一般相対論の量子化に関する
対応論的研究

堀　尚一

2013 年 9 月 4 日受理

1　はじめに

重力以外の力は場の量子論で理解されていますが、重力だけは量子化されていません。これでは自然法則の consistency が失われます。　かといって計量テンソル を 演算子にする訳には参りません。　場の量の support である時空座標は c-nummber でないと困ります。　ところがアインシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\kappa T_{\mu\nu}, \tag{1}$$

(κ=重力定数）に於いて、右辺のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ が 演算子であると左辺の "Einstein tensor" $G_{\mu\nu}$ も演算子になってしまいます。これは 計量テンソル が 演算子 になることを意味します。

2　等価原理

元来一般相対論は重力＝加速度という等価原理に基づいています。この時暗々裏に連続的な加速度の存在を仮定しています。　ところが量子論には連続的な加速度は存在しません。運動量 $\mathbf{p}$ の粒子が運動量 $\mathbf{k}$ の量子を吸収（又は　放出）し不連続的に運動量 $\mathbf{p} \pm \mathbf{k}$ に変わるのが量子力学における加速です。

ただ古典近似 ($\hbar \to 0$) に於いては 1 回の反応における運動量の変化は無限小となり、このような反応が無限回繰り返されることにより近似的に連続的な加速度が得られます。

かってニュートン力学がそうであったように一般相対論も classical limit に於いてのみ成り立つ近似的な理論であるとすれば上のような矛盾はなくなります。Einstein equation は右辺左辺が共に c-number である場合にのみ成り立ちます。

3　リーマン時空とミンコウスキ時空

スピノルはローレンツ変換の表示であるから、スピノルを使う以上, 場の量のサポートはミンコウスキ時空とするのが妥当でしょう。（不定計量を持った空間を時空と表しています。）しかしリーマン時空はミンコウスキ時空を含みますが、その逆は成り立ちません。これからニュートン力学のの量子化と全く異なる難しい事態が生じます。

この場合 ミンコウスキ 時空から リーマン時空を導き出すという一見逆の手続きが必要になります。

4　包絡体 envelope

ミンコウスキ時空の包絡体としてリーマン時空を導いてみます。この為には１０次元または１１次元の flat な時空を考えるのが便利です。これは超弦理論で現れる高次元空間とは関係ありません。何らかの余分な条件を付けると一般相対論が破れてしまいます。

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad (\eta_{ij} = 0, (i \neq j); \eta_{00} = 1; \eta_{ii} = -1, (i = 1, \cdots, D-1),$$

この D 次元（D=10 or 11) の flat な時空 (x^i) の中に我々の４次元ミンコウスキ時空 (ξ^μ) が embed されているとします。

$$x^i = f^i + \Lambda^i_\mu \xi^\mu, \ (i = 0, 1, \cdots, D-1) \tag{2}$$

$(\mu = 0, 1, \cdots, 3)$ で、f^i は原点の位置を、Λ^i_μ は座標軸の方向を表します。f^i, Λ^i_μ が４個のパラメーター $X^\lambda, (\lambda = 0, 1, \cdots, 3)$ の関数であるとします。パラメーターが動いた時に出来るミンコウスキ時空の包絡体は (2) 式と

$$\frac{\partial f^i}{\partial X^\lambda} + \frac{\partial \Lambda^i_\mu}{\partial X^\lambda} \xi^\mu = 0, \tag{3}$$

とを連立させて解くことによって得られます。(2) 式より

$$\Lambda^i_\mu = \partial x^i / \partial \xi^\mu,$$

ですから、

$$\partial \xi^\mu / \partial x^i = \Lambda^\mu_i,$$

と置けば

$$\Lambda^i_\mu \Lambda^\nu_i = \delta^\mu_\nu,$$

となります。

ここで $\Lambda^i_\alpha, \Lambda^\alpha_i, (\alpha = 4, \cdots, D-1)$ を適当に選ぶと

$$\sum_{\alpha=0}^{D-1} \Lambda^i_\alpha \Lambda^\alpha_j = \delta^i_j,$$

$$\sum_{i=0}^{D-1} \Lambda^i_\alpha \Lambda^\beta_i = \delta^\beta_\alpha,$$

とすることが出来ることが知られています。$\xi^\alpha = 0, (\alpha = 4, \cdots, D-1)$ として

$$x^i = f^i + \sum_{\alpha=0}^{D-1} \Lambda^i_\alpha \xi^\alpha,$$

から $\xi^\alpha = \Lambda^\alpha_i (x^i - f^i)$, これを

$$\frac{\partial f^i}{\partial X^\lambda} + \sum_{\alpha=0}^{D-1} \frac{\partial \Lambda^i_\alpha}{\partial X^\lambda} \xi^\alpha = 0,$$

に代入して、

$$\partial f^i / \partial X^\lambda + \partial \Lambda^i_\alpha / \partial X^\lambda \ \Lambda^\alpha_j (x^j - f^j) = 0,$$

が得られるが、整頓すると

$$\partial / \partial X^\lambda [\Lambda^\alpha_i (x^i - f^i)] = 0,$$

となるので結局

$$x^i = f^i(X^\lambda), \tag{4}$$

が得られます。従って求める包絡体は（４）式で与えられるリーマニアン部分空間 (X^λ) となります。これが我々が観測する現実の時空であると定義せざるを得ません。(2) 式の ξ^μ は包絡体上の 1 点での接線を表しているから、Λ^i_μ は法線で

$$\Lambda^i_\mu = \partial f^i / \partial X^\mu,$$

ととることができます。計量テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ij} (\partial f^i / \partial X^\mu)(\partial f^j / \partial X^\nu), \tag{5}$$

と表されます。

次回はこの立場でアインシュタイン方程式を見直します。