{\text{diag}}^{(0)}$ の積分は、ゲージ不変な状態のみを取り出す役割を果たしており、積分した結果は q に依存しない。鞍点を指定する離散的なパラメータがある場合にはそれについての和も必要になる。

¹ただし、以前に述べたように基底状態の統計性についての不定性は残る。ここでは基底状態がボソンのであると仮定したが、それが正しい選択とは限らないので、ここで与えた Z の符号が正しいことは保証されていないことを注意しておく。

Wilson line を表わすために、 $A_{ii}^{(0)}$ の代わりに新たな変数

$$\xi_i = q^{-iA_{ii}^{(0)}} = e^{i\beta A_{ii}^{(0)}} \quad (2.102)$$

を導入し、 q と独立な数として扱うことにする。ウェイト ρ を持つ場と Wilson line の対角成分 $A_{ii}^{(0)}$ の結合を表すチャージ ρ_i を

$$\rho(A_{\text{diag}}^{(0)}) = \rho_i A_{ii}^{(0)} \quad (2.103)$$

によって定義すれば一粒子指数は次のように与えられる。

$$I_{\text{sp}}(\xi_i, y_i) = \sum_{\rho \in R} \sum_{\lambda^{(\rho)}} (-1)^F q^{\lambda^{(\rho)}} \xi_i^{\rho_i} y_i^{K_i} + \sum_{\rho \in R} \sum_{\lambda^{(\alpha)}} (-1)^F q^{\lambda^{(\alpha)}} \xi_i^{-\rho_i} y_i^{-K_i} \quad (2.104)$$

ゲージ対称性が無い場合と同様に、これは q には依存しない。このように表わすと、Wilson line を表す変数 ξ_i は大域的対称性に対する化学ポテンシャルと同じように現れている。全指数は ξ_i に対する $\xi_i = 0$ のまわりでの積分を行うことによって得られる。

$$I(y_i) = \frac{1}{|W|} \oint \left(\prod_{i=1}^{\text{rank}G} \frac{d\xi_i}{2\pi i \xi_i} \right) e^{-S[\Phi_0]} \text{Pexp}' \left[I_{\text{sp}}(\xi_i, y_i) - \sum_{\alpha \neq 0} \xi_i^{\alpha_i} \right] \quad (2.105)$$

ただし、随伴表現に対する ρ_i を α_i と書いた。ここで行ったように、変数 ξ_i を用いると、指数の β に対する非依存性が明らかである。

第3章 共形平坦な時空上の超対称性

3.1 $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ と S^n

指数は $\mathcal{M} \times S^1$ という構造の時空の上で経路積分を行うことで得られるが、 $\mathcal{M} \times S^1$ 上で超対称性を持つ理論を構成できるかどうかは非自明な問題である。しかし、 \mathcal{M} が球面の場合には、平面をワイル変換することで $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ が得られることを用いた簡単な構成法がある。このように平面からワイル変換によって得ることができるような多様体は共形平坦であると言われる。ここではまず具体例として $S^{d-1} \times \mathbb{R}$ および S^d が共形平坦であることを具体的に座標をとって確認しておこう。あとの節では一般の共形平坦な背景上で超対称性をどのように構成するかをまとめるが、その際にはここで与えるような具体的な座標を決める必要はない。

n 次元平面 \mathbb{R}^n の計量

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{n-1}^2 \quad (3.1)$$

から出発する。次のワイル変換を行ってみよう。

$$ds'^2 = \frac{r^2}{\rho^2} ds^2 \quad (3.2)$$

r はある定数である。時間座標 τ を

$$\frac{\rho}{r} = \exp \frac{\tau}{r}. \quad (3.3)$$

によって定義すれば、この計量が $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ であることが明らかな形に書くことができる、

$$ds'^2 = \frac{r^2}{\rho^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{n-1}^2) = (d\tau)^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2. \quad (3.4)$$

r は S^{n-1} の半径である。 τ 方向をコンパクト化すれば $S^{n-1} \times S^1$ を得ることができるが、このようなコンパクト化は一般的に超対称性を破ってしまう。超対称性を破らずにコンパクト化する方法についてはあとで詳しく述べる。

\mathbb{R}^n から球面 S^n を得るには、(3.1) に対してワイル変換

$$g''_{\mu\nu} = \frac{1}{(1 + \frac{\rho^2}{4R^2})^2} g_{\mu\nu} \quad (3.5)$$

を行えばよい。その結果得られる計量は

$$ds''^2 = \frac{1}{(1 + \frac{\rho^2}{4R^2})^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{n-1}^2) \quad (3.6)$$

であるが、実はこれは半径が R の n 次元球面 S^n である。そのことを見るために、変数変換

$$\rho = 2R \tan \frac{\theta}{2} \quad (3.7)$$

を行えばよい。その結果 (3.6) は次のように見慣れた形に書き換えられる。

$$ds'^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{n-1}^2) \quad (3.8)$$

これは確かに半径が R の n 次元球面である。動径座標 ρ と角度 θ の関係は図 (3.1) のように表すことができる。

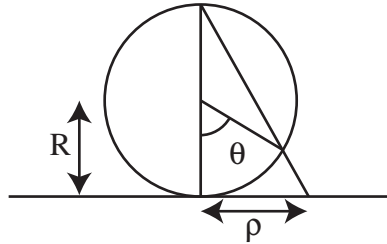


図 3.1: \mathbb{R}^n と S^n の間のワイル変換

3.2 一般座標変換・ワイル変換・共形変換

ある多様体 M を一つ固定し、その上の一般座標変換、ワイル変換、共形変換についておさらいしておこう。この節から §3.7 までは接空間の添え字に μ, ν, \dots を、局所直交系の添え字に m, n, \dots を用いることにする。時空の次元を d とする。

一般座標変換は、ある点の座標 x^μ を別の座標 x'^μ に付け替える操作である。

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu \quad (3.9)$$

この変換のもとで、スカラー場、1-form 場、計量は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \phi'(x') &= \phi(x), \\ A'_\mu(x') dx'^\mu &= A_\mu(x) dx^\mu, \\ g'_{\mu\nu}(x') dx'^\mu dx'^\nu &= g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \quad (3.10)$$

これらは座標変換を行う前後での同じ点での場の関係を与えている。多脚場 e_μ^m やスピン接続 ω_μ^{mn} は一般座標変換のもとでは 1 形式場 A_μ と全く同様に変換される。

以下で主に用いるのは無限小変換である。 v^μ を変換パラメータとする無限小一般座標変換

$$x^\mu = x'^\mu + v^\mu \quad (3.11)$$

のもとでは、これらの場は次のように変換される。

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{gc}}^0(v)\phi &\equiv \phi'(x) - \phi(x) = v^\mu \partial_\mu \phi, \\
\delta_{\text{gc}}^0(v)A_\mu &\equiv A'_\mu(x) - A_\mu(x) = v^\lambda \partial_\lambda A_\mu + (\partial_\mu v^\lambda)A_\lambda, \\
\delta_{\text{gc}}^0(v)g_{\mu\nu} &\equiv g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = D_\mu v_\nu + D_\nu v_\mu, \\
\delta_{\text{gc}}^0(v)e_\mu^m &\equiv e_\mu^m(x) - e_\mu^m(x) = v^\lambda \partial_\lambda e_\mu^m + (\partial_\mu v^\lambda)e_\lambda^m = D_\lambda v^m - v^\lambda \omega_\lambda^m{}_n e_\mu^n, \\
\delta_{\text{gc}}^0(v)\omega_\mu^{mn} &\equiv \omega_\mu^{mn}(x) - \omega_\mu^{mn}(x) = v^\lambda \partial_\lambda \omega_\mu^{mn} + (\partial_\mu v^\lambda)\omega_\lambda^{mn} \\
&= v^\lambda R_{\lambda\mu}{}^{mn} + \partial_\mu(v^\lambda \omega_\lambda^{mn}) + [\omega_\mu, (v^\lambda \omega_\lambda)]^{mn}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

これらは (3.10) とは異なり、座標変換の前後で同じ座標の値を持つ異なる二つの点における場の関係を与えていることに注意すること。

これらの無限小変換は、ゲージ対称性や局所ローレンツ対称性を尊重していない。たとえば A_μ がゲージ場である場合を考えると、変換 $\delta_{\text{gc}}^0 A_\mu$ がゲージ変換のもとで共変な量になっていない。これはスカラー場についても同様で、スカラー場がゲージ対称性のもとで非自明に変換される場合、 $\delta_{\text{gc}}^0 \phi$ は (共変微分ではなくただの偏微分を含むため) ゲージ変換のもとで共変ではない。さらに、多脚場やスピン接続の変換を見ると、局所ローレンツ対称性のもとで共変になっていないことがわかる。この問題は、一般座標変換にゲージ変換と局所ローレンツ変換による補正を組み合わせることで解決することができる。スカラー場とゲージ場のゲージ変換が次のように与えられるとしよう。

$$\delta_{\text{gauge}}(\lambda)A_\mu = D_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda - i[A_\mu, \lambda], \quad \delta_{\text{gauge}}(\lambda)\phi = i\lambda\phi. \tag{3.13}$$

また、反対称テンソル λ_{mn} をパラメータとする局所回転変換は、多脚場とスピン接続に次のように作用するとする。

$$\delta_{\text{LL}}(\lambda)e_\mu^m = -\lambda^m{}_n e_\mu^n, \quad \delta_{\text{LL}}(\lambda)\omega_\mu = \partial_\mu \lambda + [\omega, \lambda] = D_\mu \lambda. \tag{3.14}$$

これらのゲージ変換を用いて

$$\delta_{\text{gc}}(v) = \delta_{\text{gc}}^0(v) - \delta_{\text{gauge}}(v^\nu A_\nu) - \delta_{\text{LL}}(v^\lambda \omega_\lambda) \tag{3.15}$$

によって一般座標変換を定義しなおせば

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{gc}}(v)A_\mu &= v^\nu F_{\nu\mu} = v^\nu (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu - i[A_\nu, A_\mu]), \\
\delta_{\text{gc}}(v)\phi &= v^\mu D_\mu \phi = v^\mu (\partial_\mu \phi - iA_\mu \phi), \\
\delta_{\text{gc}}(v)e_\mu^m &= D_\mu v^m, \\
\delta_{\text{gc}}(v)\omega_\mu^{mn} &= v^\lambda R_{\lambda\mu}{}^{mn}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

のように全ての場の変換が共変な形になる。この変換の交換関係は次のようになる。

$$[\delta_{\text{gc}}(v), \delta_{\text{gc}}(v')] = \delta_{\text{gc}}(v'') + \delta_{\text{LL}}(v'^\mu v^\nu R_{\mu\nu}) + \delta_{\text{gauge}}(v'^\mu v^\nu F_{\mu\nu}) \tag{3.17}$$

ただし v'' は次のように定義される。

$$v''^\mu = [v', v]^\mu \equiv v'^\lambda D_\lambda v^\mu - v^\lambda D_\lambda v'^\mu \quad (3.18)$$

(二回目の変換を接続に作用させるのを忘れると曲率項の符号が逆になってしまうので注意すること。)

(3.17) における曲率項は変換 δ_{gc} を共変化したことにより現れたものであるが、これらの項の存在は、無限小座標変換を繰り返して有限座標変換を実現した際に最終的な結果がその経路に依存することをあらわしている。従って有限座標変換に対してはゲージ変換に対する共変化を行うことはできない。

ワイル変換は座標には作用せず、計量をスカラー関数倍する次の変換である。

$$g_{\mu\nu} = e^{-2\alpha} g'_{\mu\nu}, \quad e_\mu^m = e^{-\alpha} e_\mu'^m. \quad (3.19)$$

α は座標の任意関数である。無限小パラメータ α によるワイル変換を $\delta_W(\alpha)$ によって表そう。計量と多脚場に対して次のように作用する。

$$\delta_W(\alpha) g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} = 2\alpha g_{\mu\nu}, \quad \delta_W(\alpha) e_\mu^m = e_\mu'^m - e_\mu^m = \alpha e_\mu^m. \quad (3.20)$$

ワイル変換 (3.19) のもとで、任意のスピンを持つある場 Φ が Δ をある実数として

$$\Phi = e^{\Delta\alpha} \Phi' \quad (3.21)$$

と変換されるとき、この場はワイルウェイト Δ を持つという。(3.19) は、計量と多脚場がそれぞれワイルウェイト $\Delta = -2$ と $\Delta = -1$ を持つことを意味している。座標変数 x^μ はワイル変換のもとで不変であるから、一般座標変換のパラメータ v^μ もワイルウェイト $\Delta = 0$ である。ただし多脚場を用いて添え字を局所直交系のものには書き換えると、ワイルウェイト $\Delta = -1$ を持つことに注意。

$$v^\mu = v'^\mu, \quad v^m = e^{-\alpha} v'^m. \quad (3.22)$$

共形変換とは、ワイル変換と一般座標変換の組み合わせのうち、計量を変化させないものをいい、そのときの一般座標変換のパラメータは共形キリングベクトルと呼ばれる。すなわち共形キリングベクトル v に対する共形変換を $\delta_c^0(v)$ と表せば、

$$\delta_c^0(v) = \delta_{gc}(v) + \delta_W(\alpha) \quad (3.23)$$

であり、ワイル変換のパラメータ α は $\delta_c^0(v)$ が計量に作用したときに 0 になるという条件

$$\delta_c^0(v) g_{\mu\nu} = D_\mu v_\nu + D_\nu v_\mu + 2\alpha g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.24)$$

から一意的に次のように決まる。

$$\alpha = -\frac{1}{d} D_\mu v^\mu. \quad (3.25)$$

式 (3.24) は共形キリングベクトル v^μ から α を一意的に決めるだけでなく、 v^μ に対しても条件を課す。すなわち、 v^μ は任意のベクトルでよいわけではなく、(3.24) に (3.25) を代入して得られる次の条件を満足しなければならない。

$$D_{\{\{\mu\nu\}\}} = \frac{1}{2}(D_\mu v_\nu + D_\nu v_\mu) - \frac{1}{d}g_{\mu\nu}D_\lambda v^\lambda = 0. \quad (3.26)$$

ただし、 $\{\{\dots\}\}$ は対称トレースレス部分を表す記号である。これが v^μ が共形キリングベクトルであるための条件式である。

定義より、変換 (3.23) のもとで計量は不変であるが、多脚場はそうではない。(3.16) と (3.20) を組み合わせれば次の式が得られる。

$$\delta_c^0(v)e_\mu^m = \left(D_n v^m - \frac{1}{d}(D_\lambda v^\lambda)\delta_n^m \right) e_\mu^n = D^{[n}v^m]e_{\mu n} \quad (3.27)$$

最後の等号では (3.26) を用いた。(3.27) の右辺は e_μ^m の局所回転変換と見なすことができ、次のような補正項の導入によって打ち消すことができる。

$$\delta_c(v) = \delta_{gc}(v) + \delta_W(\alpha) - \delta_{LL}(D_{[m}v_{n]}) \quad (3.28)$$

この変換の交換関係は

$$[\delta_c(v), \delta_c(v')] = \delta_c(v'') + \delta_{\text{gauge}}(v'^\mu v^\nu F_{\mu\nu}) \quad (3.29)$$

となる。ただし v'' は (3.18) で定義されたものと同じである。この右辺は曲率テンソルを含む項がないので、ゲージ不変な場に対しては有限変換を定義することができる。

平坦時空中での共形キリングベクトルの一般形を求めておこう。計量を $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ とおき、(3.26) に対して ∂_ν を作用させて整理すると、

$$(d-2)\partial_\mu \partial \cdot v + d\partial^2 v_\mu = 0. \quad (3.30)$$

さらに ∂_ν を作用させ、 μ と ν に対する対称化を行い、(3.26) を用いれば

$$[(d-2)\partial_\mu \partial_\nu + \delta_{\mu\nu} \partial^2] \partial \cdot v = 0. \quad (3.31)$$

が得られる。ここで、次元 d が 2 よりも大きい (すなわち 3 以上) であることを仮定しておこう。この式の両辺のトレースを取れば、 $\partial^2 \partial \cdot v = 0$ を得るから、(3.31) から次の式を得ることができる。

$$\partial_\mu \partial_\nu \partial \cdot v = 0. \quad (3.32)$$

これは $\partial \cdot v$ が座標 x^μ に関して 1 次関数であることを意味している。ここから v^μ は座標に対して高々 2 次であることが従う。すると $v^\mu(x)$ の関数形は有限個の係数を含む多項式で書けるから、それを (3.26) に代入して解けば一般形が得られる。その結果、次の解を得る。

$$v_\mu = c_\mu + ax_\mu + \Lambda_{\nu\mu}x_\nu + (x^2\delta_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu)d_\nu. \quad (3.33)$$

右辺それぞれの項は 1 項目から順に並進、回転、ディラレーション、コンフォーマルブーストに対応する。全部で $(d+2)(d+1)/2$ 個の独立な変換が存在し、 $SO(1, d+1)$ 代数を成す。この v^μ による共系変換を次のようにも表す。

$$\delta_c(v_\mu) = c_\mu P_\mu + aD + \frac{1}{2}\Lambda_{\mu\nu}M_{\mu\nu} + d_\mu K_\mu. \quad (3.34)$$

並進やディラレーションといった名称は平坦な時空での様子から名づけたものであるが、一般の曲がった時空上では、そのような区別は明確ではない。それでも全部で $(d+2)(d+1)/2$ 個の変換が（少なくとも局所的には）存在し、 $SO(1, d+1)$ 代数を成すということについてはどのような共形平坦な時空でも同じである。

二つの共系キリングベクトル v_μ と v'_μ を (3.33) のように展開したとき、それらに対する共系変換の交換関係を与える共形キリングベクトル (3.18) の展開係数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} c''^\mu &= (c'^\mu a - c^\mu a') + (c'^\lambda \Lambda_\lambda^\mu - c^\lambda \Lambda'_\lambda{}^\mu), \\ a'' &= -2(c' \cdot d - c \cdot d'), \\ \Lambda''_{\mu\nu} &= 2(c'_\mu d'_\nu - c'_\nu d'_\mu - c_\mu d'_\nu + c_\nu d'_\mu) + [\Lambda', \Lambda]_{\mu\nu}, \\ d''^\mu &= (d'^\nu \Lambda_\nu{}^\mu - d^\nu \Lambda'_\nu{}^\mu) + (a' d^\mu - a d'^\mu). \end{aligned} \quad (3.35)$$

これらより、以下の交換関係を読み取ることができる。

$$\begin{aligned} [D, P_\mu] &= P_\mu, \\ [D, K_\mu] &= -K_\mu, \\ [P_\mu, K_\nu] &= -2M_{\mu\nu} + 2\delta_{\mu\nu}D, \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= \delta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \delta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}, \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= \eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu, \\ [M_{\mu\nu}, K_\rho] &= \eta_{\mu\rho}K_\nu - \eta_{\nu\rho}K_\mu. \end{aligned} \quad (3.36)$$

この交換関係は上で述べたように $SO(d+1, 1)$ 代数をなす。そのことを見るために、 $M_{\mu\nu}$ を拡張した M_{MN} を定義する。ただし $M, N = 1, \dots, d, +, -$ とし、 $M_{\mu\nu}$ 以外の成分については

$$M_{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}}P_\mu, \quad M_{\mu-} = -\frac{1}{\sqrt{2}}K_\mu, \quad M_{+-} = -D \quad (3.37)$$

とおく。すると、(3.36) をまとめて次の式で表すことができる。

$$[M_{MN}, M_{PQ}] = \eta_{MP}M_{NQ} - \eta_{MQ}M_{NP} - \eta_{NP}M_{MQ} + \eta_{NQ}M_{MP}. \quad (3.38)$$

ただし η_{MN} は次の行列である。

$$\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \eta_{+-} = 1. \quad (3.39)$$

η_{+-} は固有値 $(+1, \dots, +1, -1)$ を持つ対称行列であるから、この代数は $SO(d+1, 1)$ である。(ただしここでは時空の計量が正定値であることを仮定している。ミンコフスキー時空では、共形代数は $SO(d, 2)$ である。)

3.3 共形平坦な時空上の共形変換

\mathbb{R}^d 上で定義された理論をワイル変換 f を用いて得られる別の共形平坦な多様体 \mathcal{M}_d にマップすることを考えよう。

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_d \quad (3.40)$$

\mathbb{R}^d 上で何らかの理論が与えられさえすれば、それをワイル変換によってマップすることで常に \mathcal{M}_d 上の理論を得ることができる。(ワイル変換は単なる変数変換であるから当然である。)ただし、これが \mathcal{M}_d 上の理論と自然に見なすことができるためには、どのようなワイル変換によって \mathbb{R}^d から \mathcal{M}_d へ移ったかという履歴によらず、 \mathcal{M}_d の情報だけを用いて理論が書かれていることが望ましい。

マップ f は \mathbb{R}^d の各点を \mathcal{M}_d 上の各点に移すが、その対応は一意的ではない。つまり、点の間の対応が異なるいくつかの \mathbb{R}^d から \mathcal{M}_d へのマップが存在する。そのようなマップのうちの一つを f_1 と f_2 としよう。 \mathbb{R}^d 上の理論から、 f_1 と f_2 のどちらを用いたかによらず同じ \mathcal{M}_d 上の理論が得られると仮定しよう。逆変換を考えると、 \mathcal{M}_d から f_1^{-1} と f_2^{-1} によって二通りの方法で \mathbb{R}^d 上の理論を得たとき、それらが等しいことを意味する。さらに言い換えると、

$$f_2^{-1} f_1: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (3.41)$$

によって \mathbb{R}^d 上の理論を \mathbb{R}^d 自身へマップしたときに、もとの理論と同じであることを意味している。(3.41) のマップは \mathbb{R}^n 上の点を別の点に移すから、ある座標系を異なる座標系に移していることになる。二つの理論が等しいというのは、座標変換によって元の座標に戻ったときに、作用が完全に元に戻っていることを意味する。(図 3.2) これはワイル変

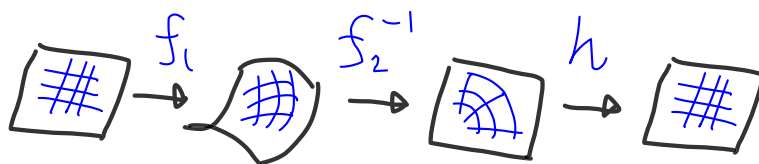


図 3.2: f_1 と f_2 を組み合わせることによって得られる \mathbb{R}^d から \mathbb{R}^d 自身へのマップ。 h は計量をもとに戻すための座標変換である。

換と座標変換を背景の計量が変化しないように組み合わせたものであり、共形変換にほかならない。従って、ワイル変換によって \mathcal{M}_d へマップしたときに、そのマップに依存しない形で理論が書けるためには、元の理論が共形不変でなければならないということになる。

\mathbb{R}^d 上の共形場理論からワイル変換 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_d$ によって \mathcal{M}_d 上の理論が定義されたとき、 \mathcal{M}_d 上の理論に対しても共形変換を定義することができる。 \mathbb{R}^d 上の共形変換を $\text{conf}_{\mathbb{R}^d}$ と表わそう。このとき、対応する変換 $\text{conf}_{\mathcal{M}_d}$ は次のように定義される。

$$\text{conf}_{\mathcal{M}_d} = f \cdot \text{conf}_{\mathbb{R}^d} \cdot f^{-1} \quad (3.42)$$

これは f による相似変換であるから、これにより定義された \mathcal{M}_d 上の変換は \mathbb{R}^d 上のものと同じ代数を満足し、全体として共形変換群をなす。このことはどのようなマップ f を用

いて \mathcal{M}_d 上の変換を定義したかということには依存しないが、それぞれの変換が \mathbb{R}^d 上のどの変換に対応するかということは f の選び方に依存する。(従って、一般の \mathcal{M}_d においてその上の共形変換のうちどれが P 変換でどれが K 変換であるかと問うことはあまり意味がない。)

\mathcal{M}_d が与えられたとき、いちいち \mathbb{R}^d からのマップを定めて共形変換を定義する必要はなく、 \mathcal{M}_d 上ではじめからキリングベクトル方程式の解として v^μ を求め、(3.28) によって変換を定義すればよい。しかし、あとで超対称変換を一般の \mathcal{M}_d 上で定義するための準備として \mathbb{R}^d 上の P 変換と \mathcal{M}_d 上の共形変換の関係を見ておくのが有益である。

\mathbb{R}^d 上における P 変換は定数ベクトル、すなわち

$$D_\mu v^\nu = 0. \quad (3.43)$$

を満足するベクトルによって生成される。これに対応する \mathcal{M}_d 上の変換をワイル変換によって定義したとしよう。こうして定義された変換を与える \mathcal{M}_d 上のベクトル場がどのような方程式を満足するかを考えたい。そのために (3.43) の左辺を回転群の既約成分に分解してみよう。

$$D_m v_n = D_{\{\{m v_n\}\}} + D_{[m v_n]} + \frac{1}{d} \delta_{mn} D_\mu v^\mu \quad (3.44)$$

ただし、 $\{\{\dots\}\}$ は対称トレースレス部分を表わす。(3.43) はこれら全ての既約成分が 0 であることを表している。これに対して共形変換を生成するベクトル場 v^μ が満足すべき方程式は

$$D_{\{\{m v_n\}\}} = 0 \quad (3.45)$$

である。これは 3 つの既約表現のうち一つだけが 0 であればよいことを表しており、(3.43) の条件を緩めたものになっている。さらに (3.45) の重要な性質は、この条件がワイル変換のもとで不変であるということである。共形キリングベクトルは $\delta_{gc}(v)g_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$ を満足するベクトル場として定義されたから、その条件がワイル不変であることは明らかである。直接このことを確かめておこう。ワイル変換のもとで、スピン接続は次のように変換される。

$$\omega_{\mu-mn} = \omega'_{\mu-mn} - (e'_{\mu m} e_n{}^{\prime k} - e'_{\mu n} e_m{}^{\prime k}) \partial_k \alpha, \quad (3.46)$$

これを用いると、 $D_m v_n$ のワイル変換が次のように得られる。

$$D_m v_n = D'_m v'_n - \delta_{mn} v'^k \partial'_k \alpha + v'_m \partial'_n \alpha - v'_n \partial'_m \alpha \quad (3.47)$$

この式を 3 つの既約成分に分解すると (3.44) の右辺の 3 つの項それぞれの共形変換が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} D_{\{\{m v_n\}\}} &= D'_{\{\{m v'_n\}\}}, \\ D_{[m v_n]} &= D'_{[m v'_n]} + 2v'_{[m} \partial'_{n]} \alpha, \\ D_m v^m &= D'_m v'^m - dv'^k \partial'_k \alpha. \end{aligned} \quad (3.48)$$

定数ベクトルである条件 (3.43) は (3.44) の右辺の既約成分全てが 0 であることと同じであるが、ワイル不変な条件として課すことができるのは (3.45) だけであることがわかる。つ

まり、共形キリングベクトル方程式は、 P 変換のパラメータが満足すべき方程式 $D_m v_n = 0$ からワイル変換のもとで不変ではない成分を取り除くことで条件を緩めたものであるといえることができる。

3.4 ワイル共変化

共形変換の定義式 (3.28) を用いれば、スカラー場、フェルミオン場、ゲージ場に対する共変変換の具体形が以下のようになることがわかる。

$$\begin{aligned}\delta_c(v)\phi &= v^\mu D_\mu \phi + \frac{\Delta_\phi}{d}(D_\mu v^\mu)\phi, \\ \delta_c(v)\psi &= v^\mu D_\mu \psi + \frac{1}{4}(D_m v_n)\gamma^{mn}\psi + \frac{\Delta_\psi}{d}(D_\mu v^\mu)\psi, \\ \delta_c(v)A_\mu &= v^\nu F_{\nu\mu}.\end{aligned}\tag{3.49}$$

Δ_ϕ と Δ_ψ はそれぞれスカラー場 ϕ とフェルミオン場 ψ のワイルウェイトである。ゲージ場 A_μ は微分 ∂_μ 同様ワイルウェイト 0 を持つ。

これらの変換を \mathbb{R}^d 上の P 変換から直接導出する方法を与えておこう。以前に述べたように、あるベクトル場が共形キリングベクトルであるという性質はワイル変換によって変化しない。そこで、ある時空の上で、場 Φ に対する共形変換が与えられると、それをワイル変換することによって共形同値な別の時空上での共形変換を得ることができる。

$$\delta_c(v^\mu)\Phi = e^{\Delta_\Phi} \delta'_c(v'^\mu)\Phi'.\tag{3.50}$$

つまり、ある場 Φ の共形変換 $\delta\Phi$ はもとの場と同じワイルウェイトを持つ場として振る舞い、その変換の中にワイル変換パラメータ α の微分は現れない。平坦な時空での並進変換を知っていると、 \mathbb{R}^d 上の並進対称性をこの条件を満足するように拡張することで一般の共形変換を決定することができる。これは任意のスピンを持つ場に対して適用できる。

ワイルウェイト Δ_ϕ のスカラー場 ϕ の場合を考えてみよう。 v^μ を平坦な時空上での定数ベクトルとすると、 v^μ をパラメータとする並進変換を $\delta_0(v^\mu)$ によって表せば $\delta_0(v^\mu) = v^\mu D_\mu \phi$ である。ここではゲージ対称性に対する共変化はすでに行われていると仮定し、微分を共変微分にしておいた。これはワイル変換のもとでは次のように振舞う。

$$\delta_0(v^\mu) = v^\mu D_\mu \phi = v'^\mu D'_\mu (e^{\Delta_\phi \alpha} \phi') = e^{\Delta_\phi \alpha} v'^\mu (D'_\mu \phi' + \Delta_\phi (\partial_\mu \alpha) \phi').\tag{3.51}$$

ここで、ベクトル v^μ のワイルウェイトは 0 であるとした。(したがって、 $v^\mu = v'^\mu$ である。また、共変微分についても、スカラー場の場合には計量によらないから $D_\mu = D'_\mu$ である。) 右辺にはパラメータの微分 $\partial_\mu \alpha$ を含む項が現れているが、これはこの量がワイル変換に対して共変では無いことを意味している。(3.48) にある v^μ の発散のワイル変換をみると、同じように $\partial_\mu \alpha$ を含む項が現れていることが分かる。そこでこれらを組み合わせることでワイル変換のもとで共変な量を作ることができるが、それは (3.49) に与えたスカ

ラ場 ϕ の共形変換に他ならない。このように、(平坦時空上の P 変換においては 0 になる) パラメータ v の微分を含む項を加えることでワイル変換性が共変になるようにすることをワイル共変化と呼ぶ。

同じ方法でワイルウェイト Δ_ψ のスピノル場 ψ の共形変換も求めることができる。並進変換はスカラー場と同じ

$$\delta_0 \psi = v^\mu D_\mu \psi \quad (3.52)$$

である。この右辺はワイル変換のもとで次のように変換される。

$$v^\mu D_\mu \psi = e^{\Delta_\psi \alpha} \left[v'^\mu D'_\mu \psi' + \Delta_\psi v'^\mu (\partial_\mu \alpha) \psi' - \frac{1}{2} v'^\mu (\partial_\kappa \alpha) \gamma'_\mu{}^\kappa \psi' \right] \quad (3.53)$$

今度も $(\partial_\mu \alpha)$ を含む項が現れているが、これらは (3.48) にある v^μ の発散と回転の共形変換と同じ形をしていることがわかる。従ってこれらを組み合わせることにより、(3.52) をワイル共変化することができるが、その結果 (3.49) に与えたフェルミオンの共形変換を得る。

ゲージ場の P 変換は

$$\delta_0 A_\mu = v^\nu F_{\nu\mu} \quad (3.54)$$

であるが、これはワイル変換で不変であるから、ワイル共変化の必要はない。従ってそのままゲージ場の共形変換とみなすことができる。

3.5 共形不変な作用

次の作用で与えられる \mathbb{R}^d 上の零質量スカラー場の理論を考えよう。

$$S = \int d^d x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (3.55)$$

ただし $g_{\mu\nu}$ は平坦計量である。この理論は \mathbb{R}^d 上の共形変換で不変である。このことを確認するには、ワイル変換によってこの作用が形を変えないことを示すことができればよい。実際にワイル変換してみよう。計量を

$$g_{\mu\nu} = e^{-2\alpha} g'_{\mu\nu} \quad (3.56)$$

と変換し、スカラー場に対しては

$$\phi = e^{\Delta\alpha} \phi' \quad (3.57)$$

と変換する。ただし Δ は ϕ の Weyl weight である。作用は

$$\begin{aligned} \int d^d x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi &= \int d^d x \sqrt{g'} g'^{\mu\nu} e^{(2-d)\alpha} \partial_\mu (e^{\Delta\alpha} \phi') \partial_\nu (e^{\Delta\alpha} \phi') \\ &= \int d^d x \sqrt{g'} g'^{\mu\nu} e^{(2-d+2\Delta)\alpha} (\partial_\mu \phi' + \Delta \phi' \partial_\mu \alpha) (\partial_\nu \phi' + \Delta \phi' \partial_\nu \alpha) \end{aligned} \quad (3.58)$$

運動項が形を変えないためには $e^{(2-d+2\Delta)\alpha}$ という因子が 1 にならなければならない。このことからワイルウェイトが決まる。

$$\Delta = \frac{d}{2} - 1 \quad (3.59)$$

(3.58) にこのワイルウェイトを代入し、さらに部分積分をして整理すれば

$$S = \int d^d x \sqrt{g'} g'^{\mu\nu} \left[\partial_\mu \phi' \partial_\nu \phi' - \left(\frac{d-2}{2} (D'_\mu \partial_\nu \alpha) - \frac{(d-2)^2}{4} (\partial_\mu \alpha)(\partial_\nu \alpha) \right) \phi'^2 \right] \quad (3.60)$$

となる。従って、期待に反して (3.55) の作用はワイル変換のもとで形を変える。この余分な項を処理するために、スカラー曲率に対するワイル変換の公式

$$R = e^{2\alpha} [R' + 2(d-1)g'^{\mu\nu} D'_\mu \partial_\nu \alpha - (d-1)(d-2)g'^{\mu\nu} (\partial_\mu \alpha)(\partial_\nu \alpha)] \quad (3.61)$$

と見比べてみよう。これらを組み合わせることで、次の作用はワイル変換のもとで不変であることが示される。

$$S = \int d^D x \sqrt{g} \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{d-2}{4(d-1)} R \phi^2 \right] \quad (3.62)$$

このように、曲がった時空中においてスカラー場の理論にワイル変換のもとでの共変性を要請すると、背景時空のスカラー曲率に比例する質量項が現れる。これもワイル共変化の一種である。

同様なことをフェルミオンの運動項

$$S = \int d^D x e (\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi) \quad (3.63)$$

に対してもやってみよう。まず、 ψ のワイルウェイトを次のように取るべきことがわかる。

$$\Delta_\psi = \frac{d-1}{2}. \quad (3.64)$$

ワイルウェイトをこのように選んだとしても、ワイル変換の結果 α の微分を含む項が現れる可能性があるが、実際にはそのような項は現れない。このことはスピン接続のワイル変換 (3.46) を用いて直接示すこともできるが、以下のような考察からもすぐにわかる。まず、(3.63) を部分積分を用いて ψ と $\bar{\psi}$ に対して対称な形に書き換えておく。

$$S = \int d^D x \frac{e}{2} [(\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi) \pm (\psi \gamma^\mu D_\mu \bar{\psi})]. \quad (3.65)$$

ただし $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \mp \psi \gamma^\mu \bar{\psi}$ を用いた。複号のどちらを取るかは次元に依存する。ここでワイル変換を行うと、共変微分の部分から $\partial \alpha$ を含む項が現れるが、一般座標変換のもとでの不変性より必ず次のようになるはずである。

$$\delta S \propto \int d^D x \frac{e}{2} [(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \pm (\psi \gamma^\mu \bar{\psi})] \partial_\mu \alpha \quad (3.66)$$

ここで再び $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \mp\psi\gamma^\mu\bar{\psi}$ を用いれば、二つの項が相殺することがわかる。つまり、フェルミオン運動項 (3.63) はそのままワイル不変である。

ゲージ場の運動項についても $F_{\mu\nu}$ はワイル変換のもとで不変であるから、特に補正項を付け加えたりしなくてもはじめからワイル変換のもとで不変である。

結局、二階微分までしか含まない作用をワイル共変化するには、スカラー場に対して曲率結合項を加えるだけでよい。

3.6 キリングスピノル

共形平坦な時空上に超対称性を導入することを考えよう。一つの方法は、超対称理論を重力に結合させて超重力理論に格上げしておき、背景場を固定することで対称性を大域的なものに落とすことである。こうすると、§3.2 において共系変換が多脚場 e_μ^m を変化させないような一般座標変換とそのほかの局所変換の組み合わせとして定義されたのと同様に、局所的超対称変換のうちグラビティーノ ψ_μ を変化させないようなものとして超対称変換を定義することができる [5, 6]。この方法を用いれば共形平坦とは限らないさまざまな背景上での超対称変換を定義することができるが、超重力理論を用いる必要があるという点で面倒である。そこでここでは背景時空を共形平坦なものだけに限ることにし、ワイル共変換を用いて超共形変換を定義する手法について説明する。

§3.4 では \mathbb{R}^d 上の P 変換をワイル共変換することで共形変換を得た。ここでは同じことを \mathbb{R}^d 上の Q 変換に対して行ってみよう。平坦な時空上での Q 変換のパラメータ ϵ は定数スピノルである。つまり、

$$\partial_\mu\epsilon = 0 \quad (3.67)$$

を満足する。この条件はワイル変換のもとで不変ではない。§3.3 においてキリングベクトルに対して行ったように、条件 (3.67) をワイル不変になるように緩めよう。 $D_\mu\epsilon$ は次のように二つの既約成分に分解する。

$$D_\mu\epsilon = [D_\mu\epsilon]_{3/2} + [D_\mu\epsilon]_{1/2}. \quad (3.68)$$

ただしそれぞれの既約成分は次のように与えられる。

$$[D_\mu\epsilon]_{3/2} = D_\mu\epsilon - \frac{1}{d}\gamma_\mu\mathcal{D}\epsilon, \quad [D_\mu\epsilon]_{1/2} = \frac{1}{d}\gamma_\mu\mathcal{D}\epsilon. \quad (3.69)$$

\mathbb{R}^d 上の Q 変換のパラメータに対する条件はこれら二つの既約成分が 0 であることを意味している。

$$[D_\mu\epsilon]_{3/2} = [D_\mu\epsilon]_{1/2} = 0 \quad (3.70)$$

しかしこれはワイル変換

$$\epsilon = e^{-\frac{\alpha}{2}}\epsilon' \quad (3.71)$$

のもとで不変ではない。それぞれの既約成分はワイル変換のもとで

$$\begin{aligned} [D_\mu\epsilon]_{1/2} &= e^{\frac{\alpha}{2}}[D'_\mu\epsilon']_{1/2} - \gamma_\mu(\mathcal{D}'e^{\frac{\alpha}{2}})\epsilon', \\ [D_\mu\epsilon]_{3/2} &= e^{\frac{\alpha}{2}}[D'_\mu\epsilon']_{3/2} \end{aligned} \quad (3.72)$$

のように変換され、 $[D_\mu\epsilon]_{3/2}$ だけが共変に振舞う。従って、(3.70) を緩めた次の条件がワイル変換のもとで不変であり、これが共形平坦な時空上の超対称変換のパラメータに課されるべき条件であろうと期待される。

$$[D_\mu\epsilon]_{3/2} = 0. \quad (3.73)$$

この式は $D_\mu\epsilon$ がスピン 1/2 成分を持っていてもいいことを表わしているから、その成分を表わすスピノルを κ と置き、次のように与えておくのが便利である。

$$D_\mu\epsilon = \gamma_\mu\kappa \quad (3.74)$$

これは共形キリングベクトルの場合の条件式 (3.24) に対応するものであり、キリングスピノル方程式、あるいは単にキリング方程式と呼ばれる。¹この式の解が実際に超対称変換のパラメータを与えることは、次のことを確認することで示される。

- キリング方程式 (3.74) はワイル変換で不変であるから、共形平坦な時空上でこの式を解いて得られる解は、 \mathbb{R}^d 上で (3.74) を解いて得られる解からワイル変換で得ることができる。
- このあとすぐに確認するように、 \mathbb{R}^d 上のキリング方程式 (3.74) の解は、定数スピノルから共形変換によって構成することができる。

この二つのことを用いると、共形平坦な背景 \mathcal{M}_d 上のキリング方程式の解が \mathbb{R}^d 上の定数スピノルからワイル変換を用いて構成できることが示される。従って、 \mathcal{M}_d 上の超対称性の変換パラメータが (3.74) を満足することを仮定し、 \mathbb{R}^d 上の超対称変換をワイル共変化するることによって \mathcal{M}_d 上の超対称変換を構成することができる。

上の二つ目の性質を確認しておこう。 \mathbb{R}^d 上のキリング方程式の一般解は次のように与えられる。

$$\epsilon = \xi + x_\mu\gamma_\mu\zeta. \quad (3.75)$$

ただし ξ と ζ は定数スピノルである。第 1 項は既に定数スピノルであるから第 2 項に注目しよう。 $\xi = 0$ の場合、 κ は次のように与えられる。

$$\kappa = \zeta. \quad (3.76)$$

ϵ が定数スピノルからのマップで得られることを示すには、適当な共形変換によって $\kappa = 0$ にできることを示せばよい。(3.72) の一つ目の式より、ワイル変換のもとでの κ の変換則は

$$\kappa = e^{\frac{\alpha}{2}}\kappa' - (\partial'e^{\frac{\alpha}{2}})\epsilon' \quad (3.77)$$

¹キリングベクトルに対応する式 (3.24) は一般座標変換とワイル変換の組み合わせのもとで背景の計量が変化しないことを表す式であった。超重力理論においては (3.74) も同様に解釈することができる。すなわち、 ϵ と κ は二種類の超対称変換 Q と S のパラメータであり、その組み合わせが背景グラビティノー ψ_μ を変化させないという条件が (3.74) に他ならない。

であるが、 $\kappa' = 0$ であるためには

$$\kappa = -(\delta' e^{\frac{\alpha}{2}})\epsilon' = -\frac{1}{2}\gamma^\mu(\partial_\mu\alpha)\epsilon = -\frac{1}{2}\gamma^\mu(\partial_\mu\alpha)x^\nu\gamma^\nu\kappa \quad (3.78)$$

が成り立てばよい。これは

$$\alpha = -2\log\frac{|x|}{c} \quad (3.79)$$

とおくことで成り立つ。 c は任意定数である。このとき計量は、 $r = |x|$ とする極座標を用いると

$$dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 = e^{-2\alpha} ds'^2 = \frac{r^4}{c^4} ds'^2 \quad (3.80)$$

によって変換される。 $r' = c^2/r$ によって新たな座標を導入すれば

$$ds'^2 = dr'^2 + r'^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (3.81)$$

となり、変換後も計量は平坦であることがわかる。この変換は inversion 変換と呼ばれる。

後で利用するために、一般の共形平坦な時空におけるキリングスピノルが満足する関係式をいくつか導いておこう。(3.24) からワイル変換のパラメータ α を決めることができたように (3.74) は ϵ を与えたときに κ を決める式であるとみなすことができる。そうして得られた

$$\kappa = \frac{1}{d}\gamma^\mu D_\mu\epsilon \quad (3.82)$$

を再び (3.74) に代入すれば、 ϵ 自身に対しても非自明な条件が課される。

$$D_\mu\epsilon = \frac{1}{d}\gamma_\mu\gamma^\nu D_\nu\epsilon \quad (3.83)$$

これは共形キリングベクトルに対する式 (3.26) に対応するものである。(3.83) の両辺にさらに D_μ を作用させ、左辺を $\gamma^\mu\gamma^\nu$ の対称部分と反対称部分に分けると、次の式が得られる。

$$D_\mu D^\mu\epsilon + \frac{1}{8}\gamma^{\mu\nu}R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\rho\sigma}\epsilon = dD_\mu D^\mu\epsilon \quad (3.84)$$

さらに、曲率テンソルが満足するビアンキ恒等式などを用いて

$$D_\mu D^\mu\epsilon = -\frac{1}{4(d-1)}R\epsilon \quad (3.85)$$

が得られる。右辺の R はスカラー曲率である。この左辺は κ に対してディラック演算子を用いたものに等しい。

$$\gamma^\mu D_\mu\kappa = -\frac{1}{4(d-1)}R\epsilon. \quad (3.86)$$

$D_\mu\kappa$ は次のように変形することができる。

$$\begin{aligned} D_\mu\kappa &= \frac{1}{d}D_\mu\gamma^\nu D_\nu\epsilon \\ &= \frac{1}{4d}\gamma^\nu R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\rho\sigma}\epsilon + \frac{1}{d}\gamma^\nu D_\nu\gamma_\mu\kappa \\ &= -\frac{1}{2d}R_{\mu\nu}\gamma^\nu\epsilon + \frac{2}{d}D_\mu\kappa - \frac{1}{d}\gamma_\mu\gamma^\nu D_\nu\kappa \end{aligned} \quad (3.87)$$

ここで (3.86) を用いて整理すれば

$$D_\mu \kappa = -\frac{1}{2(d-2)} \left(R_{\mu\nu} \gamma^\nu \epsilon - \frac{1}{2(d-1)} R \gamma_\mu \epsilon \right) \quad (3.88)$$

が得られる。

3.7 超共形変換の構成

一般の共形平坦な時空中での超共形変換は、平坦な時空の Q 変換からワイル共変化によって得ることができる。具体的な変換則は次元によって異なるので、ここではワイル共変化を行う一般的な処方のみを与える。 Q 変換において微分を含まない項は、そのままの形でワイル変換のもとで共変であり、変換パラメータを一般のキリングスピノルに置き換えるだけでよい。超対称変換則に現れる項のうち微分を含むのは、フェルミオン変換則に現れる $\gamma^\mu \epsilon D_\mu \phi$ の形の項と、補助場の変換則に現れる $(\epsilon \gamma^\mu D_\mu \psi)$ という形の項がある。

まず、前者について考えよう。この項のワイル変換は

$$\gamma^\mu \epsilon D_\mu \phi = e^{(\Delta_\phi + \frac{1}{2})\alpha} [\gamma'^\mu \epsilon' D_\mu \phi' + \Delta_\phi \gamma'^\mu \epsilon' (\partial_\mu \alpha) \phi'] \quad (3.89)$$

と与えられる。ただし、スカラー場 ϕ のワイルウェイトは Δ_ϕ 、 ϵ のウェイトは $\Delta = -1/2$ である。これを共変化するには、 $\gamma^\mu D_\mu \epsilon$ がワイル変換の元で

$$\gamma^\mu D_\mu \epsilon = e^{\frac{1}{2}\alpha} \left[\gamma'^\mu D'_\mu \epsilon' - \frac{d}{2} (\partial_\mu \alpha) \gamma'^\mu \epsilon' \right] \quad (3.90)$$

と変換されることを踏まえて、次のように組み合わせればよい。

$$\gamma^\mu \epsilon D_\mu \phi + \frac{2\Delta_\phi}{d} \gamma^\mu D_\mu \epsilon \phi = e^{(\Delta_\phi + \frac{1}{2})\alpha} \left[\gamma'^\mu \epsilon' D'_\mu \phi' + \frac{2\Delta_\phi}{d} \gamma'^\mu D'_\mu \epsilon' \phi' \right] \quad (3.91)$$

補助場の変換則中に現れるフェルミオンの微分項はワイル変換のもとで次のように変換される。

$$(\epsilon \gamma^\mu D_\mu \psi) = e^{(\Delta_\psi + 1/2)\alpha} \left[(\epsilon' \gamma'^\mu D'_\mu \psi') + \left(\Delta_\psi - \frac{d-1}{2} \right) (\partial_\mu \alpha) (\epsilon' \gamma'^\mu \psi') \right] \quad (3.92)$$

これと (3.90) を用いると、次の組み合わせが共変であることがわかる。

$$(\epsilon \gamma^\mu D_\mu \psi) + \frac{2}{d} \left(\Delta_\psi - \frac{d-1}{2} \right) (D_\mu \epsilon \gamma^\mu \psi) = e^{(\Delta_\psi + \frac{1}{2})\alpha} \left[(\epsilon' \gamma'^\mu D'_\mu \psi') + \frac{2}{d} \left(\Delta_\psi - \frac{d-1}{2} \right) (D'_\mu \epsilon' \gamma'^\mu \psi) \right] \quad (3.93)$$

ゲージ場の強さについては、ゲージ場がワイルウェイト 0 であるため、もともとワイル共変であり、何もする必要はない。

まとめておこう。超対称変換則のワイル共変化はスカラー場およびフェルミオンの微分を含む項に対する次の置き換えによって実現される。

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \epsilon D_\mu \phi &\rightarrow \gamma^\mu \epsilon D_\mu \phi + 2\Delta_\phi \kappa \phi, \\ (\epsilon \gamma^\mu D_\mu \psi) &\rightarrow (\epsilon \gamma^\mu D_\mu \psi) - (2\Delta_\psi - d + 1)(\kappa \psi).\end{aligned}\quad (3.94)$$

ただし、 $D_\mu \epsilon = \gamma_\mu \kappa$ を用いて書き換えた。

3.8 3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形変換

(3.94) に与えた置き換えによりワイル共変化を行うことにより、共形平坦な任意の 3 次元時空上の超共形変換則が得られる。(ワイル共変化の操作は次元に依存するので、次元簡約を行った後で行わなければならない。)

ベクトル多重項に対しては、次の変換則が得られる。

$$\begin{aligned}\delta A_m &= i(\epsilon \gamma_m \bar{\lambda}) - i(\bar{\epsilon} \gamma_m \lambda), \\ \delta \sigma &= (\epsilon \bar{\lambda}) + (\bar{\epsilon} \lambda), \\ \delta \lambda &= \frac{i}{2} \gamma^{mn} \epsilon F_{mn} - \gamma^m \epsilon D_m \sigma - 2\sigma \bar{\kappa} + \mathcal{D}\epsilon, \\ \delta \bar{\lambda} &= -\frac{i}{2} \gamma^{mn} \bar{\epsilon} F_{mn} - \gamma^m \bar{\epsilon} D_m \sigma - 2\sigma \kappa + \mathcal{D}\bar{\epsilon}, \\ \delta \mathcal{D} &= -(\epsilon \gamma^m D_m \bar{\lambda}) - (\bar{\epsilon} \gamma^m D_m \lambda) + (\bar{\kappa} \bar{\lambda}) + (\kappa \lambda) + (\epsilon[\sigma, \bar{\lambda}]) - (\bar{\epsilon}[\sigma, \lambda]).\end{aligned}\quad (3.95)$$

カイラル多重項の変換則は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\delta \phi &= \sqrt{2}(\epsilon \psi), \\ \delta \bar{\phi} &= \sqrt{2}(\bar{\epsilon} \bar{\psi}), \\ \delta \psi &= -\sqrt{2} \gamma^m \bar{\epsilon} D_m \phi - 2\sqrt{2} \Delta_\Phi \phi \kappa + \sqrt{2} \bar{\epsilon} \sigma \phi + \sqrt{2} \epsilon \mathcal{F}, \\ \delta \bar{\psi} &= -\sqrt{2} \gamma^m \epsilon D_m \bar{\phi} - 2\sqrt{2} \Delta_\Phi \bar{\phi} \bar{\kappa} + \sqrt{2} \epsilon \bar{\phi} \sigma + \sqrt{2} \bar{\epsilon} \bar{\mathcal{F}}, \\ \delta \mathcal{F} &= -\sqrt{2}(\bar{\epsilon} \gamma^m D_m \psi) + \sqrt{2}(2\Delta_\Phi - 1)(\kappa \psi) - \sqrt{2} \sigma (\bar{\epsilon} \psi) - 2(\bar{\epsilon} \bar{\lambda}) \phi, \\ \delta \bar{\mathcal{F}} &= -\sqrt{2}(\epsilon \gamma^m D_m \bar{\psi}) + \sqrt{2}(2\Delta_\Phi - 1)(\bar{\kappa} \bar{\psi}) - \sqrt{2}(\epsilon \bar{\psi}) \sigma - 2\bar{\phi}(\epsilon \lambda).\end{aligned}\quad (3.96)$$

ただし、変換則中に現れる κ および $\bar{\kappa}$ は 3 次元のキリング方程式を次のように置くことで定義されたものである。

$$D_m \epsilon = \gamma_m \bar{\kappa}, \quad D_m \bar{\epsilon} = \gamma_m \kappa. \quad (3.97)$$

Δ_Φ はカイラル多重項のスカラー成分のワイルウェイトである。

成分場のワイルウェイトと $U(1)_R$ チャージを表 3.1 に与えた。

表 3.1: 3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論における場の量子数

	A_μ	σ	λ	$\bar{\lambda}$	\mathcal{D}	ϕ	ψ	\mathcal{F}	$\bar{\phi}$	$\bar{\psi}$	$\bar{\mathcal{F}}$
Δ	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	Δ_Φ	$\Delta_\Phi + \frac{1}{2}$	$\Delta_\Phi + 1$	Δ_Φ	$\Delta_\Phi + \frac{1}{2}$	$\Delta_\Phi + 1$
R	0	0	+1	-1	0	Δ_Φ	$\Delta_\Phi - 1$	$\Delta_\Phi - 2$	$-\Delta_\Phi$	$-(\Delta_\Phi - 1)$	$-(\Delta_\Phi - 2)$

$\delta \equiv \delta(\epsilon, \bar{\epsilon})$ と $\delta' \equiv \delta(\epsilon', \bar{\epsilon}')$ の間の交換関係をそれぞれの場の上で計算した結果は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
[\delta, \delta']\phi &= 2\delta_c(v^m)\phi - 2iv^4\sigma\phi - 2i\Delta_\Phi\alpha\phi, \\
[\delta, \delta']\psi &= 2\delta_c(v^m)\psi - 2iv^4\sigma\psi - 2i(\Delta_\Phi - 1)\alpha\psi, \\
[\delta, \delta']\mathcal{F} &= 2\delta_c(v^m)\mathcal{F} - 2iv^4\sigma\mathcal{F} - 2i(\Delta_\Phi - 2)\alpha\mathcal{F}, \\
[\delta, \delta']\sigma &= 2\delta_c(v^m)\sigma, \\
[\delta, \delta']A_m &= 2\delta_c(v^m)A_m - 2D_m(v^4\sigma), \\
[\delta, \delta']\lambda &= 2\delta_c(v^m)\lambda - 2iv^4[\sigma, \lambda] - 2i\alpha\lambda, \\
[\delta, \delta']\mathcal{D} &= 2\delta_c(v^m)\mathcal{D} - 2iv^4[\sigma, \mathcal{D}].
\end{aligned} \tag{3.98}$$

これらはまとめて次のように書くことができる。

$$[\delta, \delta'] = 2\delta_c(v^m) - 2\delta_{\text{gauge}}(v^4\sigma) - 2i\alpha R. \tag{3.99}$$

δ_c は (3.28) において定義した共形変換である。 R は $U(1)_R$ 変換であり、場に作用すると表 3.1 に与えた場の $U(1)_R$ 電荷に置き換わる。 δ_{gauge} はゲージ変換であり、基本表現の場 Φ 、反基本表現の場 $\bar{\Phi}$ 、ゲージ場 A_μ に対して次のように作用する。

$$\delta_{\text{gauge}}(\lambda)\Phi = i\lambda\Phi, \quad \delta_{\text{gauge}}(\lambda)\bar{\Phi} = -i\bar{\Phi}\lambda, \quad \delta_{\text{gauge}}(\lambda)A_\mu = D_\mu\lambda. \tag{3.100}$$

v^m, v^4 , そして α はいずれも変換パラメータの二次形式であり、以下のように与えられる。(v^4 は v^m の定義式の γ^m を γ^4 で置き換えたものである。)

$$\begin{aligned}
v^m &= (\bar{\epsilon}\gamma^m\epsilon') + (\epsilon\gamma^m\bar{\epsilon}'), \\
v^4 &= i(\bar{\epsilon}\epsilon') - i(\epsilon\bar{\epsilon}') = (\bar{\epsilon}\gamma^4\epsilon') + (\epsilon\gamma^4\bar{\epsilon}'), \\
\alpha &= -i[(\kappa\epsilon') - (\epsilon\kappa') - (\bar{\kappa}\bar{\epsilon}') + (\bar{\epsilon}\bar{\kappa}')].
\end{aligned} \tag{3.101}$$

v^4 は σ との積 $v^4\sigma$ によるゲージ変換を引き起こす。 α は $U(1)_R$ 対称性のパラメータである。キリング方程式 (3.97) を用いれば、 $D_m\alpha = 0$ 、すなわち α が定数であることを示すことができる。

平坦な時空においては、(3.83) の一般解は、二つの定数スピノル ξ と ζ を用いて次のように与えられる。

$$\epsilon = \xi + x_m \gamma_m \bar{\zeta}, \quad \bar{\epsilon} = \bar{\xi} + x_m \gamma_m \zeta, \quad \bar{\kappa} = \bar{\zeta}, \quad \kappa = \zeta. \quad (3.102)$$

(3.102) に対応する超対称変換を次のように置くことで、 Q 変換と S 変換を定義する。

$$\delta = \xi^a Q_a + \bar{\xi}^a \bar{Q}_a + \zeta^a S_a + \bar{\zeta}^a \bar{S}_a. \quad (3.103)$$

(3.101) のパラメータに (3.102) を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} v^m &= [(\bar{\xi} \gamma^m \xi') + (\xi \gamma^m \bar{\xi}')] \\ &+ [(\bar{\xi} \zeta') - (\zeta \xi') + (\xi \zeta') - (\bar{\zeta} \bar{\xi}')] x^m \\ &+ [-(\bar{\xi} \gamma^{nm} \bar{\zeta}') - (\zeta \gamma^{nm} \xi') - (\xi \gamma^{nm} \zeta') - (\bar{\zeta} \gamma^{nm} \bar{\xi}')] x_n \\ &+ (x^2 \delta^{mn} - 2x^m x^n) [(\zeta \gamma_n \bar{\zeta}') + (\bar{\zeta} \gamma_n \zeta')], \\ \alpha &= -i[(\zeta \xi') - (\xi \zeta') - (\bar{\zeta} \bar{\xi}') + (\bar{\xi} \bar{\zeta}')]. \end{aligned} \quad (3.104)$$

これを用いると、超対称変換 Q や S の交換関係を読み取ることができる。

$$\begin{aligned} \{Q_a, \bar{Q}_b\} &= 2(\gamma^m)_{ab} P_m, \\ \{S_a, \bar{S}_b\} &= 2(\gamma^m)_{ab} K_m, \\ \{\bar{S}_a, \bar{Q}_b\} &= -2\epsilon_{ab}(D - R) - (\gamma^{mn})_{ab} M_{mn}, \\ \{S_a, Q_b\} &= -2\epsilon_{ab}(D + R) - (\gamma^{mn})_{ab} M_{mn}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

これら以外の変換則も導出は省略して与えておく。

$$[M_{mn}, Q_a] = \frac{1}{2}(\gamma_{mn})_a{}^b Q_b. \quad (3.106)$$

これは Q_a がスピノルであることを表しており、 \bar{Q}_a 、 S_a 、 \bar{S}_a に対しても全く同様である。超対称電荷の R チャージやディラレーションのもとでのウェイトを与える関係式は

$$[R, Q_a] = -Q_a, \quad [R, \bar{Q}_a] = \bar{Q}_a, \quad [R, S_a] = S_a, \quad [R, \bar{S}_a] = -\bar{S}_a. \quad (3.107)$$

$$[D, Q_a] = \frac{1}{2}Q_a, \quad [D, \bar{Q}_a] = \frac{1}{2}\bar{Q}_a, \quad [D, S_a] = \frac{1}{2}S_a, \quad [D, \bar{S}_a] = \frac{1}{2}\bar{S}_a. \quad (3.108)$$

これら以外で 0 でないのは、以下の関係式である。

$$\begin{aligned} [P_m, S_a] &= -(\gamma_m)_a{}^b \bar{Q}_b, \\ [P_m, \bar{S}_a] &= -(\gamma_m)_a{}^b Q_b, \\ [K_m, Q_a] &= -(\gamma_m)_a{}^b \bar{S}_b, \\ [K_m, \bar{Q}_a] &= -(\gamma_m)_a{}^b S_b. \end{aligned} \quad (3.109)$$

これらは、共形代数 $SO(4, 1)$ に対するディラック行列を

$$\begin{aligned} C_{AB} &= \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{ab} \\ \epsilon_{ab} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Gamma_m)_{A^B} = \begin{pmatrix} (\gamma_m)_a{}^b & 0 \\ 0 & -(\gamma_m)_a{}^b \end{pmatrix}, \\ (\Gamma^+)_{A^B} &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\delta_a{}^b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Gamma^-)_{A^B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2}\delta_a{}^b & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

のようにとり、4 成分の $SO(4, 1)$ スピノルを

$$\mathcal{Q}_A = \begin{pmatrix} Q_a \\ \bar{S}_a \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{Q}}_A = \begin{pmatrix} \bar{Q}_a \\ S_a \end{pmatrix} \quad (3.111)$$

と定義すれば超対称電荷を含む交換関係は次のようにまとめることができる。

$$\begin{aligned} [R, \mathcal{Q}_A] &= -\mathcal{Q}_A, \quad [R, \bar{\mathcal{Q}}_A] = \bar{\mathcal{Q}}_A, \\ [M_{MN}, \mathcal{Q}_A] &= \frac{1}{2}(\Gamma_{MN})_A{}^B \mathcal{Q}_B, \quad [M_{MN}, \bar{\mathcal{Q}}_A] = \frac{1}{2}(\Gamma_{MN})_A{}^B \bar{\mathcal{Q}}_B, \\ \{\mathcal{Q}_A, \bar{\mathcal{Q}}_B\} &= 2C_{AB}R - (\Gamma^{MN})_{AB}M_{MN} \end{aligned} \quad (3.112)$$

これは平坦な時空だけでなく、任意の共形平坦な背景上で成り立つ代数であることを強調しておく。

$\mathcal{N} = 2$ 超共形代数のもとで不変な作用は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{chiral}} &= D_m \bar{\phi} D_m \phi + \bar{\phi} \sigma \phi + \bar{\phi} D \phi - \bar{\mathcal{F}} \mathcal{F} + \frac{R}{8} \bar{\phi} \phi \\ &\quad - (\bar{\psi} \gamma^m D_m \psi) - (\bar{\psi} \sigma \psi) - \sqrt{2} \bar{\phi} (\lambda \psi) - \sqrt{2} (\bar{\psi} \lambda) \phi, \\ \mathcal{L}_{\text{pot}} &= W_i \mathcal{F}^i - \frac{1}{2} W_{ij} (\psi^i \psi^j) + \bar{W}_{\bar{i}} \bar{\mathcal{F}}^{\bar{j}} - \frac{1}{2} \bar{W}_{\bar{i}\bar{j}} (\bar{\psi}^{\bar{i}} \bar{\psi}^{\bar{j}}), \\ \mathcal{L}_{\text{CS}} &= \kappa_{ab} \left[\frac{1}{2} \gamma^{mnp} \left(A_m^a \partial_n A_p^b - \frac{i}{3} A_m^a [A_n, A_p]^b \right) + (\bar{\lambda}^a \lambda^b) - \mathcal{D}^a \sigma^b \right]. \end{aligned} \quad (3.113)$$

ただし、超ポテンシャル W に対してはワイルウェイト (R 電荷に等しい) が $+2$ でなければならないという条件が課される。

3.9 リジッドな超対称性

$\mathcal{N} = 2$ 超共形理論において、大域的 $U(1)$ 対称性が存在する場合、それを弱くゲージ化し、対応するベクトル多重項に含まれるボゾン場に対して期待値を持たせることで、理論の質量変形を行うことができる。このようにして得られる質量変形された理論においては、超対称性が部分的に破れる。このとき破れずに残った超対称性をリジッドな超対称性と呼ぶ。

場の期待値は一般に 0 でない質量次元を持つため、超共形対称性のうち、ボゾンの対称性、すなわち共形対称性は、背景時空のアイソメトリーの部分群に落ちる。一方超対称

性は通常半分に落ちる。たとえば、平坦な背景上では、スカラー場 σ に 0 でない定数の期待値を持たせることにより、 S_a, \bar{S}_a 変換が破れ、 Q_a, \bar{Q}_a 変換が残り、超共形対称性は超ポアンカレ対称性にまで落ちる。 σ は 0 でないワイルウェイトを持つため、 σ に定数の期待値を与えることによる質量変形はワイル変換と可換ではない。従って質量変形の結果残る対称性は共形同値な空間であっても一般に異なる。

リジッドな超対称性のもとで不変な作用の一般系を求めたい。ここではその準備として質量変形ののちにどの超対称性が残るか調べておこう。ここでは質量変形が Q_A と \bar{Q}_A をそれぞれ半分に破ることを仮定しておく。

リジッドな代数に含まれる超対称性を

$$u^A Q_A \quad (u \in \mathcal{A}), \quad v^A \bar{Q}_A \quad (v \in \bar{\mathcal{A}}) \quad (3.114)$$

としよう。ただし、 Q_A と \bar{Q}_A は前節の (3.111) で定義された超共形代数に含まれる超対称変換であり、 $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^4$ と $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^4$ はそれぞれ 4 つの成分を持つ Q_A と \bar{Q}_A のうち、リジッドな代数に含まれる超対称変換を指定する二次元の線形空間である。 $u^A Q_A$ で与えられる変換を正則な変換、 $v^A \bar{Q}_A$ で与えられる変換を反正則な変換と呼ぶことにする。 u^A と v^A はグラスマン数ではなく複素数を成分として持つボゾンのベクトルである。

実は \mathcal{A} と $\bar{\mathcal{A}}$ は等しいことが以下のように示される。まず、(3.112) より次の反交換関係が成り立つ。

$$\{(uQ), (v\bar{Q})\} = -2(uv)R + (u\Gamma^{MN}v)M_{MN} \quad (3.115)$$

この右辺の変換も、リジッドな超対称代数に含まれる。さらに $v' \in \bar{\mathcal{A}}$ を v とは線形独立なベクトルであるとして $(v'\bar{Q})$ との交換関係を取ってみる。(3.112) を用いることで、

$$\begin{aligned} & [-2(uv)R + (u\Gamma^{MN}v)M_{MN}, (v'\bar{Q})] \\ &= -2(uv)(v'\bar{Q}) + \frac{1}{2}(u\Gamma^{MN}v)(v'\Gamma_{MN}\bar{Q}) \\ &= -2(uv)(v'\bar{Q}) + 2(uv')(v\bar{Q}) + 2(vv')(u\bar{Q}) \end{aligned} \quad (3.116)$$

が得られる。これは、 $(v\bar{Q})$ と $(v'\bar{Q})$ に加え、 $(u\bar{Q})$ もリジッドな代数に含まれることを意味している。すなわち、 $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$ が成り立つ。 Q と \bar{Q} を入れ替えて同様の議論をすれば、 $\bar{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$ も得られるから、結局 $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}$ であることが結論される。今後は両方の線形空間を同じ記号 \mathcal{A} で表わす。

リジッドな超対称性のもとで不変な作用を構成することを考えよう。平坦な背景上では、作用の構成に超場形式を用いるのが便利である。その場合、作用は一般に

$$S = \int d^3x d^2\theta X = \int d^3x Q_1 Q_2 X \quad (3.117)$$

と与えられる。ただし Q_1 と Q_2 は二つの独立な正則超対称変換である。実は、一般の共形平坦な背景上でも同様の方法で作用を構成することができる。

X を R -チャージ +2 であり、反正則な超対称変換を作用させると 0 になるゲージ不変スカラー演算子であるとする。 u_1 と u_2 を \mathcal{A} を張る二つの線形独立なベクトルとする。こ

のとき

$$S = \int d^3x \sqrt{g} (u_1 \mathcal{Q})(u_2 \mathcal{Q}) X \quad (3.118)$$

はリジッドな超対称性のもとで不変である。これは以下のように示される。まず、正則な変換 $u\mathcal{Q}$ のもとで不変であることは、 \mathcal{Q}_A が全て反可換であり、 u の属する空間 A が 2次元しかないことから明らかである。反正則な変換 $v\bar{\mathcal{Q}}$ のもとでの不変性は次のように示される。まず、 $(v\bar{\mathcal{Q}})X = 0$ であることから、

$$(v\bar{\mathcal{Q}})S = \int d^3x \sqrt{g} [(v\bar{\mathcal{Q}}), (u_1 \mathcal{Q})(u_2 \mathcal{Q})] X \quad (3.119)$$

と表すことができるが、交換関係を用いると、

$$[(v\bar{\mathcal{Q}}), (u_1 \mathcal{Q})(u_2 \mathcal{Q})] = v^A u_1^{[B} u_2^{C]} [4C_{AB} \mathcal{Q}_C (1 - R) - 2C_{BC} \mathcal{Q}_A - 2(\Gamma^{MN})_{AB} \mathcal{Q}_C M_{MN}] \quad (3.120)$$

を示すことができる。リジッドな超対称変換の結果として現れるボゾンの変換 M_{MN} はリジッドな変換、すなわち背景時空のアイソメトリーのみを含むから $\int d^3x \sqrt{g} X$ に作用させると 0 になる。このことを用いると (3.119) を次のように表わすことができる。

$$(v\bar{\mathcal{Q}})S = 2 \int \sqrt{g} [(vu_1)(u_2 \mathcal{Q}) + (u_2v)(u_1 \mathcal{Q}) + (u_1u_2)(v\mathcal{Q})] X \quad (3.121)$$

A が二次元であるため v, u_1, u_2 は必ず線形従属であることを用いればこの右辺の $[\dots]$ の部分が恒等的に 0 であることがわかる。

この方法でカイラル多重項の運動項を構成してみよう。平坦な時空においては

$$S \sim \int d^3x d^4\theta \bar{\Phi} \Phi \sim \int d^3x Q^2 \bar{Q}^2 \bar{\phi} \phi \sim \int d^3x Q^2 \bar{\mathcal{F}} \phi. \quad (3.122)$$

であるから、(3.118) において $X \sim \bar{\mathcal{F}} \phi$ と取れば運動項が得られると期待される。(この結果は一般に複素になるので、実の作用を得たければその複素共役と組み合わせる必要がある。) 実際にやってみよう。リジッドな超対称性を表す(ボゾンの)キリングスピノルを ε_i および $\bar{\varepsilon}_i$ ($i = 1, 2$) とする。これらは A に含まれる二つの線形独立なベクトル u_i^A と次のように関係している。

$$u_i^A \mathcal{Q}_A = \delta(\varepsilon_i), \quad u_i^A \bar{\mathcal{Q}}_A = \delta(\bar{\varepsilon}_i) \quad (3.123)$$

ワイルウェイトが Δ であるカイラル多重項に対しては次の作用を得る。

$$\delta(\varepsilon_1) \delta(\varepsilon_2) \left(\frac{1}{2} \bar{\mathcal{F}} \phi \right) = (\varepsilon_1 \varepsilon_2) \mathcal{L}_{\text{chiral}}^{(3d)}, \quad \delta(\bar{\varepsilon}_1) \delta(\bar{\varepsilon}_2) \left(\frac{1}{2} \bar{\phi} \mathcal{F} \right) = (\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2) \bar{\mathcal{L}}_{\text{chiral}}^{(3d)} \quad (3.124)$$

ただし、ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{\text{chiral}}^{(3d)}$ と $\bar{\mathcal{L}}_{\text{chiral}}^{(3d)}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{chiral}}^{(3d)} &= -D_m D^m \bar{\phi} \phi + \bar{\phi} \sigma \phi + \bar{\phi} \mathcal{D} \phi - \bar{\mathcal{F}} \mathcal{F} + \left(-\frac{R}{6} \Delta (\Delta - 2) - \frac{2\Delta}{3} \left(\Delta - \frac{1}{2} \right) K \right) \bar{\phi} \phi \\
&\quad + (D_m \bar{\psi} \gamma^m \psi) - (\bar{\psi} \sigma \psi) - \sqrt{2} \bar{\phi} (\lambda \psi) - \sqrt{2} (\bar{\psi} \lambda) \phi \\
&\quad - \left(\Delta - \frac{1}{2} \right) (2D_m \bar{\phi} \phi - (\bar{\psi} \gamma_m \psi)) K^m - \left(\Delta - \frac{1}{2} \right) (2i \bar{\phi} \sigma \phi - i(\bar{\psi} \psi)) K^4, \\
\bar{\mathcal{L}}_{\text{chiral}}^{(3d)} &= -\bar{\phi} D_m D^m \phi + \bar{\phi} \sigma \phi + \bar{\phi} \mathcal{D} \phi - \bar{\mathcal{F}} \mathcal{F} + \left(-\frac{R}{6} \Delta (\Delta - 2) - \frac{2\Delta}{3} \left(\Delta - \frac{1}{2} \right) \bar{K} \right) \bar{\phi} \phi \\
&\quad - (\bar{\psi} \gamma^m D_m \psi) - (\bar{\psi} \sigma \psi) - \sqrt{2} \bar{\phi} (\lambda \psi) - \sqrt{2} (\bar{\psi} \lambda) \phi \\
&\quad - \left(\Delta - \frac{1}{2} \right) (2\bar{\phi} D_m \phi + (\bar{\psi} \gamma_m \psi)) \bar{K}^m - \left(\Delta - \frac{1}{2} \right) (-2i \bar{\phi} \sigma \phi + i(\bar{\psi} \psi)) \bar{K}^4 \quad (3.125)
\end{aligned}$$

次の量を定義した。

$$\begin{aligned}
K^\mu &= \frac{\varepsilon_1 \gamma^\mu \bar{\kappa}_2 - \bar{\kappa}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, & K &= \frac{D_m D^m (\varepsilon_1 \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \\
\bar{K}^\mu &= \frac{\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \kappa_2 - \kappa_1 \gamma^\mu \bar{\varepsilon}_2}{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2}, & \bar{K} &= \frac{D_m D^m (\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2)}{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2} \quad (3.126)
\end{aligned}$$

ただしここでは $\bar{\kappa}_i$ と κ_i はそれぞれ ε_i と $\bar{\varepsilon}_i$ に対応したボゾンのスピノルである。

$\mathcal{L}_{\text{chiral}}$ を得るのに部分積分を用いていないので、積分測度によらず、その積分は正則なリジッド超対称性のもとで不変な作用を与える。すなわち任意の関数 $f(x)$ を用いて

$$S = \int d^3x \sqrt{g} f(x) \mathcal{L}_{\text{chiral}} \quad (3.127)$$

によって定義した作用は正則なリジッド超対称変換のもとで不変である。ただし、反正則なリジッド超対称変換のもとでも不変であることが保証されているのは $f(x) \propto (\varepsilon_1 \varepsilon_2)$ の場合であることを注意しておく。 $\bar{\mathcal{L}}_{\text{chiral}}$ についても、正則と反正則を入れ替えれば同様のことが成り立つ。

実はあとで見る例では全て

$$K = \bar{K}, \quad K^m = -\bar{K}^m, \quad K^4 = -\bar{K}^4, \quad D_m K^m = 0, \quad (3.128)$$

が成り立つ。このとき上で具体的に与えた二つのラグランジアン \mathcal{L} と $\bar{\mathcal{L}}$ を比較すると、それらの差は次のように表面項になる。

$$\bar{\mathcal{L}}_{\text{chiral}}^{(3d)} - \mathcal{L}_{\text{chiral}}^{(3d)} = D_m \left[(D^m \bar{\phi} \phi - \bar{\phi} D^m \phi) - (\bar{\psi} \gamma^m \psi) + (2\Delta - 1)(\bar{\phi} \phi) K^m \right] \quad (3.129)$$

従って、 $f(x) = 1$ と取ると \mathcal{L} を用いて定義した作用と $\bar{\mathcal{L}}$ を用いて定義した作用に違いはなく、どちらも正則、反正則両方のリジッド超対称性のもとで不変である。

ベクトル多重項についても同様である。平坦な \mathbb{R}^3 上では、作用は

$$S \sim \int d^3x d^2\theta W W \sim \int d^3x Q^2(\lambda \lambda) \quad (3.130)$$

と与えられるから、 $X \sim \lambda\lambda$ と取ることで以下の作用が得られる。

$$\delta(\varepsilon_1)\delta(\varepsilon_2) \left(\frac{1}{4}(\lambda\lambda) \right) = (\varepsilon_1\varepsilon_2)\mathcal{L}_{\text{vector}}^{(3d)}, \quad \delta(\bar{\varepsilon}_1)\delta(\bar{\varepsilon}_2) \left(\frac{1}{4}(\bar{\lambda}\bar{\lambda}) \right) = (\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2)\bar{\mathcal{L}}_{\text{vector}}^{(3d)} \quad (3.131)$$

ただし、ラグランジアン密度は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{vector}}^{(3d)} &= \frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} - \frac{i}{2}\gamma^{mnp}F_{mn}D_p\sigma + \frac{1}{2}D_m\sigma D^m\sigma - \frac{1}{2}D\mathcal{D} + \left(\frac{R}{12} + \frac{K}{3} \right) \sigma\sigma \\ &\quad + (D_m\bar{\lambda}\gamma^m\lambda) - (\bar{\lambda}[\sigma, \lambda]) \\ &\quad + \left[-\frac{i}{2}\gamma^{mpq}\sigma F_{pq} + \sigma D^m\sigma + \frac{1}{2}(\bar{\lambda}\gamma^m\lambda) \right] K_m + \left(i\mathcal{D}\sigma - \frac{i}{2}(\bar{\lambda}\lambda) \right) K^4, \\ \bar{\mathcal{L}}_{\text{vector}}^{(3d)} &= \frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + \frac{i}{2}\gamma^{mnp}F_{mn}D_p\sigma + \frac{1}{2}D_m\sigma D^m\sigma - \frac{1}{2}D\mathcal{D} + \left(\frac{R}{12} + \frac{\bar{K}}{3} \right) \sigma\sigma \\ &\quad - (\bar{\lambda}\gamma^m D_m\lambda) - (\bar{\lambda}[\sigma, \lambda]) \\ &\quad + \left[\frac{i}{2}\gamma^{mpq}\sigma F_{pq} + \sigma D^m\sigma - \frac{1}{2}(\bar{\lambda}\gamma^m\lambda) \right] \bar{K}_m + \left(-i\mathcal{D}\sigma + \frac{i}{2}(\bar{\lambda}\lambda) \right) \bar{K}^4 \end{aligned} \quad (3.132)$$

今度も (3.128) が成り立つことを仮定すると、二つのラグランジアン密度の差は表面項になる。

$$\bar{\mathcal{L}}_{\text{vector}}^{(3d)} - \mathcal{L}_{\text{vector}}^{(3d)} = D_m [i(\gamma^{mpq}F_{pq}\sigma) - (\bar{\lambda}\gamma^m\lambda) - \sigma\sigma K^m] \quad (3.133)$$

従って、積分測度 $f(x) \propto (\varepsilon_1\varepsilon_2)$ または $f(x) \propto (\bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2)$ を用いて定義した作用だけでなく、 $f(x) = 1$ によって定義した作用もリジッド超対称性のもとで不変である。

第4章 球面調和関数

4.1 S^n 上の調和関数に関する公式

のちに場のガウス積分を具体的に実行する際には、場をモード展開する必要がある。その際に球面調和関数が用いられる。

二次元球面上において、角運動量 j のスカラー関数は次のように展開することができる。

$$\phi^{(j)}(\theta, \phi) = \sum_m Y_{j,m}(\theta, \phi) \xi_m. \quad (4.1)$$

ただし、 j は角運動量の大きさを表す量子数 $j = 0, 1, 2, \dots$ であり、 S^2 のアイソメトリー $SU(2) \sim SO(3)$ の表現 R_j を定める。 m は j によって指定される表現 R_j に属する表現空間上のベクトル添え字であり、 $\dim R_j = 2j + 1$ 個の値をとる。この章の目的は、このような展開の一般式を任意の次元の球面上の任意のスピンの場合に対して与え、それらの微分を代数的に表す事である。この節ではまず結果だけを簡単にまとめておく。詳しい説明は以下の節でなされる。

球面の次元を n としよう。このとき球面のアイソメトリーは $G = SO(n+1) \sim Spin(n+1)$ であり、調和関数はその表現 \tilde{R} と、それが作用する $\dim \tilde{R}$ 次元のベクトル添え字 A によって指定される。また、 n 次元空間におけるスピンは $H = SO(n) \sim Spin(n)$ の表現 R によって指定され、スピン R の場はスピン添え字 $i = 1, \dots, \dim R$ によって指定される $\dim R$ 個の成分を持つ。つまり、表現 \tilde{R} に属する場の展開は次のように与えられる。

$$\phi_i^{(\tilde{R})}(\theta) = \sum_A Y_{iA}^{(\tilde{R})}(\theta) \xi_A \quad (4.2)$$

ただし、あるスピン R の場の展開において任意の表現 \tilde{R} に属する調和関数が現れるわけではない。スピンの群 H を S^n 上のある点を動かさないようなアイソメトリーとみなせば H を G の部分群とみなすことができ、

$$S^n = G/H \quad (4.3)$$

と表すことができる。この部分群 H のもとで G の表現 \tilde{R} を分解したときに H の表現 R が含まれる場合にのみ対応する調和関数が存在する。

表現 \tilde{R} の表現行列 $\rho_{AB}^{(\tilde{R})}$ を用いると、調和関数を具体的に与えることができ、展開式 (4.2) を次のように与えることができる。

$$\phi_i^{(\tilde{R})}(\theta) = \sum_{B,A} P_{iB}^{(R,\tilde{R})} \rho_{BA}^{(\tilde{R})}(g^{-1}(\theta)) \xi_A \quad (4.4)$$

ただし、 $g(\theta)$ は (4.3) によって G を S^n 上の H 束として表したときの切断であり、 $P_{iB}^{(R, \tilde{R})}$ は G の表現 \tilde{R} の表現空間の中から、それを H の表現に分解したときに現れる R の表現空間の部分だけを抜き出す $\dim R \times \dim \tilde{R}$ 行列である。

さらに、 $G = SO(n+1)$ の生成子を T_{AB} ($A, B = 1, \dots, n+1$)、 $H = SO(n)$ の生成子を T_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) とし、

$$K_m = \frac{1}{r} T_{m,d+1} \quad (m = 1, \dots, n). \quad (4.5)$$

を定義しておく。ただし r は球面の半径である。このとき、切断 $g(\theta)$ によって定義される局所直交座標における共変微分は

$$D_m \phi_i^{(\tilde{R})}(\theta) = \sum_{C,B,A} P_{iC}^{(R, \tilde{R})} \rho_{CB}^{(\tilde{R})}(-K_m) \rho_{BA}^{(\tilde{R})}(g^{-1}(\theta)) \xi_A \quad (4.6)$$

と与えられる。また、無限小アイソメトリ変換 X に対応するリー微分は

$$\mathcal{L}_X \phi_i^{(\tilde{R})}(\theta) = \sum_{C,B,A} P_{iC}^{(R, \tilde{R})} \rho_{CB}^{(\tilde{R})}(g^{-1}(\theta)) \rho_{BA}^{(\tilde{R})}(X) \xi_A \quad (4.7)$$

によって与えられる。

4.2 枠束

d 次元のリーマン多様体 \mathcal{M} 上の場を考える。 \mathcal{M} の接空間に作用する局所回転群を $H = SO(d)$ とすれば、多様体上の場は主 H 束に同伴するベクトル束 E の切断として表わされる。(ここでは $SO(d)$ と $Spin(d)$ の違いはあまり気にしない。以下で現れる $SO(d)$ は場合によって $Spin(d)$ を表わす。) 場のスピンは H の表現として表わされ、場のスピンは R のとき、 E の各ファイバーは表現 R の表現空間となっている。この節で述べることは基本的にこれだけである。以下では上で述べたことを以降の節で用いる記号を導入しながら (あまり数学的には厳密でない方法で) 説明していく。

量子力学において一般に用いられている記法を用いて、 d 次元の多様体 \mathcal{M} 上のスピン R の場を次のように表現しよう。

$$|\psi\rangle = \int_{\mathcal{M}} d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, i\rangle \psi_i(\mathbf{x}). \quad (4.8)$$

\mathbf{x} は \mathcal{M} 上の点を表し、 i はスピンに対する基底の添え字である。¹基底となる状態 $|\mathbf{x}, i\rangle$ は次のようなテンソル積として定義される。

$$|\mathbf{x}, i\rangle = |\mathbf{x}\rangle \otimes |i\rangle_{\mathbf{x}}. \quad (4.9)$$

¹ $|\psi\rangle$ は E の切断である。 $|\mathbf{x}, i\rangle$ は点 \mathbf{x} に台をもつデルタ関数的な切断であり、 E の切断の基底をなす。

$|i\rangle_x$ の添え字 x は基底が点ごとに独立に定義されることを示すものである。この基底はスピントごとに定義されるものであるが、それらは独立なものではなく、どれかの（自明でない）スピンにおける基底を全ての点 x において定義すれば、そのほかのスピンにおける基底も自然に定まる。そこで、スピンによらない概念としての「枠」を定義するのが便利である。

$|i\rangle_x$ によって張られるベクトル空間を V_x としよう。また、それらとは独立に、同じ次元を持つベクトル空間を V_0 とし、その基底を $|i\rangle_0$ とする。 M 上の各点での基底が与えられれば、 $|i\rangle_0$ を $|i\rangle_x$ に移す等長写像が x ごとに一つ定まる。これを $f(x)$ とする。

$$f(x) : V_0 \rightarrow V_x. \quad (4.10)$$

逆に、 V_0 上の基底 $|i\rangle_0$ と $f(x)$ が与えられれば、(4.10) によって各点での基底が定まる。²

V_0 と V_x は別の空間であり、 $f(x)$ は自己同型ではないので、群の元とみなすことはできない。しかし仮に何らかの方法で V_0 と V_x を同一視したとすれば、 $f(x)$ は $SO(d)$ の元であるとみなすことができ、 $f(x)$ は M 上の $SO(d)$ ファイバー束の切断であるとみなすことができる。³このファイバー束のことを枠束と呼び、 FM で表す。⁴

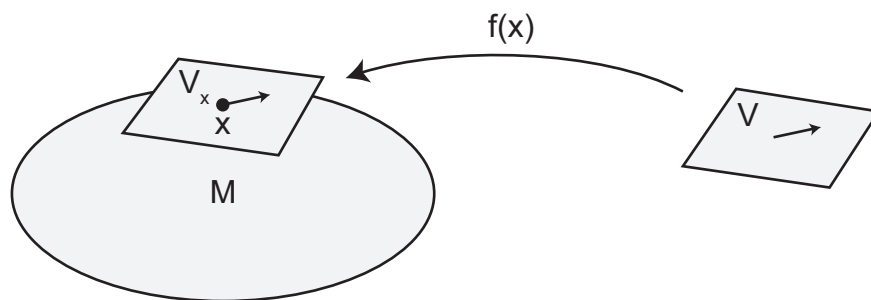


図 4.1: 枠束

枠束を導入することの利点は、特定のスピによらずに枠を設定することができるという点である。枠束が与えられていた場合、あるスピン R に対する基底を与えるには、 $\dim R$ 次元の線形空間 V_0 を一つ用意し、その上に基底 $|i\rangle_0$ を定義する。そしてその基底を (4.10) の写像によって M 上の各点で定義されたベクトル空間 V_x へ写像すればそれらがスピン R の場に対する基底を与える。このような考え方にに基づき、スピン R の場の基底を

$$|x, i\rangle = |x, f(x)\rangle \otimes |i\rangle_0 \quad (4.11)$$

によって表すことにしよう。ここでの $|i\rangle_0$ は各点において定義された空間 V_x ではなく、 V_0 の基底である。そして V_x との関係は枠束の切断 $f(x)$ によって指定されている。一般の場合

²一般に、 $f(x)$ を連続な写像とするためには多様体 M を複数の近傍 U_α で覆い、それぞれで $f(x)$ を定義する必要がある。これはそれぞれの U_α 上の E の自明化を与える。

³ V_0 と V_x を同一視しない場合、このようなファイバー束は主 $SO(d)$ 束と呼ばれる。

⁴ここでは群 H の元とその表現をあまり区別せずに用いている。正確には、(V_0 と V_x の間の同一視を定めたとすれば) $f(x)$ は群 H の元であり、 V_0 に対するその作用はスピン R によって指定される表現によって定める。

の配位は、波動関数 $\psi_i(\mathbf{x})$ を用いて

$$|\psi\rangle = \int_{\mathcal{M}} d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\rangle \otimes |i\rangle_0 \psi_i(\mathbf{x}) \quad (4.12)$$

と表される。枠束の切断 f は常に $|i\rangle_0$ で張られる空間 (スピン空間) に作用させて用いられるから、その作用の結果が同じものは等価である。従って、次の等価関係が成り立つ。

$$|\mathbf{x}, f(\mathbf{x})h\rangle \otimes |i\rangle_0 \sim |\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\rangle \otimes h|i\rangle_0, \quad h \in H = SO(d). \quad (4.13)$$

この等価関係によって定義されるテンソル積をしばしば \otimes_H と書く。⁵

これを用いると、 $f' = fh$ によって関係する二つの切断 f と f' を用いて定義された波動関数の間の関係が得られる。 f' を用いて定義された波動関数を ψ' としよう。すると、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \int_{\mathcal{M}} d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f'(\mathbf{x})\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \psi'_i(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f(\mathbf{x})h(\mathbf{x})\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \psi'_i(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\rangle \otimes_H h(\mathbf{x})|i\rangle_0 \psi'_i(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\mathbf{x} \sum_{i,j=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\rangle \otimes_H |i\rangle_0 h(\mathbf{x})_{ij} \psi'_j(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

ただし

$$h(\mathbf{x})_{ij} = {}_0\langle i|h(\mathbf{x})|j\rangle_0 \quad (4.15)$$

は表現 R における $h(\mathbf{x})$ の表現行列である。(4.14) を (4.12) と比較すれば、次の関係が得られる。

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\dim R} h(\mathbf{x})_{ij} \psi'_j(\mathbf{x}). \quad (4.16)$$

これは、スピン R の場に対する局所回転に他ならない。

4.3 平行移動

場 $|\psi\rangle$ とその成分 $\psi_i(\mathbf{x})$ を関係させるためには、枠束の切断 $f(\mathbf{x})$ を一つ選ぶ必要があるが、共変微分を行う際に面倒なのは、この選んだ切断が平行移動によって変化してしま

⁵(4.13) の同値関係は E が主 H 束に同伴するベクトル束であるということの定義に他ならない。

うため、それを打ち消すような補正を行う必要があるということである。例えば、点 x にある場を点 x' に平行移動させることを考えよう。平行移動は $x' = x + \epsilon$ におけるスピン空間 $V_{x'}$ から x におけるスピン空間 V_x への直交（あるいはユニタリー）変換を定める。

$$U_\epsilon : V_{x'} \rightarrow V_x \quad (4.17)$$

この平行移動の状態に対する作用を P によって表すことにする。

$$P|x', f(x')\rangle = |x, U_\epsilon f(x')\rangle \quad (4.18)$$

平行移動によって得られた切断の点 x における値 $U_\epsilon f(x')$ はもとの切断 $f(x)$ とは異なる

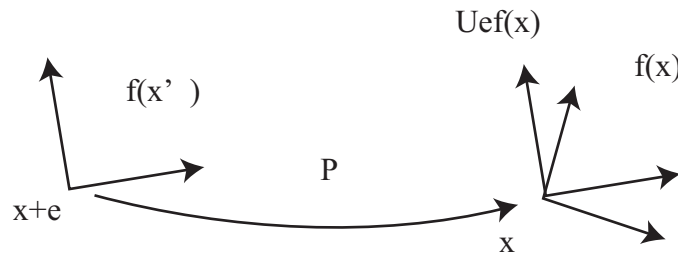


図 4.2: 平行移動

るため、平行移動を用いて共変微分などを定義するためにはこの変化を補正する必要がある。例えば、(4.8) によって表される場をベクトル場 ϵ で平行移動した $P|\psi\rangle$ の波動関数をもとの切断を用いて表そうとすれば、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} P|\psi\rangle &= \int_{\mathcal{M}} d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, U_\epsilon f(\mathbf{x}')\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \psi_i(\mathbf{x}') \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\Omega_\epsilon\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \psi_i(\mathbf{x}') \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\rangle \otimes_H \Omega_\epsilon |i\rangle_0 \psi_i(\mathbf{x}') \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\mathbf{x} \sum_{i,j=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Omega_{\epsilon,ij} \psi_j(\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (4.19)$$

ただし

$$\Omega_\epsilon = f^{-1}(\mathbf{x})U_\epsilon f(\mathbf{x}') : V_0 \rightarrow V_{x'} \rightarrow V_x \rightarrow V_0 \quad (4.20)$$

およびその表現 R における表現行列 $\Omega_{\epsilon,ij}$ を定義した。 Ω_ϵ は V_0 上の同型写像であるから $SO(d)$ の元である。従って、 $P|\psi\rangle$ の波動関数を $\psi_i^P(\mathbf{x})$ とすれば

$$\psi_i^P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\dim R} \Omega_{\epsilon,ij} \psi_j(\mathbf{x}') \quad (4.21)$$

であり、 $\Omega_\epsilon = 1 + \epsilon^\mu \omega_\mu$ によってリー代数 $so(d)$ の元 ω_μ を定義すれば

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu D_\mu \psi_i(\mathbf{x}) &\equiv \psi_i^P(\mathbf{x}) - \psi_i(\mathbf{x}) \\ &= \epsilon^\mu \left[\partial_\mu \psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{\dim R} \omega_{\mu ij} \psi_j(\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

が得られる。 ω_μ はスピン接続であり、これが平行移動によって変化する切断 f に対する補正を表している。この接続の存在が計算をややこしくする。

この問題は、特定の切断 f を選ぶことによって引き起こされる。そこで、切断を固定せず、あらかじめ全ての f に対する値を与えておく。これは枠束 FM 上の関数として場を与えることを意味する。いままで用いていた基底 (4.11) においては、点 x が与えられるとその点での枠は前もって選んでおいた切断 f によって一意的に決定されたのであるが、ここでは枠の取り方を表す写像 $f: V_0 \rightarrow V_x$ を点 x とは独立な座標として扱い、 (x, f) によって指定される基底

$$|\mathbf{x}, f\rangle \quad (4.23)$$

を用いよう。組 (x, f) は枠束 FM 上の点を与えるから、これは枠束上の関数の基底になっている。イメージとしては、組 (x, f) はスピン空間 V_0 を M 上の点 x に f によって指定される向きに貼り付ける役割を果たす。この基底を用いると、一般の状態は次のように表すことができる。

$$|\psi\rangle = \int_f d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(\mathbf{x}, f) \quad (4.24)$$

(4.12) との違いは、波動関数は FM 上全体で定義されているということと、積分が任意の切断 f 上で行われるということである。切断 f の取り方にこの状態が依存しないためには被積分関数

$$\sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(\mathbf{x}, f). \quad (4.25)$$

が f に依存してはならない。 f を fh ($h \in SO(d)$) に置き換えても不変であることから、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(\mathbf{x}, f) &= \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, fh\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(\mathbf{x}, fh) \\ &= \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f\rangle \otimes_H h|i\rangle_0 \Psi_i(\mathbf{x}, fh) \\ &= \sum_{i,j=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f\rangle \otimes_H |i\rangle_0 h_{ij} \Psi_j(\mathbf{x}, fh). \end{aligned} \quad (4.26)$$

が成り立たなければならない。途中でテンソル積 \otimes_H が満足する性質 (4.13) を用いた。この式から、 FM 上の波動関数 Ψ が満足すべき関係式

$$\Psi_i(\mathbf{x}, f) = \sum_{j=1}^{\dim R} h_{ij} \Psi_j(\mathbf{x}, fh) \quad (4.27)$$

が得られる。波動関数がこの条件を満足していれば、(4.24) によって定義される状態ベクトルは f の選び方に依存しない。そこで以下では積分をどこでするかは明示しないことにする。このような形で波動関数を定義しておく、状態の平行移動は次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} P_\epsilon |\psi\rangle &= \int d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, U_\epsilon f\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(\mathbf{x}', f) \\ &= \int d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{\dim R} |\mathbf{x}, f\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(\mathbf{x}', U_\epsilon^{-1} f) \end{aligned} \quad (4.28)$$

二行目への移行の際には f を $U_\epsilon^{-1} f$ で置き換えた。これより、平行移動された状態の波動関数は

$$\Psi_i^P(\mathbf{x}, f) = \Psi_i(\mathbf{x}', U_\epsilon^{-1} f) \quad (4.29)$$

によって与えられる。あとは、(4.27) を満足する波動関数や平行移動を与える U をどのように与えればよいかという問題が残るが、次の節で見るように、対称空間の場合にはこれらの具体系は簡単に与えられる。

4.4 G/H 上の枠束

多様体 \mathcal{M} に対して群 G が推移的に作用する場合を考えよう。これは \mathcal{M} が一様な空間であることを意味する。 \mathcal{M} の上に特定の一点 (原点) O を選ぶ。原点を動かさない G の部分群 (stabilizer) を H とする。

$$H = \{g \in G | gO = O\}. \quad (4.30)$$

$g \in G$ が原点 O を x に移す、すなわち $x = gO$ とすると、 gH の元も全て O を x に移す。従って、 gH と点 x との同一視により、

$$\mathcal{M} = G/H \quad (4.31)$$

となる。これによって G は \mathcal{M} 上の H -束になる。 G から \mathcal{M} への射影を π とする。

$$\begin{array}{ccc} H & \rightarrow & G \\ & & \downarrow \pi \\ & & \mathcal{M} \end{array} \quad (4.32)$$

ここで、付加的条件として H が G の involution σ の fixed point set であるという条件を課す。このとき $\mathcal{M} = G/H$ は対称空間であるといわれる。この条件は、 G のリー代数

G を σ の固有値が $+1$ である空間 \mathcal{H} と -1 である空間 \mathcal{K} の直積として表すことができることを意味する。従って次の関係式が成り立つ。

$$[\mathcal{H}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}, \quad [\mathcal{H}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K}, \quad [\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{H}. \quad (4.33)$$

最初の二つの関係式が成り立つことは H が G の部分群をなすことから保証されるが、最後の一つが付加的な条件から従う式である。あとで \mathcal{K} の作用を平行移動、 \mathcal{H} の作用を局所回転として扱うが、最後の条件は換率が無いことに対応している。

前節において、 \mathcal{M} 上の場がその枠束 FM 上の場として与えられることを見た。枠束 FM 上の点は \mathcal{M} 上の点とその点での局所直交系を定める。 $\mathcal{M} = G/H$ の場合には、これは G の元を一つ与えることによって実現される。すなわち、原点 O において基準となる基底 $|i\rangle_0$ を定めておき、 $g \in G$ によってこの直交系を点 g に移動したものを点 $x = \pi(g)$ での基底 $|i\rangle_x$ として採用することにすれば、 G と FM の同相写像を定義することができる。(図 4.3) このように、 $\mathcal{M} = G/H$ の場合には、 \mathcal{M} 上の点を与える $x \in \mathcal{M}$ とその点

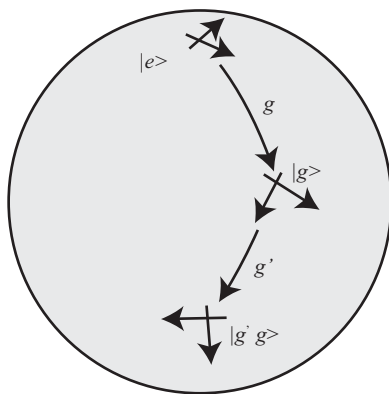


図 4.3: \mathcal{M} に対する群 G の作用と座標系の関係

での枠を決める $f: V_0 \rightarrow V_x$ をひとまとめにして $g \in G$ によって与えることができる。そこで、 \mathcal{M} 上のスピン R の場の配位を与える (4.24) は次のように書くことができる。

$$|\Psi\rangle = \int dg |g\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(g) \quad (4.34)$$

積分はもともと切断 f 上で行う約束であったが、被積分関数が f への依存性を持たないことを利用して G 全体の積分として書き換えた。 \otimes_H は次の同一視によって定義される。

$$|gh\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \sim |g\rangle \otimes_H h|i\rangle_0 \quad (4.35)$$

また、 $G \sim FM$ 上の波動関数 $\Psi_i(g)$ が満足すべき条件 (4.27) は

$$\Psi_i(g) = \sum_{i=1}^{\dim R} h_{ij} \Psi_j(gh), \quad \forall h \in H \quad (4.36)$$

となる。

実は、 $\mathcal{M} = G/H$ である場合にはこの条件を満たす波動関数の完全系を次のように与えることができる。

$$Y_{i,A}^{\tilde{R}}(g) = \rho^{\tilde{R}}(g^{-1})_{iA} \quad (4.37)$$

この式について少し詳しく説明しておこう。

- 場のスピン R は $H \subset G$ の表現である。 G の既約表現を H の既約表現に分解すると、一般にはいくつかの表現に分岐する。この分岐においてスピン表現 R への分岐を含む G の表現 (無限個存在する。) を \tilde{R} とする。
- G の表現 \tilde{R} に対する表現行列を $\rho_{AB}^{\tilde{R}}$ とし、これが作用する空間を $V_{\tilde{R}}$ とする。 $V_{\tilde{R}}$ の基底の添え字として $A, B = 1, \dots, \dim \tilde{R}$ を用いる。 $\rho_{iB}^{\tilde{R}}$ は $\rho_{AB}^{\tilde{R}}$ の列添え字 A を $V_{\tilde{R}}$ の部分に制限したものである。
- スピンの表現 R が一つ与えられると、 R へ分岐する無限個の表現 \tilde{R} と、 $A = 1, \dots, \dim \tilde{R}$ でラベルされる無限個の関数の組 $Y_{i,A}^{\tilde{R}}$ が定まる。
- 一般には \tilde{R} が二つ以上の R を含むことがある。そのような場合には $Y_{i,A}^{\tilde{R}}$ を指定する添え字としては \tilde{R} だけではなく、その中のどちらの R を選ぶかを指定する必要がある。(しかし以下では記号の上ではそのような指定は明記しない。)

この関数系がスピン R の場に対する完全系をなすということは、(4.36) を満足する関数 $\Psi_i(g)$ が (4.37) の線形結合として次のように与えられることを意味する。

$$\Psi_i(g) = \sum_{\tilde{R} \supset R} \sum_{A=1}^{\dim \tilde{R}} \rho^{\tilde{R}}(g^{-1})_{iA} \Psi_A^{\tilde{R}} \quad (4.38)$$

ただし $\sum_{\tilde{R} \supset R}$ は $H \subset G$ において R への分岐を含む全ての G の表現に対して和を取ることの意味する。 $\Psi_A^{\tilde{R}}$ は定数係数である。(4.38) が (4.36) を満足することは簡単に示すことができる。

4.5 アイソメトリーとリー微分

図 4.3 に示された G と FM の対応を見れば、 \mathcal{M} に対するアイソメトリーは g への右作用として次のように与えられる。

$$\text{iso}(g')|g\rangle = |g'g\rangle. \quad (4.39)$$

従って、(4.34) に対してアイソメトリーを作用させると、波動関数の変換は

$$\begin{aligned} \text{iso}(g')|\Psi\rangle &= \int dg \sum_{i, \tilde{R}, A} |g'g\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \rho^{\tilde{R}}(g^{-1})_{iA} \Psi_A^{\tilde{R}} \\ &= \int dg \sum_{i, \tilde{R}, A} |g\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \rho^{\tilde{R}}(g^{-1}g')_{iA} \Psi_A^{\tilde{R}}. \\ &= \int dg \sum_{i, \tilde{R}, A, B} |g\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \rho^{\tilde{R}}(g^{-1})_{iA} \rho^{\tilde{R}}(g')_{AB} \Psi_B^{\tilde{R}}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

となる。二行目への移行は積分変数の置き換え $g \rightarrow g'^{-1}g$ によって行われた。この結果よりアイソメトリーは定数ベクトル $\Psi_A^{\tilde{R}}$ に対する次のような回転として表わすことができる。

$$\Psi_A^{\tilde{R}} \rightarrow \Psi_A'^{\tilde{R}} = \rho^{\tilde{R}}(g')_{AB} \Psi_B^{\tilde{R}}. \quad (4.41)$$

アイソメトリーの生成子 X に対応するリー微分 \mathcal{L}_X は、微小なアイソメトリーのもとでの場の変化として定義される。すなわち、

$$\mathcal{L}_X = \text{iso}(1 + X) - 1 \quad (4.42)$$

である。(4.40) を用いれば

$$\mathcal{L}_X \Psi_i(g) = \Psi_i((1 + X)^{-1}g) - \Psi_i(g) = \Psi_i(-Xg). \quad (4.43)$$

である。さらに (4.41) より次の式が得られる。

$$\mathcal{L}_X \Psi_A^{\tilde{R}} = \rho^{\tilde{R}}(X)_{AB} \Psi_B^{\tilde{R}} \quad (4.44)$$

4.6 共変微分

共変微分を扱う前に、枠束の切断 f に対応する局所直交系を具体的に定義しておこう。リー代数 \mathcal{G} を \mathcal{H} の生成元 H_a と \mathcal{K} の生成元 K_m で張ることにする。 K_m は TM の基底と見なすことができるから、そこに計量を導入することで \mathcal{M} 上のリーマン計量が定まる。ここでは

$$(K_m, K_n) = \delta_{mn} \quad (4.45)$$

のような内積を導入する。これが対称性と矛盾しないこと、すなわち K_m を H で回転したときにこの内積が保たれることを要請する。 K_m の全体の規格化は自由に選ぶことができるが、これが \mathcal{M} のスケールを決める。

FM の切断 f を一つ与える。これに基づいて、任意の点 $x \in \mathcal{M}$ の近傍の直交座標 ξ^a ($m = 1, \dots, \dim \mathcal{M}$) を定義しよう。これは、 ξ^a から x の近傍への写像として次のように与えることができる。(以下、接空間と近傍をあまり区別せずに用いる。)

$$\mathbf{x}(\xi) = \pi(g(1 + \xi^m K_m)) \quad (4.46)$$

ここからは、添え字についての和の記号は省略することにする。この近傍座標系における微小線素を

$$ds^2 = \xi^m \xi^m \quad (4.47)$$

によって定める。

ある直交系を設定したときに、座標 ξ^m の点を座標 $\xi^m - \epsilon^m$ に動かすような平行移動は

$$g \rightarrow g(1 - \epsilon^m K_m) \quad (4.48)$$

によって与えられる。この平行移動を P_ϵ と表わそう。

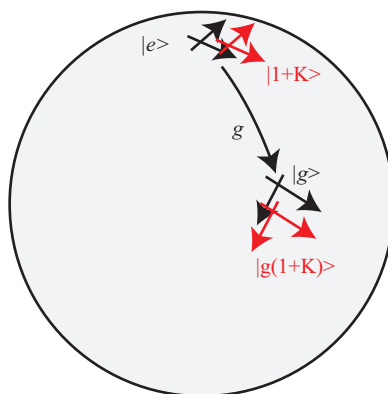


図 4.4: 平行移動

$$P_\epsilon |g\rangle = |g(1 - \epsilon^m K_m)\rangle \quad (4.49)$$

P_ϵ を (4.34) に作用させると、

$$\begin{aligned} P_\epsilon |\Psi\rangle &= \int dg |g(1 - \epsilon^m K_m)\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(g) \\ &= \int dg |g\rangle \otimes_H |i\rangle_0 \Psi_i(g(1 + \epsilon^m K_m)) \end{aligned} \quad (4.50)$$

この P_ϵ を用いると、共変微分は次のように定義することができる。

$$\begin{aligned} \epsilon^m D_m |\Psi\rangle &= P_\epsilon |\Psi\rangle - |\Psi\rangle \\ &= \int dg |g\rangle \otimes_H |i\rangle_0 [\Psi_i(g(1 + \epsilon^m K_m)) - \Psi_i(g)] \end{aligned} \quad (4.51)$$

つまり、 $D_m |\Psi\rangle$ の波動関数を $D_m \Psi_i$ と書くことにすれば、それは次のように与えられる。

$$D_m \Psi_i = \Psi_i(gK_m). \quad (4.52)$$

ただし、この式の右辺は、

$$\epsilon^m \Psi_i(gK_m) = \Psi_i(g(1 + \epsilon^m K_m)) - \Psi_i(g) \quad (4.53)$$

によって定義される。波動関数が (4.38) のように展開されることを用いると、さらに簡単に表わすことができる。ここでは特に波動関数がアイソメトリーのもとで表現 \tilde{R} に属し、つぎのように与えられるとしよう。

$$\Psi_i^{\tilde{R}}(g) = \rho^{\tilde{R}}(g^{-1})_{iA} \Psi_A^{\tilde{R}} \quad (4.54)$$

このとき、(4.53) は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Psi_i^{\tilde{R}}(g(1 + \epsilon^m K_m)) - \Psi_i^{\tilde{R}}(g) &= [\rho^{\tilde{R}}((1 - \epsilon^m K_m)g^{-1})_{iA} - \rho^{\tilde{R}}(g^{-1})_{iA}] \Psi_A^{\tilde{R}} \\ &= \rho^{\tilde{R}}(-\epsilon^m K_m)_{iA} \rho^{\tilde{R}}(g^{-1})_{AB} \Psi_B^{\tilde{R}} \\ &= \rho^{\tilde{R}}(-\epsilon^m K_m)_{iA} \Psi_A^{\tilde{R}}(g) \end{aligned} \quad (4.55)$$

ただし、(4.54) の R 添え字 i をそのまま \tilde{R} へ拡張したものを $\Psi_A^{\tilde{R}}(g)$ とした。すなわち

$$\Psi_A^{\tilde{R}}(g) = \rho^{\tilde{R}}(g^{-1})_{AB} \Psi_B^{\tilde{R}} \quad (4.56)$$

である。これを用いれば、

$$D_m \Psi_i^{\tilde{R}}(g) = \Psi_i^{\tilde{R}}(gK_m) = -\rho^{\tilde{R}}(K_m)_{iA} \Psi_A^{\tilde{R}}(g). \quad (4.57)$$

これが条件 FM 上の波動関数が満たすべき条件 (4.36) を満足することは次のように確認できる。

$$D_m \Psi_i(gh) = \Psi_i(ghK_m) = \Psi_i(g(hK_m h^{-1})h) = h_{mn}^{-1} h_{ij}^{-1} \Psi_j(gK_n) = h_{mn}^{-1} h_{ij}^{-1} D_n \Psi_j(g). \quad (4.58)$$

つまり、 $D_m \Psi_i^{\tilde{R}}$ を改めて一つの波動関数 $\Psi_{mi}^{\tilde{R}}$ と置くと、

$$\Psi_{mi}(gh) = h_{mi,nj}^{-1} \Psi_{nj}(g) \quad (4.59)$$

が満たされる。このことは共変微分の添え字 m もスピン添え字として正しく変換されていることを表している。共変微分の添え字に対応するスピン基底を導入すると次の状態ベクトルが定義できる。

$$|D\Psi\rangle = \int dg |g\rangle \otimes_H (|m\rangle_0 \otimes |i\rangle_0) D_m \Psi_i(g) \quad (4.60)$$

ただし、ここでの \otimes_H は次の同一視によって定義される。

$$|gh\rangle \otimes_H (|m\rangle_0 \otimes |i\rangle_0) \sim |g\rangle \otimes_H (h|m\rangle_0 \otimes h|i\rangle_0), \quad \forall h \in H. \quad (4.61)$$

微分を二回続けて作用させる場合には (4.57) を二回繰り返せばよい。すなわち

$$D_m D_n \Psi_i^{\tilde{R}}(g) = D_m \Psi_i^{\tilde{R}}(g K_n) = \Psi_i^{\tilde{R}}(g K_m K_n) \quad (4.62)$$

である。

添え字 m と n を縮約すると、ラプラシアンに対する次の式が得られる。

$$\Delta \Psi_i(g) = \Psi_i(g K_m K_m) = -[C_2(\tilde{R}) - C_2(R)] \Psi_i(g). \quad (4.63)$$

ただし、 $C_2(\tilde{R})$ は $K_m K_n$ の添え字をつぶした H 不変計量 δ^{mn} を G 不変計量 g^{AB} に拡張して定義した G のカシミア、 $C_2(R)$ はその計量を H の生成子に制限して得られる計量を用いて定義した H のカシミアである。

$$C_2(\tilde{R}) = -g^{AB} T_A T_B, \quad C_2(R) = -g^{ij} H_i H_j. \quad (4.64)$$

ここでは反エルミートな生成子を用いているので、カシミアが正になるように負号をつけて定義した。このように、ラプラシアンの固有値はスピン R とアイソメトリーのもとでの表現 \tilde{R} から完全に代数的に計算することができる。

(4.62) において二つの添え字を入れ替えたものを引けば、

$$[D_m, D_n] \Psi_i^{\tilde{R}}(g) = \Psi_i^{\tilde{R}}(g [K_m, K_n]) = \rho^R(-[K_m, K_n])_{ij} \Psi_j^{\tilde{R}}(g) \quad (4.65)$$

となる。すなわち、曲率テンソルが次のように与えられる。

$$R_{mn} \equiv [D_m, D_n] = -[K_m, K_n] \in \mathcal{H}. \quad (4.66)$$

ただし、ここでは曲率テンソルの成分を \mathcal{H} の成分として表わした。これを局所座標を用いて行列表示するには \mathcal{K} 上の \mathcal{H} の表現を用いればよい。

4.7 スピン接続と多脚場

スピン接続 ω と多脚場 e は、共変微分と微分を比較することによって得ることができる。共変微分が

$$e^m D_m \Psi_i = d\Psi_i + \omega_{ij} \Psi_j \quad (4.67)$$

と与えられるとしよう。右辺の微分を次のように書き換える。

$$d\Psi_i(g) = \Psi_i(dg). \quad (4.68)$$

ただし、 $\Psi_i(dg)$ は波動関数が (4.38) のように与えられていることを仮定して、その中の $\rho^{\tilde{R}}(g^{-1})$ に対して微分が作用したものを表す。また、スピン接続の項は $\omega\Psi(g) = \Psi(-g\omega)$ のように書き換えることができる。さらに共変微分に対する式 (4.57) も用いると、

$$e^m\Psi_i(gK_m) = \Psi_i(dg) + \Psi_i(-g\omega) \quad (4.69)$$

これが任意の場に対して成り立たなければならないから、次の式が得られる。

$$\mu = e + \omega, \quad \mu := g^{-1}dg. \quad (4.70)$$

ω はスピン接続を \mathcal{H} に値を持つ 1-形式として表わしたものであり、 $e = e^m K_m$ である。つまり、 μ を \mathcal{H} の成分と \mathcal{K} の成分に分解することにより ω と e が得られる。 μ は定義より次の式を満足する。

$$d\mu + \mu^2 = 0. \quad (4.71)$$

ここに $\mu = e + \omega$ を代入し、対称空間についての関係式 (4.33) を用いて \mathcal{H} 成分と \mathcal{K} 成分に分けると、次の二つの式を得る。

$$de + \omega e + e\omega = 0, \quad d\omega + \omega^2 + e^2 = 0. \quad (4.72)$$

一つ目の式は、捩率が 0 であることを表している。二つ目の式からは曲率テンソル (4.66) が得られる。

4.8 S^2 上の調和関数

この章の残りの部分では、ここまで得られた一般的な結果を用いて具体的な多様体の上での調和関数を構成し、後で用いる公式を与える。まずは S^2 の場合についてみてみよう。

S^2 上の調和関数は、 S^2 の $SO(3)$ 回転に対する角運動量 j と、場のスピン s によって分類される。スピンはスピン演算子 $S = -iT_{12}$ の固有値として定義される。たとえばベクトルは ± 1 のスピンをもつ。ベクトル (v_1, v_2) に対して $v_{\pm} = v_1 \pm iv_2$ を定義しよう。これに対して無限小変換 $\lambda_{12}T_{12}$ を作用させてみる。 $\delta v_i = \lambda_{ij}v_j$ であり、 v_{\pm} に対しては

$$\delta v_{\pm} = \mp i\lambda_{12}v_{\pm} \quad (4.73)$$

であるから、 λ_{\pm} のスピンは ∓ 1 である。(添え字と逆符号になることを注意しておく。) 一方スピノルの場合であるが、ディラックスピノルに対する回転の生成子は $T_{12} = (1/2)\gamma_{12} = (i/2)\gamma_3$ であるから、上成分のスピンは $+1/2$ 、下成分のスピンが $-1/2$ となる。

一般論より、表現 j に属するスピン s 調和関数は次のように表わされる。

$$Y = P_{s,m}\rho(g^{-1})_{m,m'}\xi_{m'} \quad (4.74)$$

$\xi_{m'}$ は表現 j の表現空間に属する定数ベクトルである。 P は表現 j から $-iT_{12} = s$ の成分を抜き出す射影行列である。通常のスカラー球面調和関数 $Y_{j,m}$ は $s = 0$ の場合に右辺の係数 $\xi_{m'}$ を除いた部分である。

$$Y_{j,m} = P_{s=0,m'} \rho(g^{-1})_{m',m} \quad (4.75)$$

スピン s の調和関数は、表現 j が $-iT_{12} = s$ 成分を含む場合にだけ存在する。これは次の条件が成り立つ場合である。

$$|s| \leq j. \quad (4.76)$$

(4.74) のように与えられた場の共変微分は

$$D_i Y = P_{s,m} (-K_i)_{m,m'} \rho(g^{-1})_{m',m''} \xi_{m''} \quad (4.77)$$

によって計算できる。ただし K_i は、球面の半径 r の逆数を含めて次のように定義される。

$$K_i = \frac{1}{r} T_{i3} \quad (i = 1, 2) \quad (4.78)$$

と定義する。 K_i を複素に組んで $K_{\pm} = K_1 \pm iK_2$ を定義すると、スピンとの交換関係は

$$[S, K_{\pm}] = \pm K_{\pm} \quad (4.79)$$

となる。すなわち K_{\pm} はスピンを ± 1 だけ変化させ、スピン固有状態のもとで行列表示した際に 0 でない成分は

$$(K_+)_{s+1,s}, \quad (K_-)_{s-1,s} \quad (4.80)$$

である。

角運動量 j の表現空間に作用したときに次の公式が成り立つ。

$$K_+ K_- = -\frac{1}{r^2} (j+S)(j-S+1), \quad K_- K_+ = -\frac{1}{r^2} (j-S)(j+S+1) \quad (4.81)$$

これを用いると、ラプラシアン固有値は次のように得られる。

$$\Delta = K_i K_i = \frac{1}{2} (K_+ K_- + K_- K_+) = -\frac{1}{r^2} (j(j+1) - s^2) \quad (4.82)$$

4.9 モノポール調和関数

S^2 上に定数磁場が存在し、荷電粒子がその影響を受けている場合を考えよう。磁束の大きさは量子化されており、ゲージポテンシャルは次のように与えられる。

$$A = mA_{\text{mon}}, \quad A_{\text{mon}} = \frac{1 - \cos \theta}{2} d\phi \quad (4.83)$$

ただし m は S^2 を貫くフラックスの本数を与える整数である。 A_{mon} は単位磁荷のモノポールを与えるゲージポテンシャルである。これはゲージの取り方に依存し、上で与えた具体形は一つの例である。対応する場の強さ $F_{\text{mon}} = dA_{\text{mon}}$ は S^2 上で一様であり、

$$\oint F_{\text{mon}} = 2\pi \quad (4.84)$$

が成り立つ。一方曲率テンソル $R_{12} = d\omega_{12}$ は

$$\oint R_{12} = 4\pi \quad (4.85)$$

を満足する。従って、適当なゲージを取れば

$$A_{\text{mon}} = \frac{1}{2}\omega_{12}. \quad (4.86)$$

である。

このような背景上にチャージ $q \in \mathbb{Z}$ 、スピン s の場 Φ が存在した場合、背景のゲージ場とスピン接続の影響は次の共変微分を通して現れる。

$$D = d + is\omega_{12} - iqA = d + i\left(s - \frac{mq}{2}\right)\omega. \quad (4.87)$$

従って、背景のモノポール磁場の効果はスピン s を次のように定義される有効スピン s_{eff} に置き換えることで取り込むことができる。

$$s_{\text{eff}} = s - \frac{qm}{2}. \quad (4.88)$$

すなわち、チャージを持つ球面上の場はスピン s_{eff} の場として調和関数展開される。スピン s_{eff} の場の調和関数 $Y_{j,m}$ は量子数 j と j_3 によってラベルされ、それらは次の値を取る。

$$\begin{aligned} j &= |s_{\text{eff}}|, |s_{\text{eff}}| + 1, |s_{\text{eff}}| + 2, \dots, \\ j_3 &= -j, -j + 1, -j + 2, \dots, j. \end{aligned} \quad (4.89)$$

4.10 S^3 上の調和関数

$SO(4)$ の元は (g_l, g_r) のように二つの $SU(2)$ の元の組として表わすことができ、 H はその対角部分群である。つまり、

$$S^3 = SO(4)/SO(3) = (SU(2)_L \times SU(2)_R)/SU(2)_D \quad (4.90)$$

である。(ここでは大域的な構造は気にしない。)

調和関数は $SO(4)$ の表現で分類することができる。 $SO(4)$ の表現は $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の二つのスピン j_L と j_R によって指定される。前節までに説明した一般論より、スピンは

$SU(2)_D$ の表現であり、 (j_L, j_R) を $SU(2)_D$ の既約表現したときに s が現れるときの量子数 (j_L, j_R) を持つスピン s の調和関数が存在する。すなわち、次の条件が成り立つ。

$$|j_L - j_R| \leq s \leq j_L + j_R. \quad (4.91)$$

表現 (j_L, j_R) に属する調和関数は次のように表わすことができる。

$$Y_{s_z}^{(j_L, j_R)} = P_{s_z, (m_L, m_R)} \rho(g^{-1})_{(m_L, m_R), (m'_L, m'_R)} \xi_{(m'_L, m'_R)} \quad (4.92)$$

$Y_{s_z}^{(j_L, j_R)}$ の添え字 s_z はスピン添え字であり、 $-s$ から s までの値を取る。 (m_L, m_R) は (j_L, j_R) 表現の成分を指定する添え字で、 m_L が $-j_L$ から j_L まで、 m_R が $-j_R$ から j_R までの値を取る。 (m'_L, m'_R) も同様である。 $\xi_{(m'_L, m'_R)}$ は (j_L, j_R) 表現のウェイトを指定する任意の定数係数である。 $P_{s_z, (m_L, m_R)}$ は $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の (j_L, j_R) 表現の中から対角部分群 $SU(2)_D$ の s 表現を取り出す射影行列である。以下では式を見やすくするためにできるだけ添え字を省略する。また、表現行列 $\rho(g^{-1})$ を g^{-1} によって表わす。たとえば (4.92) を単純に次のように表わす。

$$Y = P g^{-1} \xi \quad (4.93)$$

生成子 K_i は $SU(2)$ 生成子を用いて次のように表わされる。

$$K_i = \frac{1}{r} T_{i4} = \frac{1}{r} (T_i^L - T_i^R). \quad (4.94)$$

従ってラプラシアン固有値を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned} \Delta &= K_i K_i = \frac{1}{r^2} [2(T_i^L)^2 + 2(T_i^R)^2 - (T_i^D)^2] \\ &= -\frac{1}{r^2} [2j_L(j_L + 1) + 2j_R(j_R + 1) - s(s + 1)]. \end{aligned} \quad (4.95)$$

特にスカラーの場合には $(j_L, j_R) = (j, j)$, $s = 0$ であり、次のよく知られた式に帰着する。

$$\Delta = -\frac{4}{r^2} j(j + 1) = -\frac{1}{r^2} l(l + 2) \quad (4.96)$$

ただし、スカラー場の角運動量を表す整数として $l = 2j_L = 2j_R \in \mathbb{Z}$ を定義した。

S^3 上のベクトル調和関数を (ベクトルであることを強調するために太字を用いて) Y とする。調和関数に対する一般公式は他のスピンの場合と同様に

$$Y_i = (P g^{-1} \xi)_i \quad (4.97)$$

である。不等式 (4.91) より、

$$(j - 1, j), \quad (j, j), \quad (j + 1, j) \quad (4.98)$$

の 3 つの量子数を持つ部分に分けることができる。一般に、3 次元のベクトル場は回転を表す部分と発散を表す部分に分けることができるが、(4.98) のうち $(j \pm 1, j)$ が回転部分を、 (j, j) が発散部分を表す。このことを確かめておこう。

まず、 $(j \pm 1, j)$ のモードが発散を持たないことは、このような量子数を持つスカラー場の調和関数が存在しないことから明らかである。 (j, j) のモードは $j \neq 0$ についてのみ存在するが、そのようなベクトル調和関数は、同じ量子数を持つスカラー調和関数 $Y_{(j,j)}$ を用いて $Y_{(j,j)} = \nabla Y_{(j,j)}$ と与えることができる。

ベクトル調和関数 Y の回転を計算してみよう。

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{Y})_i &= \epsilon_{ijk} \nabla_j A_k \\ &= -\epsilon_{ijk} (PK_j g^{-1} \xi)_k \end{aligned} \quad (4.99)$$

であるが、(1.15) にあるように、 ϵ_{ijk} がスピン 1 表現の $SU(2)$ 生成子と見なせることを用いると、

$$\begin{aligned} (4.99) &= (T_j)_{ik} (PK_j g^{-1} \xi)_k = (P(T_j^D) K_j g^{-1} \xi)_i \\ &= \frac{1}{r} (P(T_j^L + T_j^R) (T_j^L - T_j^R) g^{-1} \xi)_i \\ &= \frac{1}{r} (P[(T_j^L)^2 - (T_j^R)^2] g^{-1} \xi)_i \\ &= -\frac{1}{r} [j_L(j_L + 1) - j_R(j_R + 1)] Y_i \end{aligned} \quad (4.100)$$

のように式変形することができる。従って、回転演算子の固有値が次のように得られる。

$$\text{rot} = -\frac{1}{r} [j_L(j_L + 1) - j_R(j_R + 1)]. \quad (4.101)$$

(4.98) のそれぞれに対する固有値は以下の通り。

$$\text{rot } \mathbf{Y}_{(j+1,j)} = -\frac{2(j+1)}{r} \mathbf{Y}_{(j+1,j)}, \quad \text{rot } \mathbf{Y}_{(j,j)} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{Y}_{(j-1,j)} = \frac{2j}{r} \mathbf{Y}_{(j-1,j)}. \quad (4.102)$$

$\mathbf{Y}_{(j,j)}$ の回転が 0 になるのは $\mathbf{Y}_{(j,j)}$ がスカラー調和関数の勾配として表されることから明らかである。

最後に、スピノル調和関数について見ておこう。 $Y = P g^{-1} \xi$ をスピノル調和関数とすれば、それにディラック演算子を作用させたものは次のように計算できる。

$$DY = -\gamma_i P K_i g^{-1} \xi = 2i T_i P K_i g^{-1} \xi = 2i P T_i^D K_i g^{-1} \xi = -\frac{2i}{r} [j_L(j_L + 1) - j_R(j_R + 1)] Y \quad (4.103)$$

ただし途中で (1.15) にあるように 3 次元のディラック行列がスピン 1/2 の表現行列と見なすことができることを用いた。許される表現 $(j + 1/2, j)$ と $(j - 1/2, j)$ に対する固有値は以下のようなになる。

$$DY_{(j+\frac{1}{2},j)} = -\frac{2i(j+\frac{3}{4})}{r} Y_{(j+\frac{1}{2},j)}, \quad DY_{(j-\frac{1}{2},j)} = \frac{2i(j+\frac{1}{4})}{r} Y_{(j-\frac{1}{2},j)}. \quad (4.104)$$

4.11 左不変枠

ここまでの例では具体的な座標を設定せずに計算を行ってきたが、 S^3 の場合には計算に便利な特別な座標系が存在する。

S^3 のアイソメトリー G は

$$SO(4) \sim Spin(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R \quad (4.105)$$

である。つまり、 G の元を二つの $SU(2)$ の元を用いて与えることができる。

$$g = (g_L, g_R), \quad g_L \in SU(2)_L, \quad g_R \in SU(2)_R. \quad (4.106)$$

対応する生成子を次のように定義する。

$$T_a^L = (T_a, 0), \quad T_a^R = (0, T_a). \quad (4.107)$$

スピン群 H は二つの $SU(2)$ の対角部分群であるから、その元は (h, h) と与えられる。従って、 G/H を定義する際の同一視は

$$(g_L, g_R) \sim (g_L h, g_R h) \quad (4.108)$$

である。このような H の作用のもとで

$$\hat{g} = g_R g_L^{-1} \quad (4.109)$$

は不変に保たれる。これは (4.108) をゲージ変換と見なし、ゲージ固定条件

$$g_L = 1 \quad (4.110)$$

によって座標系を定めたときの g_R である。

$$(g_L, g_R) \sim (1, g_R g_L^{-1}) \equiv (1, \hat{g}) \quad (4.111)$$

(4.108) の関係によって同一視されない二つの (g_L, g_R) の対は異なる \hat{g} を与えるから、 G/H を \hat{g} の集合と同一視することができ、 \hat{g} を S^3 上の座標として用いることができる。

アイソメトリー $(f_L, f_R) \in G$ は座標 (g_L, g_R) に次のように作用する。

$$(g_L, g_R) \rightarrow (f_L^{-1} g_L, f_R^{-1} g_R) \quad (4.112)$$

この変換のもとで \hat{g} は次のように変換される。

$$\hat{g} \rightarrow f_R^{-1} \hat{g} f_L \quad (4.113)$$

f_L と f_R はそれぞれ \hat{g} に対する右作用と左作用を与える。⁶座標を定義する条件 (4.110) は \hat{g} に対する左作用のもとで不変であるので (4.110) によって定義される座標を左不変枠という。

⁶添え字の L/R と作用の左右が逆になっていることに注意すること。(4.110) の代わりに $g_R = 1$ を用い、 $\hat{g} = g_L g_R^{-1}$ と定義すれば $SU(2)_L$ と $SU(2)_R$ はそれぞれ左作用と右作用になる。

Maurer-Cartan 1-形式と呼ばれる次の 1-形式を定義する。

$$\hat{\mu} = \hat{g}^{-1}d\hat{g} = \hat{\mu}^a T_a, \quad (4.114)$$

変換 (4.113) のもとでこの 1-形式は次のように変換される。

$$\hat{\mu} \rightarrow f_L^{-1}\hat{\mu}f_L, \quad \hat{\mu}^a \rightarrow \hat{\mu}^b (f_L)_b^a \quad (4.115)$$

つまり $\hat{\mu}$ は左不変 1-形式である。 $G = SO(4)$ に対する Maurer-Cartan 形式は次のように与えられる。

$$\mu = g^{-1}dg = (0, \hat{g}^{-1}d\hat{g}) = (0, \hat{\mu}) \quad (4.116)$$

\mathcal{H} および \mathcal{K} に属する生成子を次のように定義する。

$$T_a^D = T_a^L + T_a^R, \quad K_a = \frac{1}{r}(T_a^L - T_a^R). \quad (4.117)$$

これらを用いると、

$$\mu = \hat{\mu}^a T_a^R = -\frac{r}{2}\hat{\mu}^a K_a + \frac{1}{2}\hat{\mu}^a T_a^D \quad (4.118)$$

これを一般的な公式 (4.70) と比較すると、多脚場とスピン接続が次のように決定される。

$$e^a = -\frac{r}{2}\hat{\mu}^a, \quad \omega^a = \frac{1}{2}\hat{\mu}^a. \quad (4.119)$$

よく知られている事実として、群多様体上のスカラー関数はその表現行列の成分によって展開することができる。 $S^3 = SU(2)$ の場合には

$$\phi(\hat{g}) = \sum_R \sum_{A,B=1}^{\dim R} c_{AB}^R \rho^R(\hat{g})_{AB} \quad (4.120)$$

となる。ここでは特に次のようなものについて考えよう。

$$f(\hat{g}) = u^\dagger \rho(\hat{g})v \quad (4.121)$$

ρ は $SU(2)$ の (既約で無くてもよい) 表現行列で、 u^\dagger と v は表現空間 V_R^* および V_L に属するベクトルである。

$$u^\dagger \in V_R^*, \quad v \in V_L. \quad (4.122)$$

(4.113) と見比べると、 V_L と V_R^* にはそれぞれ $SU(2)_L$ と $SU(2)_R$ が作用することがわかる。それぞれのベクトル空間に対する $SU(2)$ の作用を表わす生成子を $T_a^{(V_L)}$ 、 $T_a^{(V_R^*)}$ のように表わすことにしよう。以下では表現 $\rho(\hat{g})$ を単に \hat{g} と表すことにする。関数 (4.121) に対して、微分演算子

$$d = dx^\mu \partial_\mu = e^a \partial_a \quad (4.123)$$

を作用させると次の式を得る。

$$e^a \partial_a (u^\dagger \hat{g} v) = (u^\dagger d\hat{g} v) = (u^\dagger \hat{g} \hat{\mu} v) = \hat{\mu}^a (u^\dagger \hat{g} T_a v) = -\frac{2}{r} e^a (u^\dagger \hat{g} T_a v) \quad (4.124)$$

すなわち

$$\partial_a(u^\dagger \hat{g}v) = -\frac{2}{r}(u^\dagger \hat{g}T_a v) \quad (4.125)$$

が成り立つ。つまり、微分演算子 ∂_a をスカラー関数に作用させることはベクトル空間 V_L に対して $-(2/r)T_a$ を作用させることと同じである。

$$\partial_a = -\frac{2}{r}T_a^{(V_L)} \quad (4.126)$$

次に、スピンをもつ場について考えてみよう。あるスピンをもつ次の場を考えよう。

$$\psi^\alpha(\hat{g}) = u^\dagger \hat{g}v s^\alpha. \quad (4.127)$$

α はスピン添え字であり、 s はスピン空間 V_S のベクトルである。これに対して共変微分を作用させてみよう。軌道部分 $u^\dagger \hat{g}v$ に対する作用は (4.125) と同じであり、スピン部分には (4.119) に与えたスピン接続 $\omega^\alpha = -(1/r)e^\alpha$ が作用することから、

$$D_a \psi^\alpha = -\frac{2}{r}(u^\dagger \hat{g}T_a v) s^\alpha - \frac{1}{r}(u^\dagger \hat{g}T_a v) \rho^s (T_a)^\alpha{}_\beta s^\beta. \quad (4.128)$$

ただし $\rho^s(\hat{g})$ はスピン表現行列である。つまり、共変微分の作用は

$$D_a = -\frac{2}{r}T_a^{(V_L)} - \frac{1}{r}T_a^{(V_S)} \quad (4.129)$$

と表わすことができる。

(4.115) より $SU(2)_L$ はスピン空間にも作用する。従って、アイソメトリの $V_R \otimes V_L \otimes V_S$ への作用は次のように与えられる。

$$T_a^L = T_a^{(V_L)} + T_a^{(V_S)}, \quad T_a^R = T_a^{(V_R)}. \quad (4.130)$$

以上の結果を用いると S^3 上で様々な演算子の固有値を計算することができる。ここでは例としてスピン 1/2 の場に作用するディラック演算子 $\sigma_a D_a$ の固有値を求めてみよう。パウリ行列がスピン空間に作用する $SU(2)$ 生成子と見なすことができ、関係式

$$\sigma_a = -2iT_a^{(V_S)} \quad (4.131)$$

が成り立つことを用いれば

$$\sigma_a D_a = \frac{2i}{r}T_a^{(V_S)}(2T_a^{(V_L)} + T_a^{(V_S)}) = \frac{2i}{r}[(T_a^L)^2 - (T_a^{(V_L)})^2] \quad (4.132)$$

を得る。ここで、 V_L と V_R が同じ表現に属する表現空間であり、

$$(T_a^{(V_L)})^2 = (T_a^{(V_R)})^2 = (T_a^R)^2 \quad (4.133)$$

を用いれば

$$\sigma_a D_a = \frac{2i}{r}[(T_a^L)^2 - (T_a^R)^2] = -\frac{2i}{r}[j_L(j_L + 1) - j_R(j_R + 1)] \quad (4.134)$$

となり、(4.103) と同じ結果を得る。

第5章 超共形指数

この章では、 $S^2 \times S^1$ 上の場の理論の経路積分を局所化を用いて評価することにより、3次元ゲージ理論の超共形指数

$$I(x, z_i, y_a) = \text{tr} \left[(-1)^F q^{D-R-J} x^{D+J} \prod z_i^{F_i} y^{m_a} \right] \quad (5.1)$$

を与える一般式を得る。そのような導出は超対称性が $\mathcal{N} \geq 3$ であり場のワイルウェイトが量子補正を受けない場合については [7] で与えられた。カイラル多重項が一般のワイルウェイトを持つ $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論の場合への拡張は [8] でなされた。以下の導出はほぼ [8] に基づいている。

5.1 $S^2 \times \mathbb{R}$ 上の超共形対称性

次の計量で与えられる $S^2 \times \mathbb{R}$ 上で超対称理論を構成することを考えよう。

$$ds^2 = (dx^3)^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (5.2)$$

§3.1 で見たように、この空間は共形平坦である。(3.3) に与えたように、 \mathbb{R}^3 上の動径座標 ρ と x^3 座標の関係は

$$\frac{\rho}{r} = \exp \frac{x^3}{r}. \quad (5.3)$$

である。従って \mathbb{R}^3 上の dilatation 演算子 D と x^3 方向の並進演算子 H の間の関係は

$$D = -\rho \frac{d}{d\rho} = -r \frac{d}{dx^3} = rH \quad (5.4)$$

によって与えられる。

平坦な時空での超対称変換パラメータは、 ρ 依存性のみ注目すれば大雑把に $\epsilon \sim \xi + \rho\zeta$ と与えられる。これをワイル変換すると $S^2 \times \mathbb{R}$ 上の変換パラメータは

$$\epsilon \sim e^{-x^3/(2r)} \xi + e^{+x^3/(2r)} \zeta \quad (5.5)$$

となる。この解をより具体的に与えるには、調和関数を用いて $S^2 \times \mathbb{R}^1$ 上のキリング方程式

$$D_m \epsilon = \gamma_m \bar{\kappa}, \quad D_m \bar{\epsilon} = \gamma_m \kappa \quad (5.6)$$

を解けばよい。

ϵ と $\bar{\epsilon}$ はどちらも同様に扱うことができるから、ここでは ϵ について考える。まず $m = 1, 2$ に対する式、すなわち S^2 上のキリング方程式の解を求めよう。一般公式 (3.85) より S^2 上のキリングスピノルは次の関係式を満足しなければならない。

$$D_i D_i \epsilon = -\frac{1}{2r^2} \epsilon. \quad (5.7)$$

キリングスピノルを角運動量の固有関数（球面調和関数）で展開したとしてその主量子数を j とする。 S^2 上のラプラシアン固有値 (4.82) を用いれば (5.7) は

$$-\frac{1}{r^2} \left[j(j+1) - \frac{1}{4} \right] = -\frac{1}{2r^2} \quad (5.8)$$

を意味する。これより直ちに $j = 1/2$ が求まる。

2 次元の既約スピン表現は全て一成分であるから、2 次元ディラックスピノル ϵ の上成分 ϵ_+ と下成分 ϵ_- は独立に与えることができる。§4.8 の始めのほうで述べたように、 ϵ_+ はスピン $+1/2$ を、 ϵ_- はスピン $-1/2$ を持つ。一般公式 (4.4) に従えば、次のように与えることができる。

$$\epsilon_{+1/2} = \rho_{+1/2,s}^{(1/2)}(g^{-1})\xi_s^{(+)}, \quad \epsilon_{-1/2} = \rho_{-1/2,s}^{(1/2)}(g^{-1})\xi_s^{(-)} \quad (5.9)$$

ただし $\rho^{(1/2)}$ は $SU(2)$ の基本表現行列であり、 $\xi_s^{(\pm)}$ は独立な二成分スピノルである。 $\xi_s^{(\pm)}$ は S^2 上の座標には依存しないが x^3 座標には依存しても良い。これらを三次元のディラックスピノルに組むと、

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{+1/2} \\ \epsilon_{-1/2} \end{pmatrix} = \frac{1+\gamma_3}{2} \rho(g^{-1})\xi^{(+)} + \frac{1-\gamma_3}{2} \rho(g^{-1})\xi^{(-)} = \rho(g^{-1})\xi + \gamma_3 \rho(g^{-1})\xi' \quad (5.10)$$

となる。ただし

$$\xi = \frac{1}{2}(\xi^{(+)} + \xi^{(-)}), \quad \xi' = \frac{1}{2}(\xi^{(+)} - \xi^{(-)}), \quad (5.11)$$

を定義した。このスピノルの S^2 方向の共変微分を (4.6) によって計算してみると、

$$\begin{aligned} D_i \epsilon &= (-K_i) \rho(g^{-1})\xi + \gamma_3 (-K_i) \rho(g^{-1})\xi' \\ &= \gamma_i \left(-\frac{1}{2r} \gamma_3 \rho(g^{-1})\xi + \frac{1}{2r} \rho(g^{-1})\xi' \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

となり、

$$\bar{\kappa} = -\frac{1}{2r} \gamma_3 \rho(g^{-1})\xi + \frac{1}{2r} \rho(g^{-1})\xi' \quad (5.13)$$

ととれば確かに S^2 上のキリング方程式を満足していることがわかる。

$S^2 \times \mathbb{R}$ 上のキリング方程式を満足するためには (5.5) において $m = 3$ とした式 $D_3 \epsilon = \gamma_3 \bar{\kappa}$ も成り立たなければならない。これは

$$\rho(g^{-1})\partial_3 \xi + \gamma_3 \rho(g^{-1})\partial_3 \xi' = -\frac{1}{2r} \rho(g^{-1})\xi + \frac{1}{2r} \gamma_3 \rho(g^{-1})\xi' \quad (5.14)$$

を意味し、 ξ と ξ' の x^3 依存性が次のように決まる。

$$\xi = \exp\left(-\frac{x^3}{2r}\right)\xi_0, \quad \xi' = \exp\left(\frac{x^3}{2r}\right)\xi'_0. \quad (5.15)$$

従って、 $S^2 \times \mathbb{R}$ 上のキリングスピノルとして、次の二つの解を得る。

$$\begin{aligned} \epsilon(g, x^3) &= e^{-\frac{x^3}{2r}}\rho(g^{-1})\xi_0, & \bar{\kappa} &= -\frac{1}{2r}\gamma_3\epsilon, \\ \epsilon(g, x^3) &= e^{+\frac{x^3}{2r}}\gamma_3\rho(g^{-1})\xi'_0, & \bar{\kappa} &= \frac{1}{2r}\gamma_3\epsilon. \end{aligned} \quad (5.16)$$

これら二つの解が含む定数スピノル ξ_0 と ξ'_0 はそれぞれ二つの独立な成分を含むから、 ϵ に対して全部で 4 つのキリングスピノルが存在する。それらの任意の線形結合がキリング方程式の解となる。 $\bar{\epsilon}$ に対しても同様に 4 つのキリングスピノルが存在する。

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}(g, x^3) &= e^{-\frac{x^3}{2r}}\rho(g^{-1})\bar{\xi}_0, & \kappa &= -\frac{1}{2r}\gamma_3\bar{\epsilon}, \\ \bar{\epsilon}(g, x^3) &= e^{+\frac{x^3}{2r}}\gamma_3\rho(g^{-1})\bar{\xi}'_0, & \kappa &= \frac{1}{2r}\gamma_3\bar{\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

あわせて 8 つのキリングスピノルが存在し、 $S^2 \times \mathbb{R}$ 上の $\mathcal{N} = 2$ 超共形代数に含まれる 8 つの超対称変換を与える。背景が \mathbb{R}^3 の場合にはそれらのうちの 4 つを Q で、あとの 4 つを S で表すことがしばしばあるが、ここではそのような区別は行わない。

5.2 リジッドな超対称性

ベクトル多重項に対して期待値を与えることにより、 $S^2 \times \mathbb{R}$ 上のリジッドな超対称性を定義しよう。 $S^2 \times \mathbb{R}$ が持つアイソメトリーを破らないことを仮定すれば、 D と σ は定数でなければならない。また、ゲージ場の強さ F_{mn} の中で F_{12} も定数期待値を持つことができる。(ディラックの量子化条件はその値が量子化されることを要請するが、ここでの議論には関係ない。) そうすると、 λ の超対称変換は

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= -\gamma_3\epsilon F_{12} \pm \frac{\sigma}{r}\gamma_3\epsilon + \mathcal{D}\epsilon, & \bar{\kappa} &= \mp\frac{1}{2r}\gamma_3\epsilon, \\ \delta\bar{\lambda} &= \gamma_3\bar{\epsilon}F_{12} \pm \frac{\sigma}{r}\gamma_3\bar{\epsilon} + \mathcal{D}\bar{\epsilon}, & \kappa &= \mp\frac{1}{2r}\gamma_3\bar{\epsilon} \end{aligned} \quad (5.18)$$

ただし、それぞれの行の二つの複号は同順であり、一行目と二行目の間では複号は独立である。右辺のボゾン場は全て上で述べた定数場であるとする。次のように取ることで半分の超対称性を残すことができる。

$$F_{12} = \frac{\sigma}{r}, \quad \mathcal{D} = 0. \quad (5.19)$$

(F_{12} と σ の関係式には逆の符号を選ぶこともできるが、本質的な違いはないのでここではこちらを選ぶ。) 残る超対称性は次のように与えられる 4 つである。

$$\begin{aligned}\epsilon(g, x^3) &= e^{-\frac{x^3}{2r}} \rho(g^{-1}) \xi, & \bar{\kappa} &= -\frac{1}{2r} \gamma_3 \epsilon, \\ \bar{\epsilon}(g, x^3) &= e^{+\frac{x^3}{2r}} \gamma_3 \rho(g^{-1}) \bar{\xi}, & \kappa &= \frac{1}{2r} \gamma_3 \bar{\epsilon}.\end{aligned}\quad (5.20)$$

ξ と $\bar{\xi}$ は二成分のスピンルであるから、あわせて 4 つの自由度がある。これらの超対称性の交換関係を計算してみよう。(3.99) より、

$$\begin{aligned}[\delta(\epsilon), \delta(\bar{\epsilon})] &= 2\delta_c(\epsilon\gamma^m\bar{\epsilon}) + 2i\delta_{\text{gauge}}(\epsilon\bar{\epsilon}\sigma) + 2(\epsilon\kappa + \bar{\kappa}\epsilon)R \\ &= 2\delta_c(\xi g\gamma^m\gamma^3 g^{-1}\bar{\xi}) + 2i\delta_{\text{gauge}}(\xi g\gamma_3 g^{-1}\bar{\xi}\sigma) + \frac{2}{r}(\xi\bar{\xi})R\end{aligned}\quad (5.21)$$

を得る。さらに ξ と $\bar{\xi}$ の二次形式の計算を行おう。まず、第 1 項 $2\delta_c(\xi g\gamma^m\gamma^3 g^{-1}\bar{\xi})$ について考えよう。 $m = 3$ の場合には

$$2(\xi\bar{\xi})\delta_c(\partial_3) = -2(\xi\bar{\xi})H = -\frac{2}{r}(\xi\bar{\xi})D\quad (5.22)$$

を得る。 $m = 1, 2$ については次のように変形できる。

$$\xi g\gamma^i\gamma^3 g^{-1}\bar{\xi} = (g^{-1})^{im}\xi\gamma^{mn}\bar{\xi}g^{n3} = (g^{-1})^{im}\xi\gamma^{mn}\bar{\xi}\frac{y^n}{r}\quad (5.23)$$

まず一つ目の等号ではディラック行列が $SO(4)$ 不変テンソルであり、

$$g\gamma^m g^{-1} = \gamma^n g^{nm} = (g^{-1})^{mn}\gamma^n\quad (5.24)$$

が成り立つことを用いた。 g^{mn} は $SO(3)$ のベクトル表現に対する g の表現行列であり、 $(g^{-1})^{mn}$ は g^{-1} に対する表現行列である。これらはもちろん直交行列であり、 $g^{mn} = (g^{-1})^{nm}$ が成り立つ。(5.23) の二つ目の等号では、 S^2 を含む \mathbb{R}^3 上の直交座標 y^m を導入した。 S^2 の北極方向が y^3 軸になるように取る。 ${}^1g^{n3}$ は北極方向を向いたベクトルを g によって回転して得られるベクトルの成分であるが、局所直交系を定義する際に g の持つ意味より、そのベクトルは球面上の点の位置ベクトルの向きを持つ単位ベクトル y^n/r に他ならない。このことから最後の表式が得られる。最後の表式中の $(g^{-1})^{im}$ は、球面上の各点のベクトルを北極へ持っていき、その座標を用いて成分を定めることを意味している。従って、もしベクトル v の成分を座標系 y^m を用いて表すならこの因子は必要ない。そのようなベクトル v の成分を $v_{(y)}^m$ とすれば

$$v_{(y)}^m = -\frac{1}{r}y_n(\xi\gamma^{nm}\bar{\xi})\quad (5.25)$$

である。従って

$$\delta_c(v_{(y)}^m\partial_{y^m}) = -\frac{1}{r}(\xi\gamma^{nm}\bar{\xi})y_n\frac{\partial}{\partial y^m} = -\frac{1}{2r}(\xi\gamma^{mn}\bar{\xi})T_{mn} = \frac{1}{r}(\xi\gamma^m\bar{\xi})J_m\quad (5.26)$$

¹ここでは $S^2 = SO(3)/SO(2)$ において $SO(3)$ の単位元を含む同値類に対応する S^2 上の点を北極と呼んでいる。

のように書き換えることができる。このベクトルによる共形変換（リジッドなので実際はアイソメトリー）は

$$2\delta_c(\xi g \gamma^m \gamma^3 g^{-1} \bar{\xi}) = -\frac{2}{r}(\xi \bar{\xi})D + \frac{2}{r}(\xi \gamma^m \bar{\xi})J_m \quad (5.27)$$

である。

以上の書き換えを行えば、(5.21) を次のようにあらわすことができる。

$$[\delta(\epsilon), \delta(\bar{\epsilon})] = -\frac{2}{r}(\xi \bar{\xi})(D - R) + \frac{2}{r}(\xi \gamma^m \bar{\xi})J_m + (\text{gauge tr.}) \quad (5.28)$$

Q_a と \bar{Q}_a を次のように定義しよう。

$$\delta(\epsilon) = \xi^a Q_a, \quad \delta(\bar{\epsilon}) = \bar{\xi}^a \bar{Q}_a. \quad (5.29)$$

すると、これらの反交換関係は、次のように与えられる。

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = -\frac{2}{r}\epsilon_{ab}(D - R) + \frac{2}{r}(\gamma^m)_{ab}J_m + (\text{gauge tr.}) \quad (5.30)$$

従って、リジッドな超対称性によって生成される代数は $osp(2|1)$ である。

5.3 作用

(5.20) に与えたリジッド超対称性のもとで不変な作用を与えよう。(3.126) のパラメータは次のように与えられる。

$$K_1 = K_2 = K_4 = \bar{K}_1 = \bar{K}_2 = \bar{K}_4 = 0, \quad K_3 = -\frac{1}{r}, \quad \bar{K}_3 = \frac{1}{r}, \quad K = \bar{K} = \frac{1}{r^2}, \quad R = \frac{2}{r^2} \quad (5.31)$$

これらは (3.128) を満足するので、 \mathcal{L} や $\bar{\mathcal{L}}$ を測度 $f(x) = 1$ を用いて積分した結果は表面項を除き一致する。具体的には、ベクトル多重項の運動項は次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{\text{vector}}^{(3d)} &= \frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + \frac{i}{2}\gamma^{mnp}F_{mn}D_p\sigma + \frac{1}{2}D_m\sigma D^m\sigma - \frac{1}{2}\mathcal{D}\mathcal{D} + \frac{1}{2r^2}\sigma\sigma \\ &\quad - (\bar{\lambda}\gamma^m D_m\lambda) - (\bar{\lambda}[\sigma, \lambda]) - \frac{1}{2r}(\bar{\lambda}\gamma^3\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{r}\left[\frac{i}{2}\gamma^{3pq}\sigma F_{pq} + \sigma D^3\sigma\right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

ワイルウェイトが Δ であるカイラル多重項に対しては変形項は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{\text{chiral}}^{(3d)} &= -\bar{\phi}D_m D^m\phi + \bar{\phi}\sigma\phi + \bar{\phi}\mathcal{D}\phi - \frac{1}{r}(2\Delta - 1)\bar{\phi}D_3\phi + \frac{1}{r^2}\Delta(1 - \Delta)\bar{\phi}\phi - \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} \\ &\quad - (\bar{\psi}\gamma^m D_m\psi) - (\bar{\psi}\sigma\psi) - \frac{1}{r}\left(\Delta - \frac{1}{2}\right)(\bar{\psi}\gamma_3\psi) - \sqrt{2}\bar{\phi}(\lambda\psi) - \sqrt{2}(\bar{\psi}\lambda)\phi \end{aligned} \quad (5.33)$$

超対称な Chern-Simons 項は次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \frac{k}{2\pi} \text{tr} \left[\frac{1}{2} \gamma^{mnp} \left(A_m \partial_n A_p - \frac{2i}{3} A_m A_n A_p \right) + (\bar{\lambda} \lambda) - \mathcal{D} \sigma \right]. \quad (5.34)$$

トポロジカル $U(1)$ と背景ゲージ場との結合 AdA' を超対称化したチャーン・サイモン項に (5.19) の期待値を持たせれば次の FI 項を得る。

$$\mathcal{L}_{\text{FI}} = \frac{\xi}{2\pi} \left(\frac{i}{r} A_3 - \mathcal{D} \right). \quad (5.35)$$

ただしディラックの量子化条件のために次の条件が満たされなければならない。

$$2r\xi \in \mathbb{Z}. \quad (5.36)$$

5.4 局所化による超共形指数の計算

以下で局所化を用いた計算を行う際には、リジッドな超対称性の中から一つの超対称性を選ぶ必要がある。ここでは \bar{Q}_2 を選ぶことにする。対応するパラメータは

$$\bar{\epsilon} = e^{\frac{t}{2r}} \gamma_3 \rho(g^{-1}) \begin{pmatrix} -\xi^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa = \frac{1}{2r} \gamma_3 \bar{\epsilon} \quad (5.37)$$

である。このスピノルの量子数は

$$D(\bar{\epsilon}) = -\frac{1}{2}, \quad R(\bar{\epsilon}) = -1, \quad J(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2}. \quad (5.38)$$

であり、指数を定義する際には、この超対称性を尊重するように定義することにする。こうすると自動的に、全く逆の量子数を持つ次のスピノルも保存される。

$$\epsilon = \eta \varepsilon, \quad \varepsilon = e^{-\frac{t}{2r}} \rho(g^{-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\kappa} = -\frac{1}{2r} \gamma_3 \varepsilon \quad (5.39)$$

これは電荷 Q_1 に対応している。これら二つの電荷の反交換関係は、

$$\{Q_1, \bar{Q}_2\} = -\frac{2}{r} (D - J_3 - R + (\text{gauge tr.})) \quad (5.40)$$

以上のことを踏まえて、指数 $I = \text{tr}[(-1)^F \mathcal{O}]$ を定義しよう。演算子 \mathcal{O} は (5.37) と (5.39) に作用しないようなものでなければならない。その一般形は次のように与えられる。

$$I(x, z) = \text{tr} \left[(-1)^F q^{D-R-J_3} x^{R+2J_3} z^F \right] \quad (5.41)$$

ただし、最初に現れる因子は (5.40) を用いて定義した。こうしておくことで得られる指数は q に依存しない。

5.4.1 鞍点

経路積分を行うには Q -exact な変形項を導入することによって弱結合極限を取る必要がある。ベクトル多重項に対する変形項としては (5.32) を用いることができる。そのボゾン場は次のように書くことができる。

$$\overline{\mathcal{L}}_{\text{vector}}^{(3d)} = \frac{1}{2} V_m V_m \quad (5.42)$$

ただし V_m を次のように定義した。

$$V_1 = D_1 \sigma - F_{23}, \quad V_2 = D_2 \sigma - F_{31}, \quad V_3 = D_3 \sigma + \frac{1}{r} \sigma - F_{12}. \quad (5.43)$$

(5.42) は明らかに正定値であり、 $t \rightarrow 0$ の極限では、経路積分は $V_m = 0$ になる点に局所化する。そのような古典解は、適当なゲージ固定の後に次のように与えられる。

$$A^{(0)} = a_3 dx^3 + m A_{\text{mon}}, \quad \sigma^{(0)} = \frac{m}{2r}, \quad \mathcal{D}^{(0)} = 0. \quad (5.44)$$

ただし a_3 は S^1 方向の Wilson line、 m は S^2 方向のモノポールチャージであり、どちらもゲージ群のカルタン部分のリー代数に値をとる。 a_3 は連続量であるのに対して m は量子化されている。 A_{mon} は (4.83) に与えたディラックモノポールである。

チャーンサイモン項 (5.34) と FI 項 (5.35) があれば、対応する古典的作用は次のようになる。

$$S_{\text{CS}} = ik \text{tr}(\beta a_3 \cdot m), \quad S_{\text{FI}} = 2r \xi i \beta a_3. \quad (5.45)$$

ここで用いたゲージ固定条件は以下の通りである。

$$f_{\text{gf}} = D_m^{(0)} A^m = \frac{1}{2} (D_+^{(0)} A_- + D_-^{(0)} A_+) + \partial_3 A_3, \quad A_{ij}^{(0)} = 0 \quad (i \neq j). \quad (5.46)$$

ただし、 $D_m^{(0)}$ はゲージ場として (5.44) を含むような共変微分である。

このゲージ固定項を実現するために必要なゲージ固定項とゴースト項は次のように与えられる。(ゼロモードに対する条件 $A_{ij}^{(0)} = 0$ に対しては以前と同様であるので、ここでは改めて議論しない。)

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = \frac{1}{2} f_{\text{gf}}^2, \quad \mathcal{L}_{\text{gh}} = \bar{c}' D_m^{(0)} D_m c'. \quad (5.47)$$

全ての結果を集めると、(2.101) より指数の一般公式は次のとおりである。

$$I = \sum_m \frac{1}{|W|} \oint \prod_i \frac{d(\beta a_{3,i})}{2\pi} q^{ik \text{tr}(ra_{3,m}) + 2r \xi i \text{tr}(ra_3)} \text{Pexp}' \left(I_{\text{sp}}(a_3, m) - \sum_{\alpha(m) \neq 0} q^{-i\alpha(ra_3)} \right) \quad (5.48)$$

積分メジャーは、それぞれのゲージ不変状態の寄与のウェイトが 1 になるように選んだ。 $|W|$ はワイル群の位数である。ワイル群は m の足し上げの仕方に合わせて定義する必要がある。もし m の足し上げを行う際にワイル群で移りあうものを全て足し上げたなら、 $|W|$ はゲージ群のワイル群全体の位数である。一方、 m の足し上げの際にワイル群で移りあうものは一回だけ足すようにした場合には、 $|W|$ は m によって破れていないゲージ対称性に関するワイル群の位数である。

5.4.2 ベクトル多重項の 1 ループ計算

ベクトル多重項のボゾン場をゼロモード部分とその周りの微小振動部分に分ける。

$$A = A^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{t}}\delta A, \quad \sigma = \sigma^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{t}}\delta\sigma \quad (5.49)$$

を代入し、 $t \rightarrow \infty$ の極限を取り、 δ を省略すれば

$$\begin{aligned} V_{\pm} &= D_{\pm}^{(0)}\sigma + i\alpha(\sigma_0)A_{\pm} \mp iD_3^{(0)}A_{\pm} \pm iD_{\pm}^{(0)}A_3, \\ V_3 &= D_3^{(0)}\sigma + i\alpha(\sigma_0)A_3 + \frac{1}{r}\sigma - \frac{i}{2}D_+^{(0)}A_- + \frac{i}{2}D_-^{(0)}A_+. \end{aligned} \quad (5.50)$$

ただし、 $V_{\pm} = V_1 \pm iV_2$ などを定義した。共変微分は全て背景ゲージ場を用いて定義されている。

これにより、変換パラメータの $j > 0$ モードについてはゲージが固定される。しかし $j = 0$ モードについては固定されない。そのようなモードについてはスカラー場 σ の定数モードが対角的であるという条件によってゲージを固定することにする。

$$\mathcal{V}_M = (V_+, V_-, V_3, f_{\text{gf}}), \quad \mathcal{A}_M = (A_+, A_-, A_3, \sigma) \quad (5.51)$$

を定義すれば、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{bos}} + \mathcal{L}_{\text{gf}} = \frac{1}{2}\mathcal{V}^{\dagger}\mathcal{V} = \frac{1}{2r^2}(D_{\text{bos}}\mathcal{A})^{\dagger}D_{\text{bos}}\mathcal{A} \quad (5.52)$$

と表わすことができる。ただし、最後に $1/r^2$ という因子を挿入したのは、 D_{bos} を無次元の演算子として定義し、以下の式を簡単にするためである。

場を展開する場合には、モノポール磁場との結合によってスピンの

$$s_{\text{eff}} = s + s_0, \quad s_0 = -\frac{\rho(m)}{2} = -\rho(r\sigma_0) \quad (5.53)$$

のようにシフトすることを考慮する必要がある。それぞれの場は次のように展開することができる。

$$\begin{aligned} A_+ &= Y_{s_0-1}a_+ \quad (|s_0 - 1| \leq j), \\ A_- &= Y_{s_0+1}a_- \quad (|s_0 + 1| \leq j), \\ A_3 &= Y_{s_0}a_3 \quad (|s_0| \leq j), \\ \sigma &= Y_{s_0}b \quad (|s_0| \leq j). \end{aligned} \quad (5.54)$$

それぞれのモードが存在するための s_0 と j の関係も与えておいた。まずは $|s_0| + 1 \leq j$ であり、全てのモードが存在するとして話を進めよう。これを用いて V_m と f_{gf} を表わそう。

一般公式 $D_m Y = -K_m Y$ を用いれば、次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}
V_+ &= Y_{s_0-1} \left[-(K_+)_{s_0, s_0-1} b - \frac{is_0}{r} a_+ - iD_3 a_+ - i(K_+)_{s_0, s_0-1} a_3 \right], \\
V_- &= Y_{s_0-1} \left[-(K_-)_{s_0, s_0+1} b - \frac{is_0}{r} a_- + iD_3 a_- + i(K_-)_{s_0, s_0+1} a_3 \right], \\
V_3 &= Y_{s_0} \left[D_3 b - \frac{is_0}{r} a_3 + \frac{1}{r} b + \frac{i}{2} (K_+)_{s_0+1, s_0} a_- - \frac{i}{2} (K_-)_{s_0-1, s_0} a_+ \right], \\
f_{\text{gf}} &= Y_{s_0} \left[-\frac{1}{2} (K_+)_{s_0+1, s_0} a_- - \frac{1}{2} (K_-)_{s_0-1, s_0} a_+ + \partial_3 a_3 \right]
\end{aligned} \tag{5.55}$$

従って、係数の間の関係を与える行列は

$$D_{\text{bos}} \rightarrow \begin{pmatrix} -irD_3 - is_0 & 0 & -i(rK_+)_{s_0, s_0-1} & -(rK_+)_{s_0, s_0-1} \\ 0 & irD_3 - is_0 & i(rK_-)_{s_0, s_0+1} & -(rK_-)_{s_0, s_0+1} \\ -\frac{i}{2}(rK_-)_{s_0-1, s_0} & \frac{i}{2}(rK_+)_{s_0+1, s_0} & -is_0 & rD_3 + 1 \\ -\frac{1}{2}(rK_-)_{s_0-1, s_0} & -\frac{1}{2}(rK_+)_{s_0+1, s_0} & r\partial_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.56}$$

である。ただし、これは $|s_0| \leq j-1$ の場合であって、そうでない場合には 4 つのモードのうち一部が存在しないから、この行列の部分行列のみを考慮する必要がある。まずは $|s_0| \leq j-1$ であり、 4×4 の全ての成分が存在する場合を考えよう。この行列の行列式は

$$\det = -(rD_3 - j)(rD_3 + j + 1)[r^2 \partial_3 D_3 - j(j+1) + s^2] \tag{5.57}$$

となる。 $s_0 = j$ のとき、2 番目のモードが存在しないから、行列の行と列について 1 番目、3 番目、4 番目を考慮すればよい。そのような行列を M_{134} と表わすと、

$$\det M_{134} = i(r^2 \partial_3 D_3 - j)(rD_3 + j + 1) \tag{5.58}$$

である。同様に他の場合についても調べると、 $s_0 = j+1$ のとき

$$\det M_1 = -i(rD_3 + j + 1), \tag{5.59}$$

$s_0 = -j$ のとき

$$\det M_{234} = -i(r^2 \partial_3 D_3 - j)(rD_3 + j + 1), \tag{5.60}$$

$s_0 = -j-1$ のとき

$$\det M_2 = i(rD_3 + j + 1), \tag{5.61}$$

$s_0 = j = 0$ のとき

$$\det M_{34} = -r\partial_3(rD_3 + 1) \tag{5.62}$$

が得られる。これらと、ゴースト項 \mathcal{L}_{gh} から現れるモードを表 5.1 にまとめておく。[A4] と [c4] は量子力学の場合と同じであり (2.96) を与える。

表 5.1: ボゾン場のモード

	factors	range of j	D	R
[A1]	$rD_3 - j$	$0 \leq j = s_0 + 1 + k$	$+i\alpha + j$	0
[A2]	$rD_3 + j + 1$	$0 \leq j = s_0 - 1 + k$	$-i\alpha + j + 1$	0
[A3]	$r^2\partial_3 D_3 - j(j+1) + s^2$	$\frac{1}{2} \leq j = s_0 + k$		
[A4]	$r\partial_3$	$j = s_0 = 0$		
[c3]	$r^2\partial_3 D_3 - j(j+1) + s^2$	$\frac{1}{2} \leq j = s_0 + k$		
[c4]	$(r\partial_3)(rD_3)$	$j = s_0 = 0$		

次に、フェルミオン λ に作用する微分演算子の固有値を求めよう。 λ について二次の項を取り出すと、次のようになっている。

$$\frac{1}{r}\bar{\lambda}D_\lambda\lambda = \bar{\lambda}\left(-\gamma^m D_m - \sigma - \frac{1}{2r}\gamma_3\right)\lambda \quad (5.63)$$

λ の上成分は S^2 上でのスピン $+1/2$ を、下成分はスピン $-1/2$ を持つので、これらの成分は次のように展開することができる。

$$\lambda = \begin{pmatrix} c_\uparrow Y_{s_0+1/2} \\ c_\downarrow Y_{s_0-1/2} \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

ただし、両方の成分が存在するのは $j \geq |s| + 1/2$ の場合であり、 $j = |s| - 1/2$ の場合には片方の成分は恒等的に 0 になる。まずは両方の成分が存在する場合について考えよう。この二成分スピノルに対して 3 次元のディラック演算子を作用させてみると、

$$\gamma^m D_m \lambda = \begin{pmatrix} D_3 & D_- \\ D_+ & -D_3 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} Y_{s_0+1/2}(D_3 c_\uparrow + (-K_-)_{s_0-1/2, s_0+1/2} c_\downarrow) \\ Y_{s_0-1/2}((-K_+)_{s_0+1/2, s_0-1/2} c_\uparrow - D_3 c_\downarrow) \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

となる。つまり、ディラック演算子は次のように行列表示できる。

$$\gamma^m D_m \rightarrow \begin{pmatrix} -D_3 & (K_-)_{s_0-1/2, s_0+1/2} \\ (K_+)_{s_0+1/2, s_0-1/2} & D_3 \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

これを用いて微分演算子 D_λ を行列表示すると、

$$D_\lambda \rightarrow \begin{pmatrix} -rD_3 + s_0 - \frac{1}{2} & (rK_-)_{s_0-1/2, s_0+1/2} \\ (rK_+)_{s_0+1/2, s_0-1/2} & rD_3 + s_0 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

となる。この行列式は

$$\det = (j - rD_3)(j + rD_3 + 1) \quad (5.68)$$

であり、二つの因子が二つの物理的モードに対応する。

次に、片方の成分が存在しない場合について見ておこう。 $s = j + 1/2$ の場合には、上成分がない。また、 $s = -j - 1/2$ の場合、下成分がない。これらの場合には行列のサイズは 1×1 になり、どちらの場合にも、固有値は位相因子を除き一致する。

$$rD_\lambda \propto j + 1 + rD_3. \quad (5.69)$$

以上の結果を表 5.2 にまとめておく。

表 5.2: λ の固有モード

	factors	range of j	D	R
$[\lambda 1]$	$rD_3 - j$	$j = s_0 + \frac{1}{2} + k$	$+i\alpha + j$	-1
$[\lambda 2]$	$rD_3 + j + 1$	$j = s_0 - \frac{1}{2} + k$	$-i\alpha + j + 1$	$+1$

ボゾンとフェルミオンのスペクトルを比較してみよう。指数の定義に現れる量子数 $H - R - J_3$ と $R + 2J_3$ をそれぞれのモードについて書いてみると、表 5.3 のようになる。[A1]

表 5.3: ベクトル多重項のモードの量子数。 $\alpha = \alpha(ra_3)$ である。

	$D - R - J_3$	$R + 2J_3$
[A1]	$+i\alpha + (j + m)_{0 \sim 2 s_0 +2+2k}$	$2 s_0 + 2 + 2k - 2(*)$
[A2]	$-i\alpha + (j + 1 - m)_{1 \sim 2 s_0 -1+2k}$	$2 s_0 + 2k - 2(*)$
$[\lambda 1]$	$+i\alpha + (j + 1 + m)_{1 \sim 2 s_0 +2+2k}$	$2 s_0 + 2 + 2k - 2(*)$
$[\lambda 2]$	$-i\alpha + (j - m)_{0 \sim 2 s -1+2k}$	$2 s_0 + 2k - 2(*)$

と $[\lambda 1]$ 、[A2] と $[\lambda 2]$ の量子数を比較してみると、全く同じになっていることが分かる。これらのモードはほとんどが相殺するが、(*) の取れる範囲が異なるために、[A1] の (*) = 0 のモードと $[\lambda 2]$ の (*) = 0 のモードが相殺せずに残る。これらの寄与を一粒子指数にまとめると、次のようになる。

$$I_{\text{sp}}(a_3, m) = \sum_{\alpha \in \text{root}} \left(\frac{q^{i\alpha(ra_3)} x^{|\alpha(m)|+2}}{1-x^2} - \frac{q^{-i\alpha(ra_3)} x^{|\alpha(m)|}}{1-x^2} + \delta_{\alpha(m),0} q^{-i\alpha(ra_3)} \right) \quad (5.70)$$

最後の項は、 $s = 0$ の場合に限っては $[\lambda 2]$ のモードが $\Delta j = 0$ の場合に存在しないことから必要になる。 α についての和はもともと随伴表現のウェイト全てについて取るが、カルタン部分、すなわち $\alpha = 0$ の寄与は 0 になるので、ルートについて和を取れば十分である。ルート系について、 α を $-\alpha$ にする対称性があることを用いると、次のように書き換えることができる。

$$I_{\text{sp}}^{\text{vector}}(a_3, m) = \sum_{\alpha \in \text{root}} q^{i\alpha(a_3)} \left(-x^{|\alpha(m)|} + \delta_{\alpha(m),0} \right) \quad (5.71)$$

5.4.3 カイラル多重項の 1 ループ計算

カイラル多重項に対する変形項としては (5.33) を用いる。ベクトル多重項の成分場については、全て期待値 (5.44) で置き換えればよい。

ボゾン場について二次の項を抜き出すと、次のようになる。

$$\frac{1}{r^2} \bar{\phi} D_\phi \phi = \bar{\phi} \left(-D_m D^m + \sigma^2 + \mathcal{D} - \frac{1}{r} (2\Delta - 1) D_3 + \frac{1}{r^2} \Delta (1 - \Delta) \right) \phi \quad (5.72)$$

ボゾン場を調和関数展開すれば、微分演算子の固有値が次のように得られる。

$$r^2 D_\phi = (j + \Delta + r D_3)(j + 1 - \Delta - r D_3) \quad (5.73)$$

この二つの因子は表 5.4 に与えたモードに対応している。

表 5.4: スカラー場 ϕ のモード

	factor	range of j	H	R
$[\phi 1]$	$j + \Delta + r D_3$	$j = s + k$	$-i\rho + j + \Delta$	Δ
$[\phi 2]$	$j + 1 - \Delta - r D_3$	$j = s + k$	$+i\rho + j + 1 - \Delta$	$-\Delta$

フェルミオン ψ については、作用の中の二次の項は次のようになる。

$$\frac{1}{r} \bar{\psi} D_\psi \psi = \bar{\psi} \left(-\gamma^m D_m - \sigma - \frac{1}{r} \left(\Delta - \frac{1}{2} \right) \gamma_3 \right) \psi \quad (5.74)$$

(5.66) を用いて微分演算子を行列表示すると、

$$D_\lambda \rightarrow \begin{pmatrix} -r D_3 + s_0 - (\Delta - \frac{1}{2}) & (r K_-)_{s_0 - \frac{1}{2}, s_0 + \frac{1}{2}} \\ (r K_+)_{s_0 + \frac{1}{2}, s_0 - \frac{1}{2}} & r D_3 + s_0 + (\Delta - \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

となる。スピノルの二つの成分が存在する場合、すなわち $j \geq |s| + 1/2$ の場合にはこの行列の行列式は

$$\det(r D_\psi) = (j + \Delta + r D_3)(j + 1 - \Delta - r D_3) \quad (5.76)$$

である。 $s = j + 1/2$ であればスピノルの上成分は恒等的に 0 であり、 $s = -(j + 1/2)$ であれば下成分が恒等的に 0 であるが、これらの場合には $r D_\psi$ の固有値は位相因子を除いて次のようになる。

$$r D_\psi \propto j + \Delta + r D_3 \quad (5.77)$$

以上の結果を表 5.5 にまとめておく。指数の定義に用いられる演算子 $H - R - J_3$ と $R + 2J_3$ の固有値について表にまとめると、表 5.6 のようになる。ボゾンとフェルミオンについて量子数が全く同じであることが分かる。ただし、 $j + j_3$ の取り得る範囲が異なる。そのた

表 5.5: ψ のモード

	factor	range of j	H	R
$[\psi 1]$	$j + \Delta + D_3$	$j = s - \frac{1}{2} + k$	$-i\rho + j + \Delta$	$\Delta - 1$
$[\psi 2]$	$j + 1 - \Delta - D_3$	$j = s + \frac{1}{2} + k$	$+i\rho + j + 1 - \Delta$	$-\Delta + 1$

表 5.6: カイラル多重項のモードの量子数

	$H - R - J_3$	$R + 2J_3$
$[\phi 1]$	$-i\rho + (j - m)_{0 \sim 2 s_0 +2k}$	$\Delta + 2 s_0 + 2k - 2(*)$
$[\phi 2]$	$+i\rho + (j + 1 + m)_{1 \sim 2 s_0 +2k+1}$	$-\Delta + 2 s_0 + 2 + 2k - 2(*)$
$[\psi 1]$	$-i\rho + (j + 1 - m)_{1 \sim 2 s_0 +2k}$	$\Delta + 2 s_0 + 2k - 2(*)$
$[\psi 2]$	$+i\rho + (j + m)_{0 \sim 2 s_0 +2k+1}$	$-\Delta + 2 s_0 + 2 + 2k - 2(*)$

めに、完全には相殺せず、 $[\phi 1]$ の $(*) = 0$ のモードと $[\psi 2]$ の $(*) = 0$ のモードが残ることになる。これらのモードの一粒子指数への寄与は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
I_{\text{sp}}^{\text{chiral}}(m, a_3) &= \sum_{\rho \in R} \sum_{k=0}^{\infty} (q^{-i\rho(ra_3)} x^{\Delta+|\rho(m)|+2k} z^F - q^{+i\rho(ra_3)} x^{2-\Delta+|\rho(m)|+2k} z^{-F}) \\
&= \sum_{\rho \in R} \left(\frac{q^{-i\rho(ra_3)} x^{\Delta+|\rho(m)|}}{1-x^2} z^F - \frac{q^{+i\rho(ra_3)} x^{2-\Delta+|\rho(m)|}}{1-x^2} z^{-F} \right) \quad (5.78)
\end{aligned}$$

5.4.4 指数の公式

ここまでに得られた結果をまとめて超共形指数の公式を与えておこう。まず、ベクトル多重項のモード展開によって得られた一粒子指数にゼロモード部分から来る寄与をあわせたものは次のように与えられる。

$$I_{\text{sp}}^{\text{vector}}(a_3, m) - \sum_{\alpha(m)=0, \alpha \neq 0} q^{-i\alpha(ra_3)} = - \sum_{\alpha \in \text{root}} q^{i\alpha(a_3)} x^{|\alpha(m)|}. \quad (5.79)$$

和はカルタンに属さないルートすべてについて取る。カイラル多重項のモード展開によって得られた一粒子指数は

$$I_{\text{sp}}^{\text{chiral}}(a_3, m) = \sum_{\rho \in R} \left(\frac{q^{-i\rho(ra_3)} x^{\Delta+|\rho(m)|}}{1-x^2} z^F - \frac{q^{+i\rho(ra_3)} x^{2-\Delta+|\rho(m)|}}{1-x^2} z^{-F} \right). \quad (5.80)$$

である。これらの和を $I'_{\text{sp}}(a_3, m)$ とおこう。プライムを付けたのはゼロモードからの寄与まで含んでいることを表す。

$$I'_{\text{sp}}(a_3, m) = I_{\text{sp}}^{\text{vector}}(a_3, m) - \sum_{\alpha(m)=0, \alpha \neq 0} q^{-i\alpha(ra_3)} + I_{\text{sp}}^{\text{chiral}}(a_3, m). \quad (5.81)$$

公式 (5.48) には

$$\text{Pexp}' I'_{\text{sp}}(a_3, m) = Z_0 \text{Pexp} I'_{\text{sp}}(a_3, m) \quad (5.82)$$

が含まれている。ただし、 Z_0 は (2.83) で定義された零点エネルギーの寄与であり、何らかの正則化をして計算する必要がある。まず、(ゼロモードの寄与も含めた) ベクトル多重項の一粒子指数 (5.79) の Z_0 を計算しよう。一粒子指数が有限和なので、対応する Z_0 も有限の積であり、正則化を必要とせず、次の結果を得る。

$$Z_0^{\text{vector}} = \prod_{\alpha \in \text{root}} (q^{i\alpha(a_3)} x^{|\alpha(m)|})^{-\frac{1}{2}} = \prod_{\alpha \in \text{positiveroot}} x^{-|\alpha(m)|} \quad (5.83)$$

一方、カイラル多重項については正則化が必要となる。求めたい無限積は

$$Z_0^{\text{chiral}} = \frac{\prod_{\rho \in R} \prod_{k=0}^{\infty} (q^{-i\rho(ra_3)} x^{\Delta+|\rho(m)|+2k} z^F)^{\frac{1}{2}}}{\prod_{\rho \in R} \prod_{k=0}^{\infty} (q^{+i\rho(ra_3)} x^{2-\Delta+|\rho(m)|+2k} z^{-F})^{\frac{1}{2}}} \quad (5.84)$$

である。これはそのままでは発散する積であるから、この分数において約分を行ってはない。 k についての無限積を次のように書いておこう。

$$\frac{\prod_{k=0}^{\infty} (x^{2k+r_1})^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=0}^{\infty} (x^{2k+r_2})^{\frac{1}{2}}} \quad (5.85)$$

ただし r_1 と r_2 を次のように定義した。

$$r_1 = \Delta + |\rho(m)| + 2k + \mu, \quad r_2 = 2 - \Delta + |\rho(m)| + 2k - \mu, \quad q^{-i\rho(ra_3)} z^F = x^\mu \quad (5.86)$$

それぞれの無限積を ζ 関数正則化でよく用いられる次の式によって評価する。

$$\prod_n a_n = \exp \left(\frac{d}{ds} \sum_n a_n^s \right) \Big|_{s \rightarrow 0} \quad (5.87)$$

これを分子と分母それぞれに現れている積に適用すると、

$$\frac{d}{ds} \sum_{k=0}^{\infty} (x^{r+2k})^s = \frac{d}{ds} \frac{x^{rs}}{1-x^{2s}} = \frac{1}{2s^2 \log x} + \frac{-2+6r-3r^2}{12} \log x + \mathcal{O}(s) \quad (5.88)$$

これは $s=0$ において発散するが、(5.85) のように比を取ってから $s=0$ と置くと次の有限の結果を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{k=0}^{\infty} (x^{2k+r_1})^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=0}^{\infty} (x^{2k+r_2})^{\frac{1}{2}}} &= \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{-2+6r_1-3r_1^2}{12} - \frac{-2+6r_2-3r_2^2}{12} \right) \log x \right] \\ &= x^{-\frac{(r_1-r_2)(r_1+r_2-2)}{8}} = x^{-\frac{1}{2}(\Delta+\mu-1)|\rho(m)|} \\ &= x^{-\frac{1}{2}(\Delta-1)|\rho(m)|} q^{+\frac{1}{2}|\rho(m)|\rho(ra_3)} z^{-\frac{1}{2}|\rho(m)|F} \end{aligned} \quad (5.89)$$

従って、零点因子は

$$Z_0^{\text{chiral}} = \prod_{\rho \in R} x^{-\frac{1}{2}(\Delta-1)|\rho(m)|} q^{+\frac{i}{2}|\rho(m)|\rho(ra_3)} z^{-\frac{1}{2}|\rho(m)|F} \quad (5.90)$$

以上を全てあわせることで指数が得られる。もう一度公式全体を書いておく。

$$I = \sum_m \frac{1}{|W|} \oint \prod_i \frac{d(\beta a_{3,i})}{2\pi} q^{i\text{tr}(ra_{3,m})+2r\xi\text{tr}(ra_3)} Z_0^{\text{vector}} Z_0^{\text{chiral}} \text{Pexp}(I'_{\text{sp}}(a_3, m)) \quad (5.91)$$

第6章 S^3 上の超対称理論

この節では、 S^3 上の場の理論の経路積分を行い S^3 分配関数を与える一般公式を導出する。 S^3 分配関数は、場がカノニカルなウェイトを持つ場合については [9] において計算された。その後 [10, 11] において一般のウェイトを持つカイラル多重項を含む $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論に拡張された。以下の導出は [10, 11] と基本的に同じであるが、用いている作用が少し異なる。

6.1 S^3 上の超共形対称性

S^3 上の超対称理論を考えるにあたり、まずはキリングスピノル方程式

$$D_m \epsilon = \gamma_m \bar{\kappa}, \quad D_m \bar{\epsilon} = \gamma_m \kappa \quad (6.1)$$

の解を具体的に与えることから始めよう。3次元にはカイラリティによる区別がなく、 ϵ と $\bar{\epsilon}$ は同じスピノル表現に属するので、まったく同様に議論することができる。そこで ϵ について考えよう。

キリングスピノルに対する一般公式 (3.85) より、 S^3 上のキリングスピノルは次の方程式を満足する。

$$\Delta \epsilon = -\frac{3}{4r^2} \epsilon \quad (6.2)$$

S^3 上の一般の調和関数に対する公式 (4.95) より、角運動量 (j_L, j_R) のスピノル場のラプリアン固有値は

$$\Delta \epsilon = -\frac{1}{r^2} \left(2j_L(j_L + 1) + 2j_R(j_R + 1) - \frac{3}{4} \right) \epsilon \quad (6.3)$$

である。これを (6.2) と比較すれば、キリングスピノルの角運動量には次の二つの可能性があることがわかる。

$$(j_L, j_R) = \left(\frac{1}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{2} \right) \quad (6.4)$$

(6.4) の表現は一つのディラックスピノルで表わされるから、これらの量子数を持つスピノル場の一般形は次のように与えられる。

$$\epsilon_{L/R} = P_{L/R} \rho(g^{-1}) \xi_{L/R}, \quad \bar{\epsilon}_{L/R} = P_{L/R} \rho(g^{-1}) \bar{\xi}_{L/R}. \quad (6.5)$$

ただし、 g は $SO(4)$ の元であり、 ρ はそのスピノル表現行列である。 $\xi_{L/R}$ は $SO(4)$ のもとで左巻き、あるいは右巻きスピノルとして変換される定数スピノルである。どちらかのカイラリティの成分を抜き出す射影を $P_{L/R}$ とした。

このように与えられたスピノル場が全てキリング方程式を満足することが確認できる。実際、共変微分の一般形を用いると、

$$\begin{aligned} D_m \epsilon_{L/R} &= -\frac{1}{2r} P_{L/R} \gamma_{m4} \rho(g^{-1}) \xi_{L/R} = (-/+)\frac{i}{2r} \gamma_m \epsilon_{L/R}, \\ D_m \bar{\epsilon}_{L/R} &= -\frac{1}{2r} P_{L/R} \gamma_{m4} \rho(g^{-1}) \bar{\xi}_{L/R} = (-/+)\frac{i}{2r} \gamma_m \bar{\epsilon}_{L/R} \end{aligned} \quad (6.6)$$

が得られる。 $(-/+)$ は L/R に対応して、 L に対しては $-$ を、 R に対しては $+$ を取ることを意味する。 $\bar{\kappa}$ と κ はは次のように与えられる。

$$\bar{\kappa}_{L/R} = (-/+)\frac{i}{2r} \epsilon_{L/R}, \quad \kappa_{L/R} = (-/+)\frac{i}{2r} \bar{\epsilon}_{L/R}. \quad (6.7)$$

6.2 リジッドな超対称性

背景ベクトル多重項を導入することで超対称性を部分的に破り、リジッドな超対称性を定義しよう。(3.95) に与えた λ と $\bar{\lambda}$ の変換則において、ボゾン場の値を期待値で置き換えよう。回転対称性は破れていないと仮定し、ゲージ場は $A_m = 0$ 、スカラー場 σ と \mathcal{D} は定数であるとする。さらに (6.7) を用いて κ を ϵ で表わすと、次の式を得る。

$$\delta_Q \lambda = \left((+/-)\frac{i}{r} \langle \sigma \rangle + \langle \mathcal{D} \rangle \right) \epsilon_{L/R}, \quad \delta_Q \bar{\lambda} = \left((+/-)\frac{i}{r} \langle \sigma \rangle + \langle \mathcal{D} \rangle \right) \bar{\epsilon}_{L/R}. \quad (6.8)$$

が得られる。 $\langle \dots \rangle$ は、それらがダイナミカルな場ではなく定数外場であることを表わしている。超対称性が残るためには、括弧の中が 0 になる必要があるが、これは半分の超対称性のみに対して可能である。ここではスカラー場の期待値を次のように選ぶことにする。

$$\langle \mathcal{D} \rangle = -\frac{i}{r} \langle \sigma \rangle. \quad (6.9)$$

この場合、残る超対称性は変換パラメータ ϵ_L および $\bar{\epsilon}_L$ によって与えられ、リジッドな超対称性と呼ばれる。(6.9) において $\langle \mathcal{D} \rangle$ の符号を逆に取ってもやはり半分の超対称性が残り、こちらをリジッドな超対称性と呼ぶこともできる。これら二つの選択の間に本質的な違いはない。) ここで、 $\langle \mathcal{D} \rangle$ が純虚数であることに注意しよう。これは、ダイナミカルなベクトル多重項に対して補助場 \mathcal{D} の経路積分を行う際に、積分が収束するように \mathcal{D} の積分路を虚軸上に取らなければならないこととつじつまが合っている。

リジッドな超対称性のキリングスピノルを具体的に与えておく。

$$\epsilon = P_L \rho(g^{-1}) \xi, \quad \bar{\kappa} = -\frac{i}{2r} \epsilon, \quad \bar{\epsilon} = P_L \rho(g^{-1}) \bar{\xi}, \quad \kappa = -\frac{i}{2r} \bar{\epsilon}. \quad (6.10)$$

ϵ も $\bar{\epsilon}$ もアイソメトリー群 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の $(2, 1)$ 表現に属している。

質量変形したあとの理論では非自明なワイル変換を引き起こすような変換は破れているから、超対称変換の交換関係は S^3 のアイソメトリーを与えるはずである。実際に交換関

係を計算してみよう。(3.99) より、 ϵ をパラメータとする変換 $\delta(\epsilon) = \xi^a Q_a$ と $\bar{\epsilon}$ をパラメータとする変換 $\delta(\bar{\epsilon}) = \bar{\xi}^a \bar{Q}_a$ の交換関係は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} [\delta(\epsilon), \delta(\bar{\epsilon})] &= 2\delta_c(\epsilon\gamma^m\bar{\epsilon}) + 2(\epsilon\kappa + \bar{\kappa}\epsilon)R + 2i\delta_{\text{gauge}}(\epsilon\bar{\epsilon}\sigma) \\ &= 2\delta_c(\xi g P_L \gamma^m P_L g^{-1} \bar{\xi}) - \frac{2i}{r}(\xi\bar{\xi})R + 2i\delta_{\text{gauge}}(\xi\bar{\xi}\sigma) \end{aligned} \quad (6.11)$$

第 1 項に現れたベクトルは §5.2 で行ったのと同様に次のように変形することができる。

$$(\xi g P_L \gamma^m P_L g^{-1} \bar{\xi}) = -i(\xi g \gamma^m \gamma^4 g^{-1} \bar{\xi}) = -i(g^{-1})^{mM}(\xi \gamma^{MN} \bar{\xi})g^{N4} = -\frac{i}{r}(g^{-1})^{mM}(\xi \gamma^{MN} \bar{\xi})y^N \quad (6.12)$$

従って、対応する共形変換は次のように S^3 の回転になる。

$$2\delta_c(\xi g P_L \gamma^m P_L g^{-1} \bar{\xi}) \sim -\frac{2i}{r}(\xi \gamma^{MN} \bar{\xi})y^N \frac{\partial}{\partial y^M} = \frac{i}{r}(\xi \gamma^{MN} \bar{\xi})T_{MN} = -\frac{4i}{r}(\xi \sigma^A \bar{\xi})J_A^L \quad (6.13)$$

これを用いると、交換関係は次のように与えられる。

$$[\delta(\epsilon), \delta(\bar{\epsilon})] = -\frac{4i}{r}(\xi \sigma^A \bar{\xi})J_A^L - \frac{2i}{r}(\xi\bar{\xi})R + 2i\delta_{\text{gauge}}(\xi\bar{\xi}\sigma) \quad (6.14)$$

さらに、これを電荷 Q_a と \bar{Q}_a の反交換関係として表すと

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = -\frac{4i}{r}(\sigma^A)_{ab}J_A^L - \frac{2i}{r}\epsilon_{ab}R + 2i\epsilon_{ab}\delta_{\text{gauge}}(\sigma) \quad (6.15)$$

である。この代数が含むボゾンの対称性は $SU(2)_L \times U(1)_R$ であり、超対称代数は $osp(2|1)$ である。

6.3 作用

(3.126) のパラメータは S^3 上のリジッド超対称性については次の値を取る。

$$R = \frac{6}{r^2}, \quad K = \bar{K} = K^m = \bar{K}^m = 0, \quad K^4 = -\frac{1}{r}, \quad \bar{K}^4 = \frac{1}{r}. \quad (6.16)$$

ベクトル多重項の運動項は

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{\text{vector}}^{(3d)} &= \frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + \frac{i}{2}\gamma^{mnp}F_{mn}D_p\sigma + \frac{1}{2}D_m\sigma D^m\sigma - \frac{1}{2}D\mathcal{D} - \frac{i}{r}D\sigma + \frac{1}{2r^2}\sigma\sigma \\ &\quad - (\bar{\lambda}\gamma^m D_m\lambda) - (\bar{\lambda}[\sigma, \lambda]) + \frac{i}{2r}(\bar{\lambda}\lambda) \end{aligned} \quad (6.17)$$

カイラル多重項の運動項は

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{\text{chiral}}^{(3d)} &= -\bar{\phi}D_m D^m\phi + \bar{\phi}\sigma\phi + \bar{\phi}D\phi + \frac{i}{r}(2\Delta - 1)\bar{\phi}\sigma\phi - \frac{1}{r^2}\Delta(\Delta - 2)\bar{\phi}\phi - \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} \\ &\quad - (\bar{\psi}\gamma^m D_m\psi) - (\bar{\psi}\sigma\psi) - \frac{i}{r}\left(\Delta - \frac{1}{2}\right)(\bar{\psi}\psi) - \sqrt{2}\bar{\phi}(\lambda\psi) - \sqrt{2}(\bar{\psi}\lambda)\phi \end{aligned} \quad (6.18)$$

Chern-Simons 項は

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \frac{k}{2\pi} \text{tr} \left[\frac{1}{2} \gamma^{mnp} \left(A_m \partial_n A_p - \frac{i}{3} A_m [A_n, A_p] \right) + (\bar{\lambda} \lambda) - \mathcal{D} \sigma \right]. \quad (6.19)$$

ダイナミカル $U(1)$ ゲージ場 A のトポロジカル $U(1)$ 対称性に結合する背景ゲージ場 $(A', \sigma', \lambda', D')$ に (6.9) を代入すると、

$$\mathcal{L}_{\text{FI}} = \frac{\xi}{2\pi} \left[\frac{i}{r} \sigma - \mathcal{D} \right]. \quad (6.20)$$

6.4 局所化による S^3 分配関数の計算

まず、結果を与えておこう。 S^3 の分配関数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{|W|} \prod_{i=1}^{\text{rank} G} \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) e^{-\pi i k \text{tr}(a^2) - 2\pi i r^2 \xi \text{tr}(\sigma)} \frac{\prod_{\alpha \in \Delta} S_2(-i\alpha(a)), \{b, b^{-1}\}}{\prod_{\rho \in R} S_2(-i\rho(a) + \frac{\Delta_\rho}{v}, \{b, b^{-1}\})} \\ &= \frac{1}{|W|} \prod_{i=1}^{\text{rank} G} \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) e^{-\pi i k \text{tr}(a^2) - 2\pi i r^2 \xi \text{tr}(\sigma)} \frac{\prod_{\alpha \in \Delta} s_b(\alpha(a) - \frac{i}{v})}{\prod_{\rho \in R} s_b(\rho(a) - \frac{i(1-\Delta_\rho)}{v})} \end{aligned} \quad (6.21)$$

ただし、 α はカルタン部分を含まない全てのルートについて、 ρ はカイラル多重項の全ての表現について和を取る。 $|W|$ はワイル群の位数である。 Δ_ρ は ρ によって指定されるカイラル多重項のワイルウェイトを表す。 b と v は球面の変形パラメータであり

$$\frac{b + b^{-1}}{2} = \frac{1}{v} \quad (6.22)$$

の関係にある。 $b = v = 1$ が変形されていない球を表す。関数 $s_b(z)$ および $S_2(z, \{\omega_1, \omega_2\})$ の定義は §B に与えてある。

この節ではまず変形されていない球 ($b = 1$) の場合にこの公式を導出する。 $b \neq 1$ の場合の導出は §7.4 において行う。

6.4.1 鞍点

局所化を用いて S^3 上の 3 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論の分配関数を計算しよう。まず始めに行わなければならないことは、変形項 QV を具体的に与える事であるが、これには前節で与えた作用を用いることができる。まず、ベクトル多重項から考えよう。このとき変形項は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} S_{\text{def}} &= \int d^3x \sqrt{g} \left[\frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} + \frac{i}{2} \gamma^{mnp} F_{mn} D_p \sigma + \frac{1}{2} D_m \sigma D^m \sigma + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{r} - i\mathcal{D} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - (\bar{\lambda} \gamma^m D_m \lambda) - (\bar{\lambda} [\sigma, \lambda]) + \frac{i}{2r} (\bar{\lambda} \lambda) \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

ゲージ場とスカラー場は混合があるので、同時に扱う必要がある。ゲージ固定は次の二つの条件によって行う。

$$D_m A_m = 0, \quad \sigma_{ij}^{(0)} = 0 \quad (i \neq j). \quad (6.24)$$

ただし $\sigma^{(0)}$ は S^3 上で角運動量をもたないモードである。

ゲージ固定項とあわせたボゾン場のラグランジアンは次のように平方和の形に書くことができる。

$$S_{\text{def}} = \int d^3x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} f_m^2 + \frac{1}{2} f_{\text{gf}}^2 + \bar{c}' D_m D^m c' \right) + \sum_{i \neq j} \left(|\sigma_{ij}^{(0)}|^2 + \bar{c}_{ij} (\sigma_{ii}^{(0)} - \sigma_{jj}^{(0)}) c_{ij} \right) \quad (6.25)$$

ただし、 c' と \bar{c}' は定数モードが取り除かれていることを示すためにプライムを付けた。

$$f_m = \frac{1}{2} \epsilon_{mnp} F_{np} - D^m \sigma, \quad f_{\text{gf}} = D_m A_m \quad (6.26)$$

である。従って鞍点の配位は

$$f_m = f_{\text{gf}} = 0. \quad (6.27)$$

によって与えられる。これを満足するのは、

$$A_m = 0, \quad \sigma = \sigma_0, \quad D = -\frac{i\sigma_0}{r}. \quad (6.28)$$

の場合である。ただし σ_0 は S^3 上の座標に依存しないリー代数の元であり、対角成分のみが値を持つ。この背景における古典的作用は次のように与えられる。

$$S_{\text{CS}} = \pi i k \text{tr}(r\sigma)^2, \quad S_{\text{FI}} = 2\pi i r^2 \xi \sigma \quad (6.29)$$

(6.24) の二番目のゲージ固定に対応したヤコビアン因子は \bar{c}_{ij} と c_{ij} の積分により次のように与えられる。

$$J = \prod_{\alpha \in \Delta} \alpha(\sigma) \quad (6.30)$$

ただし Δ はルート全体（正ルート、負ルート両方を含む）を表す。定数因子は後で固定することにし、ここでは気にせずに計算を行う。

あとは、このまわりの揺らぎに対する積分を行えばよい。まず、補助場 D に対する積分であるが、実軸上で積分すると発散してしまうので、虚軸上で積分する。次のようなシフトを行えば、他の場から完全に分離するので、積分の結果単に定数因子を与えるだけである。そこで、無視することにする。

$$D = D' - i \frac{\sigma}{r}. \quad (6.31)$$

これ以外の場についての積分を行おう。そのために、全ての場を (2.58) に従って期待値の部分と揺らぎの部分へ分ける。 σ については次のように期待値部分を σ 、揺らぎの部分を φ によって表そう。

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi \quad (6.32)$$

ゲージ場については期待値の部分は 0 であり、式を長くしないために揺らぎ δA_m を改めて A_m によって表すことにする。

6.4.2 ベクトル多重項の 1 ループ計算

弱結合極限 $t \rightarrow \infty$ において、 S_{def} の中の高次の項は無視することができて、二次の項は次のようになる。

$$S_{\text{def}}^{(2)} = \int d^3x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \bar{f}_m^2 + \frac{1}{2} \bar{f}_{\text{gf}}^2 \right) \quad (6.33)$$

ただし \bar{f}_m と \bar{f}_{gf} はただし f_m と f_{gf} から揺らぎについて 1 次の部分のみを取り出したものである。これらは次のように与えられる。

$$\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{A} - \text{grad } \varphi - i[\sigma_0, \mathbf{A}], \quad f_{\text{gf}} = \text{div } \mathbf{A}. \quad (6.34)$$

ただし、 S^3 上のベクトル場を太字で表した。これらの関係式は 4 成分の場 (\mathbf{A}, φ) から 4 成分の場 $(\mathbf{f}, f_{\text{gf}})$ への線形写像を与えている。つまり、ある微分演算子 \mathcal{O} を用いて

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ f_{\text{gf}} \end{pmatrix} = \mathcal{O} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

と表すことができる。揺らぎに対する積分はこの演算子の行列式の逆数である。

$$\int \mathcal{D}\mathbf{A} \mathcal{D}\varphi e^{-S_{\text{def}}^{(2)}} = \frac{1}{\det \mathcal{O}}. \quad (6.36)$$

\mathcal{O} の行列式を求めるために場 (\mathbf{A}, φ) を S^3 上の調和関数によって展開し、それぞれのモードについて \mathcal{O} の固有値を求めよう。 S^3 上のモードは、二つの角運動量の組 (j_L, j_R) によって指定される $SO(4)$ の表現に属し、それぞれの表現の縮退度は $(2j_L + 1, 2j_R + 1)$ である。ベクトル場 \mathbf{A} のモードは、 $j_R = j$ を固定すると j_L について 3 つの可能性 $j_L = j \pm 1$ 、 $j_L = j$ があり、 φ については常に $j_L = j$ である。従って、ある j について次の 4 つの独立なモードが存在する。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{(j+1,j)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{(j-1,j)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{(j,j)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{(j,j)} \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

一番目と二番目のモードに関しては S^3 上のベクトル調和関数の回転に対する公式 (4.102) を用いれば次の式が成り立つことがわかる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{(j+1,j)} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{r}(2j+2+i\sigma) \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{(j+1,j)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{(j-1,j)} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r}(2j-i\sigma) \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{(j-1,j)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.38)$$

すなわち、対応する \mathcal{O} の固有値は次の二つである。

$$-\frac{1}{r}(2j+2+i\sigma), \quad \frac{1}{r}(2j-i\sigma). \quad (6.39)$$

三番目と 4 番目については

$$\mathcal{O} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{(j,j)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\alpha \mathbf{Y}_{(j,j)} \\ -\frac{j(j+1)}{4r} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O} \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{(j,j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \mathbf{Y}_{(j,j)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

ただし、 (j, j) 表現に属するベクトル調和関数とスカラー調和関数の関係を $r \text{ grad } Y_{(j,j)} = \mathbf{Y}_{j,j}$ とおいた。この二つの成分の determinant への寄与は

$$-\frac{4j(j+1)}{r^2} \quad (6.41)$$

である。

以上をまとめると表 6.1 が得られる。

表 6.1:

id	angular mom.	factors
[A1]	$(j+1, j)_{j \geq 0}$	$2j+2+ir\sigma$
[A2]	$(j-1, j)_{j \geq 1}$	$2j-ir\sigma$
[A3]	$(j, j)_{j \geq 1/2}$	$4j(j+1)$
[A4]	$(0, 0)$	0
[c3]	$(j, j)_{j \geq 1/2}$	$4j(j+1)$

[A3] の因子はゴーストの積分から得られるヤコビアン因子 [c3] と丁度相殺する。縮退度を考慮して固有値 (6.39) の積を取れば、

$$\mathcal{O} = \prod_{j=0}^{\infty} (2j+2+ir\alpha(\sigma))^{(2j+3)(2j+1)} \prod_{j=1}^{\infty} (2j-ir\alpha(\sigma))^{(2j-1)(2j+1)} \quad (6.42)$$

が得られる。これは、随伴表現に属する場の成分のうち特定のウェイト α に対応する場の寄与を表している。これを全ての α について掛け合わせたものがガウス積分の結果を与えるが、 α がカルタン部分代数のウェイトを与える場合にはただの定数を与えるだけなので除いておく。さらに、(6.30) の寄与も含めると次の 1-loop 行列式を得る。

$$Z_{1\text{-loop}}^{(A,\sigma)} = 1 \left/ \prod_{\alpha \in \Delta} \prod_{j=0}^{\infty} [(2j+2+ir\alpha(\sigma))^{(2j+3)(2j+1)} (2j-ir\alpha(\sigma))^{(2j-1)(2j+1)}] \right. \quad (6.43)$$

次に、フェルミオン λ からの寄与を考えよう。変形項の中で揺らぎについて二次の部分は次のように与えられる。

$$S_{\text{def}}^{(2)} = \int d^3x \sqrt{g} \bar{\lambda} D_\lambda \lambda = \int d^3x \sqrt{g} \bar{\lambda} \left(-\gamma^m D_m - \alpha(\sigma) + \frac{i}{2r} \right) \lambda \quad (6.44)$$

ただし、ゆらぎ $\delta\lambda$ を同じ文字 λ で表し、作用に現れる微分演算子を表す記号として D_λ を導入した。フェルミオン場はスピノル調和関数 $Y_{(j\pm 1/2, j)}$ を用いて展開する。 S^3 上のディラック演算子に対する固有値の公式 (4.104) を用いると、 D_λ はこれらの調和関数に対して次のように作用する。

$$\begin{aligned} D_\lambda Y_{(j+1/2, j)} &= \frac{i}{r} (2j+2+ir\alpha(\sigma)) Y_{(j+1/2, j)}, \\ D_\lambda Y_{(j-1/2, j)} &= -\frac{i}{r} (2j-ir\alpha(\sigma)) Y_{(j-1/2, j)} \end{aligned} \quad (6.45)$$

これらを表にまとめよう。

表 6.2:

id	angular mom.	factors
$[\lambda 1]$	$(j + 1/2, j)_{j \geq 0}$	$2j + 2 + i r \sigma$
$[\lambda 2]$	$(j - 1/2, j)_{j \geq 1/2}$	$2j - i r \sigma$

これらを縮退度も考慮して全て掛け合わせれば、次の結果を得る。

$$\text{Det } D_\lambda = \prod_{\alpha \in \Delta} \prod_{j=0}^{\infty} (2j + 2 + i r \sigma)^{(2j+2)(2j+1)} (2j - i r \sigma)^{2j(2j+1)} \quad (6.46)$$

全部の寄与を合わせると、

$$Z_{\text{vector}} = \frac{\text{Det } D_\lambda}{\text{Det}' D_{A,\sigma}} = \prod_{\alpha \in \Delta} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(2j - i r \sigma)^{2j+1}}{(2j + 2 + i r \sigma)^{2j+1}} \quad (6.47)$$

これは次のように書くこともできる。

$$Z_{\text{vector}} = \prod_{\alpha \in \Delta} \prod_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{n_1 + n_2 - i r \sigma}{n_1 + n_2 + 2 + i r \sigma} = S_2(-i r \sigma) \quad (6.48)$$

S_2 は double sine 関数と呼ばれ、次のように定義される。

$$S_2(z) = \prod_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{n_1 + n_2 + z}{n_1 + n_2 + 2 - z} \quad (6.49)$$

6.4.3 カイラル多重項の 1 ループ計算

カイラル多重項の運動項は

$$\begin{aligned} S_{\text{def}} = \int d^3x \sqrt{g} \left[-\bar{\phi} D_m D^m \phi + \bar{\phi} \sigma \phi + \bar{\phi} \mathcal{D} \phi - \bar{\mathcal{F}} \mathcal{F} - \frac{1}{r^2} \Delta(\Delta - 2) \bar{\phi} \phi \right. \\ \left. - (\bar{\psi} \gamma^m D_m \psi) - (\bar{\psi} \sigma \psi) - \sqrt{2} \bar{\phi} (\lambda \psi) - \sqrt{2} (\bar{\psi} \lambda) \phi \right. \\ \left. - \frac{1}{r} \left(\Delta - \frac{1}{2} \right) (-2i \bar{\phi} \sigma \phi + i (\bar{\psi} \psi)) \right] \quad (6.50) \end{aligned}$$

saddle point において、全ての場の値は 0 となるので、 $1/\sqrt{t}$ 因子を除いた揺らぎ部分を再び同じ文字を用いて表すことにする。

スカラー場について二次の項を抜き出すと、

$$S_{\text{def}}^{(2)} = \int d^3x \sqrt{g} \bar{\phi} D_\phi \phi = \int d^3x \sqrt{g} \bar{\phi} \left(-D_m D^m + \sigma^2 + \mathcal{D} - \frac{1}{r^2} \Delta(\Delta - 2) + \frac{2i}{r} \left(\Delta - \frac{1}{2} \right) \sigma \right) \phi \quad (6.51)$$

となっている。微分演算子 D_ϕ の固有値を求めよう。スカラー調和関数については必ず $j_L = j_R$ である。 $(j_L, j_R) = (j, j)$ の場合には

$$D_\phi \phi = \frac{1}{r^2} (2j + 2 - \Delta + ir\sigma)(2j + \Delta - ir\sigma) \phi \quad (6.52)$$

が成り立つ。縮退度は $(2j + 1)^2$ である。従って、微分演算子の行列式は

$$\text{Det } D_\phi = \prod_j (2j + 2 - \Delta + ir\sigma)^{(2j+1)^2} (2j + \Delta - ir\sigma)^{(2j+1)^2} \quad (6.53)$$

となる。

フェルミオンに対する二次の項を抜き出すと、

$$S_{\text{def}}^{(2)} = \int d^3x \sqrt{g} \bar{\psi} D_\psi \psi = \int d^3x \sqrt{g} \bar{\psi} \left[-\gamma^m D_m - \sigma - \frac{i}{r} \left(\Delta - \frac{1}{2} \right) \right] \psi \quad (6.54)$$

が得られる。微分演算子の固有値を求めよう。

$$D_\psi \psi = \frac{2i}{r} (j_L(j_L + 1) - j_R(j_R + 1)) - \sigma \psi - \frac{i}{r} \left(\Delta - \frac{1}{2} \right) \psi \quad (6.55)$$

S^3 上のディラック演算子に対する固有値の公式 (4.104) を用いると、

$$\begin{aligned} D_\psi Y_{(j+1/2, j)} &= \frac{i}{r} [2j + 2 - \Delta + ir\sigma] Y_{(j+1/2, j)}, \\ D_\psi Y_{(j-1/2, j)} &= -\frac{i}{r} [2j + \Delta - ir\sigma] Y_{(j-1/2, j)} \end{aligned} \quad (6.56)$$

が得られる。縮退度はそれぞれ $(2j + 2)(2j + 1)$ および $2j(2j + 1)$ であるから、微分演算子の行列式は

$$\text{Det } D_\psi = \prod_j (2j + 2 - \Delta + ir\sigma)^{(2j+2)(2j+1)} (2j + \Delta - ir\sigma)^{2j(2j+1)} \quad (6.57)$$

となる。以上をまとめると、

$$Z_{\text{chiral}} = \frac{\text{Det } D_\psi}{\text{Det } D_\phi} = \prod_{\rho \in R} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(2j + 2 - \Delta + ir\sigma)^{2j+1}}{(2j + \Delta - ir\sigma)^{2j+1}} \quad (6.58)$$

これは次のように書き換えることができる。

$$Z_{\text{chiral}} = \prod_{\rho \in R} \prod_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(n_1 + n_2 + 2 - \Delta + ir\sigma)}{(n_1 + n_2 + \Delta - ir\sigma)} = \prod_{\rho \in R} \frac{1}{S_2(\Delta - ir\sigma)} \quad (6.59)$$

以上の寄与を全て含めると、分配関数に対する公式 (6.21) を得る。

二重正弦関数 S_2 は、引数の虚部の絶対値が大きい極限においては単純な漸近形をもつ。その形はチャーン・サイモン項に対する 1-ループ補正によるものであると解釈することができる。このことを具体的に見ておこう。簡単な例としてチャージ 1 のカイラル多重項を一つ含む $U(1)$ ゲージ理論を考えよう。チャーン・サイモンレベルに対する量子補正は

$$\Delta k = \frac{1}{2} \text{sign}(\sigma) \quad (6.60)$$

である。((A.9) を参照) ただし、フェルミオンの質量がスカラー場 σ によって与えられることを用いた。一方 Z_{chiral} は σ の絶対値が大きい極限で次の漸近形を持つ。((B.52) を参照)

$$\frac{1}{S_2(-i\sigma)} \sim \frac{1}{s_b(\sigma)} \sim \exp\left(-\text{sign}(\sigma)\frac{\pi i}{2}\sigma^2\right) = e^{-S_{\text{cl}}} \quad (6.61)$$

(ここでは σ が非常に大きいと仮定してワイルウェイトを含む項などは無視した。) ただし ΔS_{cl} は Chern-Simons レベルが (6.60) だけ変化したときの古典的作用の変化

$$\Delta S_{\text{cl}} = \text{sign}(\sigma)\frac{\pi i}{2}\sigma^2 = \pi i \Delta k \sigma^2 \quad (6.62)$$

である。

6.5 別の作用による導出

局所化において用いられる変形項は、ある超対称変換 δ のもとで exact であり、ボゾン部分が正定値であるという条件を満足するものでなければならない。このような項には一般的に良く用いられる構成法がある。理論に含まれる全てのフェルミオンを Ψ_i と表わそう。この超対称変換 $\delta\Psi_i$ がボゾン場のみを含むとき、そのエルミート共役 $(\delta\Psi_i)^\dagger$ を定義することができる。このとき

$$\mathcal{L} = \sum_i \delta((\delta\Psi_i)^\dagger \Psi_i) \quad (6.63)$$

は上記の条件を満足する。このように構成される作用と上で用いた作用を比較してみよう。

ベクトル多重項については

$$\delta \left[\frac{1}{2} (\delta\lambda)^\dagger \lambda \right] = (\epsilon^\dagger \epsilon) \mathcal{L}' \quad (6.64)$$

とおくと、 \mathcal{L}' は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} - \frac{i}{2} \gamma^{mnp} F_{mn} D_p \sigma + \frac{1}{2} D_m \sigma D^m \sigma - \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 + \left(\frac{K'}{3} + \frac{R}{12} \right) \sigma \sigma \\ & + (D_m \bar{\lambda} \gamma^m \lambda) - (\bar{\lambda} [\sigma, \lambda]) \\ & + K'^m \left(-\frac{i}{2} \gamma_{mpq} F^{pq} \sigma + \sigma D_m \sigma + \frac{1}{2} (\bar{\lambda} \gamma_m \lambda) \right) + i K'^4 \left(\mathcal{D} \sigma - \frac{1}{2} (\bar{\lambda} \lambda) \right) \end{aligned} \quad (6.65)$$

ただし K'^μ と K' は次のように定義した。

$$K'^m = \frac{D^m(\epsilon^\dagger\epsilon)}{\epsilon^\dagger\epsilon}, \quad K'^4 = \frac{i\bar{\kappa}^\dagger\epsilon - i\epsilon^\dagger\bar{\kappa}}{\epsilon^\dagger\epsilon}, \quad K' = \frac{D_m D^m(\epsilon^\dagger\epsilon)}{\epsilon^\dagger\epsilon}. \quad (6.66)$$

これは、 K^μ と K が K'^μ と K' に置き換えられていることを除き、(3.132) の $\mathcal{L}_{\text{vector}}^{(3d)}$ と全く同じである。(6.65) の導出に用いたのはキリング方程式のみであり、スピノルの具体形は用いていない。また、部分積分も行っていない。 S^3 上のリジッド対称性のキリングスピノルの具体形を用いれば、 $K'^\mu = K^\mu$ 、 $K' = K$ を示すことができ、以前に与えたものと全く同じ作用になっていることが分かる。

カイラル多重項の場合には、以前の作用との関係はそれほど自明ではない。 S^3 の場合にキリングスピノルの具体形や部分積分を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \delta \left[\frac{1}{2}(\delta\psi)^\dagger\psi + \frac{1}{2}(\delta\bar{\psi})^\dagger\bar{\psi} \right] \\ &= (\epsilon^\dagger\epsilon) \left[D_m \bar{\phi} D^m \phi + \frac{\Delta^2}{r^2} \bar{\phi} \phi - \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} + \bar{\phi} \sigma \sigma \phi \right. \\ &\quad \left. + D_m \bar{\psi} \gamma^m \psi - \frac{i}{2r} (\bar{\psi} \psi) - \bar{\psi} \sigma \psi - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\phi} (\lambda \psi) - \sqrt{2} (\bar{\psi} \lambda) \phi \right] \\ &\quad + (\epsilon^\dagger \gamma^m \epsilon) \left[\frac{2i}{r} (1 - \Delta) \bar{\phi} D_m \phi + \frac{i}{r} (1 - \Delta) (\bar{\psi} \gamma^m \psi) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\phi} (D_m \sigma) \phi - \frac{i}{2} \gamma_{mpq} \bar{\phi} F^{pq} \phi - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\phi} (\lambda \gamma^m \psi) \right] \end{aligned} \quad (6.67)$$

を得る。この作用は以前に与えた作用に一致しないが、その差は次のように δ -exact になっている。

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \left[2\sqrt{2}(1 - \Delta)(\bar{\kappa}^\dagger\bar{\psi})\phi - \bar{\phi}(\epsilon^\dagger\lambda)\phi \right] \quad (6.68)$$

従って、 \mathcal{L}' を用いても \mathcal{L} を用いても同じ分配関数が得られることが保証される。しかし、直接(6.67)を用いて分配関数を求めておくことも有益であろう。

スカラー場およびフェルミオン場のガウス積分を行うためには、次の演算子の行列式を計算する必要がある。

$$\begin{aligned} D_\phi &= -D_m D^m + \frac{\Delta^2}{r^2} + \sigma^2 + \frac{2i}{r}(1 - \Delta)V^m D_m, \\ D_\psi &= -D\!\!\!/ + \frac{i}{r}(1 - \Delta)V^m \gamma_m - \frac{i}{2r} - \sigma. \end{aligned} \quad (6.69)$$

ただし、次のベクトルを定義した。

$$V^m = \frac{(\epsilon^\dagger \gamma^m \epsilon)}{(\epsilon^\dagger \epsilon)}. \quad (6.70)$$

このベクトルのために、作用は完全な S^3 の回転対称性を保っていない。このような場合には、 V^m の成分が簡単な形になる座標系を具体的を決めて計算するのが便利である。そこで §4.11 で導入した左不変枠を用いよう。局所座標系を定義する枠束の切断は

$$g(x) = (1, \hat{g}(x)) \quad (6.71)$$

である。このとき、 $SU(2)_R$ 一重項に属するリジッド超対称性のパラメータは次のように座標に依存しない定数になる。

$$\epsilon = P\rho(g^{-1})\xi = P\xi \quad (6.72)$$

さらに V^m も同様に定数になる。フィルツ変換を用いるとその長さは 1 になる。ベクトルの向きは ϵ 選び方に依存するがここでは $V^3 = 1$ となるように取ることにする。

左不変枠における共変微分に対する公式 (4.129) を用いて演算子 D_ϕ と D_ψ の行列式を計算しよう。式を見やすくするためにエルミートな演算子を用いて次のように書き換える。

$$T_a^{(V_L)} = iL_a, \quad T_a^{(V_S)} = iS_a \quad (6.73)$$

すると、 D_ϕ を次のように表わすことができる。

$$D_\phi = \frac{4}{r^2}L_a^2 + \frac{\Delta^2}{r^2} + \alpha(\sigma)^2 + \frac{4}{r^2}(1 - \Delta)L_3 \quad (6.74)$$

従って、角運動量 L_a に対する固有状態 $|l, m\rangle$ の上での固有値は次のように与えられる。

$$D_\phi|l, m\rangle = \frac{1}{r^2} [4l(l+1) + \Delta^2 + (r\sigma)^2 + 4(1 - \Delta)m] |l, m\rangle. \quad (6.75)$$

従って、全ての m についての寄与を掛けると、

$$\det D_\phi = \prod_{m=-l}^l [4l(l+1) + \Delta^2 + (r\sigma)^2 + 4(1 - \Delta)m]. \quad (6.76)$$

フェルミオンの場合には、 $\gamma_m = 2S_a$ を用いて

$$D_\psi = \frac{i}{r} (4S_a L_a + 2(1 - \Delta)S_3 + 1 + i r \sigma). \quad (6.77)$$

と表わせる。状態 $|\uparrow\rangle|l, m - \frac{1}{2}\rangle$ と $|\downarrow\rangle|l, m + \frac{1}{2}\rangle$ の間の混合があるので、これらの間の 2×2 行列として遷移行列を表わそう。

$$D_\psi = \frac{i}{r} \begin{pmatrix} 2m - \Delta + i r \sigma + 1 & 2\sqrt{(l - m + \frac{1}{2})(l + m + \frac{1}{2})} \\ 2\sqrt{(l - m + \frac{1}{2})(l + m + \frac{1}{2})} & -2m + \Delta + i r \sigma - 1 \end{pmatrix} \quad (6.78)$$

この 2×2 行列の行列式は

$$\begin{aligned} \det D_\psi &= -\frac{1}{r^2} \left[(i r \sigma)^2 - (2m - \Delta + 1)^2 - 4\left[l + \frac{1}{2}\right]^2 - m^2 \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \left[4l(l+1) + \Delta^2 + (r\sigma)^2 + 4(1 - \Delta)\left(m + \frac{1}{2}\right)_{-l+1 \sim l} \right] \end{aligned} \quad (6.79)$$

である。ただし、 $m = \pm(l + 1/2)$ の場合には許される状態が一つしかないので分けて考える必要がある。 $m = l + 1/2$ の場合には

$$\begin{aligned} D_\psi &= \frac{i}{r} (2l + 2 - \Delta + i r \sigma) \quad (m = l + \frac{1}{2}), \\ D_\psi &= \frac{i}{r} (2l + \Delta + i r \sigma) \quad (m = -l - \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (6.80)$$

従って、全ての m についての寄与を掛けると、

$$\det D_\psi = (2l + 2 - \Delta + i r \sigma)(2l + \Delta + i r \sigma) \prod_{m=-l+1}^l [4l(l+1) + \Delta^2 + (r\sigma)^2 + 4(1-\Delta)m] \quad (6.81)$$

ボゾンとフェルミオンの行列式を組み合わせれば

$$\frac{\det D_\psi}{\det D_\phi} = \frac{(2l + 2 - \Delta + i r \sigma)(2l + \Delta + i r \sigma)}{(2l + \Delta - i r \sigma)(2l + \Delta + i r \sigma)} = \frac{2l + 2 - \Delta + i r \sigma}{2l + \Delta - i r \sigma} \quad (6.82)$$

ただしこれは l と m_R を固定した空間に対する行列式である。これらの自由度に対しても全て掛け合わせると、以前と同じ次の結果を得る。

$$Z_{\text{chiral}} = \frac{\text{Det } D_\psi}{\text{Det } D_\phi} = \prod_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l + 2 - \Delta + i r \sigma}{2l + \Delta - i r \sigma} \right)^{2l+1} \quad (6.83)$$

ベクトル多重項について、作用は以前と同じ形になったが、念のため左不変枠を用いた計算も与えておこう。フェルミオン λ に対する微分演算子は、(4.129) を用いて次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} D_\lambda &= -\gamma^m D_m \lambda - \alpha(\sigma) + \frac{i}{2r} \\ &= \frac{2i}{r} S_a (2L_a + S_a) - \alpha(\sigma) + \frac{i}{2r} \end{aligned} \quad (6.84)$$

この固有値を計算するために、全角運動量 $J_a = L_a + S_a$ の固有状態で展開しよう。 $T_a^{(V_R)}$ に対する角運動量が $j_R = j$ のセクターに対しては L_a に対する角運動量も同じく j である。従って L_a と S_a の合成より、 J_a に対する角運動量は $j_L = j \pm 1/2$ である。それぞれに対して演算子 D_λ の固有値は次のように与えられる。

$$D_\lambda = \frac{2i}{r} (j_L(j_L + 1) - j_R(j_R + 1)) - \alpha(\sigma) + \frac{i}{2r} \quad (6.85)$$

あるいは、二つの場合を別々に与えると、

$$\frac{i}{r} (2j + 2 + i\alpha(r\sigma)) \quad (j_L = j + \frac{1}{2}), \quad -\frac{i}{r} (2j - i\alpha(r\sigma)) \quad (j_L = j - \frac{1}{2}). \quad (6.86)$$

である。従って、 D_λ の固有値を全て掛けて行列式を求めると、次のようになる。

$$\det D_\lambda = \prod_{\alpha \in \Delta} \prod_{j=0,1/2,\dots} (2j + 2 + i\alpha)^{(2j+2)(2j+1)} (2j - i\alpha)^{2j(2j+1)} \quad (6.87)$$

これは以前に求めた (6.46) に一致する。

次に、スカラー場 σ とベクトル場 A_m についてみてみよう。左不変枠における共変微分の公式 (4.129) を用いて (6.34) を書き換える。

$$f_a = -\frac{2}{r} L_b (S_b)_{ac} A_c - \frac{2}{r} A_a + \frac{2i}{r} L_a \varphi - i\alpha(\sigma_0) A_a, \quad f_{\text{gf}} = -\frac{2i}{r} L_a A_a. \quad (6.88)$$

これを用いて (6.35) のように演算子 \mathcal{O} を定義し、さらにベクトル場とスカラー場を

$$A_a = |l, m, m'\rangle A_{lmm'a}, \quad \sigma_a = |l, m, m'\rangle \sigma_{lmm'} \quad (6.89)$$

次のように展開することで行列表示すると、次のようになる。

$$M_{mA,nB} = \begin{pmatrix} (-2 - ir\alpha - 2S_c L_c)_{ma,nb} & 2i(L_a)_{mn} \\ -2i(L_b)_{mn} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.90)$$

l と m' については対角的であるので、固定して考える。さらに、 $m + a$ は保存するので、この和も固定することができる。すると、次の 4 つの展開係数によって張られる部分空間が得られる。

$$A_{l,m+1,m',-1}, \quad A_{l,m,m',0}, \quad A_{l,m-1,m',+1}, \quad \sigma_{l,m,m'}, \quad (6.91)$$

この 4 つの成分に対する行列の成分は次のように与えられる。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -ir\alpha + 2m & -\sqrt{2}(L_+)_{m+1,m} & 0 & 2i(L_{-1})_{m+1,m} \\ -\sqrt{2}(L_-)_{m,m+1} & -2 - ir\alpha & -\sqrt{2}(L_+)_{m,m-1} & 2i(L_0)_{mm} \\ 0 & -\sqrt{2}(L_-)_{m-1,m} & -ir\alpha - 2m & 2i(L_{+1})_{m-1,m} \\ \hline -2i(L_{-1})_{m,m+1} & -2i(L_0)_{m,m} & -2i(L_{+1})_{m,m-1} & 0 \end{array} \right) \quad (6.92)$$

ただし、 $|m| \geq l$ の場合には一部の成分が存在しないのであとで別に考える。

ここでは角運動量の行列表示が以下のように与えられる表示を用いている。

$$\langle m|L_z|m\rangle = m \quad (6.93)$$

$$\langle m+1|L_+|m\rangle = \langle m|L_-|m+1\rangle = \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \quad (6.94)$$

$$\langle m-1|L_-|m\rangle = \langle m|L_+|m-1\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \quad (6.95)$$

$l = 1$ とすればスピン行列が得られる。

注意しなければならないのは L_a の添え字 a をスピン固有値とみなす際には適切なユニタリー変換を行う必要があるということである。つまり、 L_a のベクトル添え字 a をスピン添え字とみなすためには $a = x, y, z$ と $a = +1, 0, -1$ の間の関係を決めなければならない。前者を直交基底、後者をスピン基底と呼ぶことにしよう。これらの間の関係は我々がそれぞれの基底において用いているスピン行列の表現から決めることができる。直交基底におけるスピン行列の成分は

$$(S_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc} \quad (6.96)$$

である。一方スピン基底における行列は上に与えた L_a の成分で $l = 1$ と置くことにより得られる。こちらは直交基底の行列と区別するために S'_a と表そう。これらの間の関係はユニタリー行列

$$U = \begin{pmatrix} U_{+1,x} & U_{+1,y} & U_{+1,z} \\ U_{0,x} & U_{0,y} & U_{0,z} \\ U_{-1,x} & U_{-1,y} & U_{-1,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.97)$$

を用いて

$$S'_a = US_aU^\dagger \quad (6.98)$$

と与えることができる。すなわち二つの基底の関係は

$$\langle m| = U_{ma}\langle a|, \quad |m\rangle = |a\rangle U_{am}^\dagger. \quad (6.99)$$

である。従って、行列 (6.90) の非対角ブロックに現れる L_a を成分とする縦ベクトルと横ベクトルは次のように書き換えなければならない。

$$\begin{pmatrix} L_{-1} \\ L_0 \\ L_{+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}L_+ \\ L_0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}L_- \end{pmatrix} \quad (6.100)$$

$$\left(L_{-1} \quad L_0 \quad L_{+1} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}L_- \quad L_0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}L_+ \right) \quad (6.101)$$

これらを代入すれば行列が次のようになる。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -ir\alpha + 2m & -\sqrt{2}(L_+)_{m+1,m} & 0 & \sqrt{2}i(L_+)_{m+1,m} \\ -\sqrt{2}(L_-)_{m,m+1} & -2 - ir\alpha & -\sqrt{2}(L_+)_{m,m-1} & 2im \\ 0 & -\sqrt{2}(L_-)_{m-1,m} & -ir\alpha - 2m & -\sqrt{2}i(L_-)_{m-1,m} \\ \hline -\sqrt{2}i(L_-)_{m,m+1} & -2im & \sqrt{2}i(L_+)_{m,m-1} & 0 \end{array} \right) \quad (6.102)$$

さらに L_a の具体的表示を代入して行列式を求めると、次の結果を得る。

$$\det M = 4l(l+1)(2l - ir\alpha)(2l + 2 + ir\alpha) \quad (6.103)$$

$|m| \geq l$ の場合には一部の成分が存在しないので、対応する行列のサイズは小さくなる。

$$\det M_{234}|_{m=l} = \det M_{124}|_{m=-l} = 4l(l+1)(2l + 2 + ir\alpha) \quad (6.104)$$

$$\det M_3|_{m=l+1} = \det M_1|_{m=-l-1} = -(2l + 2 + ir\alpha) \quad (6.105)$$

l 、 m 、 m' に対する積を取ると、次の結果が得られる。

$$\prod_{l=1/2}^{\infty} [4l(l+1)]^{(2l+1)^2} (2l + 2 + ir\alpha)^{(2l+3)(2l+1)} (2l - ir\alpha)^{(2l-1)(2l+1)} \quad (6.106)$$

最初の因子は S^3 上のラプラシアン行列式であり、ゴーストの寄与と相殺する。残された部分は以前に求めた結果 (6.43) を再現する。

6.6 ウィルソンループ

次の演算子を考えよう。

$$\mathcal{O}(C) = P \exp \left(i \int_C Adx \right) \quad (6.107)$$

右辺は次のように定義される。

$$\mathcal{O}(C) = \lim(1 + idx_N^m A_m(x_N)) \cdots (1 + idx_2^m A_m(x_2))(1 + idx_1^m A_m(x_1)) \quad (6.108)$$

ただし、 C はある曲線であり、その上を N 分割する点が x_i であるとする。 $dx_i^m = x_i^m - x_{i-1}^m$ である。極限は点を増やして分割を小さく分割していくことを表す。この演算子のゲージ変換性を調べよう。ゲージ場とスカラー場のゲージ変換は

$$A'_m = U(i\partial_m + A_m)U^{-1}, \quad \sigma' = U\sigma U^{-1}. \quad (6.109)$$

である。従って (6.108) の右辺のそれぞれの因子は次のように変換される。

$$(1 + idx_i^m A_m(x_i)) = U(x_i)(1 + dx_i^m A_m(x_i))U(x_{i-1}) \quad (6.110)$$

従って、演算子 $\mathcal{O}(C)$ のゲージ変換は

$$\mathcal{O}'(C) = U(x_N)\mathcal{O}(C)U^{-1}(x_0) \quad (6.111)$$

従って、閉曲線の場合に

$$W(C) = \text{tr}\mathcal{O}(C) \quad (6.112)$$

を定義すればこれはゲージ不変演算子である。

この演算子を少し変形して次のようにしても、ゲージ不変性には影響しない。

$$\mathcal{O}(C) = P \exp \left(i \int_C (A dx + f(x)|dx|\sigma) \right) = P \exp \left(i \int_C (n^m(s)A_m + f(s)\sigma) ds \right) \quad (6.113)$$

$f(s)$ は C 上で定義された関数である。

C とその上の関数 $f(x)$ をうまく選ぶことで、 \mathcal{O} が超対称性の一部で不変であるようにしよう。

$$\delta(n^m A_m + f\sigma) = -i\bar{\lambda}(\lambda + if)\epsilon + i\lambda(\lambda - if)\bar{\epsilon} \quad (6.114)$$

ここでは $f = -i$ と選ぶことにしよう。そのとき、超対称性が残るためには次の式がループ上で成り立つ必要がある。

$$\lambda\epsilon = -\epsilon, \quad \lambda\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon} \quad (6.115)$$

ここではキリングスピノルとして $\bar{\epsilon}_1$ を採用しよう。左不変枠を用いている場合、 $\bar{\epsilon}_1$ は、 $\gamma_3\bar{\xi} = \bar{\xi}$ を満足する定数スピノル $\bar{\xi}$ を用いて $\bar{\epsilon}_1 = g^{-1}\bar{\xi}$ と表わすことができる。従って

$$\lambda = g^{-1}\gamma_3 g \quad (6.116)$$

であれば上式が成り立つ。これは $SU(2)_L$ 対称性のキリングスピノル

$$n^m \propto L_{(3)}^m \quad (6.117)$$

であることを意味している。つまり、 $L_{(3)}^m$ の軌道の上に C があれば、それは BPS である。この長さは常に $2\pi r$ であるから、鞍点における演算子の古典的な値は

$$\mathcal{O}(C) = \text{tr}(\exp 2\pi r\sigma) \quad (6.118)$$

である。従って、期待値は次のように与えられる。

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{O}(\dots) d\sigma}{\int (\dots) d\sigma} \quad (6.119)$$

ただし右辺の分母は (6.21) の積分 (ただし $b = 1$ の場合) を表わし、分子はその被積分関数に (6.118) の因子を追加したものである。

第7章 4次元の指数と3次元の分配関数

この章では、Romelsberger[12]によって与えられた4次元の超共形指数の公式を局所化を用いて導出する。そしてその極限として3次元の理論の S^3 分配関数が得られることを見る。

7.1 4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称性

平坦な4次元時空上の4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称性は既に(1.19)と(1.21)に与えた。これを§3.7で与えた処方箋に従ってワイル共変化を行うことによって任意の共形平坦な4次元背景上の超共形変換を求めることができる。

変換パラメータが満足すべきキリング方程式は次のように与えられる。

$$D_\mu \epsilon = \gamma_\mu \bar{\kappa}, \quad D_\mu \bar{\epsilon} = \gamma_\mu \kappa. \quad (7.1)$$

ベクトル多重項については、 λ のワイルウェイトが $3/2$ であることを用いれば、何もしなくてもワイル共変であることがわかる。従って変換則は κ を含まない。

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= i(\epsilon \gamma_\mu \bar{\lambda}) - i(\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda), \\ \delta \lambda &= \frac{i}{2} \gamma^{\mu\nu} \epsilon F_{\mu\nu} + \mathcal{D}\epsilon, \\ \delta \bar{\lambda} &= -\frac{i}{2} \gamma^{\mu\nu} \bar{\epsilon} F_{\mu\nu} + \mathcal{D}\bar{\epsilon}, \\ \delta \mathcal{D} &= -(\epsilon \gamma^\mu D_\mu \bar{\lambda}) - (\bar{\epsilon} \gamma^\mu D_\mu \lambda). \end{aligned} \quad (7.2)$$

カイラル多重項については、 ϕ のワイルウェイトを Δ_ϕ 、 ψ のワイルウェイトを $\Delta_\phi + 1/2$ とすれば、次の変換則を得ることができる。

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \sqrt{2}(\epsilon\psi), \\
\delta\bar{\phi} &= \sqrt{2}(\bar{\epsilon}\bar{\psi}), \\
\delta\psi &= -\sqrt{2}\gamma^\mu\bar{\epsilon}D_\mu\phi + \sqrt{2}\epsilon\mathcal{F} - \frac{\Delta_\phi}{\sqrt{2}}\gamma^\mu D_\mu\bar{\epsilon}\phi, \\
\delta\bar{\psi} &= -\sqrt{2}\gamma^\mu\epsilon D_\mu\bar{\phi} + \sqrt{2}\bar{\epsilon}\bar{\mathcal{F}} - \frac{\Delta_\phi}{\sqrt{2}}\gamma^\mu D_\mu\epsilon\bar{\phi}, \\
\delta\mathcal{F} &= -\sqrt{2}(\bar{\epsilon}\gamma^\mu D_\mu\psi) - 2(\bar{\epsilon}\bar{\lambda})\phi - \frac{\Delta_\phi - 1}{\sqrt{2}}D_\mu\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi, \\
\delta\bar{\mathcal{F}} &= -\sqrt{2}(\epsilon\gamma^\mu D_\mu\bar{\psi}) - 2\bar{\phi}(\epsilon\lambda) - \frac{\Delta_\phi - 1}{\sqrt{2}}D_\mu\epsilon\gamma^\mu\bar{\psi}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

それぞれの場の上で超対称変換の交換関係を計算しよう。共形キリングベクトルと $U(1)_R$ 変換パラメータを以下のように定義しておく。

$$\begin{aligned}
v^\mu &= (\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon') + (\epsilon\gamma^\mu\bar{\epsilon}'), \\
\theta_R &= -i(\epsilon\kappa') + i(\kappa\epsilon') + i(\bar{\epsilon}\bar{\kappa}') - i(\bar{\kappa}\bar{\epsilon}').
\end{aligned} \tag{7.4}$$

これを用いると、成分場の上で超対称変換の交換関係を計算した結果は以下のように与えられる。

$$[\delta, \delta'] = 2\delta_c(v^\mu) + 3i\theta_R R. \tag{7.5}$$

δ_c は (3.49) に与えた共形変換である。 $U(1)_R$ チャージ R および共形変換 δ_c 中に現れるワイルウェイト Δ は表 7.1 に与えたものである。

表 7.1: 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超共形場理論における場の量子数

	A_μ	λ	$\bar{\lambda}$	\mathcal{D}	ϕ	ψ	\mathcal{F}	$\bar{\phi}$	$\bar{\psi}$	$\bar{\mathcal{F}}$
Δ	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	Δ_Φ	$\Delta_\Phi + \frac{1}{2}$	$\Delta_\Phi + 1$	Δ_Φ	$\Delta_\Phi + \frac{1}{2}$	$\Delta_\Phi + 1$
R	0	+1	-1	0	$\frac{2}{3}\Delta_\Phi$	$\frac{2}{3}\Delta_\Phi - 1$	$\frac{2}{3}\Delta_\Phi - 2$	$-\frac{2}{3}\Delta_\Phi$	$-(\frac{2}{3}\Delta_\Phi - 1)$	$-(\frac{2}{3}\Delta_\Phi - 2)$

平坦な時空で考えてみよう。キリング方程式の解は次のように与えられる。

$$\epsilon = \xi + x^\mu\gamma_\mu\bar{\zeta}, \quad \bar{\epsilon} = \bar{\xi} + x^\mu\gamma_\mu\zeta \tag{7.6}$$

$\xi, \bar{\xi}, \zeta, \bar{\zeta}$ はいずれも二成分定数スピノルである。 Q や S をこれらに対する変換として次のように定義する。

$$\delta = \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q} + \zeta S + \bar{\zeta}\bar{S}. \tag{7.7}$$

(7.6) を (7.5) に代入し、右辺の δ_c を (3.34) によって書き換えれば、次の交換関係を得る。

$$\begin{aligned}\{Q_a, \bar{Q}_b\} &= 2(\gamma^\mu)_{ab} P_\mu, \\ \{S_a, \bar{S}_b\} &= 2(\gamma^\mu)_{ab} K_\mu, \\ \{Q_a, S_b\} &= \epsilon_{ab}(2D + 3R) - (\gamma^{\mu\nu})_{ab} M_{\mu\nu}, \\ \{\bar{Q}_a, \bar{S}_b\} &= \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}(2D - 3R) - (\gamma^{\mu\nu})_{\dot{a}\dot{b}} M_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (7.8)$$

最後の交換関係より、 $\bar{Q}\phi = \bar{S}\phi = M\phi = 0$ を満足するスカラーの超共形プライマリー場に対しては $D = \frac{3}{2}R$ が成り立つことがわかる。

局所化を行うのに必要な変形項は、3次元の場合と同様に構成することができる、ベクトル多重項については、背景時空の詳細によらず、次のものを用いることができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{vector}}^{(4d)} &= \frac{1}{(\bar{\epsilon}\epsilon')} \delta(\bar{\epsilon}) \delta(\bar{\epsilon}') \left(-\frac{1}{4}(\bar{\lambda}\lambda) \right) \\ &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{8} (\gamma^{\mu\nu\rho\sigma})_R F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} - (\bar{\lambda}\gamma^\mu D_\mu \lambda) - \frac{1}{2} \mathcal{D}\mathcal{D}\end{aligned}\quad (7.9)$$

ワイルウェイトが Δ であるカイラル多重項については次のラグランジアン密度を用いることができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{chiral}}^{(4d)} &= \frac{1}{(\bar{\epsilon}\epsilon')} \delta(\bar{\epsilon}) \delta(\bar{\epsilon}') \left(-\frac{1}{2} \bar{\phi} \mathcal{F} \right) \\ &= -\bar{\phi} D_\mu D^\mu \phi + \bar{\phi} \mathcal{D}\phi - \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} + \left(-\frac{R}{12} \Delta(\Delta - 3) - \frac{K}{2} \Delta(\Delta - 1) \right) \bar{\phi}\phi \\ &\quad - (\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi) - \sqrt{2}\bar{\phi}(\lambda\psi) - \sqrt{2}(\bar{\psi}\lambda)\phi \\ &\quad - (\Delta - 1) [2\bar{\phi} D_\mu \phi + (\bar{\psi}\gamma_\mu \psi)] K_\mu\end{aligned}\quad (7.10)$$

ただし

$$K_\mu = \frac{D_\mu(\bar{\epsilon}\epsilon')}{\bar{\epsilon}\epsilon'}, \quad K = \frac{D_\mu D^\mu(\bar{\epsilon}\epsilon')}{\bar{\epsilon}\epsilon'}.\quad (7.11)$$

を定義した。

7.2 $S^3 \times S^1$ 上の超対称性

$S^3 \times S^1$ 上の超対称性を考えるにあたり、まずキリングスピノル方程式

$$D_\mu \epsilon = \gamma_\mu \bar{\kappa}, \quad D_\mu \bar{\epsilon} = \gamma_\mu \kappa\quad (7.12)$$

の解を具体的に与えよう。 $x^{1,2,3}$ を S^3 方向、 x^4 を S^1 方向の座標としよう。(7.12) において、 $\mu = 1, 2, 3$ と取ると S^3 上のキリングスピノル方程式になるから、 x^4 を固定したそれぞれのスライス上では ϵ と $\bar{\epsilon}$ は S^3 上のキリングスピノルである。(6.5) に与えた一般系より

$$\epsilon_{L/R} = P_{L/R} \rho(g^{-1}) \xi_{L/R}(x^4), \quad \bar{\epsilon}_{L/R} = P_{L/R} \rho(g^{-1}) \bar{\xi}_{L/R}(x^4)\quad (7.13)$$

と置くことができる。これらのスピノルは (6.6) を満足する。4 次元ではスピノルのカイラリティを式の両辺でそろえる必要があることに注意して書き換えると、次のようになる。

$$D_\mu \epsilon_{L/R} = (-/+)\frac{1}{2r}\gamma_\mu\gamma_4\epsilon_{L/R}, \quad D_\mu \bar{\epsilon}_{L/R} = (+/-)\frac{1}{2r}\gamma_\mu\gamma_4\bar{\epsilon}_{L/R} \quad (7.14)$$

これらの式で $\mu = 1, 2, 3$ の場合が (6.6) を与える。 L/R は S^3 の回転群 $SO(4)$ に対するカイラリティを表しており、スピノルのカイラリティとは異なることを注意しておく。これらのスピノルが 4 次元のキリングスピノル方程式 (7.12) を満足するためには $\mu = 4$ の場合にも (7.14) が成り立たなければならない。この条件から $\xi_{L/R}(x^4)$ と $\bar{\xi}_{L/R}(x^4)$ の x^4 依存性が決まる。最終的に次のキリングスピノルが得られる。

$$\epsilon_{L/R} = e^{(-/+)\frac{x^4}{2r}} P_{L/R}\rho(g^{-1})\xi_{L/R}, \quad \bar{\epsilon}_{L/R} = e^{(+/-)\frac{x^4}{2r}} P_{L/R}\rho(g^{-1})\bar{\xi}_{L/R} \quad (7.15)$$

この式中の $\xi_{L/R}$ と $\bar{\xi}_{L/R}$ は x^4 にも依存しない定数スピノルである。

指数

$$I = \text{tr}[(-1)^F \mathcal{O}] \quad (7.16)$$

を定義するためには一つ超対称性を選ぶ必要がある。ここではキリングスピノル

$$\bar{\epsilon} = \eta\bar{\epsilon}, \quad \bar{\epsilon} = e^{\frac{x^4}{2r}}\gamma_4\rho(g^{-1})\uparrow_L, \quad \kappa = \frac{1}{2r}\gamma_4\bar{\epsilon}. \quad (7.17)$$

を用いることにする。ただし \uparrow_L は上成分が 1、下成分が 0 である左巻きスピノルを表す。同様に、 \downarrow_L は下成分だけが 1 であるスピノルを表す。 γ_4 はカイラリティの調整のために挿入した。この量子数は

$$D(\bar{\epsilon}_1) = -\frac{1}{2}, \quad J_L(\bar{\epsilon}_1) = +\frac{1}{2}, \quad J_R(\bar{\epsilon}_1) = 0, \quad R(\bar{\epsilon}_1) = -1. \quad (7.18)$$

であり、これと矛盾しないように指数を定義する。その際、まったく逆の量子数を持つキリングスピノル

$$\epsilon = \eta\epsilon, \quad \epsilon = e^{-\frac{x^4}{2r}} P_L\rho(g^{-1})\downarrow_L, \quad \bar{\kappa} = -\frac{1}{2r}\gamma_4\epsilon. \quad (7.19)$$

も破れずに残る。これらの変換を次のようにも表す。

$$\delta(\eta\epsilon) = \eta Q, \quad \delta(\eta\bar{\epsilon}) = \eta\bar{Q}. \quad (7.20)$$

これら二つの超対称性の交換関係を計算しておこう。一般の式 (7.5) より

$$[\delta(\eta\epsilon), \delta(\eta'\bar{\epsilon})] = 2\delta_c(v^\mu) + 3i\theta_R R. \quad (7.21)$$

である。右辺に現れるパラメータは (7.4) に与えられているが、ここで考えている変換に対しては

$$v^\mu = \eta\eta'V^\mu, \quad \theta_R = -\frac{i}{r}\eta\eta'V^4, \quad V^\mu = (\epsilon\gamma^\mu\bar{\epsilon}). \quad (7.22)$$

である。これを用いると、反交換関係を次のように表すことができる。

$$\{Q, \bar{Q}\} = -2\delta_c(V^\mu) - \frac{3}{r}V^4R. \quad (7.23)$$

スピノルの具体系を代入すると、

$$V^\mu = (\downarrow)_L g \gamma^\mu \gamma^4 g^{-1} (\uparrow)_L \quad (7.24)$$

である。 $\mu = 4$ の場合には直ちに

$$V^4 = 1 \quad (7.25)$$

が得られる。それ以外の場合には §5.2 で行ったのと同様の変形を行えば、 S^3 上のキリングスピノルを与えることを確認できる。実際にやってみよう。

$$V^m = \frac{1}{r}(g^{-1})^{mM} \lambda^{MN} r_N \quad (7.26)$$

ただし $g^{N4} = r_N/r$ は球面上で $g \in SO(4)$ に対応する点を指す単位ベクトルである。また λ^{MN} の定義と 0 でない成分は

$$\lambda^{MN} = (\downarrow)_L \gamma^{MN} (\uparrow)_L, \quad \lambda^{12} = \lambda^{34} = i. \quad (7.27)$$

である。直交座標でのベクトル V の成分を用いれば、 V による回転が次のように表される。

$$V^M \partial_M = \frac{1}{r} \lambda^{MN} r_N \partial_M = -\frac{i}{r} (x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1 + x_3 \partial_4 - x_4 \partial_3) = -\frac{i}{r} (T_{12} + T_{34}) = \frac{2}{r} J_3^L. \quad (7.28)$$

従って、反交換関係は次のように書き換えられる。

$$\{Q, \bar{Q}\} = \frac{2}{r} \left(D - 2J_3^L - \frac{3}{2}R \right). \quad (7.29)$$

このことを踏まえ、コンパクト化を与える演算子 \mathcal{O} を次のように定義する。

$$q^D \mathcal{O} = q^{D - \frac{3}{2}R - 2J_L} t^{R+2J_L} x^{2J_R} \prod_i z_i^{h_i} \quad (7.30)$$

これを用いて定義した指数は q に依存しない。

7.3 局所化による超対称指数の計算

7.3.1 鞍点

ベクトル多重項の変形項は (7.9) は

$$\mathcal{L}_{\text{vector}}^{(4d)} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{8} (\gamma^{\mu\nu\rho\sigma})_R F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} - (\bar{\lambda} \gamma^\mu D_\mu \lambda) - \frac{1}{2} \mathcal{D} \mathcal{D} \quad (7.31)$$

であった。ディラック行列の具体的表現を用いれば $\gamma_R^{1234} = \epsilon_{123}$ であることがわかる。補助場 D の経路積分は単に定数因子を与えるだけであるので以下では無視する。ゲージ場の作用は

$$f_m = \frac{1}{2}\epsilon_{mpq}F_{pq} - F_{m4}, \quad f_{\text{gf}} \equiv \partial_\mu A_\mu = 0 \quad (7.32)$$

を用いて

$$\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{\text{gf}} = \frac{1}{2}f_m f_m + \frac{1}{2}f_{\text{gf}}^2 \quad (7.33)$$

と与えることができる。ただしゲージ固定条件として

$$f_{\text{gf}} = 0, \quad A_{ij}^{(0)} = 0 \quad (i \neq j) \quad (7.34)$$

を用いる。さらにゴースト項は

$$\mathcal{L}_{\text{gh}} = \bar{c}\partial_\mu D^\mu c \quad (7.35)$$

である。鞍点は次のように与えられる。

$$A = A_4^{(0)} dx^4. \quad (7.36)$$

7.3.2 ベクトル多重項の 1 ループ計算

ベクトル多重項の非ゼロモードの経路積分は、局所化によってガウス積分に帰着する。それを実際に計算するには f_m と f_{gf} を合わせた 4 成分場を A_μ から

$$f = \frac{1}{r}\mathcal{O}A \quad (7.37)$$

と与えるような線形演算子 \mathcal{O} を定義し、その行列式を計算すればよい。

S^3 上のベクトル場 $A = (A_1, A_2, A_3)$ は $(j_L, j_R) = (j \pm 1, j)$ に属する A_\pm と (j, j) に属する A_0 の 3 つの表現に分解することができる。同様に、 f も f_\pm と f_0 に分解する。すると、(7.37) の関係式は次のように表わされる。

$$\begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \\ f_0 \\ f_{\text{gf}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} \text{rot} + D_4 & & & \\ & \text{rot} + D_4 & & \\ \hline & & D_4 & -\text{grad} \\ & & \text{div} & \partial_4 \end{array} \right) \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \\ A_0 \\ A_4 \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

以前に与えた S^3 上の調和関数に対する公式を用いると、 \mathcal{O} の固有値が簡単に求められる。上二つの対角成分は

$$-(2j + 2 - rD_4), \quad (2j + rD_4) \quad (7.39)$$

を与える。(表 7.2 の [A1] と [A2]) 下半分のブロックから現れる行列式は表 7.2 の [A3]、[A4] のようになる。ゴーストはスカラーであるから、簡単にモードの固有値を計算することができ、表 7.2 の [c3]、[c4] が得られる。[A3] と [c3]、[A4] と [c4] は互いに相殺するので以下では考慮する必要はない。

表 7.2: ゲージ場とゴーストのモード

		factor
[A1]	$(j+1, j)_{j \geq 0}$	$rD_4 - 2j - 2$
[A2]	$(j-1, j)_{j \geq 1}$	$rD_4 + 2j$
[A3]	$(j, j)_{j \geq 1/2}$	$r^2 \partial_4 D_4 - 4j(j+1)$
[A4]	$(0, 0)$	$r\partial_4$
[c3]	$(j, j)_{j \geq 1/2}$	$r^2 \partial_4 D_4 - 4j(j+1)$
[c4]	$(0, 0)$	$(r\partial_4)(rD_4)$

次に、ゲージノ λ の寄与を考えよう。作用は

$$\mathcal{L} = \bar{\lambda} D_\lambda \lambda = -(\bar{\lambda} \gamma^m D_m \lambda) - i(\bar{\lambda} D_4 \lambda) \quad (7.40)$$

である。(4.104) を用いれば、固有値が次のようになることがわかる。(表 7.3 の $[\lambda 1]$ と $[\lambda 2]$)

$$rD_\lambda \sim i(2j + \frac{3}{2} - rD_4), \quad -i(2j + \frac{1}{2} + rD_4) \quad (7.41)$$

表 7.3: フェルミオンのモード

		factors
$[\lambda 1]$	$(j + \frac{1}{2}, j)_{j \geq 0}$	$2j + \frac{3}{2} - rD_4$
$[\lambda 2]$	$(j - \frac{1}{2}, j)_{j \geq \frac{1}{2}}$	$2j + \frac{1}{2} + rD_4$

ボゾンのモード $[A1]$, $[A2]$ とフェルミオンのモード $[\lambda 1]$, $[\lambda 2]$ について、インデックスの定義に現れる量子数がどのような値をとるか並たのが表 7.4 である。この表から次の一粒

表 7.4: モードの量子数。 $(\dots)_{a \sim b}$ は括弧の中身が a から b までの値をとることを意味する。

		$D - \frac{3}{2}R - 2J_L$	$R + 2J_L$
[A1]	$(j+1, j)_{j \geq 0}$	$i\alpha + 2(j+1 + m_L)_{0 \sim 2j+2}$	$2j+2 - 2(j+1 + m_L)_{0 \sim 2j+2}$
[A2]	$(j-1, j)_{j \geq 1}$	$-i\alpha + 2(j - m_L)_{1 \sim 2j-1}$	$2j - 2(j - m_L)_{1 \sim 2j-1}$
$[\lambda 1]$	$(j + \frac{1}{2}, j)_{j \geq 0}$	$i\alpha + 2(j + \frac{3}{2} + m_L)_{1 \sim 2j+2}$	$2j+2 - 2(j + \frac{3}{2} + m_L)_{1 \sim 2j+2}$
$[\lambda 2]$	$(j - \frac{1}{2}, j)_{j \geq \frac{1}{2}}$	$-i\alpha + 2(j - \frac{1}{2} - m_L)_{0 \sim 2j-1}$	$2j - 2(j - \frac{1}{2} - m_L)_{0 \sim 2j-1}$

子インデックスを読み取ることができる。

$$\begin{aligned} I_{\text{sp}}^{\text{vector}} &= \sum_{\alpha} \left(\sum_{j=0}^{\infty} q^{+i\alpha} t^{2j+2} \chi_j(x^2) - \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty} q^{-i\alpha} t^{2j} \chi_j(x^2) \right) \\ &= \sum_{\alpha} q^{-i\alpha} \left(-\frac{1-t^2}{(1-tx)(1-tx^{-1})} + 1 \right) \end{aligned} \quad (7.42)$$

どちらも α についての和はカルタン部分も含め全てについて取る。ゼロモードの処理によって現れる寄与も加えると

$$I_{\text{sp}}^{\text{vector}} = -\sum_{\alpha \neq 0} q^{-i\alpha} \frac{1-t^2}{(1-tx)(1-tx^{-1})} + \sum_{\alpha=0} q^{-i\alpha} \left(-\frac{1-t^2}{(1-tx)(1-tx^{-1})} + 1 \right) \quad (7.43)$$

である。

7.3.3 カイラル多重項の 1 ループ計算

カイラル多重項の変形項 (7.10) は

$$R = \frac{6}{r^2}, \quad K_1 = K_2 = K_3 = 0, \quad K_4 = \frac{1}{r}, \quad K = \frac{1}{r^2} \quad (7.44)$$

を用いれば次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{chiral}}^{(4d)} &= -\bar{\phi} D_{\mu} D^{\mu} \phi + \bar{\phi} \mathcal{D} \phi - \bar{\mathcal{F}} \mathcal{F} - \frac{1}{r^2} \Delta (\Delta - 2) \bar{\phi} \phi \\ &\quad - (\bar{\psi} \gamma^{\mu} D_{\mu} \psi) - \sqrt{2} \bar{\phi} (\lambda \psi) - \sqrt{2} (\bar{\psi} \lambda) \phi \\ &\quad - \frac{1}{r} (\Delta - 1) [2\bar{\phi} D_4 \phi + (\bar{\psi} \gamma_4 \psi)] \end{aligned} \quad (7.45)$$

カイラル多重項のスカラー場 ϕ の二次の作用は、鞍点において

$$-\bar{\phi} D_m D^m \phi - \bar{\phi} D_4 D_4 \phi - \frac{2(\Delta - 1)}{r} \bar{\phi} D_4 \phi - \frac{\Delta(\Delta - 2)}{r^2} \bar{\phi} \phi. \quad (7.46)$$

であり、 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の (j, j) 表現に属するモードに対する微分演算子の固有値は次のように与えられる。

$$r^2 D_{\phi} = (2j + rD_4 + \Delta)(2j + 2 - rD_4 - \Delta) \quad (7.47)$$

これを表にしたのが表 7.5 である。

次にフェルミオンの寄与をみてみよう。フェルミオンの作用は

$$\frac{1}{r} \bar{\psi} [-r\gamma^m D_m - irD_4 - i(\Delta_{\phi} - 1)] \psi \quad (7.48)$$

表 7.5: スカラー場のモード

	(j_L, j_R)	D	R
$[\phi 1]$	$(j, j)_{j \geq 0}$	$-ir\alpha + 2j + \Delta$	$\frac{2}{3}\Delta$
$[\phi 2]$	$(j, j)_{j \geq 0}$	$+ir\alpha + 2j + 2 - \Delta$	$-\frac{2}{3}\Delta$

表 7.6: $S^3 \times \mathbb{R}$ 上のフェルミオンのモード

	(j_L, j_R)	D	R
$[\psi 1]$	$(j - \frac{1}{2}, j)_{j \geq \frac{1}{2}}$	$-ir\alpha + 2j - \frac{1}{2} + \Delta$	$\frac{2}{3}\Delta - 1$
$[\psi 2]$	$(j + \frac{1}{2}, j)_{j \geq 0}$	$+ir\alpha + 2j + \frac{5}{2} - \Delta$	$-\frac{2}{3}\Delta + 1$

であり、 $(j + 1/2, j)$, $(j - 1/2, j)$ それぞれの表現に属するモードに対して、微分演算子の固有値は次のように与えられる。

$$rD_\psi = i(2j + 5/2 - rD_4 - \Delta_\phi), \quad -i(2j - 1/2 + rD_4 + \Delta_\phi) \quad (7.49)$$

これを表にしたのが表 7.6 である。これらのモードについて、インデックスの定義に現れる量子数がどのような値をとるかを表 7.7 に与える。この表から次の一粒子インデックス

表 7.7: $S^3 \times \mathbb{R}$ 上のモードの量子数

	(j_L, j_R)	$D - \frac{3}{2}R - 2J_L$	$R + 2J_L$
$[\phi 1]$	$(j, j)_{j \geq 0}$	$-ir\alpha + 2(j - m_L)_{0 \sim 2j}$	$2j + \frac{2}{3}\Delta - 2(j - m_L)_{0 \sim 2j}$
$[\phi 2]$	$(j, j)_{j \geq 0}$	$+ir\alpha + 2(j + 1 + m_L)_{1 \sim 2j+1}$	$2j + 2 - \frac{2}{3}\Delta - 2(j + 1 + m_L)_{1 \sim 2j+1}$
$[\psi 1]$	$(j - \frac{1}{2}, j)_{j \geq \frac{1}{2}}$	$-ir\alpha + 2(j + \frac{1}{2} - m_L)_{1 \sim 2j}$	$2j + \frac{2}{3}\Delta - 2(j + \frac{1}{2} - m_L)_{1 \sim 2j}$
$[\psi 2]$	$(j + \frac{1}{2}, j)_{j \geq 0}$	$+ir\alpha + 2(j + \frac{1}{2} + m_L)_{0 \sim 2j+1}$	$2j + 2 - \frac{2}{3}\Delta - 2(j + 1 + m_L)_{0 \sim 2j+1}$

を読み取ることができる。

$$\begin{aligned} I_{\text{sp}}^{\text{chiral}} &= \sum_{\rho} \sum_j \left(q^{-ir\alpha} t^{2j + \frac{2}{3}\Delta} \chi_j(x^2) \chi_R(z) - q^{ir\alpha} t^{2j + 2 - \frac{2}{3}\Delta} \chi_j(x^2) \chi_{\bar{R}}(z) \right) \\ &= \sum_{\rho} q^{-ir\alpha} \frac{t^{\frac{2}{3}\Delta}}{(1-tx)(1-tx^{-1})} \chi_R(z) - \sum_{\rho} q^{ir\alpha} \frac{t^{2 - \frac{2}{3}\Delta}}{(1-tx)(1-tx^{-1})} \chi_{\bar{R}}(z) \end{aligned} \quad (7.50)$$

こうして次の式が得られた。

$$\begin{aligned}
I_{\text{sp}} = & - \sum_{\alpha \neq 0} q^{-i\alpha} \frac{1-t^2}{(1-tx)(1-tx^{-1})} + \sum_{\alpha=0} q^{-i\alpha} \left(-\frac{1-t^2}{(1-tx)(1-tx^{-1})} + 1 \right) \\
& + \sum_{\rho \in R} \frac{q^{-ir\rho} t^{\frac{2}{3}\Delta_\rho} z^{F_\rho} - q^{ir\rho} t^{2-\frac{2}{3}\Delta_\rho} z^{-F_\rho}}{(1-tx)(1-tx^{-1})}
\end{aligned} \tag{7.51}$$

7.4 指数と S^3 分配関数の関係

指数は $S^3 \times S^1$ 上における経路積分によって得ることができるから、 S^1 の半径が小さくなる極限においては S^3 上の理論の分配関数を与えるはずである。[13, 14, 15] この関係を用いると squashed S^3 上の分配関数も簡単に得ることができる。また、指数は数係数まで含めて規格化をあいまいさなく決めることができるので、この関係を通して分配関数の規格化を定めることができる。(ただし、指数の符号は真空状態のフェルミオン数に依存し、これは一意的には決まらないので、符号の不定性はこの方法でもきまらない。)

$S^3 \times R$ 上の理論をコンパクト化して S^3 上の理論を得ることを考えてみよう。[15] その際に全ての場に対して周期境界条件を課したとすれば、 S^3 上の理論は単に $S^3 \times R$ 上の理論において $\partial_4 = 0$ という置き換えを行うことで得ることができる。しかし、前節でも見たように、このようなコンパクト化は超対称性を破る。実際 (7.31) や (7.45) において置き換え $\partial_4 = 0$ および $A_4 = \sigma$ を行ったものと S^3 上の作用 (6.23) および (6.50) を比較してみると、一致しない。補助場の間関係を

$$D^{(4d)} = D^{(3d)} + \frac{i}{r} \sigma \tag{7.52}$$

と取ることにより、ある程度それらの差異を吸収できるが、どうしても次の差が残ってしまう。

$$\mathcal{L}^{(3d)} - \mathcal{L}^{(4d)}|_{\partial_4=0} = \frac{1}{2r} \left((\bar{\lambda} \gamma^4 \lambda) - \sum_I (\bar{\psi}_I \gamma^4 \psi_I) \right) \tag{7.53}$$

この差を吸収するには、 $\partial_4 = 0$ と置くかわりに、フェルミオンの微分を次のように置き換えることにすればよい。

$$\partial_4 \lambda = \frac{1}{2r} \lambda, \quad \partial_4 \psi_I = -\frac{1}{2r} \psi_I. \tag{7.54}$$

すなわち、次の式が成り立つ。

$$\mathcal{L}^{(3d)} - \mathcal{L}^{(4d)}|_{\partial_4=R_0/(2r)} = 0. \tag{7.55}$$

このような置き換えを実現するには、コンパクト化の際に次の境界条件において半径が小さい極限を取ればよい。

$$e^{-\frac{\beta}{2r} R_0} \Phi(x + \beta) = \Phi(x) \tag{7.56}$$

ただし R_0 は ϕ_I の電荷を 0 にするような R チャージである。これは 4 次元の超共形代数に含まれる R とは異なることに注意すること。これらは次のように関係している。

$$R_0 = R - \frac{2}{3} \sum_I \Delta_I F_I \quad (7.57)$$

F_I はカイラル多重項 I だけをチャージ 1 でまわすチャージである。

以上より、

$$Z_{S^3} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \text{tr}[(-1)^F q^{D - \frac{1}{2}R_0}] = \lim_{\beta \rightarrow 0} I(t = q, x = 1, z_I = q^{\frac{\Delta_I}{3}}) \quad (7.58)$$

という関係が得られる。 $\beta \rightarrow 0$ の極限において

$$\text{Pexp}'(q^\omega) = \frac{q^{\frac{\omega}{2}}}{1 - q^\omega} = \frac{1}{e^{\beta\omega/(2r)} - e^{-\beta\omega/(2r)}} \sim \frac{1}{\beta\omega/r} \quad (7.59)$$

が成り立つことを用いれば、

$$\begin{aligned} \text{Pexp}'\left(-\frac{q^z - q^{\omega_1 + \omega_2 - z}}{(1 - q^{\omega_1})(1 - q^{\omega_2})}\right) &\sim \frac{\prod_{n_1, n_2=0}^{\infty} (n_1 \hat{\beta}\omega + n_2 \hat{\beta}\omega + \hat{\beta}z)}{\prod_{n_1, n_2=1}^{\infty} (n_1 \hat{\beta}\omega + n_2 \hat{\beta}\omega - \hat{\beta}z)} \\ &= S_2(\hat{\beta}z, \{\hat{\beta}\omega_1, \hat{\beta}\omega_2\}) \\ &= S_2(z, \{\omega_1, \omega_2\}) \end{aligned} \quad (7.60)$$

が成り立つ。ただし $\hat{\beta} = \beta/r$ とした。従って I に含まれる幾つかの因子の極限は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Pexp}'\left(-\sum_{\alpha \neq 0} \frac{q^{-i\alpha} - q^{2+i\alpha}}{(1 - q)^2}\right) &\sim \prod_{\alpha \neq 0} S_2(-i\alpha(rA)), \\ \text{Pexp}'\left(\sum_{\rho \in R} \frac{q^{-i\rho + \Delta} - q^{i\rho - \Delta + 2}}{(1 - q)^2}\right) &\sim \prod_{\rho \neq 0} \frac{1}{S_2(-i\rho(rA) + \Delta)}, \\ \text{Pexp}'\left(-\sum_{\alpha=0} \left(\frac{1 - q^2}{(1 - q)^2} - 1\right)\right) &\sim \prod_{\alpha=0} \frac{S_2'(0)}{\hat{\beta}} = \prod_{\alpha=0} \frac{2\pi}{\hat{\beta}}, \\ \oint [dA_4] &= \frac{1}{|W|} \prod_{i=1}^{\text{rank}G} \oint_0^{\frac{2\pi}{\hat{\beta}}} \frac{d(rA_i)}{2\pi/\hat{\beta}} \end{aligned} \quad (7.61)$$

従って、

$$Z = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \oint [dA_4] \text{Pexp}' I_{\text{sp}} = \frac{1}{|W|} \prod_{i=1}^{\text{rank}G} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d(rA_i) \right) \frac{\prod_{\alpha \neq 0} S_2(-i\alpha(rA))}{\prod_{\rho \in R} S_2(-i\rho(rA) + \Delta)} \quad (7.62)$$

が得られる。

squashed S^3 を得るには、トレースを取る際に S^3 の回転を行えばよい。12 方向について角度 ϕ_1 で、34 方向について角度 ϕ_2 で回転させてからトレースを取る。超対称性が残るように R_0 による回転の角度を調整することにより、次の指数を定義できる。

$$\begin{aligned} I &= \text{tr}[(-1)^F q^{(D-\frac{1}{2}R_0)+\phi_1(T_{12}+\frac{i}{2}R_0)+\phi_2(T_{34}+\frac{i}{2}R_0)}] \\ &= I(q, t = p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}}, x = p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}}, z_I = q^{\Delta_I} p_1^{-\frac{\Delta_I}{3}} p_2^{-\frac{\Delta_I}{3}}) \end{aligned} \quad (7.63)$$

ただし次の変数を導入した。

$$p_i = q^{1+i\phi_i} = q^{\omega_i}, \quad \omega_i = 1 + i\phi_i, \quad (i = 1, 2). \quad (7.64)$$

対応する一粒子指数は次のように与えられる。

$$I_{\text{sp}} = - \sum_{\alpha \neq 0} \frac{q^{-i\alpha} - p_1 p_2 q^{i\alpha}}{(1-p_1)(1-p_2)} - \sum_{\alpha=0} \left(\frac{1-p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)} - 1 \right) + \sum_{\rho \in R} \frac{q^{-i\rho+\Delta_I} - p_1 p_2 q^{i\rho-\Delta_I}}{(1-p_1)(1-p_2)} \quad (7.65)$$

$\beta \rightarrow 0$ 極限では $\text{Pexp}' I_{\text{sp}}$ は次のように振舞う。

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \text{Pexp}' I_{\text{sp}} = \left(\frac{2\pi}{\beta \sqrt{\omega_1 \omega_2}} \right)^{\text{rank} G} \frac{\prod_{\alpha \neq 0} S_2(-i\alpha(rA), \{\omega_1, \omega_2\})}{\prod_{\rho \in R} S_2(-i\rho(rA) + \Delta, \{\omega_1, \omega_2\})} \quad (7.66)$$

積分測度は同様なので、

$$Z = \frac{1}{|W|} \prod_{i=1}^{\text{rank} G} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(rA_i)}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \right) \frac{\prod_{\alpha \neq 0} S_2(-i\alpha(rA), \{\omega_1, \omega_2\})}{\prod_{\rho \in R} S_2(-i\rho(rA) + \Delta, \{\omega_1, \omega_2\})} \quad (7.67)$$

が得られる。

一般に、 ϕ_1 と ϕ_2 によるツイストを導入すると、 S^3 の対称性は $U(1)^2$ に破れる。しかし、 $\phi_1 = \pm \phi_2$ の場合には $SU(2) \times U(1)$ 対称性が残る。これが通常 squashed S^3 と呼ばれるものである。 ϕ_1 と ϕ_2 の相対符号によって、本質的に異なる二つの場合がある。まず、 $\phi_1 = \phi_2$ の場合には、二つの周期 ω_1 と ω_2 が等しく、double sine 関数の性質 $S_2(cz; \{c\omega_1, c\omega_2\}) = S_2(z; \{\omega_1, \omega_2\})$ を用いることで ϕ_i 依存性を吸収することができる。このため、分配関数は通常の S^3 の場合の (7.62) と同じになる。[16] 一方、二つの角度の符号が異なる場合には、分配関数は変形パラメータに依存する。

$$\phi_1 = -\phi_2 = u \quad (7.68)$$

とおき、さらに

$$v = \sqrt{1+u^2}, \quad b = \frac{1+iu}{v}, \quad b^{-1} = \frac{1-iu}{v}, \quad a_i = \frac{rA_i}{v}, \quad (7.69)$$

を定義すれば、

$$Z = \frac{1}{|W|} \prod_{i=1}^{\text{rank} G} \left(\int_{-\infty}^{\infty} da_i \right) \frac{\prod_{\alpha \neq 0} S_2(-i\alpha(a), \{b, b^{-1}\})}{\prod_{\rho \in R} S_2(-i\rho(a) + \frac{\Delta}{v}, \{b, b^{-1}\})} \quad (7.70)$$

となる。[17]

第8章 具体例

8.1 超対称 $SU(2)$ チャーン・サイモン理論

S^3 上の結び目 (knots) や絡み目 (links) の研究において、それらを識別する不変量を構成することは重要な問題であるが、Witten が代表的な結び目不変量であるジョーンズ多項式をウィルソンループの期待値として定義できることを示して以来、物理的な観点からも注目されるようになった [18]。 $\mathcal{N} = 2$ 超対称 Chern-Simons 理論においては、ゲージ場以外の粒子が物理的自由度を持たないため、それらを積分した後は位相的な Chern-Simons 理論が残る。従って、超対称性による局所化を用いた方法で結び目不変量を計算することができる。

ただし、局所化を用いた方法で計算できるのは BPS 条件を満足する Wilson loop として与えられるような限られた結び目だけである。具体的には、Hopf fibration 中の幾つかのファイバーとして与えられる絡み目だけを計算することができる。(ellipsoid 上の理論を考えれば、より広いクラスの「トラス結び目」をウィルソンループとして実現することができる [19]。) Hopf fiber n 本からなる絡み目を L_n と表わすことにすると、 $n = 1, 2, 3$ に対して L_n は図 8.1 に与える絡み目を表わす。ここでは、これらの絡み目に関するウィルソ

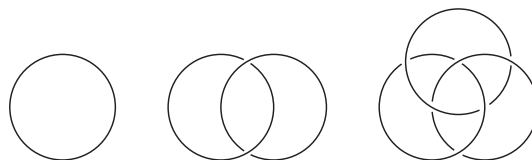


図 8.1: 絡み目 L_n ($n = 1, 2, 3$)

ンループ

$$W(L) = \text{tr}_{\text{fund}} P \exp \left(i \int_L A \right) \quad (8.1)$$

の期待値を計算して、関係式

$$\frac{\langle W(L) \rangle}{\langle W(\text{unknot}) \rangle} = (\text{phase}) \times J(L, q) \quad (8.2)$$

が成り立つことを確認しよう。ただし q は Chern-Simons level を用いて次のように定義される。

$$q = e^{-2\pi i/k} \quad (8.3)$$

右辺の位相因子も絡み数と関係した幾何学的な量であるが、ここではジョーンズ多項式の部分のみに注目する。

まず、ウィルソングループを挿入しない分配関数 Z を計算しよう。 $SU(2)$ のカルタン代数を次のようにパラメトライズする。

$$\lambda = x \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

すると、 $SU(2)$ Chern-Simons 理論の分配関数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} Z^{SU(2)} &= \frac{1}{2} \int e^{-\frac{\pi}{2}ikx^2} s_1(x-i)s_1(-x-i) \frac{dx}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \int e^{-\frac{\pi}{2}ikx^2} (2 \sinh(\pi x))^2 \frac{dx}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{k}} (q-1) \end{aligned} \quad (8.5)$$

一本のファイバーは unknot を与える。このときには積分に次の因子を挿入することで期待値を計算できる。

$$w(x) = e^{\pi x} + e^{-\pi x} \quad (8.6)$$

n 本のファイバー上のウィルソングループを挿入する場合には、次のように計算できる。

$$\langle W(L_n) \rangle = \frac{\int w(x)^n (\dots) dx}{\int (\dots) dx}. \quad (8.7)$$

L_n ($n = 1, 2, 3$) に対する計算結果をそれら絡み目のジョーンズ多項式とともに表 8.1 に与える。(結び目不変量の表は [20] で参照することができる。) これらの結果は確かに関係

表 8.1: $q = e^{-2\pi i/k}$

n	1	2	3
L_n	unknot	Hopf link	L6n1 (6_3^3)
$\langle W(L_n) \rangle$	$q^{\frac{1}{4}}(1+q)$	$(1+q)(1+q^2)$	$q^{-\frac{1}{4}}(1+q)(2+q^2+q^4)$
$J(L_n, q)$	1	$-q^{-\frac{1}{2}} - q^{-\frac{5}{2}}$	$2+q^2+q^4$

式 (8.2) が成り立つことを示している。

8.2 Jafferis-Yin 双対性

Jafferis と Yin [21] は随伴表現のカイラル多重項 Φ を含み、チャーン・サイモンレベルが $k = 1$ である $SU(2)$ チャーン・サイモン理論が単一のカイラル多重項 X よりなる系と

等価であることを発見した。この二つの理論の関係は Jafferis-Yin 双対性と呼ばれる。カイラル多重項 X はゲージ不変演算子 $\text{tr}\Phi^2$ に対応しており、 Φ のワイルウェイトを Δ とすれば X のワイルウェイトはその倍、 2Δ である。この双対性を確認するために、 S^3 分配関数を数値的に計算してみよう。

まず、 $SU(2)$ 理論の分配関数は、一般公式より次の積分によって与えられる。

$$Z^{SU(2)} = \frac{1}{2} \int e^{-\frac{\pi}{2}ix^2} \frac{s_b(x - \frac{i}{v})s_b(-x - \frac{i}{v})}{s_b(x - \frac{i(1-\Delta)}{v})s_b(-\frac{i(1-\Delta)}{v})s_b(-x - \frac{i(1-\Delta)}{v})} \frac{dx}{\sqrt{2}} \quad (8.8)$$

分子は $SU(2)$ ベクトル多重項の寄与であり、分母は随伴カイラル多重項 Φ の起用である。因子 $e^{-\frac{\pi}{2}ix^2}$ の振る舞いを良くするために、積分路を $x = e^{-i\epsilon t}$, $t \in \mathbb{R}$ のように傾ける必要がある。幾つかの Δ の値に対して数値的に積分を行った結果を表 8.2 に与える。 $b = 1$ とした。 $Z_{SU(2)}$ は複素数である。

一方、カイラル多重項 X の分配関数は

$$Z^X = \frac{1}{s_b(-\frac{i(1-2\Delta)}{v})} \quad (8.9)$$

によって与えられ、表 8.2 に与えたようにこれは実数である。

二つの理論に対する計算結果は異なるが、絶対値を比較すると $|Z_{SU(2)}| = Z_X$ が成り立っていることが確認できる。位相因子を詳しく見ると、次の関係が成り立っていることが確認できる。

$$Z^{SU(2)} = e^{i\phi} Z^X, \quad \phi = -\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{2\Delta + \Delta^2}{2v^2} \right) \quad (8.10)$$

$b = 1$ の場合にはこの結果は [21] において数値的に [22] において解析的に確認された。この非自明な位相のずれは、decouple した topological sector の寄与ではないかと推測される [21]。 $|Z|$ の Δ 依存性を見てみると、 $\Delta = 1/4$ において最小値を取っている。[10] にお

表 8.2:

Δ	$Z_{SU(2)}$	Z_X
0.10	+0.4530 - 0.9248i	1.0298
0.20	+0.0685 - 0.7243i	0.7275
0.24	-0.0418 - 0.7066i	0.7078
0.25	-0.0693 - 0.7037i	0.7071
0.26	-0.0971 - 0.7011i	0.7078
0.30	-0.2125 - 0.6907i	0.7226
0.40	-0.5463 - 0.6196i	0.8261

いて提案された F -maximization の処方によれば、これが IR 固定点における Δ の値を与える。

8.3 ABJM モデルの超共形指数

ABJM 理論 [23] は M2-ブレーンの低エネルギー有効理論として提案された、 $\mathcal{N} = 6$ 超対称性を持つ理論である。これは $U(N)_k \times U(N)_{-k}$ Chern-Simons matter 理論であり、 $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$ 上の N 枚の M2-ブレーンを記述していると考えられている。もしそうであれば、 $k = 1, 2$ の場合には超対称性が $\mathcal{N} = 8$ に拡大するはずであり、それを確認することは ABJM 理論と M2-ブレーンの関係を確立する上で重要な課題であった。

ABJM 理論のラグランジアンは k の値によらず $\mathcal{N} = 6$ 対称性を持っており、さらにそれが $\mathcal{N} = 8$ にまで拡大することを示すには R-対称性が $SO(6) \sim SU(4)$ から $SO(8)$ に拡大することを示せば十分である。そこで、超共形指数 (5.48) を用いて理論の BPS スペクトルを調べることにより、そのような対称性の拡大が実際に起こっているらしいということを見てみよう。

このような指数はモノポールチャージが 0 のセクターについては [24] において、モノポールまで含めたセクターについては [7] において計算され、スペクトルが望ましい対称性を尊重しているというだけでなく、ゲージ群のサイズ N が大きい極限においては重力側の解析結果 [4] と一致することも確認されている。

超共形指数を用いた解析では、ラグランジアンが持つ $\mathcal{N} = 6$ 超対称性のうち、 $\mathcal{N} = 2$ の超対称性に注目する。このことが対称性を部分的に破ってしまうため、残念ながら $SO(8)$ の対称性の出現を直接確かめることはできないが、それでも非自明なチェックを行うことができる。

ゲージ群のサイズ N が大きい場合には計算が複雑になるので、ここでは $N = 1$ の場合について考える。その場合には重力側の指数との比較を行うことはできないので、対称性が拡大するかどうかということのみに注目しよう。

$\mathcal{N} = 2$ の超対称多重項を用いて ABJM 理論を与えた場合に、そこに含まれる多重項を表 8.3 に与える。 V_1 と V_2 はそれぞれ $U(N)$ のベクトル多重項であり、 A_i と B_i ($i = 1, 2$) はカイラル多重項である。 A_i と B_i に対してはそれぞれ独立に $SU(2)$ 対称性が作用している。表には与えていないが、 $\mathcal{N} = 2$ 超共形代数に含まれる $U(1)_R$ 対称性も存在してい

表 8.3: ABJM 理論を構成する $\mathcal{N} = 2$ 超対称多重項

	$U(N)_k$	$U(N)_{-k}$	$SU(2)_A$	$SU(2)_B$	$U(1)_B$
V_1	adj	1	1	1	0
V_2	1	adj	1	1	0
A_i	N	\bar{N}	2	1	+1
B_i	\bar{N}	N	1	2	-1

る。表にある $SU(2)_A \times SU(2)_B$ 対称性は、この $U(1)_R$ とともに $\mathcal{N} = 6$ 超共形代数に含まれる $SU(4)_R$ 対称性の部分群になっている。つまり、ABJM 理論のラグランジアンが持つボゾンの大域的対称性は $SU(4)_R \times U(1)$ であり、 $\mathcal{N} = 2$ 超対称性を選ぶことで次のよう

に破れる。

$$SU(4) \times U(1) \rightarrow SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)_R \quad (8.11)$$

一方、もし $\mathcal{N} = 8$ 対称性が実現したとして、上と同じ $\mathcal{N} = 2$ 超対称性を選ぶと、 $SO(8)_R$ 対称性が次のように破れる。

$$SO(8)_R \rightarrow SO(6) \times U(1)_R \quad (8.12)$$

従って、 $\mathcal{N} = 6$ から $\mathcal{N} = 8$ への超対称性の拡大に伴うボゾンの対称性の拡大 $SO(6)_R \times U(1) \rightarrow SO(8)$ のうち、

$$SU(2) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SO(6) \quad (8.13)$$

については、超共形指数を用いて非自明なチェックを行うことができる。

$SU(2)_A \times SU(2)_B \times U(1)$ 対称性の生成子をそれぞれ J_A 、 J_B 、 Q_B としよう。 J_A は $SU(2)_A$ のカルタンの生成子であり、 A は $\pm 1/2$ の固有値を持つとする。 $SU(2)_B$ の生成子 J_B に対しては B が固有値 $\pm 1/2$ を持つとする。 $U(1)_B$ の生成子 Q_B はそれぞれの多重項に対して表 8.3 の $U(1)_B$ の欄に与えた固有値を持つものとする。さらに、後の計算では

$$F_1 = J_A - J_B, \quad F_2 = J_A + J_B, \quad F_3 = \frac{1}{2}Q_B \quad (8.14)$$

を定義しておくのが便利である。表 8.4 にこれらのチャージに対するカイラル多重項の量子数を与えておく。一般公式に従って $N = 1$ の場合の超共形指数を書き下すと次のように

表 8.4: ABJM 理論に含まれるカイラル多重項の量子数

	ρ	F_1	F_2	F_3	Δ
A_1	$a - a'$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
A_2	$a - a'$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
B_1	$a' - a$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
B_2	$a' - a$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$

なる。

$$I = \sum_{m,m'} \oint \frac{da}{2\pi} \frac{da'}{2\pi} q^{ik(ma-m'a')} \text{Pexp } I_{\text{sp}} \quad (8.15)$$

(m, m') は二つの $U(1)$ に対するモノポールチャージ、 (a, a') は二つの $U(1)$ に対する Wilson

line である。一粒子指数は

$$\begin{aligned}
I_{\text{sp}}(a, a', m, m') &= \frac{q^{-i(a-a')}x^{\frac{1}{2}+|m-m'|}}{1-x^2} (z_1^{\frac{1}{2}}z_2^{\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}} + z_1^{-\frac{1}{2}}z_2^{-\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}}) \\
&+ \frac{q^{i(a-a')}x^{\frac{1}{2}+|m-m'|}}{1-x^2} (z_1^{-\frac{1}{2}}z_2^{\frac{1}{2}}z_3^{-\frac{1}{2}} + z_1^{\frac{1}{2}}z_2^{-\frac{1}{2}}z_3^{-\frac{1}{2}}) \\
&- \frac{q^{i(a-a')}x^{\frac{3}{2}+|m-m'|}}{1-x^2} (z_1^{-\frac{1}{2}}z_2^{-\frac{1}{2}}z_3^{-\frac{1}{2}} + z_1^{\frac{1}{2}}z_2^{\frac{1}{2}}z_3^{-\frac{1}{2}}) \\
&- \frac{q^{-i(a-a')}x^{\frac{3}{2}+|m-m'|}}{1-x^2} (z_1^{\frac{1}{2}}z_2^{-\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}} + z_1^{-\frac{1}{2}}z_2^{\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}})
\end{aligned} \tag{8.16}$$

である。ゲージ群が $U(1)$ である場合には一粒子指数にはカイラル多重項のみが寄与する。 I_{sp} は $a - a'$ を通してのみ (a, a') に依存するから、 $\text{Pexp } I_{\text{sp}}$ を級数展開して得られる全ての項について q^{ia} と $q^{ia'}$ のべきは等しい。従って両方のべきが CS term の寄与 $q^{ik(ma-m'a')}$ によって相殺されるためには $m = m'$ でなければならない、それ以外の場合には積分の結果が 0 となる。さらに、 $k = 1$ の場合、 m による和を実行すればデルタ関数 $\delta(a)$ が現れるから、 a についての積分も行うことができる。その結果、

$$I = \text{Pexp} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^2} \chi_4(z_i) - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1-x^2} \chi_{\bar{4}}(z_i) \right] \tag{8.17}$$

ただし、 $SU(4)$ のキャラクターを次のように定義した。

$$\begin{aligned}
\chi_4(z_i) &= z_1^{\frac{1}{2}}z_2^{\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}} + z_1^{-\frac{1}{2}}z_2^{-\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}} + z_1^{-\frac{1}{2}}z_2^{\frac{1}{2}}z_3^{-\frac{1}{2}} + z_1^{\frac{1}{2}}z_2^{-\frac{1}{2}}z_3^{-\frac{1}{2}}, \\
\chi_{\bar{4}}(z_i) &= z_1^{-\frac{1}{2}}z_2^{-\frac{1}{2}}z_3^{-\frac{1}{2}} + z_1^{\frac{1}{2}}z_2^{\frac{1}{2}}z_3^{-\frac{1}{2}} + z_1^{\frac{1}{2}}z_2^{-\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}} + z_1^{-\frac{1}{2}}z_2^{\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{8.18}$$

この結果は系が $SU(4)$ 対称性を持つことを示唆している。

$U(1)_B$ 対称性の役割について見るために、 Q_B の固有値が n の状態に注目しよう。そのような状態は $z_3^{n/2}$ という因子を含む項に対応する。 z_3 と q^{ia} は

$$z_3^{\frac{1}{2}} q^{-i(a-a')} \tag{8.19}$$

の組み合わせで入ってくるので、 $z_3^{n/2}$ 項に現れるチャージを相殺するには CS term から $q^{-i(na-na')}$ という因子が現れることが必要である。これは

$$m = m' = n \tag{8.20}$$

であることを意味している。つまり、 Q_B はモノポールチャージに他ならない。このような演算子を組み合わせることで $SU(4)$ の対称性が現れるということは、対称性の拡大が本質的に非摂動的であることを意味している。

8.4 ABJM 行列模型 (I)

ABJM model の S^3 分配関数は次の積分 (ABJM 行列模型) によって与えられる。[9]

$$Z = \frac{1}{(N!)^2} \int \left(\prod_i e^{-ik\pi(\lambda_i^2 - \tilde{\lambda}_i^2)} d\lambda_i d\tilde{\lambda}_i \right) \frac{\prod_{i<j} \sinh^2(\pi(\lambda_i - \lambda_j)) \sinh^2(\pi(\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j))}{\prod_{i,j} \cosh^2(\pi(\lambda_i - \tilde{\lambda}_j))} \quad (8.21)$$

この積分は AdS/CFT を通して、古典的な 11 次元超重力理論だけではなく、量子論的な M 理論の情報をも含んでいると期待されるため、この積分の評価は非常に重要な問題である。ここでは k を有限に保ちつつ N を大きく取る極限でこの分配関数がどのように与えられるかを [25] に従って調べてみよう。(この極限はしばしば M 理論極限と呼ばれる。) 被積分関数を $e^{-F(\lambda, \tilde{\lambda})}$ とおく。

$$Z = \frac{1}{(N!)^2} \int \left(\prod_i d\lambda_i d\tilde{\lambda}_i \right) e^{-F(\lambda, \tilde{\lambda})} \quad (8.22)$$

関数 $F(\lambda, \tilde{\lambda})$ は

$$f(z) = \log [2 \cosh(\pi z)] = \log(e^{\pi z} + e^{-\pi z}) \quad (8.23)$$

を用いて次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} F(\lambda, \tilde{\lambda}) = & i\pi k \sum_j (\lambda_j^2 - \tilde{\lambda}_j^2) \\ & - 2 \sum_{i<j} \left[f(\lambda_i - \lambda_j + \frac{i}{2}) + f(\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j + \frac{i}{2}) \right] \\ & + 2 \sum_{i,j} \left[f(\lambda_i - \tilde{\lambda}_j) \right] \end{aligned} \quad (8.24)$$

実は、large N 極限の leading contribution を計算するにはこの積分を行う必要はなく、停留点での被積分関数の値を求めるだけでよい。すなわち

$$F = \min F(\lambda, \tilde{\lambda}) \quad (8.25)$$

でよい。最小値を与える固有値分布がどのようなものであるかを調べるのに、数値的な手法が有効である。この結果、 λ_i と $\tilde{\lambda}_i$ は図 8.2 にあるような分布をしていることがわかる。 λ_i と $\tilde{\lambda}_i$ はそれぞれ複素平面上のある曲線上に分布している。しかも、 λ_i と $\tilde{\lambda}_i$ は実軸に対して対称な位置に分布している。これら固有値の虚部は N が大きくなる極限においてオーダー 1 に留まるのに対して、実部のとる範囲は N のある正べきで大きくなっていく。さらに、隣り合う固有値の間隔は N が大きくなるにつれて小さくなっていくことがわかる。そこで、固有値分布について次の仮定を置くことにしよう。

$$\lambda_i = N^\alpha x_i - iy_i, \quad \tilde{\lambda}_i = N^\alpha x_i + iy_i, \quad (0 < \alpha < 1). \quad (8.26)$$

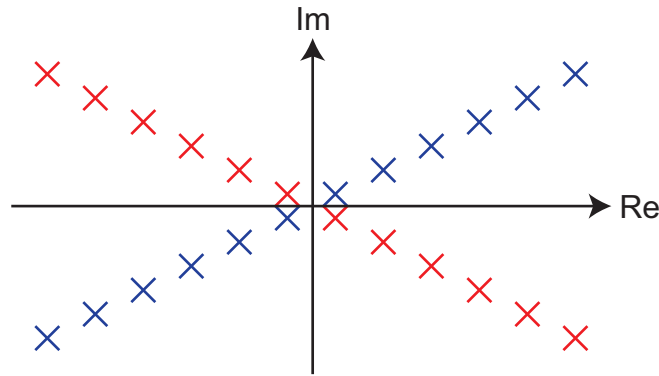


図 8.2: 固有値分布。赤は λ_i を、青は $\tilde{\lambda}_i$ を表わしている。

さらに、 x_i の分布を表わすために固有値密度関数

$$\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \quad (8.27)$$

を導入する。数値計算の結果より、 y_i は x_i の関数として $y_i = y(x_i)$ のように表わすことができる。と期待される。

これらの関数を用いれば、Chern-Simons term を起源とする (8.24) の一行目は次のように表わすことができる。

$$i\pi k \sum_j (\lambda_j^2 - \tilde{\lambda}_j^2) = i\pi k N \int dx \rho [(N^\alpha x - iy)^2 - (N^\alpha x + iy)^2] = N^{1+\alpha} \int dx 4\pi k x y \rho \quad (8.28)$$

(8.24) の二行目と三行目は (8.23) で定義された関数 $f(z)$ を用いて表わされているから、まずこの関数を N が大きい極限で扱いやすい形に書き換えておくのがよい。 $z = x + iy$ とおく。まず、 N が大きい極限では固有値のペアのほとんどについて、その実部は非常に大きい。その場合には $f(z)$ をその漸近形

$$f_{\text{asym}}(z) = \text{sign}(x)\pi z \quad |x| \gg 1. \quad (8.29)$$

で置き換えることができる。実はこの寄与はポテンシャル中で相殺する。そうすると、問題なのは固有値のペアの中で実部が接近している場合の補正 $f(z) - f_{\text{asym}}(z)$ のみである。 x が 0 に近いところでのみこれは 0 でないから、デルタ関数を用いて次のように表わすことができる。

$$f(z) - f_{\text{asym}}(z) = \delta(x)g(y). \quad (8.30)$$

関数 $g(y)$ を求めるために両辺を x で積分しよう。

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(z) - f_{\text{asym}}(z)] dx \\ &= \int_0^{\infty} [\log(2 \cosh \pi z) - \pi z] dx + \int_{-\infty}^0 [\log(2 \cosh \pi z) + \pi z] dx \\ &= \int_0^{\infty} \log[1 + e^{-2\pi z}] dx + \int_{-\infty}^0 [1 + e^{2\pi z}] dx \end{aligned} \quad (8.31)$$

ここで、第 1 項は

$$\int_0^{\infty} \log[1 + e^{-2\pi z}] dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi n z}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{-2\pi i n y}}{2\pi n^2} \quad (8.32)$$

であり、第 2 項も同様に

$$\int_{-\infty}^0 \log[1 + e^{2\pi z}] dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{+2\pi i n y}}{2\pi n^2} \quad (8.33)$$

となるから、これらを合わせることで関数 $g(y)$ を次の無限和として与えられる。

$$g(y) = \sum_{n \neq 0} (-1)^{n-1} \frac{e^{-2\pi i n y}}{2\pi n^2} \quad (8.34)$$

この和は dilog 関数を用いて表わすことができる。dilog 関数 $\text{Li}_2(z)$ は一般に初等関数では表わせないが、(8.34) の和については以下のように初等的に計算することができる。まず (8.34) を二回微分したものは、簡単に和を取ることができる。

$$g''(y) = \sum_{n \neq 0} (-1)^n 2\pi e^{-2\pi i n y} = \sum_{n \neq 0} 2\pi e^{-2\pi i n (y + \frac{1}{2})} = 2\pi \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(y + \frac{1}{2} + n) - 1 \right]. \quad (8.35)$$

これを二回積分することで次の式を得る。

$$g(y) = \frac{\pi}{6} - \pi y^2 \quad \left(-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\right) \quad (8.36)$$

ただし、積分定数は $g(y)$ が y の周期関数であることと $\int_0^1 g(y) dy = 0$ により決めた。

これを用いて (8.24) の二行目と三行目を書き換えよう。まず、二行目の第 1 項については

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j} f(\lambda_i - \lambda_j + \frac{i}{2}) &= -N^2 \int dx \int dx' \rho \rho' \delta(N^\alpha(x - x')) g(y - y' + \frac{1}{2}) \\ &= -N^{2-\alpha} \int dx \rho^2 g(\frac{1}{2}) \\ &= N^{2-\alpha} \int dx \frac{\pi}{12} \rho^2 \end{aligned} \quad (8.37)$$

まず、二行目の第 2 項からも全く同じものが得られる。三行目は

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i,j} f(\lambda_i - \tilde{\lambda}_j) &= N^2 \int dx \int dx' \rho \rho' 2\delta(N^\alpha(x - x')) g(y - y') \\ &= N^{2-\alpha} \int dx 2\rho^2 g(2y) \\ &= N^{2-\alpha} \int dx \left(\frac{\pi}{3} - 8\pi y^2\right) \rho^2 \end{aligned} \quad (8.38)$$

である。

以上を全部合わせると、 $F(\lambda, \tilde{\lambda})$ は N が大きい極限で次のように表わすことができる。

$$F(\lambda, \tilde{\lambda}) = N^{1+\alpha} \int dx 4\pi kxy\rho + N^{2-\alpha} \int dx \left(\frac{\pi}{2} - 8\pi y^2 \right) \rho^2 \quad (8.39)$$

これは N 依存性の異なる二つの項から成っている。二つの項がうまく釣り合って極値を与えるためには、二つの項の N 依存性が同じでなければならない。このことから $\alpha = 1/2$ であることがわかる。これは F が $N^{3/2}$ に比例することを意味している。

さらに数係数を決定しよう。そのためには (8.39) によって与えられた F を最小にするような関数 y 、 ρ を求めればよい。ただし ρ については

$$\int dx \rho = 1 \quad (8.40)$$

という拘束条件が課されているため、ラグランジュの未定乗数 μ を導入する。

$$F = N^{\frac{3}{2}} \left[\int \left\{ 4\pi kxy\rho + \left(\frac{\pi}{2} - 8\pi y^2 \right) \rho^2 \right\} dx - \mu \left\{ \int \rho dx - 1 \right\} \right] \quad (8.41)$$

y の変分より得られる式は

$$4\pi kx\rho - 16\pi y\rho^2 = 0 \quad (8.42)$$

ρ の変分より得られる式は

$$4\pi kxy + (\pi - 16\pi y^2) \rho - \mu = 0 \quad (8.43)$$

これらを解くと ρ と y の関数形が決まる。

$$\rho = \frac{\mu}{\pi}, \quad y = \frac{\pi k}{4\mu} x \quad (8.44)$$

ただし拘束条件 (8.40) が満足されるためには固有値の分布する範囲は

$$-\frac{\pi}{2\mu} \leq x \leq \frac{\pi}{2\mu} \quad (8.45)$$

でなければならない。これらの関数 F に代入すれば、 F が μ の関数として次のように得られる。

$$F = N^{\frac{3}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2\mu}}^{\frac{\pi}{2\mu}} \left(\frac{\pi k^2 x^2}{2} + \frac{\mu^2}{2\pi} \right) dx = N^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi^4 k^2}{24\mu^3} + \frac{\mu}{2} \right) \quad (8.46)$$

さらにこれを最小にするような μ を選べば最終的に次の結果を得る。

$$F = N^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2}}{3} \pi \sqrt{k} \quad (8.47)$$

これは超重力理論の予言に一致する。

8.5 ABJM 行列模型 (II)

同じものをまた別の方法 [26] で導出しておこう。出発点は前節と同じ ABJM 行列模型である。

$$Z = \int \frac{1}{N!^2} \left(\prod_{i=1}^N dx_i d\tilde{x}_i \right) \prod_{i=1}^N e^{-\pi i k (x_i^2 - \tilde{x}_i^2)} \left[\frac{\prod_{i < j} (2 \sinh \pi (x_i - x_j)) (2 \sinh \pi (\tilde{x}_i - \tilde{x}_j))}{\prod_{i,j=1}^N (2 \cosh \pi (x_i - \tilde{x}_j))} \right]^2 \quad (8.48)$$

まず、Cauchy identity と呼ばれる関係式

$$\frac{\prod_{i < j} \sinh(z_i - z_j) \sinh(\tilde{z}_i - \tilde{z}_j)}{\prod_{i,j=1}^N \cosh(z_i - \tilde{z}_j)} = \det \frac{1}{\cosh(z_i - \tilde{z}_j)} \quad (8.49)$$

を用いて、被積分関数の中の因子を行列式の積の形に書き換える。

$$Z = \frac{1}{N!^2} \int \left(\prod_{i=1}^N dx_i d\tilde{x}_i \right) \det \left(\delta_{ij} e^{-\pi i k x_i^2} \right) \det \left(\frac{1}{2 \cosh \pi (x_i - \tilde{x}_j)} \right) \\ \times \det \left(\delta_{ij} e^{\pi i k \tilde{x}_i^2} \right) \det \left(\frac{1}{2 \cosh \pi (\tilde{x}_i - x_j)} \right) \quad (8.50)$$

さらに、行列式の積は行列の積の行列式であることを用いれば、次のように書くことができる。

$$Z = \frac{1}{N!^2} \int \left(\prod_{i=1}^N dx_i d\tilde{x}_i \right) \det \left(\sum_{m=1}^N e^{-\pi i k x_i^2} \frac{1}{2 \cosh \pi (x_i - \tilde{x}_m)} e^{\pi i k \tilde{x}_m^2} \frac{1}{2 \cosh \pi (\tilde{x}_m - x_j)} \right) \quad (8.51)$$

行列式を展開すると、各項は括弧の中の行列要素の N 個の積である。その中には $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N$ が重複なく必ず一回ずつ現れる。従って、全ての \tilde{x}_m についての積分を行列式の中に入れることができる。

$$Z = \frac{1}{N!} \int \left(\prod_{i=1}^N dx_i \right) \det \left(\int d\tilde{x} e^{-\pi i k x_i^2} \frac{1}{2 \cosh \pi (x_i - \tilde{x})} e^{\pi i k \tilde{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \pi (\tilde{x} - x_j)} \right) \quad (8.52)$$

この式を量子力学的に扱うために、座標演算子 \hat{x} とその固有状態 $|x\rangle$ を用いて行列式の括弧の中のはじめ二つの因子を

$$e^{-\pi i k x_i^2} \frac{1}{2 \cosh \pi (x_i - \tilde{x})} = \int dx_{(1)} \langle x_i | e^{-\pi i k \hat{x}^2} | x_{(1)} \rangle \frac{1}{2 \cosh \pi (x_{(1)} - \tilde{x})} \quad (8.53)$$

のように書き換える。一般に

$$\int dx_{(1)} |x_{(1)}\rangle f(x_{(1)} - x) = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(\hat{p}) |x\rangle \quad (8.54)$$

と表せることを用いると、さらに次のように書き換えることができる。

$$e^{-\pi i k x_i^2} \frac{1}{2 \cosh \pi (x_i - \tilde{x})} = \langle x_i | e^{-\pi i k \hat{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} | \tilde{x} \rangle \quad (8.55)$$

ただし \hat{p} は

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \quad (8.56)$$

を満足する運動量演算子であり、 $\tilde{f}(k)$ は $f(x)$ のフーリエ変換

$$\tilde{f}(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx} \quad (8.57)$$

である。また、次の二つの関数が互いのフーリエ変換であることを用いた。

$$f(x) = \frac{1}{2 \cosh \pi x}, \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2 \cosh \frac{k}{2}}. \quad (8.58)$$

残りの二つの因子についても同様の書き換えを行えば

$$Z = \frac{1}{N!} \int \left(\prod_{i=1}^N dx_i \right) \det \left(\langle x_i | e^{-\pi i k \hat{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} e^{\pi i k \hat{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} | x_j \rangle \right) \quad (8.59)$$

が得られる。これは、一粒子密度演算子が

$$\hat{\rho} = e^{-\pi i k \hat{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} e^{\pi i k \hat{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} \quad (8.60)$$

によって与えられ、互いに相互作用しない N 個のフェルミオン粒子の分配関数に他ならない。

式の形が対称になるようにユニタリー変換を行っておこう。

$$\hat{\rho} = e^{-\frac{\pi i k}{2} \hat{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} e^{\frac{\pi i k}{2} \hat{x}^2} \cdot e^{\frac{\pi i k}{2} \hat{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} e^{-\frac{\pi i k}{2} \hat{x}^2} \quad (8.61)$$

さらに関係式 $e^{-\frac{\alpha}{2} \hat{x}^2} \hat{p} e^{\frac{\alpha}{2} \hat{x}^2} = \hat{p} - i\alpha \hat{x}$ を用いればこの演算子は次のように書き換えることができる。

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2 \cosh \left(\frac{\hat{p}}{2} + \frac{\pi k \hat{x}}{2} \right)} \cdot \frac{1}{2 \cosh \left(\frac{\hat{p}}{2} - \frac{\pi k \hat{x}}{2} \right)} \quad (8.62)$$

$$Z = \int \frac{\prod_{i=1}^N dx_i}{N!} \det \langle x_i | \hat{\rho} | x_j \rangle \quad (8.63)$$

ここまでは何の近似も行っていない。

$$\hbar = 1 \quad \beta = 1$$

半古典近似を行い、

$$H = \log \left[2 \cosh \left(\frac{\hat{p}}{2\hbar} + \frac{\pi k \hat{x}}{2} \right) \right] + \log \left[2 \cosh \left(\frac{\hat{p}}{2\hbar} - \frac{\pi k \hat{x}}{2} \right) \right] \quad (8.64)$$

非常に N が大きい場合には状態が上の方まで埋まっているから、

$$H = \left| \frac{p + \pi k x}{2} \right| + \left| \frac{p - \pi k x}{2} \right|. \quad (8.65)$$

エネルギー E 以下の状態の数は

$$x = \pm \frac{E}{\pi k}, \quad p = \pm E \quad (8.66)$$

で囲まれた長方形の内部である。

$$N(E) = \frac{1}{2\pi} \frac{4E^2}{\pi k} = \frac{2E^2}{\pi^2 k} \quad (8.67)$$

状態密度は

$$\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{4E}{\pi^2 k} \quad (8.68)$$

あるエネルギーまでが埋まっていたとしたときの全エネルギーは

$$E_{\text{tot}} = \int_0^E \rho(E) E dE = \int_0^E \frac{4E^2}{\pi^2 k} = \frac{4E^3}{3\pi^2 k} = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi k^{1/2} N^{2/3}. \quad (8.69)$$

これは以前に計算したものに一致する。

$E \propto N^{1/2}$ であり、これがフェルミ面を与える。そして、温度 $T = 1 \ll E$ の場合、このフェルミ面の近傍 T くらいの幅の状態がエントロピーに寄与するから、エントロピーは状態密度と温度の積である。

$$S \sim T\rho \propto N^{1/2} \quad (8.70)$$

従って、 $N^{3/2}$ 項については内部エネルギーで考えても自由エネルギー $F = E - TS$ で考えても同じである。

謝辞

このノートのもととなった集中講義を行う機会を与えてくださった京都大学理学部素粒子論研究室の皆様へ感謝いたします。

付録 A Chern-Simons 項に対する 1-loop 補正

平坦な 3 次元時空においてフェルミオンの 1-loop 効果による Chern-Simons レベルに対する補正を計算しよう。ユークリッド計量を用いる。フェルミオンの作用は次のように与えられる。

$$S = - \int d^3x \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi, \quad D_m \psi = (\partial_m - iA_m) \psi. \quad (\text{A.1})$$

フォトン場 A_μ は外場として扱い、フェルミオン場 ψ と $\bar{\psi}$ についてのみ経路積分を実行する。次のように自由項と相互作用項に分ける。

$$S_0 = - \int d^3x \bar{\psi} (\not{\partial} + m) \psi, \quad S_1 = i \int d^3x \bar{\psi} \not{A} \psi, \quad (\text{A.2})$$

ここでは特に Chern-Simons 項についての補正を見るために、二本のフォトン外線を持つ図形を考える。すなわち、次の相関関数を計算する。

$$\Gamma^{(2)} = -\frac{1}{2} \langle S_1 S_1 \rangle_{S_0}^{\text{conn}}. \quad (\text{A.3})$$

S_0 から導かれる propagator

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_{S_0} = \frac{-1}{\not{\partial}_x + m} \delta(x-y) = \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{i\not{p} - m}{p^2 + m^2} e^{ip(x-y)} \quad (\text{A.4})$$

を用いれば

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)} &= -\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \text{tr} \not{A}(x) \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_{S_0} \not{A}(y) \langle \psi(y) \bar{\psi}(x) \rangle_{S_0} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\text{tr} \not{A}(x) (i\not{p} - m) \not{A}(y) (i\not{q} - m)}{(p^2 + m^2)(q^2 + m^2)} e^{i(p-q)(x-y)} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

さらに、Chern-Simons term を得るために、パリティを破る項、すなわちトレースの中に 3 つの γ -行列を含む項のみを抜き出そう。

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)} &= -mi \int d^3x \int d^3y \gamma^{mnp} A_m(x) A_n(y) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(p-q)_p e^{i(p-q)(x-y)}}{(p^2 + m^2)(q^2 + m^2)} \\ &= -m \int d^3x \int d^3y \gamma^{mnp} A_m(x) \partial_p A_n(y) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(p-q)(x-y)}}{(p^2 + m^2)(q^2 + m^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

二行目へ移る際に $(p-q)_p$ を $i\partial_{y^p}$ で置き換え、部分積分を行った。さらに、運動量積分を実行する。置き換え

$$p = k + \frac{l}{2}, \quad q = k - \frac{l}{2}, \quad (\text{A.7})$$

を行えば exponential factor は $e^{i(p-q)(x-y)} = e^{il(x-y)}$ となる。長距離での振る舞いを見るために、この exponential factor 以外の因子については l は十分小さいとして無視する。そうすると運動量積分を簡単に実行できて、次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)} &= -m \int d^3x \int d^3y \gamma^{mnp} A_m(x) \partial_p A_n(y) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} e^{il(x-y)} \\ &= -m \int d^3x \int d^3y \gamma^{mnp} A_m(x) \partial_p A_n(y) \frac{1}{8\pi|m|} \delta(x-y) \\ &= \frac{1}{8\pi} \text{sign}(m) \int d^3x \gamma^{mnp} A_m(x) \partial_n A_p(x) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

これは Chern-Simons レベルが次のような補正を受けることを意味する。

$$k_{\text{eff}} = k_{\text{bare}} + \Delta k, \quad \Delta k = \frac{1}{2} \text{sign}(m). \quad (\text{A.9})$$

付録B 特殊関数

B.1 ゼータ関数

リーマンのゼータ関数は

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\text{B.1})$$

によって定義される。Re $s > 1$ の場合にはこの和は収束し、それ以外の場合には解析接続によって定義される。一般化されたリーマンのゼータ関数は

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \quad (\text{B.2})$$

によって定義される。(B.1) は $n = 1$ からなのに対し (B.2) では $n = 0$ を含むことに注意。 $\zeta(s) = \zeta(s, 1)$ である。 ζ 関数正則化に用いる場合には s が 0 および負の整数の場合の特殊値が重要である。幾つかの例を与えておく。

$$\zeta(0, a) = \frac{1}{2} - a, \quad \zeta(-1, a) = \frac{1}{24} - \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2}\right)^2, \quad \zeta(-2, a) = \frac{1}{12} \left(a - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \left(a - \frac{1}{2}\right)^3. \quad (\text{B.3})$$

特に $a = 1$ の場合は

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \quad \zeta(-2) = 0 \quad (\text{B.4})$$

となる。この結果を用いると、同じ定数 c を $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して無限個掛け合わせた値は次のように求まる。

$$\prod_{n=1}^{\infty} c = c^{\sum_{n=1}^{\infty} 1} = c^{\zeta(0)} = c^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.5})$$

さらに、次のような級数もゼータ関数と呼ばれる。

$$F(s) = \sum_n \frac{1}{a_n^s} \quad (\text{B.6})$$

n は自然数、あるいは幾つかの自然数に対する和であり、 a_n はそれらの多項式である。この級数は s の実部が大きいところで収束し、それ以外の s に対しては解析接続によって定義される。

ゼータ関数正則化を用いて発散する無限積を評価するには形式的に成り立つ次の関係式を用いる。

$$\prod_n a_n = \exp \left(- \frac{dF(s)}{ds} \Big|_{s=0} \right) \quad (\text{B.7})$$

たとえば、 $a_n = n + a$ の場合には

$$\prod_{n=1}^{\infty} n = \sqrt{2\pi}, \quad \prod_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2} \quad (\text{B.8})$$

などが得られる。ただし、

$$\zeta'(s)|_{s=0} = -\frac{1}{2} \log(2\pi), \quad \zeta'(s, \frac{1}{2})|_{s=0} = -\frac{1}{2} \log 2 \quad (\text{B.9})$$

を用いた。半奇数の積については、整数の積と (B.5) を用いて

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}}{\prod_{n=1}^{\infty} n} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} 2} = \sqrt{2} \quad (\text{B.10})$$

のように得ることもできる。

B.2 二重対数関数

多重対数関数は次のように定義される。

$$\text{Li}_n z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}. \quad (\text{B.11})$$

$n = 1$ の場合には通常対数関数によって表わすことができる。

$$\text{Li}_1 z = -\log(1 - x) \quad (\text{B.12})$$

$n = 2$ の場合、 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲の実数に対して

$$\text{Re}(\text{Li}_2 e^{ix}) = \frac{1}{4}(x - \pi) - \frac{\pi^2}{12} \quad (\text{B.13})$$

が成り立つ。これは以下のように示すことができる。まず、定義式より次のように表わすことができる。

$$\text{Re}(\text{Li}_2 e^{ix}) = \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{e^{ikx}}{k^2}. \quad (\text{B.14})$$

x で二回微分すれば

$$\frac{d^2}{dx^2} \text{Re}(\text{Li}_2 e^{ix}) = -\frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} e^{ikx} = -\pi \delta_{\text{periodic}}(x) + \frac{1}{2}. \quad (\text{B.15})$$

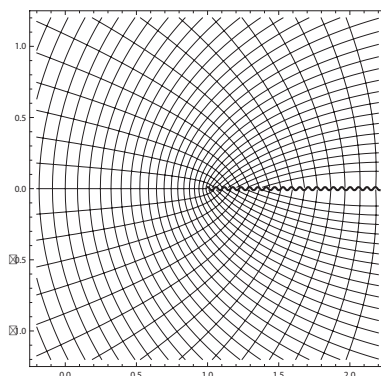


図 B.1: dilog 関数

ただし $\delta_{\text{periodic}}(x)$ は $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ に台を持つ周期的デルタ関数である。(B.14) は周期 2π の周期関数であるから $0 \leq x \leq 2\pi$ に限ろう。(B.15) を二回積分し、周期性と $0 \leq x \leq 2\pi$ で積分したときに 0 になることを用いて積分定数を決定すれば (B.13) を得る。Mathematica における $\text{PolyLog}[2, z]$ 関数は $z \geq 1$ の実軸上に分岐を持つ。分岐の両側で Li_2 は次の不連続性を持つ。

$$\text{Li}_2(x + i0) - \text{Li}_2(x - i0) = 2\pi i \log x, \quad (x \geq 1). \quad (\text{B.16})$$

しばしば $\text{Li}_2(e^x)$ という関数が現れるが、これは $x = 2\pi n$ に分岐点を持ち、Mathematica の PolyLog 関数を用いた場合、そこから伸びる分岐線は $x = 2\pi in + \mathbb{R}_+$ である。それらの線上での不連続性は

$$\text{Li}_2(e^{x+i0}) - \text{Li}_2(e^{x-i0}) = 2\pi i(x - 2\pi in), \quad (x \in \mathbb{R}_+ + 2\pi in) \quad (\text{B.17})$$

である。すなわち、分岐点 $x = 2\pi in$ を時計回りにまわり別のシートに移ると関数の値は $2\pi i(x - 2\pi in)$ だけ変化する。このことから、関数 $\text{Li}_2(e^x)$ には二つの整数 a と b でラベルされるシートがあり、 $a = 0, b = 0$ のシート上での値からのずれは

$$2\pi i a x + (2\pi)^2 b \quad (\text{B.18})$$

のように与えられる。

次の式が成り立つ。

$$\text{Li}_2 z + \text{Li}_2 \frac{1}{z} = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}(\log(-z))^2 \quad (\text{B.19})$$

B.3 量子ポツホハンマー関数

ポツホハンマー記号は、階乗の一般化であり、次のように定義される。

$$(x)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x + k) \quad (\text{B.20})$$

この量子版は次の量子ポツホハンマー記号である。

$$(z; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - zq^k) \quad (\text{B.21})$$

特に $z = q$ の場合がしばしば重要である。

$$(q; q)_n = \prod_{k=1}^n (1 - q^k) \quad (\text{B.22})$$

文献によっては $(q; q)_n$ のことを $(q)_n$ と表している場合があるので注意が必要である。

以下では n を無限大に取ったものについて考える。この場合、量子ポツホハンマー関数は $|q| < 1$ に対して次の無限積によって定義される。

$$(z; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - zq^k). \quad (\text{B.23})$$

この無限級数は一粒子ハミルトニアン固有値が $E = 0, 1, 2, 3, \dots$ をとるフェルミオン系の大分配関数

$$(z; q)_\infty = \text{tr}((-z)^N q^E) \quad (\text{B.24})$$

とみなすことができる。ただし N はフェルミオン数演算子、 H は全ハミルトニアンである。フェルミオン数を固定した和を先に取るにより次の表式が得られる。

$$(z; q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n q^{-n} \prod_{k=1}^n \frac{q^k}{1 - q^k} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{-n} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - q^{-k}} \quad (\text{B.25})$$

あるいは次のように書くこともできる。

$$(z; q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q; q)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{q^{-n}}{(q^{-1}; q^{-1})_n} \quad (\text{B.26})$$

n に対する無限和は $|z| < 1$ であれば $|q| < 1$ に対しても $|q| > 1$ に対しても収束する。 $|q| > 1$ に対しては (B.25) の二番目の表式は一粒子ハミルトニアン固有値が $E = 0, 1, 2, \dots$ であるボゾンの大分配関数

$$\text{tr}((zq^{-1})^N q^{-H}) \quad (\text{B.27})$$

とみなすことができる。ただし N はボゾンの個数、 H は全ハミルトニアンである。このことから、次の無限積表示を得る。

$$(z; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - zq^{-k-1}} = \frac{1}{(zq^{-1}; q^{-1})_\infty}. \quad (\text{B.28})$$

これは $|q| > 1$ において収束する。 q 平面の異なる領域での二つの無限積表示 (B.23) と (B.28) はどちらも $|q| = 1$ の円周上に調密な特異点を持つので、それらを q 平面上で互いの解析接続とはみなせないことを注意しておこう。

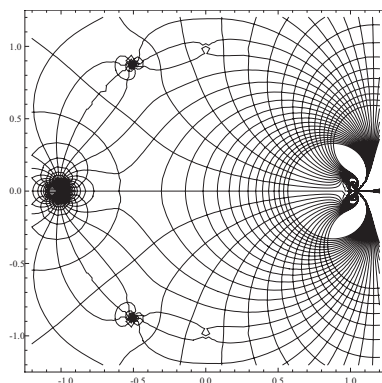


図 B.2: q-Pochhammer 関数 ($z = 0.3$)。この図からはよくわからないが $|q| = 1$ の円周上に極が稠密に分布している。

Mathematica においては $|q| \leq 1$ についてのみ次の関数が定義されている。

$$\text{QPochhammer}[z, q] = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - zq^k). \quad (\text{B.29})$$

$q = e^{-\epsilon} < 1$ が 1 に近いときの漸近形がしばしば重要になるが、それは次のように対数を取り、和を積分に直すことで評価できる。

$$\begin{aligned} \log(z; q)_{\infty} &= \sum_{n=0}^{\infty} \log(1 - ze^{-n\epsilon}) \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\infty} dx \log(1 - ze^{-x}) + \mathcal{O}(1) \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \text{Li}_2 z + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

ただし $|z| < 1$ とした。 $(q^n z; q)$ に対しても、 $n > 0$ が有限であれば $q \rightarrow 1$ の極限で同じ結果を得る。

B.4 多重正弦関数

多重ゼータ関数を (B.6) において $a_n = n_1 \omega_1 + \cdots + n_r \omega_r + z$ と置いた次の式によって定義する。

$$\zeta_r(s, z; \omega) = \sum_{n_i=0}^{\infty} (n_1 \omega_1 + \cdots + n_r \omega_r + z)^{-s}, \quad \text{Re } z > 0, \quad \text{Re } s > r. \quad (\text{B.31})$$

さらにここから多重ガンマ関数を

$$\Gamma_r(z; \omega) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s} \zeta_r(s, z; \omega) \Big|_{s=0}\right) = \prod_{n=0}^{\infty} (n_1 \omega_1 + \cdots + n_r \omega_r + z)^{-1} \quad (\text{B.32})$$

によって定義する。無限積表示は形式的な定義であるが、この関数が満足する公式を確認するのに便利である。さらに多重正弦関数は次のように定義される [27]。

$$\begin{aligned} S_r(z; \boldsymbol{\omega}) &= \Gamma_r(z; \boldsymbol{\omega})^{-1} \Gamma_r(\omega_{\text{tot}} - z; \boldsymbol{\omega})^{(-)^r} \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} (n_1 \omega_1 + \cdots + n_r \omega_r + z) \prod_{n=1}^{\infty} (n_1 \omega_1 + \cdots + n_r \omega_r - z)^{(-)^{r+1}} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

二つ目の無限積は n_1 から n_r の全てについて $1, 2, 3, \dots$ についての積を取る。特に、 $\omega_1 = \cdots = \omega_r = 1$ の場合には単に $S_r(z)$ と表わされる。

$$S_r(z) = S_r(z; \mathbf{1}). \quad (\text{B.34})$$

$S_1(z)$ は通常の sine 関数と次のように関係している。

$$S_1(z; \omega) = 2 \sin\left(\frac{\pi z}{\omega}\right) \quad (\text{B.35})$$

以下の性質を持つ。

$$S_r(\omega_{\text{tot}} - z; \boldsymbol{\omega}) = S_r(z; \boldsymbol{\omega})^{(-1)^{r-1}} \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{S_r(z; \boldsymbol{\omega})}{S_r(z + \omega_i; \boldsymbol{\omega})} = S_{r-1}(z; \boldsymbol{\omega}^{(i)}) \quad (\text{B.37})$$

ただし、 $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ は $\boldsymbol{\omega}$ から ω_i を除いた $r-1$ 成分のベクトルである。 $S_0(z, \cdot) = -1$ と定義しておけば $r=1$ の場合にも成り立つ。次の式が成り立つ。

$$S_r(cz.c\boldsymbol{\omega}) = S_r(z.\boldsymbol{\omega}). \quad (\text{B.38})$$

$z=0$ において $S_r(0; \boldsymbol{\omega}) = 0$ である。微分については、 S_2 について、次の式が成り立つ。 [28]

$$S_2'(0, \boldsymbol{\omega}) = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \quad (\text{B.39})$$

一般の S_r に対しては、 $z=0$ における微分は初等関数では表わせないようである。 [29] 周期が 1 の場合には、次の式が成り立つ。

$$\frac{S_r'(z)}{S_r(z)} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} (z-1)(z-2)\cdots(z-r+1)\pi \cot(\pi z) \quad (\text{B.40})$$

しばしば多重正弦関数の漸近形が必要になるが、それを得るには積分表示を用いるのが良い。多重ガンマ関数は次のように積分表示することができる。(文献 [30] の式 (3.17))

$$\log \Gamma_r(z) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} [f_{\text{reg}}(t, z) - e^{-t} f_0(z)] \quad (\text{B.41})$$

ただし、関数 $f(t, z)$ を

$$f(t, z) = \frac{e^{-zt}}{\prod_{j=1}^r (1 - e^{-\omega_j t})} \quad (\text{B.42})$$

によって定義する。この関数は $t = 2\pi i/\omega_j$ の整数倍でポールを持つ。特に $t = 0$ の周りで r 位の pole を持つ。従ってそのマクローリン展開は次のようになる。

$$f(t, z) = \frac{1}{t^r} f_{-r}(z) + \frac{1}{t^{r-1}} f_{-(r-1)}(z) + \cdots + \frac{1}{t} f_{-1}(z) + f_{\text{reg}}(t, z) \quad (\text{B.43})$$

ポール部分を除いた部分を $f_{\text{reg}}(t, z)$ とおいた。

(B.41) より、多重正弦関数の積分表示が次のように得られる。

$$\log S_r\left(\frac{\omega_{\text{tot}}}{2} - iz\right) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} F_{\text{reg}}(t, z) \quad (\text{B.44})$$

ただし $F(t, z)$ は

$$F(t, z) = \frac{e^{-itz}}{\prod_{j=1}^r [-2 \sinh(\frac{\omega_j t}{2})]} \quad (\text{B.45})$$

であり、 $F_{\text{reg}}(t, z)$ は f に対して行ったのと同様に $t = 0$ における極を取り除くことによって定義する。 P は $t = 0$ における主値を表す。また、原点を下または上に避ける積分路をそれぞれ C_- と C_+ とすれば、

$$\begin{aligned} \log S_r\left(\frac{\omega_{\text{tot}}}{2} - iz\right) &= \pi i F_0(z) + \int_{C_+} \frac{dt}{t} F(t, z) \\ &= -\pi i F_0(z) + \int_{C_-} \frac{dt}{t} F(t, z) \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

のように表すこともできる。 C_+ 上の積分は $\text{Re } z \rightarrow -\infty$ で 0 になり、 C_- 上の積分は $\text{Re } z \rightarrow +\infty$ で 0 になる。これより次の漸近形が得られる。

$$\log S_r\left(\frac{\omega_{\text{tot}}}{2} - iz\right) \sim -\text{sign}(\text{Re } z) \pi i F_0(z), \quad |\text{Re } z| \rightarrow \infty. \quad (\text{B.47})$$

B.5 二重正弦関数

S^3 上の分配関数は二重正弦関数を用いて表わされる。定義式は次のように与えることができる。

$$S_2(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{\prod_{n=0}^{\infty} (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + z)}{\prod_{n=1}^{\infty} (n_1 \omega_2 + n_2 \omega_1 - z)} \quad (\text{B.48})$$

公式 (B.38) のために、 $\omega_1 = \omega_2^{-1}$ の場合に帰着させることができる。関数 $s_b(z)$ を次のように定義するのがしばしば便利である。

$$s_b(z) = \prod_{p, q=0}^{\infty} \frac{b(p + \frac{1}{2}) + b^{-1}(q + \frac{1}{2}) - iz}{b(p + \frac{1}{2}) + b^{-1}(q + \frac{1}{2}) + iz} = S_2\left(\frac{b + b^{-1}}{2} - iz; b, b^{-1}\right) \quad (\text{B.49})$$

この関数は次の性質を満足する。

$$s_b(z) = s_{b^{-1}}(z) = \frac{1}{s_b(-z)} \quad (\text{B.50})$$

さらに (B.37) より次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{s_b(z + \frac{ib}{2})}{s_b(z - \frac{ib}{2})} &= \frac{1}{2 \cosh(\pi b z)}, \\ \frac{s_b(z + \frac{ib^{-1}}{2})}{s_b(z - \frac{ib^{-1}}{2})} &= \frac{1}{2 \cosh(\pi b^{-1} z)}, \\ \frac{s_b(z + \frac{i(b+b^{-1})}{2})}{s_b(z - \frac{i(b+b^{-1})}{2})} &= \frac{1}{[2 \sinh(\pi b z)][2 \sinh(\pi b^{-1} z)]}.\end{aligned}\tag{B.51}$$

(B.47) を用いれば、漸近形は以下のように得られる。

$$\log s_b(z) \sim \text{sign}(\text{Re } z) \pi i \left(\frac{z^2}{2} + \frac{b^2 + b^{-2}}{24} \right), \quad |\text{Re } z| \rightarrow \infty.\tag{B.52}$$

(B.49) の無限積表示からもわかるように、 $s_b(z)$ は z 平面上の次の位置に零点と極を持つ。

$$\begin{aligned}\text{poles : } z &= i \left[\left(p + \frac{1}{2} \right) b + \left(q + \frac{1}{2} \right) b^{-1} \right], \\ \text{zeros : } z &= -i \left[\left(p + \frac{1}{2} \right) b + \left(q + \frac{1}{2} \right) b^{-1} \right].\end{aligned}\tag{B.53}$$

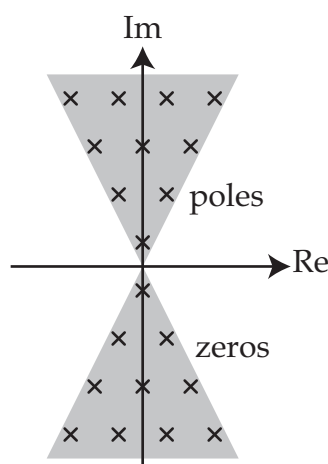


図 B.3: 関数 $s_b(z)$ の z 平面上での極と零点の位置。上の楔形領域内部の \times は極を、下の楔形領域内部の \times は零点を表す。

$b = 1$ の場合、(B.40) より、

$$\frac{d}{dz} \log s_1(z) = i\pi z \coth(\pi z)\tag{B.54}$$

これを積分すれば、次の式を得る。

$$s_1(z) = e^{i\ell(z)}\tag{B.55}$$

ただし、関数 ℓ は次のように定義される。

$$\ell(z) = \int_0^z \pi z \coth(\pi z) dz = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi z^2}{2} + z \log(1 - e^{-2\pi z}) - \frac{1}{2\pi} \text{Li}_2(e^{-2\pi z}) \quad (\text{B.56})$$

これは文献 [10] において定義された関数 $\ell(z)$ とは定義がわずかに異なる。Mathematica における Log 関数は $z \leq 0$ の実軸上に分岐を持つことと、(B.16) を用いると、 $\log(1 - e^{-2\pi z})$ と $\text{Li}_2(e^{-2\pi z})$ はどちらも実部が負、虚部が整数の値で分岐を持つ。これを用いると、

$$\ell(x + (n + \epsilon)i) - \ell(x + (n - \epsilon)i) = -2\pi n, \quad (x < 0) \quad (\text{B.57})$$

であるから、(B.55) は一価関数である。また、 $\ell(z)$ はその定義からもわかるように奇関数であり、

$$\ell(z) = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi z^2}{2} + z \log(1 - e^{2\pi z}) + \frac{1}{2\pi} \text{Li}_2(e^{2\pi z}) \quad (\text{B.58})$$

と定義することもできる。ただし今度は実部が正、虚部が整数の部分に分岐が現れる。

一般の b に対する s_b は次の式によって計算することができる。

$$\begin{aligned} s_b(z) &= \exp\left(-i\frac{\pi}{2}z^2 - \pi i\frac{b^2 + b^{-2}}{24}\right) \frac{(-e^{\pi i b^2} e^{2\pi b z}; e^{2\pi i b^2})}{(-e^{-\pi i b^{-2}} e^{2\pi b^{-1} z}; e^{-2\pi i b^{-2}})} \\ &= \exp\left(-i\frac{\pi}{2}z^2 - \pi i\frac{b^2 + b^{-2}}{24}\right) \frac{\prod_{k=0}^{\infty} (1 + e^{(2k+1)\pi i b^2} e^{2\pi b z})}{\prod_{k=0}^{\infty} (1 + e^{-(2k+1)\pi i b^{-2}} e^{2\pi b^{-1} z})} \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

ただし $(a; p)$ は量子ポツホハンマー関数である。Mathematica を用いて計算する場合、この関数は $|q| < 1$ においてのみ定義されるため、

$$\text{Im}(b^2) < 0 \quad (\text{B.60})$$

の場合にのみ (B.59) を用いることができる。もし $\text{Im}(b^2) < 0$ の場合には b と b^{-1} を入れ替えて計算すればよい。

関連図書

- [1] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and Supergravity,” Princeton University Press.
- [2] E. Witten, “Constraints On Supersymmetry Breaking,” Nucl. Phys. B **202**, 253 (1982).
- [3] J. Kinney, J. M. Maldacena, S. Minwalla and S. Raju, “An Index for 4 dimensional super conformal theories,” Commun. Math. Phys. **275**, 209 (2007) [hep-th/0510251].
- [4] J. Bhattacharya, S. Bhattacharyya, S. Minwalla and S. Raju, “Indices for Superconformal Field Theories in 3,5 and 6 Dimensions,” JHEP **0802**, 064 (2008) [arXiv:0801.1435 [hep-th]].
- [5] T. T. Dumitrescu, G. Festuccia and N. Seiberg, “Exploring Curved Superspace,” JHEP **1208**, 141 (2012) [arXiv:1205.1115 [hep-th]].
- [6] C. Closset, T. T. Dumitrescu, G. Festuccia and Z. Komargodski, “Supersymmetric Field Theories on Three-Manifolds,” JHEP **1305**, 017 (2013) [arXiv:1212.3388].
- [7] S. Kim, “The Complete superconformal index for N=6 Chern-Simons theory,” Nucl. Phys. B **821**, 241 (2009) [Erratum-ibid. B **864**, 884 (2012)] [arXiv:0903.4172 [hep-th]].
- [8] Y. Imamura and S. Yokoyama, “Index for three dimensional superconformal field theories with general R-charge assignments,” JHEP **1104**, 007 (2011) [arXiv:1101.0557 [hep-th]].
- [9] A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, “Exact Results for Wilson Loops in Superconformal Chern-Simons Theories with Matter,” JHEP **1003**, 089 (2010) [arXiv:0909.4559 [hep-th]].
- [10] D. L. Jafferis, “The Exact Superconformal R-Symmetry Extremizes Z,” JHEP **1205**, 159 (2012) [arXiv:1012.3210 [hep-th]].
- [11] N. Hama, K. Hosomichi and S. Lee, “Notes on SUSY Gauge Theories on Three-Sphere,” JHEP **1103**, 127 (2011) [arXiv:1012.3512 [hep-th]].
- [12] C. Romelsberger, “Counting chiral primaries in N = 1, d=4 superconformal field theories,” Nucl. Phys. B **747**, 329 (2006) [hep-th/0510060].

- [13] F. A. H. Dolan, V. P. Spiridonov, G. S. Vartanov, “From 4d superconformal indices to 3d partition functions,” [arXiv:1104.1787 [hep-th]].
- [14] A. Gadde and W. Yan, “Reducing the 4d Index to the S^3 Partition Function,” arXiv:1104.2592 [hep-th].
- [15] Y. Imamura, “Relation between the 4d superconformal index and the S^3 partition function,” [arXiv:1104.4482 [hep-th]].
- [16] N. Hama, K. Hosomichi, S. Lee, “SUSY Gauge Theories on Squashed Three-Spheres,” [arXiv:1102.4716 [hep-th]].
- [17] Y. Imamura and D. Yokoyama, “N=2 supersymmetric theories on squashed three-sphere,” Phys. Rev. D **85**, 025015 (2012) [arXiv:1109.4734 [hep-th]].
- [18] E. Witten, “Quantum Field Theory and the Jones Polynomial,” Commun. Math. Phys. **121**, 351 (1989).
- [19] A. Tanaka, “Comments on knotted 1/2 BPS Wilson loops,” JHEP **1207**, 097 (2012) [arXiv:1204.5975 [hep-th]].
- [20] “The Knot Atlas,” <http://katlas.org/>
- [21] D. Jafferis and X. Yin, “A Duality Appetizer,” arXiv:1103.5700 [hep-th].
- [22] P. Agarwal, A. Amariti and M. Siani, “Refined Checks and Exact Dualities in Three Dimensions,” JHEP **1210**, 178 (2012) [arXiv:1205.6798 [hep-th]].
- [23] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, “N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals,” JHEP **0810**, 091 (2008) [arXiv:0806.1218 [hep-th]].
- [24] J. Bhattacharya and S. Minwalla, “Superconformal Indices for N = 6 Chern Simons Theories,” JHEP **0901**, 014 (2009) [arXiv:0806.3251 [hep-th]].
- [25] C. P. Herzog, I. R. Klebanov, S. S. Pufu and T. Tesileanu, “Multi-Matrix Models and Tri-Sasaki Einstein Spaces,” Phys. Rev. D **83**, 046001 (2011) [arXiv:1011.5487 [hep-th]].
- [26] M. Marino and P. Putrov, “ABJM theory as a Fermi gas,” J. Stat. Mech. **1203**, P03001 (2012) [arXiv:1110.4066 [hep-th]].
- [27] S. Koyama and N. Kurokawa, “Zeta Functions and Normalized Multiple Sine Functions,”

-
- [28] T. Shintani, “On a Kronecker limit formula for real quadratic fields,” J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **24**, 167-199 (1977).
- [29] N. Kurokawa, “Derivatives of multiple sine functions,” Proc. Japan Acad., **80**, Ser. A (2004) 65.
- [30] S. N. M. Ruijsenaars, “On Barnes’ Multiple Zeta and Gamma Functions,” Adv. in Math. **156** (2000) 107.