

## 「熱場の量子論とその応用」研究会の歩み

稲垣知宏<sup>1</sup>

広島大学情報メディア教育研究センター

本研究会は、「有限温度・有限密度の場の量子論とその応用」という名称のモレキュール型研究会として1994年8月にスタートした。その後、1996年度に公募型研究会となり、1997年度から「熱場の量子論とその応用」という現在の名称の研究会となり、2013年度の研究会で19回目を迎える。本報告では「熱場の量子論とその応用」研究会設立当初の様子について簡単にレビューする。本研究の設立とその後の運営に最も貢献された一人が中川寿夫氏である。本報告の最後に、研究会開催を前に訃報の届いた中川寿夫氏のグループで進められた研究について紹介する。

### 1 本研究会の歩み

「熱場の量子論とその応用」研究会は、1994年8月に開催されたモレキュール型研究会「有限温度・有限密度の場の量子論とその応用」を前身とする。当時、RHIC及びLHCでの重イオン衝突実験が計画される中、牲川章氏を代表世話人として、関連する研究者が集まった研究会は、クォーク・グルオンプラズマ相の熱場の理論に基づく組織的且つ系統的な研究に向けた土壌作りを目指していた。著者は大学院生であったが、有限温度・密度相構造の有効模型を用いた取り扱いについて報告させていただいた。

翌年1995年は、二回目のモレキュール型の研究会が中川寿夫氏、横田浩氏を代表世話人として開催された。残念ながら著者は二回目の研究会には参加していないが、当時のプログラムを確認すると、松本秀樹氏が、直前に大連で開催された第4回国際会議「Thermal Field Theory and Their Application」について報告している。「熱場の量子論とその応用」研究会のタイトルは、この国際会議のタイトルを参考に決められた様に思う。

2年間に渡ったモレキュール型研究会での成果を踏まえ、また、研究組織の幅を広げていくため、1996年、「有限温度・有限密度の場の量子論とその応用」研究会を公募型研究会として開催している。森川雅博氏、山中由也氏を代表世話人として、前年までの素粒子論、原子核理論に加え、宇宙論まで対象を広げて参加を呼びかけ、参加者数は40名以上になっている。15件の講演の内、2件の講演が宇宙論分野から行われている [1]。

研究の主たるテーマが非平衡系に移りつつある状況を踏まえ、1997年度の研究会は「熱場の量子論とその応用」と名称を変更し、1998年1月に開催されている。非平衡系を取り扱う熱場の量子論の基礎的な部分が研究対象となっていること、また非常に幅広い応用分野があることから、多数の分野から参加があった。また、半数以上の講演者がこの研究会が初めての口頭発表という若手であった。若手研究者による斬新なアイデアの提案は関連分野に新たな風を吹き込み、大きな寄与であった。

1999年の研究会では参加者が倍増して70名を越え、講演数も40近くとなった。時間的な制約から、発展途上にある熱場の量子論の基礎的な部分に立ち入った議論が難しくなり、翌2000年からは一般講演の詳細はパネル展示するという、ほぼ現在の形での発表方法をとる事になる。

その後、参加者、世話人は入れ替わっていったが、熱場の量子論をキーワードに100名の研究者が集まる公募型研究会として、2013年度には第19回目の研究会を開催することができた。特筆すべきは、研究会の初期に、大学院生、ポスドクとして講演を行った参加者の多くが、現在は大学、研究機

<sup>1</sup>e-mail address: inagaki@hiroshima-u.ac.jp

関のスタッフとなり、まさに基礎物理学に関連する分野の発展に寄与していることであり、京都大学基礎物理学研究所で開催された研究会の大きな成果と考えている [2, 3]。

## 2 中川寿夫氏のグループで進められた研究

2013年7月3日、本研究会の設立時から寄与いただいていた中川寿夫氏の訃報が届いた。著者は6月初旬まで本研究会での企画内容についてメールで相談しており、突然の訃報にただただ驚かされた。以下、中川寿夫氏の進められた研究について、著者の視点から紹介したい。

### 2.1 有限温度でのスカラー場の理論

有限温度の場の量子論に特有な問題として、高温状態でのボーズ場に関する摂動展開の破綻がある。例えば、ボーズ場が4点相互作用する $\lambda\phi^4$ 理論で、ボーズ場の伝搬関数に対する1ループの輻射補正は結合定数と温度の2乗の積、 $\lambda T^2$ 、に比例する。このため、結合定数が十分に小さかったとしても温度が高くなるにつれて輻射補正が大きくなり、摂動展開が破綻する。 $\lambda\phi^4$ 理論については、ボーズ場の質量を $m$ として、 $\lambda T^2/m^2$ に比例する項を系統的に足し上げることで摂動展開の正当性を保つリングダイアグラム再加算法が知られている。次に高温状態で大きくなる項は、 $\lambda T/m$ に比例する項である。十分に温度が高くなると摂動展開が破綻することになるが、 $\lambda T/m$ に比例する項を足し上げる簡単な処方は知られていない。

素粒子標準模型はゲージ対称性とその自発的破れに基づいて構成されている。電弱対称性の自発的対称性の破れを引き起こすのがヒグス粒子である。宇宙初期に電弱対称性のある状態から破れた状態への相転移が起きたと考えられており、相転移の次数は臨界現象を議論する上で本質的である。理論の有効ポテンシャルを計算する事で、この相転移の次数を明らかにできる。ここで、ヒグス粒子に対して単純に $\lambda\phi^4$ 理論を適用すると相転移温度付近で $\lambda T/m \sim O(1)$ となり、摂動展開の正当性が保証できず、摂動展開を越えた解析が必要になる。

中川寿夫氏は横田浩氏と、 $\lambda\phi^4$ 理論の有効ポテンシャルの解析に対し、繰り込み群による改良の研究を進められた [4, 5]。関連する取り組みとして、当時大学院生であった小暮兼三氏が佐藤丈氏、著者と補助質量の方法を提案し、1998年の研究会で発表している。補助質量の方法では、スカラー場の質量を十分に重くとると摂動展開が破綻しないことに注目し、重いスカラー場理論と軽いスカラー場理論を微分方程式でつなく、閉じた組の方程式を得るための近似が必要であるが、数値計算によりスカラー場の相構造を議論できる [6]。

### 2.2 有限温度でのゲージ場の理論

ゲージ場においてはゲージ対称性を保持しながら足し上げを行う必要がある。これを系統的に実施するのが硬熱ループ再加算法である。研究会の立ち上げを前に、中川寿夫氏も牲川章氏と硬熱ループ再加算を用いた研究を進められていた。

非可換ゲージ場の理論においては、リンデダイアグラムとして知られる量子補正における赤外発散の問題がある。ゲージ場が遮蔽質量を持つ事で赤外発散の問題は無くなるが、摂動論だと非可換ゲージ場の横波成分に対する補正はゲージに依存しうまく計算できない。この問題に対しては、斎藤卓也氏が、中村純氏、酒井淳氏と共同で、グルオンの磁気質量を格子QCDシミュレーションで計算し、2003年の研究会で発表している [7]。

非可換ゲージ理論におけるカイラル対称性の動的破れは、有限温度・密度クォーク・グルオン物質についての議論の基礎になる概念の一つである。対称性の動的破れはクォークと反クォークの複合演算子が持つ期待値により引き起こされるが、ゲージ理論の摂動展開からは計算できない非摂動現象である。これについても格子 QCD は有力な計算処方であり多くの成果が報告されているが、有限密度系では符号問題による困難を抱えている。他の取り組みとしては、Schwinger-Dyson 方程式を用いた解析がある。著者も、牟田泰三氏、向川政治氏、深澤謙次氏と共同で、ゲージ場に有限温度遮蔽質量の効果を入れた解析を実施している [8]。

中川寿夫氏は、横田浩氏、笛木祐子氏、吉田光次氏と硬熱ループ再加算法に基づいた Schwinger-Dyson 方程式の定式化を行い、遮蔽質量の効果のみを取り入れた解析では正しく臨界現象を理解できないことを指摘された [9]。その後、中川寿夫氏のグループは、Schwinger-Dyson 方程式の近似解を持つゲージ依存性の問題に対し、ウォード・高橋恒等式と矛盾しないゲージの選び方について研究を進められ、2007 年の研究会で横田浩氏が報告している [10]。

中川氏のグループの研究は、筆者が研究を進めて行く上で大いに刺激となってきた。中川氏の研究は共同研究者により引き継がれていく事と思うが、筆者もその影響を受けた一人として、摂動論的熱場の量子論のさらなる発展に寄与していきたい。

### 3 謝辞

基研研究会「熱場の量子論とその応用」は、京都大学基礎物理学研究所の方々のご理解と大きな支援無しには成立しなかった。また、これまでの研究会を企画運営された世話人の方々、研究会でさまざまな研究成果を報告いただいた講演者の方々、そして全ての研究会参加者に感謝する。

### 参考文献

- [1] 「有限温度・有限密度の場の量子論とその応用」研究会報告, 素粒子論研究 90-2 (1994), B1; 92-4 (1996), D1; 94-4 (1997), D1.
- [2] 「熱場の量子論とその応用」研究会報告, 素粒子論研究 98-1 (1998), A1; 99-4 (1999), D120; 100-5 (2000), E1; 103-1 (2001), A1; 105-1 (2002), A1; 106-5 (2003), E1; 108-5 (2004), E1; 110-5 (2005), E1; 112-3 (2005), C1; 114-3 (2006), C1; 116-2 (2008), B1; 116-6 (2009), F1; 118-1 (2010), A1; 118-4 (2011), D1; 119-4 (2012), F1; 素粒子論研究・電子版 13 (2012), 4.
- [3] <http://www.riise.hiroshima-u.ac.jp/TQFT/> : 2001 年度以降の発表資料はここから参照可能。
- [4] H. Nakkagawa and H. Yokota, Mod. Phys. Lett. A **11**, 2259 (1996).
- [5] H. Nakkagawa and H. Yokota, Prog. Theor. Phys. Suppl. **129**, 209 (1997).
- [6] T. Inagaki, K. Ogure and J. Sato, Prog. Theor. Phys. **99**, 1069 (1998).
- [7] A. Nakamura, T. Saito and S. Sakai, Phys. Rev. D **69**, 014506 (2004).
- [8] K. Fukazawa, T. Inagaki, S. Mukaigawa and T. Muta, Prog. Theor. Phys. **105**, 979 (2001).
- [9] Y. Fueki, H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, Prog. Theor. Phys. **110**, 777 (2003).
- [10] H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, arXiv:0709.0323 [hep-ph] (2007).

## 熱 QED における準粒子と ultrasoft モード

中川 寿夫<sup>1</sup>, 横田 浩, 吉田 光次

奈良大学教養部

熱 QED と QCD について、特に熱 QCD の温度・密度に依存する相構造と相転移現象の研究は、現在理論と実験の両面から注目されている。過去において、主として Lattice Simulation, Dyson-Schwinger (DS) 方程式によるフェルミオンの質量項の分析がなされてきた [1]。我々は、解析的な分析を可能にして、なおかつ先行する数々の分析結果と比較検討がしやすい、熱場理論の硬熱ループ (Hard Thermal Loop: HTL) 予加算を考慮した DS 方程式を用いて分析をしてきた [2-5]。本稿では、熱 QED (すなわち、結合定数は固定) における熱的準粒子 [5] および第 3 ピーク (ultrasoft モード) について行った分析結果を報告する。

フェルミオンに対する硬熱ループ予加算を考慮した DS 方程式等の詳細は文献 [2,3] にあるので、ここでは必要な以下の式のみ与える。

$$\Sigma_R(P) = (1 - A(P))p_i\gamma^i - B(P)\gamma^0 + C(P) \quad (1)$$

本稿での解析は、ladder 近似, IE 近似, Landau ゲージの下で行った。結合定数は  $\alpha = e^2/4\pi$  で定義される。

準粒子構造を調べるために、symmetric phase ( $C = 0$ ) でのスペクトル関数  $\rho_{\pm}(p_0, p)$  [6,7], Dispersion Low および崩壊定数  $\gamma$  の振る舞いをそれぞれ図 1~3 に示す。なお、スペクトル関数  $\rho_{\pm}$  およびは崩壊定数  $\gamma(p)$  は

$$\rho_{\pm}(p_0, p) = -\frac{1}{\pi}\text{Im}\frac{1}{D_{\pm}(p_0, p)} = -\frac{1}{\pi}\text{Im}\frac{1}{p_0 + B(p_0, p) \mp pA(p_0, p)} \quad (2)$$

$$S_R = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{D_+} \left( \gamma^0 + \frac{p_i\gamma^i}{p} \right) + \frac{1}{D_-} \left( \gamma^0 - \frac{p_i\gamma^i}{p} \right) \right] \quad (3)$$

$$\gamma(p) = Z^{-1}\text{Im}[D_+(p_0 = \omega, p)] \quad (4)$$

$$Z = \left. \frac{\partial \text{Re}[D_+(p_0, p)]}{\partial p_0} \right|_{p_0=\omega} \quad (5)$$

で与えられる。また、Dispersion Law は  $\text{Re}[D_+(p_0, p)] = 0$  の解の  $(p_0 = \omega, p)$  の関係として与えられる。

スペクトル関数は、small coupling では、 $p \sim 0$  のとき、3 ピーク構造を持つことが分かる (図 1)。ただし、論文 [7,8] で指摘されている第 3 のピークよりは大きく suppress されている。これは、 $p_0 \sim 0$  で  $B(p_0, p)$  の虚数部が大きくなるためである。このピークについては、後で考察する。

Dispersion Law は small (weak) coupling では、HTL 近似とよい一致を与える (図 2)。ここで、 $m_f^*$  は HTL 計算の next-to-leading order 補正を考慮した thermal mass である [9]。

$p = 0$  での崩壊定数は ( $T = 0.1 \sim 0.2$  の範囲で)、small  $\alpha$  および large  $\alpha$  の両方で、

$$\gamma(p = 0) \simeq \frac{1}{3}\alpha T \ln \left( \frac{1}{e} + O(1) \right) \quad (6)$$

の振る舞いをする (図 3)。この振る舞いは、他の解析の結果と係数も一致する。

<sup>1</sup>奈良大学名誉教授, 2013 年 7 月 3 日死去

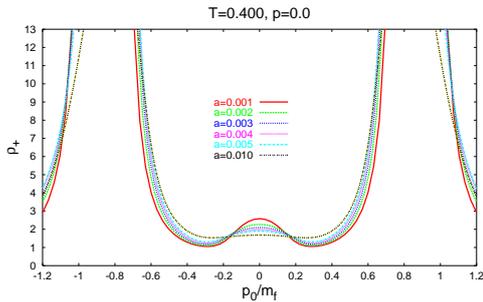


図 1 : スペクトル関数

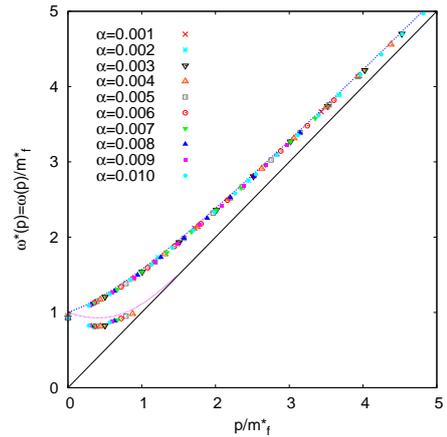


図 2 : Dispersion Law : 点線は HTL

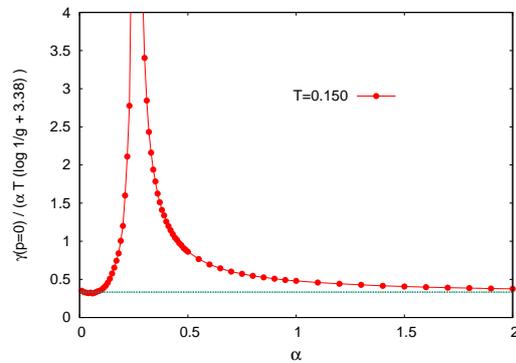
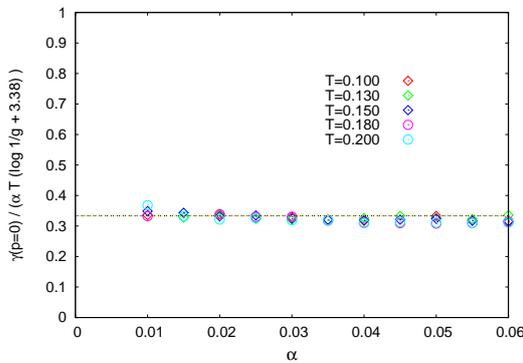


図 3 : 崩壊定数の振る舞い

最後に、第 3 のピーク ( $p_0 \sim 0, p \sim 0$  にあるので、ultrasoft モードと呼ぶ) は、物理的状態であるかを検討する。以下の理由により、ultrasoft モードは物理的状態とは考えられない。

- 1) ultrasoft モードの  $Z$  因子 ( $Z_{us}$ ) は、図 4 から分かるように

$$Z_{us}^{-1} = \left. \frac{\partial \text{Re}[D_+(p_0, p)]}{\partial p_0} \right|_{p_0=\omega} < 0$$

となる。一方、quasifermion および plasmon の場合は、 $Z > 0$  である。崩壊定数の分析をみても、 $Z$  因子は (5) 式与えるのが自然である。

- 2)  $\text{Re}[D_+(p_0 = \omega, p)] = 0$  を満たす状態  $(\omega, p)$  の関係 (dispersion law) は図 2 であるが、スペクトル関数のピークを与える  $(\omega, p)$  の関係 (dispersion law) は図 5 となる。スペクトル関数のピークの場合は、space-like になるケースが存在する。すなわち、スペクトル関数のピークのすべてが必ずしも物理的状態とは言えない。
- 3) ultrasoft モードでは  $\text{Im}[D_+(p_0, p)]$  の値が大きい (図は省略)。特に、 $p_0 \sim 0$  で急に大きくなる。

以上をまとめると、

- 1) Dispersion law は、small  $\alpha$  では、HTL 再加算近似の結果をよく再現する。
- 2) 崩壊定数の振る舞いは、解析的な結論とよく一致する。

3) ultrasoft モードは, 物理的状态とは考えにくい。

ultrasoft モードに関しては, 他の論文 [7,8] との比較も含めさらに考察を行う予定である。

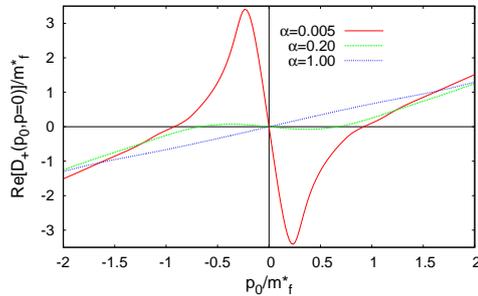


図 4 :  $\text{Re}[D_+(p_0, p)]$

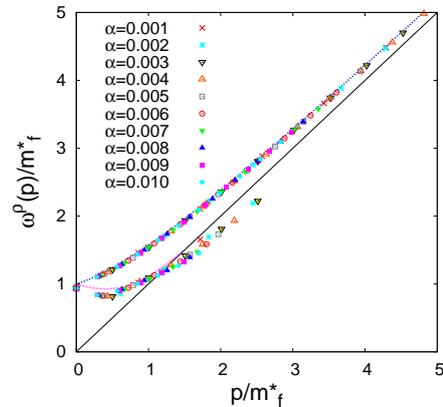


図 5 : Dispersion Law

追記：この研究の共同研究者である中川寿夫奈良大学名誉教授は2013年7月3日逝去されました。中川先生は、この研究会（の前身のモレキュール型研究会）の創設時から関与されていたということで、研究会の最初のセッションは先生への追悼を兼ねていました。この発表も前半は先生の熱場に関する研究の紹介をさせていただき、引き続き最後の研究となった今回の内容を発表させていただきました。その紹介部分については、「熱場の量子論とその応用」のサイトのスライドを見ていただくことにし、この研究会報告では研究内容に限らせていただきました。

#### 参考文献

- [1] 例えば,  
K.-I. Kondo and K. Yoshida, Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995) 199;  
M. Harada and A. Shibata, Phys. Phys. D **59** (1999) 014010;  
K. Fukazawa, T. Inagaki, S. Mukaigawa and T. Muta, Prog. Theor. Phys. **105** (2001) 979.
- [2] Y. Fueki, H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, Prog. Theor. Phys. **107** (2002) 759.
- [3] Y. Fueki, H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, Prog. Theor. Phys. **110** (2003) 777.
- [4] H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, in: Nagoya Mini-workshop on "Strongly Coupled Quark-Gluon Plasma: SPS, RHIC and LHC" (2007), p.173; in: The Origin of Mass and Strong Coupling Gauge Theories (2008), p.220; Bulletin of the Research Institute of Nara University **18** (2010) 1.
- [5] H. Nakkagawa, H. Yokota and K. Yoshida, Phys. Rev. D **85** (2012) 031902(R); Phys. Rev. D **86** (2012) 096007.
- [6] H. A. Weldon, Phys. Rev. D **61** (2000) 036003.
- [7] M. Harada, Y. Nemoto and S. Yoshimoto, Prog. Theor. Phys. **119** (2008) 117;  
M. Harada and Y. Nemoto, Phys. Rev. D **78** (2008) 014004;  
M. Harada and S. Yoshimoto, arXiv:0903.5495.
- [8] Y. Hidaka, D. Satow and T. Kunihiro, arXiv:1105.0423; Nucl. Phys. **A876** (2012) 93.
- [9] A. Rebhan, Nucl. Phys. **A702** (2002) 111.

# 強磁場原始中性子星でのニュートリノ反応断面積の非対称性と関連現象

丸山 智幸<sup>1</sup>

日本大学生物資源科学部

要旨：  $2 \times 10^{17}$  G の強磁場を持つ原始中性子星物質で計算した非等方ニュートリノ吸収断面積の結果を、トロイ型の磁場構造を持つ原始中生成の自転減速に応用する計算を行った。その結果、非等方ニュートリノ放出の効果が通常用いられている磁気双極子放出よりも大きな効果を示した。

近年、 $10^{15}$  G を超える超強磁場を持つ中性子星マグネターの発見 [1, 2] 以来、その超強磁場を支える内部構造に強い興味を持たれるとともに、強磁場が超新星爆発の非対称性に極めて重大な役割を担っていると考えられ、その強磁場に特有な現象は非常に興味深いトピックである。その中でも、マグネターの 4 秒から 12 秒という長い自転周期 [3, 4] がマグネターの一つの特徴としてその仕組みに多くの関心が集まっている。

一方、我々は有限温度・密度での中性子星物質におけるニュートリノの散乱・吸収断面積を相対論的平均場 (RMF) アプローチで計算し、放出ニュートリノが磁場方向に増加し、その反対方向に減少することを示した。さらに、その結果を用い極性磁場を持つ原始中生子星に応用し、定性的な静的計算ではあるがパルサーキック現象 [5] に、非対称ニュートリノ放出が大きく寄与することを示した [6]。

ところで、最近の原始中性子星 (PNS) の時間発展シミュレーションは、原始中性子星の磁場が赤道面上にトーラス状に分布するトロイダル型となり [7]、その強度が極性磁場の 100 倍に達することを示している [8, 9]。このトロイダル型の磁場配位に我々の非等方ニュートリノ放出を応用すれば、磁場方向により多くのニュートリノが放出され、自転を大きく減速に大きくさせるであろうことが容易に想像される。そこで本研究では、これまで求めた断面積の計算結果を用いて、ニュートリノの非等方放出による自転減速への影響の大きさを概算することとした。

まず、原始中性子星中での媒質の時間発展はニュートリノの伝搬時間より十分ゆっくりで、内部の各所で局所平衡が成り立っているとす。このとき、ニュートリノの位相分布関数は平衡部分  $f_0$  と非平衡部分  $\Delta f$  に分けることができる:  $f = f_0 + \Delta f$ 。さらに、吸収だけが寄与し、ニュートリノは直線軌道上を伝搬するものとする、座標変数、 $x_L \equiv (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k})/|\mathbf{k}|$ ,  $\mathbf{R}_T \equiv \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}/k^2$  を定義することで、 $\Delta f$  は解析的に以下の形で求められる [6]。

$$\Delta f(x_L, R_T, \mathbf{k}) = \int_0^{x_L} dy \left[ -\frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial y} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\nu} \right] \exp \left[ -\int_y^{x_L} dz \frac{\sigma_A(z, R_T, \mathbf{k})}{V} \right], \quad (1)$$

上式で、ニュートリノの  $\sigma_A$  は吸収断面積であり、RMF 理論に磁場の効果を摂動の 1 次までとり入れることで求めた [6]。  $10^{17}$  G 程度以下であれば、天文学的には強磁場であるが、核レベルでは 1 次の摂動で取り扱える程度の大きさである。その結果は、密度が  $\rho_B = (1 - 3)\rho_0$  ( $\rho_0$  は飽和密度)、温度  $T = 20$  MeV、磁場  $B = 2 \times 10^{17}$  G で、2 - 4% の非対称性を示している。

<sup>1</sup>e-mail address: tomo@brs.nihon-u.ac.jp

表面  $S_N$  から放出ニュートリノによる単位時間当たりの角運動量の減少と放出エネルギーの比が以下の式であたえられる。

$$\left(\frac{cdL_z/dt}{dE_T/dt}\right) = \frac{\int_{S_N} d\Omega_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta f(\mathbf{r}, \mathbf{k})(\mathbf{r} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}}{\int_{S_N} d\Omega_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta f(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} . \quad (2)$$

上式で  $\mathbf{n}$  は表面  $S_N$  の法線単位ベクトルを表す。そして、自転速度の減少比が以下の式で求められる。

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{P}{2\pi c I_{NS}} \left(\frac{cdL_z/dt}{dE_T/dt}\right) \mathcal{L}_\nu . \quad (3)$$

ここで  $P$  は自転周期、 $\dot{P}$  はその時間微分、and  $\mathcal{L}_\nu = (dE_T/dt)$  はニュートリノ光度である。

実際の計算では、RMFのパラメーターとしてPM1-L1 [11]を用い、原始中性子星は、質量が  $M_{NS} = 1.68M_\odot$ 、温度が  $T = 20\text{MeV}$ 、レプトン数の全バリオン数に対する比が  $Y_L = 0.4$  であるとした。

さらに、トロイダル型の磁場分布は円筒座標系で以下のような関数で書かれるものと仮定した。

$$\vec{B} = B_\phi \frac{4e^{z/a_0}}{[1 + e^{z/a_0}]^2} \frac{4e^{(r_T-r_0)/a_0}}{[1 + e^{(r_T-r_0)/a_0}]^2} (-\sin\phi, \cos\phi, 0) . \quad (4)$$

$a_0 = 0.5\text{ km}$ ,  $r_0 = 8.0\text{ km}$  (Mag-A) と  $r_0 = 5.0\text{ km}$  (Mag-B) の2種類の計算を実行して、両者の結果を比較する。図1bに、 $z = 0$  での磁場強度  $|\mathbf{B}/B_\phi|$  を示した。

最近の数値シミュレーション [8, 9] の結果は、トロイダル型磁場の最大強度がおよそ  $B_\phi = 10^{16}\text{ G}$ 、極性磁場の強度が  $B_{pol} = 10^{14}\text{ G}$  程度であることを示している。前者の値を今回の計算に用い、後者の値は比較のために実行した磁気双極子放射 (MDR) によるスピン減衰率  $\dot{P}/P$  の計算に用いた。MDRの式は以下のように書かれる [10]。

$$P\dot{P} = B_{pol}^2 \left(\frac{3M_{NS}^3 c^3}{125\pi^2 I_{NS}^2}\right)^{-1} . \quad (5)$$

同様に PNS の初期の状態であるとして自転周期を  $P = 10\text{ ms}$  と仮定した。また、本研究で用いたモデルが非常に表面付近では適応性が高くないので、 $S_N$  を密度が核物質飽和密度となる球面ととった。ただし、 $S_N$  の結果への依存性は大きくないことは確認した。

結果を表1に記した。明らかに、非等方ニュートリノ放出の効果はMDRの効果よりも大きいことがわかる。ただし、マグネターの遅い自転を説明するには十分ではない。

これまでの計算はニュートリノの吸収過程だけをを取り入れたものであるが、散乱や生成断面積の同じ傾向を示すので、それらを取り入れることで、非等方性が増加し、より大きな減速率が得られる

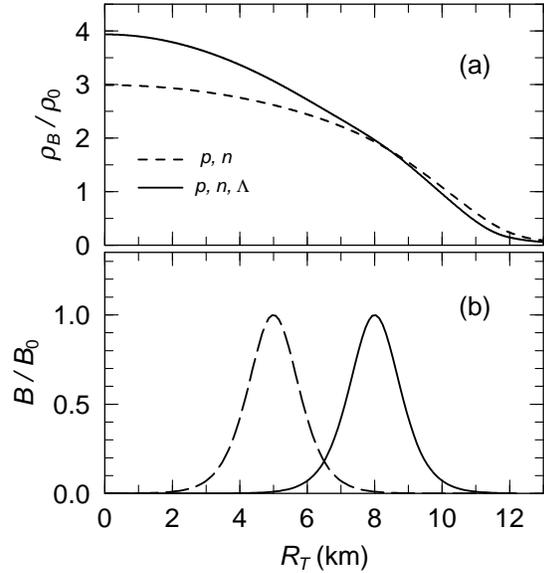


図1: 上段: 計算に用いた中性子星の密度分布 (a)。実線と破線は、それぞれラムダを含む場合と含まない場合の結果を示している。下段: トロイダル型磁場の  $z = 0$  での分布。実線と破線はそれぞれ、 $r_0 = 8\text{ km}$  (Mag-A) と  $r_0 = 5\text{ km}$  (Mag-B) の結果を示す。

Comp.	$I_{NS}[\text{g}\cdot\text{cm}^2]$	Mag.	$\frac{cdL_z/dt}{dE_T/dt}$	$\dot{P}/P \text{ (s}^{-1}\text{)}$	
				Ours	MDR
p, n	$1.36 \times 10^{45}$	Mag-A	3.34	$3.5 \times 10^{-6}$	$9.9 \times 10^{-8}$
		Mag-B	0.48	$5.0 \times 10^{-7}$	
p, n, $\Lambda$	$1.54 \times 10^{45}$	Mag-A	5.45	$6.4 \times 10^{-6}$	$7.8 \times 10^{-8}$
		Mag-B	0.39	$4.6 \times 10^{-7}$	

表 1: 自転周期が  $P = 10\text{ms}$  のときの, 原始中性子星の自転減速率の計算結果。1 列目:中性子星物質を構成するバリオンの種類。2 列目: 中性子星の慣性能率。3 列目: トロイダル磁場の配位 (図 1b)。4 列目:式 (2) の計算結果。5 列目:非等方ニュートリノ放出による自転減速率 (3) の計算結果 6 列目:MDR による自転減速率 (5) の計算結果

可能性がある。今後はさらに超新星爆発の数値シミュレーションへ直接挿入することで, 最終的な結論が得ることを将来的な目標としている。

## 参考文献

- [1] B. Paczyński, Acta. Astron. **41**, 145 (1992).
- [2] Chanmugam, Annu. Rev. Astron. Astrophys. **30**, 143 (1992).
- [3] Radio pulsar data courtesy of the ATNF Oulsar Group, <http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/>;  
D.R. Lorimer and M. Kramer, 'Handbook of Pulsar Astronomy', Cambridge University Press (2004).
- [4] T. Nakano, K. Makishima, K. Nakazawa, H. Uchiyama and T. Enotoet, AIP Conf. Proc. **1427**, 126 (2012).
- [5] A.G. Lyne and D.R. Lorimer, Nature **369**, 127 (1994).
- [6] T. Maruyama, N. Yasutake, M.K. Cheoun, J. Hidaka, T. Kajino, G.J. Mathews and C.Y. Ryu, Phys. Rev. **D86**, 123003 (2012).
- [7] J. Braithwaite and H.C. Spruit, Nature **431**, 891 (2004).
- [8] T. Takiwaki, K. Katake and K. Sato, Astrophys. J. **691**, 1360 (2009).
- [9] T. Kuroda and H. Umeda, Astrophys. J. Suppl. **191**, 439 (2010).
- [10] A.G. Lyne and F.G. Smith, Pulsar Astronomy CUP (1990).
- [11] T. Maruyama, H. Shin, H. Fujii, T. Tatsumi, Prog. Theo. Phys. Vol. 102, 809 (1999).

# Hadron-Quark Crossover and Massive Hybrid Stars

益田晃太<sup>A,B</sup>、初田哲男<sup>B</sup>、高塚龍之<sup>B</sup>  
東大理<sup>A</sup>、理研<sup>B</sup>

## 概要

ハイペロンを含むハドロン相からストレンジクォークを含むクォーク相へのクロスオーバーを仮定した状態方程式を用いて中性子星の物理について議論する。(i) クロスオーバーが比較的低密度 ( $(3-4)\rho_0$  ( $\rho_0$ :原子核密度)) で生じ、(ii) クォーク相が強く相互作用している、という2つの条件下でクォーク相の影響により、 $2M_\odot$  を超え得ることを示す。これは高密度におけるエキゾチックな成分の出現による一般的な状態方程式の軟化と反する結果である [1,2]。またカラー超伝導相の持つ効果についても議論する。

## 1 はじめに

2010年に観測された  $(1.97 \pm 0.04)M_\odot$  の中性子星 (PSR J1614-2230) の存在は EOS に強い制限を与え、特にコア部分にエキゾチックな成分が存在する可能性について疑問符を与える [3]。従来、ハイブリッド星の研究はハドロン相とクォーク相を1次相転移を仮定し接続してきたが、本研究ではハドロン相のパーコレーション描像に立ち、クロスオーバー接続を試みる。その際、中性子星内部で実現する高密度状況下ではハイペロン (s-quark) が存在すると思われるため、その効果を取り入れたハドロン相 (クォーク相) を扱う。ハドロン相においては核子間に働く三体力をハイペロンを含むバリオン間に拡張し、ブルックナーハートリーフォック方程式から得られる状態方程式を採用した [4]。

## 2 クォーク相状態方程式

ストレンジを含むクォーク相における状態方程式を構築する。0Kにおいてハドロン-クォーククロスオーバーが予測される原子核密度の数倍の領域ではクォーク同士はまだ強く相互作用することが予測される。また高密度では負符号問題により量子色力学 (QCD) の格子場の理論 (格子 QCD) による数値計算は扱えないため、本研究ではカイラル対称性の自発的破れを導く QCD の低エネルギー理論である (2+1) フレーバー南部-ヨナ・ラシーニョ (NJL) 模型を用いる ( $u, d, s, e^-, \mu^-$ )。用いるラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NJL}} = & \bar{q}(i\cancel{\partial} - m)q + \frac{G_S}{2} \sum_{a=0}^8 [(\bar{q}\lambda^a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\lambda^a q)^2] \\ & + G_D [\det\bar{q}(1 + \gamma_5)q + \text{h.c.}] - \frac{g_V}{2} (\bar{q}\gamma^\mu q)^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

とする (ここで  $i$  はフレーバー、 $\lambda$  は Gell-Mann 行列、 $m$  はカレント質量)。第2項はスカラー型4フェルミ相互作用、第3項は  $U_A(1)$  対称性を破る Kobayashi-Maskawa-'t Hooft (KMT)6 フェルミ相互作用を表す。第4項は現象論的ベクトル型4フェルミ相互作用を意味し、ここではフレーバーに依存しないクォーク間にユニバーサルに効く斥力を与えるモデルを採用する。 $g_V$  の大きさは決まっていないが、先行研究に従い [5]

$$0 \leq \frac{g_V}{G_S} \leq 1.5 \quad (2.2)$$

の範囲で動かすことにする。このモデルの下、電荷的中性と  $\beta$  平衡の条件を課し、状態方程式を計算する。

### 3 クロスオーバー

ハドロン相とクォーク相のクロスオーバー接続を試みる。クロスオーバーを特徴付ける 2 つのパラメータとして典型的クロスオーバー密度  $\bar{\rho}$  と幅  $\Gamma$  を用意し、既に研究されている 0 密度有限温度状況下での両相のスムーズな現象論的接続を模倣し [6]、

$$P = P_H \times f_- + P_Q \times f_+, \quad (3.1)$$

$$f_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \tanh \left( \frac{\rho - \bar{\rho}}{\Gamma} \right) \right) \quad (3.2)$$

のような接続を試みる ( $P_H$ :ハドロン相圧力、 $P_Q$ :クォーク相圧力)。エネルギー密度  $\varepsilon$  は熱力学的関係式より求める。 $\bar{\rho}$  と  $\Gamma$  はパラメータであるが以下の 2 つの条件下でふる:(i) 熱力学的安定条件  $dP/d\rho > 0$ 、(ii) 原子核密度でハドロン相成立  $\bar{\rho} - 2\Gamma > \rho_0$ 。

### 4 結果

求めた状態方程式を用い Tolman-Oppenheimer-Volkov 方程式を解く。 $g_V = G_S, (\bar{\rho}, \Gamma) = (3\rho_0, \rho_0)$  の場合の様々なハドロン相 (左図)、今回構築した状態方程式 (右図) から計算される  $M - R$  relation を図 1 に示す。図から見て取れるようにクロスオーバーを仮定した場合確かに強く相互作用するクォークを含む中性子星の方がハドロン相のみの中性子星よりも重くなり得、更に観測事実にも耐え得る。また最大質量は

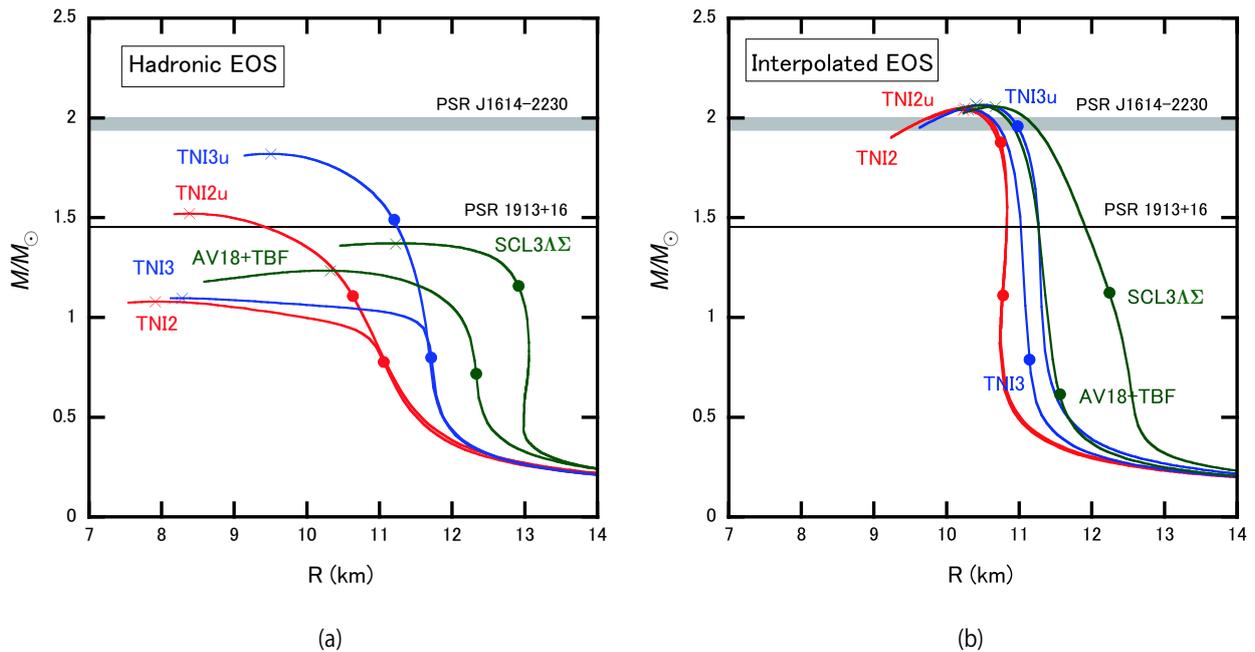


図 1 様々なハドロン相を仮定した場合の  $M - R$  relation ( $g_V = G_S, (\bar{\rho}, \Gamma) = (3\rho_0, \rho_0)$ ) 左図はハドロン相のみ、右図は今回構築した状態方程式により支えられる中性子星を意味する。

クォーク相 (ベクトル型相互作用の強さ) が決めるが半径はハドロン相がハドロン相が決めることも見て取れる。

## 5 カラー超伝導

式 (2.1) に

$$\frac{H}{2} \sum_{A=2,5,7} \sum_{A'=2,5,7} (\bar{q}^i \gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} C \bar{q}^T) (q^T C i \gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} q) \quad (5.1)$$

を加えることで  $J^P = 0^+$  のダイクォーク凝縮を考えることが出来る。  $H$  の強さにより現れる相が異なる (弱い場合高密度で CFL 相が出現、強い場合中間密度で 2SC、高密度で CFL が現れる) が、状態方程式のかたさに与える影響は微小なものであり最大質量を  $0.1M_\odot$  程減少させるのみであった。今後は中性子星内部で実現する可能性があるより多くの凝縮形態も考慮にいれ、特に超伝導状態が大きく影響を及ぼすと考えられる輸送現象 (冷却等) について考察する予定である。

## 6 まとめ

本研究により強く相互作用するクォーク相の影響が比較的低密度から生じる場合、エキゾチックな成分を含む中性子星でも  $2M_\odot$  を超え得る可能性が示唆された。状態方程式のかたさはクォーク相によって支配され、一方半径はハドロン相によって支配される。また、ユニバーサル三体力はハイペロンの出現を遅らせる効果をもつため、中性子星の冷却を論ずる時には重要な役割を果たす。またカラー超伝導の効果も取り入れた場合、状態方程式のかたさはあまり変わらないが、冷却の速さは大きく変わることが予想される。今回のクロスオーバーを仮定した模型の有限温度への拡張も予定している。

## 参考文献

- [1] K. Masuda, T. Hatsuda, and T. Takatsuka. Hadron-Quark Crossover and Massive Hybrid Stars with Strangeness. *Astrophys.J.*, 764:12, 2013.
- [2] K. Masuda, T. Hatsuda, and T. Takatsuka. Hadron-quark crossover and massive hybrid stars. *PTEP*, 2013(7):073D01, 2013.
- [3] P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom, M. S. E. Roberts, and J. W. T. Hessels. A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay. *NATURE*, 467(7319):1081–1083, OCT 28 2010.
- [4] S Nishizaki, Y Yamamoto, and T Takatsuka. Hyperon-mixed neutron star matter and neutron stars. *PTP*, 108(4):703–718, OCT 2002.
- [5] N. M. Bratovic, T. Hatsuda, and W. Weise. Role of Vector Interaction and Axial Anomaly in the PNJL Modeling of the QCD Phase Diagram. *Phys.Lett.*, B719:131–135, 2013.
- [6] M Asakawa and T Hatsuda. What thermodynamics tells us about the QCD plasma. *Phys.Rev.D*, 55(7):4488–4491, APR 1 1997.

# 時空対称性を含む南部-Goldstone の定理の一般化

日高義将  
理研仁科センター

## 1 はじめに

対称性は現代物理学の重要な概念のひとつである．連続対称性が自発的に破れた時，それにともなって基底状態が無限に縮退する．別の言い方をすると，連続対称性にともなうパラメータ  $\pi$  を空間的に一様に変化させても系は自由エネルギーを変化させない．もし，この  $\pi$  を空間的にゆるやかに変化させると，自由エネルギーは  $(\nabla\pi)^2$  に比例して大きくなる．そのような変数は弾性変数と呼ばれる [1]. 格子結晶中の変位ベクトルやハドロン物理におけるパイ中間子の自由度がそれにあたる．弾性変数は破れた対称性の電荷密度と正準共役の意味で結合し，いわゆる南部-Goldstone(NG) モードを形成する [2, 3, 4, 5]. 自発的に破れた対称性の電荷が陽に座標によらない場合，その弾性変数の数 ( $N_{EV}$ ) は，破れた対称性の数 ( $N_{BS}$ ) に等しい．しかしながら，一般には NG モードの数 ( $N_{NG}$ ) は必ずしも弾性変数の数に等しいとは限らない．弾性変数と NG モードの関係は，近年，渡辺-村山ら，独立に私自身によって次の公式で与えられることがわかった [6, 7]:

$$N_{NG} = N_{BS} - \frac{1}{2} \text{rank}\langle[\hat{Q}_a, \hat{Q}_b]\rangle. \quad (1)$$

ここで， $\hat{Q}_a$  は破れた対称性の電荷演算子である． $\langle[\hat{Q}_a, \hat{Q}_b]\rangle \neq 0$  は， $\hat{Q}_a$  が電荷であるだけでなくその電荷密度が弾性変数であることも意味する．そのような電荷密度同士が正準ペアとして結合し同じ NG モードを形成する．したがって，そのようなペアの数だけ独立な NG モードの数は減るのである．式 (1) の右辺の第 2 項はそのペアの数を表している．

一方，電荷が陽に座標による場合は状況が異なる．この場合，式 (1) は必ずしも成り立たない．例えば，格子結晶中のフォノンは，並進と回転対称性が同時に破れている．回転対称性に対応した角運動量演算子は，陽に座標に依存した演算子である．この時，観測される NG モードは並進にともなうものだけで回転に対応したものはない [1]．この場合は，そもそも弾性変数の数が破れた対称性の数に一致しないのである．本稿では，この弾性変数に注目し，その数と破れた対称性の数の関係を明らかにする．

## 2 座標に陽に依存した対称性の自発的破れと弾性変数

### 2.1 並進共変な演算子と並進不変な電荷

ここではミクロナ理論が並進対称性を持つ場合を考える．その時間及び空間並進の演算子をそれぞれ  $\hat{H}$  と  $\hat{P}^i$  とする．この時，並進共変な演算子を

$$\hat{O}(t, \mathbf{x}) = e^{i\hat{H}t} \hat{T}_{\mathbf{x}} \hat{O}(0, \mathbf{0}) \hat{T}_{\mathbf{x}}^\dagger e^{-i\hat{H}t} \quad (2)$$

を満たす演算子として定義する．ハットは量子的な演算子であることを意味し古典量と区別する．ここで  $\hat{T}_{\mathbf{x}} = e^{-i\hat{P}\cdot\mathbf{x}}$  は有限の並進演算子である．一般に電荷は，この並進演算子に対して

$$\hat{T}_{\mathbf{x}} \hat{Q}_a \hat{T}_{\mathbf{x}}^\dagger = c_a^b(\mathbf{x}) \hat{Q}_b \quad (3)$$

と変化する．並進演算子の性質  $\hat{T}_{x+x'} = \hat{T}_x \hat{T}_{x'}$  より， $c_a^b(x+x') = c_a^c(x)c_c^b(x')$  が満たされる．Hermite な電荷 ( $\hat{Q}_a^\dagger = \hat{Q}_a$ ) に対して， $c_a^b$  は実である．電荷が陽に座標によらない場合，電荷は  $\hat{P}^i$  と可換で  $c_a^b(x) = \delta_a^b$  を満たす．このような電荷を並進不変な電荷と呼ぶ．逆に陽に座標に依存した電荷は並進不変でない．典型的な並進不変でない電荷の例は，回転演算子 (角運動量演算子) である．それは式 (3) の元で， $\hat{T}_x \hat{L}_{ij} \hat{T}_x^\dagger = \hat{L}_{ij} - x_i \hat{P}_j + x_j \hat{P}_i$  と変化する．

以下の議論で使うため，ある任意の演算子  $\hat{O}$  の期待値を  $\langle \hat{O} \rangle \equiv \text{tr} \hat{\rho}_{\text{eq}} \hat{O}$  と定義する．ここで，我々は  $\hat{\rho}_{\text{eq}}$  を Gibbs 分布 [ $\hat{\rho}_{\text{eq}} \equiv \exp(-\beta \hat{H}) / \text{tr} \exp(-\beta \hat{H})$ ] に取る．化学ポテンシャルを導入する場合は， $\hat{H}$  を  $\hat{H} - \mu \hat{N}$  に置き換えれば良い．また，ゼロ温度の理論は  $\beta \rightarrow \infty$  によって得られる．

## 2.2 弾性変数

ここで，独立な弾性変数と対称性の破れの関係について議論しよう．このために我々は自由エネルギーを用いる．弾性変数は，自由エネルギーを変化させない変数として定義される．まず，熱力学ポテンシャルを

$$W[J] = -\frac{1}{\beta} \ln \text{tr} \exp \left[ -\beta \hat{H} + \beta \int d^d x \hat{\phi}_i(\mathbf{x}) J^i(\mathbf{x}) \right] \quad (4)$$

と定義する．ここで  $\hat{\phi}_i(\mathbf{x})$  は線形表現に属する並進共変な Hermite 演算子の組とする．これは基本的な場でも複合場でもよい．ただし， $\hat{\phi}_i(\mathbf{x})$  は各破れた電荷に対して少なくとも1つは秩序変数を含むように選ぶ．自由エネルギー ( $F[\phi]$ ) は，熱力学ポテンシャルの Legendre 変換で得られる：

$$F[\phi] = W[J] - \int d^d x J^i(\mathbf{x}) \frac{\delta W[J]}{\delta J^i(\mathbf{x})}. \quad (5)$$

2 階微分は感受率の逆，

$$\chi^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left. \frac{\delta^2 F[\phi]}{\delta \phi_i(\mathbf{x}) \delta \phi_j(\mathbf{y})} \right|_{\phi = \langle \hat{\phi} \rangle_{J=0}} \quad (6)$$

になっており，感受率  $\chi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \lim_{J \rightarrow 0} \delta \langle \phi_j(\mathbf{y}) \rangle_J / \delta J^i(\mathbf{x})$  に対して， $\int d^d w \chi_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \chi^{kj}(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \delta_i^j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  を満たす．ここで  $\langle \dots \rangle_J$  は外場  $J$  の元での期待値を表す．もし， $\chi^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を演算子と見た場合，

$$\int d^d y \chi^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_j(n, \mathbf{k}, \mathbf{y}) = \lambda_n(\mathbf{k}) \psi^i(n, \mathbf{k}, \mathbf{x}) \quad (7)$$

の固有値方程式を考えることができる．ここで， $\psi^i(n, \mathbf{k}, \mathbf{x}) = \psi_i(n, \mathbf{k}, \mathbf{x})$  である．固有値  $\lambda_n(\mathbf{k})$  は自由エネルギーの凸性から非負である．また，並進は完全には破れておらず，少なくとも1方向には離散的でも良いので残っていると看做する．これは，モードを考える上で必要な条件である．その破れていない並進は，並進ベクトル  $\mathbf{R}$  を用いて  $\hat{T}_{\mathbf{R}}$  で表される．対応する運動量 ( $\mathbf{k}$ ) は第一 Brillouin ゾーンを走る．固有関数は，並進との同時固有関数に取ることができ，この並進 ( $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{R}$ ) の元で  $\psi_i(n, \mathbf{k}, \mathbf{x} + \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \psi_i(n, \mathbf{k}, \mathbf{x})$  と変化する． $\chi^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  のゼロ固有値を持つ固有関数が弾性変数となる．

次に自由エネルギーの対称性を考えよう．ハミルトニアンと可換な電荷について，量子異常がなければ自由エネルギーは，

$$\int d^d y \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi_j(\mathbf{y})} \langle \hat{h}_{aj}(\mathbf{y}) \rangle_J = 0 \quad (8)$$

を満たす．ここで  $\hat{h}_{ai}(\mathbf{x}) = i[\hat{Q}_a, \hat{\phi}_i(\mathbf{x})] = [T_a]_j^i \hat{\phi}_i(\mathbf{x})$  である．ここで，弾性変数となる  $\chi^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  のゼロ固有値の固有関数を探そう．これは，自由エネルギーを対称性変換することで求めることができる．自発的対称性の破れは，

$$i\langle[\hat{Q}_a, \hat{\phi}_i(\mathbf{x})]\rangle = \lim_{J \rightarrow 0} \langle \hat{h}_{ai}(\mathbf{x}) \rangle_J \equiv h_{ai}(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (9)$$

となる局所場  $\hat{\phi}_i(\mathbf{x})$  が存在することで定義され， $h_{ai}(\mathbf{x})$  は秩序変数と呼ばれる． $c^a h_{ai}(\mathbf{x}) = 0$  は  $c^a = 0$  の時のみという意味で線形独立とし， $a$  は 1 から  $N_{BS}$  を走ることにする．式 (8) を  $\phi_i(\mathbf{x})$  で微分すると，

$$\int d^d y \frac{\delta^2 F[\phi]}{\delta \phi_i(\mathbf{x}) \delta \phi_j(\mathbf{y})} \langle \hat{h}_{aj}(\mathbf{y}) \rangle_J + \int d^d y \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi_j(\mathbf{y})} \frac{\delta \langle \hat{h}_{aj}(\mathbf{y}) \rangle_J}{\delta \phi_i(\mathbf{x})} = 0 \quad (10)$$

を得る． $J = 0$  の時，停留点  $[\delta F[\phi]/\delta \phi_j(\mathbf{y}) = 0]$  で第 2 項は消え，

$$\sum_j \int d^d y \chi^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_{aj}(\mathbf{y}) = 0 \quad (11)$$

を得る．従って，秩序変数  $h_{aj}(\mathbf{y})$  はゼロ固有値の固有関数の候補となる．もし秩序変数が座標によらず，並進が破れていなければ， $h_{aj}(\mathbf{y})$  は固有関数でその数は， $N_{BS}$  に等しい．しかしながら，一般の場合には  $h_{aj}(\mathbf{y})$  は必ずしも固有関数にはなっていない．これを見るために，破れてない並進  $\hat{T}_R$  を考えよう．もし， $h_{aj}(\mathbf{y})$  の線形結合が固有関数ならば，破れていない並進に対して同時固有関数になっているべきである．この並進の元で秩序変数は，

$$\begin{aligned} h_{ai}(\mathbf{x}) &= i\langle [T_R \hat{Q}_a T_R^\dagger, \hat{T}_R \hat{\phi}_i(\mathbf{x}) \hat{T}_R^\dagger] \rangle \\ &= i c_a^b(\mathbf{R}) \langle [\hat{Q}_b, \hat{\phi}_i(\mathbf{x} + \mathbf{R})] \rangle \\ &= c_a^b(\mathbf{R}) h_{bi}(\mathbf{x} + \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (12)$$

と変換する．従って，線形結合から作られる固有関数  $f^a h_{ai}(\mathbf{x})$  は， $f^a h_{ai}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} f^a c_a^b(\mathbf{R}) h_{bi}(\mathbf{x})$  を満たさなければならない．自明でない  $f^a$  が弾性数を与え，この式を満たすためには， $\mathbf{k} = 0$  でなければならない．さらに  $A_b^a(\mathbf{R}) \equiv (\delta_b^a - c_a^b(\mathbf{R}))$  として，任意の並進ベクトル  $\mathbf{R}$  に対して  $f^b A_b^a(\mathbf{R}) = 0$  を満たさなければならない．よって，独立な弾性変数の数は  $A_b^a(\mathbf{R})$  の核の次元 ( $\dim \ker A = N_{BS} - \text{rank } A$ ) に等しい:

$$N_{EV} = N_{BS} - \text{rank } A. \quad (13)$$

これが本稿で示したかったことである．添字  $a, b$  は，破れた電荷の足を走る事に注意．この条件は，並進不変でない電荷は固有関数を生成しないということの意味しない点に注意しよう．例えば，回転対称性が破れた場合，式 (2.1) より，

$$\langle [\hat{T}_R \hat{L}_{ij} \hat{T}_R^\dagger, \hat{\phi}_k(\mathbf{x})] \rangle = \langle [\hat{L}_{ij}, \hat{\phi}_k(\mathbf{x})] \rangle - R_i \langle [\hat{P}_j, \hat{\phi}_k(\mathbf{x})] \rangle + R_j \langle [\hat{P}_i, \hat{\phi}_k(\mathbf{x})] \rangle \quad (14)$$

となる．もし並進が破れていなければ，回転対称性の破れにもなう弾性変数が現れる．一方，もし回転と並進が同時に破れた場合は，並進のみが弾性変数になる．このような状況は，実際に液晶で起きる事が知られている．ネマティック相では，空間回転対称性が  $O(3) \rightarrow O(2)$  に破れ，並進は破れない．この場合，独立な弾性変数の数は 2 つである．一方スメクティック A 相では，回転に加え，並進も破れる．この場合，回転は弾性変数にならない [1]．

### 3 まとめ

本稿で、我々は弾性変数と破れた対称性の関係について議論した。弾性変数の数は、式 (13) で与えられる。これらの弾性変数は、電荷密度と結合し NG モードを作るだろう。並進不変でない電荷に対して自発的に破れた対称性と分散の関係に対しての一般論は今の所わかっていない<sup>1</sup>。特に有限温度の分散関係は複雑なものになると予想される。例えば、ネマティック相の NG モードについて、分散は、 $\omega = ak^2 + ibk^2$  の形になる事が知られている [10]。実部と虚部は  $k$  について同じ次数で、温度によっては、 $a = 0$  となり拡散モードとなってしまう、パラメータに依存した分散となる。また、液体の表面に現れる表面張力波の分散は  $\omega \propto k^{3/2}$  となることが知られており、並進不変な電荷に対する Nielsen-Chadar の分類 [11] には現れない分散を持つ。これらのモードに対する一般論を構築することは今後の課題である。

### 参考文献

- [1] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2000.
- [2] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1.,” *Phys. Rev.* **122** (1961) 345–358.
- [3] J. Goldstone, “Field Theories with Superconductor Solutions,” *Nuovo Cim.* **19** (1961) 154–164.
- [4] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, “Broken Symmetries,” *Phys. Rev.* **127** (1962) 965–970.
- [5] Y. Nambu, “Spontaneous breaking of lie and current algebras,” *J. Stat. Phys.* **115** (2004) 7–17.
- [6] H. Watanabe and H. Murayama, “Unified Description of Nambu-Goldstone Bosons without Lorentz Invariance,” *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 251602, arXiv:1203.0609 [hep-th].
- [7] Y. Hidaka, “Counting rule for Nambu-Goldstone modes in nonrelativistic systems,” *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 091601, arXiv:1203.1494 [hep-th].
- [8] I. Low and A. V. Manohar, “Spontaneously broken spacetime symmetries and Goldstone’s theorem,” *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 101602, arXiv:hep-th/0110285.
- [9] H. Watanabe and H. Murayama, “Redundancies in Nambu-Goldstone Bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 181601, arXiv:1302.4800 [cond-mat.other].
- [10] M. Hosino and H. Nakano, “Molecular Theory of Hydrodynamic Equations for Nematic Liquid Crystals,” *Prog. Theor. Phys.* **68** (1982) 388–401.
- [11] H. B. Nielsen and S. Chadha, “On How to Count Goldstone Bosons,” *Nucl. Phys.* **B105** (1976) 445.

<sup>1</sup>ゼロ温度の理論に関しては参考文献 [8] や [9] で議論されている。

# 電弱バリオン数生成の現状と課題

瀬名波 栄問

October 18, 2013

## Abstract

Electroweak baryogenesis is reviewed in light of the 126 GeV Higgs boson. In this talk, we focus on the minimal supersymmetric standard model (MSSM) and investigate an overlooked issue associated with a high-temperature expansion of the two-loop effective potential. As a first step toward the complete analysis of the MSSM, we consider the  $U(1)$  gauge theory and devise a tractable calculation scheme that can greatly simplify the sunset diagrams involving the gauge bosons without using the high-temperature approximation.

## 1 Introduction

According to the cosmological data, the baryon asymmetry of the universe (BAU) is found to be  $\eta = n_b/n_\gamma \simeq 10^{-10}$  [1]. Clarification of the origin of the BAU is one of the greatest challenges in particle physics, cosmology and nuclear physics. If the BAU is generated before  $T = \mathcal{O}(1)$  MeV, the light element abundances (D,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^7\text{Li}$ ) can be explained by the standard Big-Bang cosmology. To get the right  $\eta$  (which is called baryogenesis) from an initially baryon symmetric Universe, the so-called Sakharov's conditions have to be satisfied [2]: (i) baryon number ( $B$ ) violation, (ii)  $C$  and  $CP$  violation, (iii) departure from thermal equilibrium. To this end, a lot of scenarios have been proposed so far [3]. From an experimental point of view, electroweak baryogenesis (EWBG) [4] among others is the most testable scenario, and thus it is in urgent need of detailed analysis in the LHC and future ILC eras.

It is known that the possibility of the EWBG in the standard model (SM) has been ruled out due to the lack of sufficiently large  $CP$  violating effect and absence of the strong first-order phase transition (EWPT) which is needed for satisfying the Sakharov's condition (iii). Such a shortcoming of the SM motivates us to look for physics beyond the SM. Much attention has been paid to the minimal supersymmetric standard model (MSSM) as a leading candidate for new physics.

In this talk, after reviewing the EWBG mechanism briefly, we derive the sphaleron decoupling condition in light of the 126 GeV Higgs boson. In order to know a prescription for the baryogenesis problems in the SM, the EWPT is also reviewed using the one-loop effective potential. Then, we move on to the MSSM and point out the unresolved issues shortly. After presenting our new calculation method that can solve one of the issues, we apply it to the  $U(1)$  gauge theory as a first step toward the complete analysis of the MSSM EWBG.

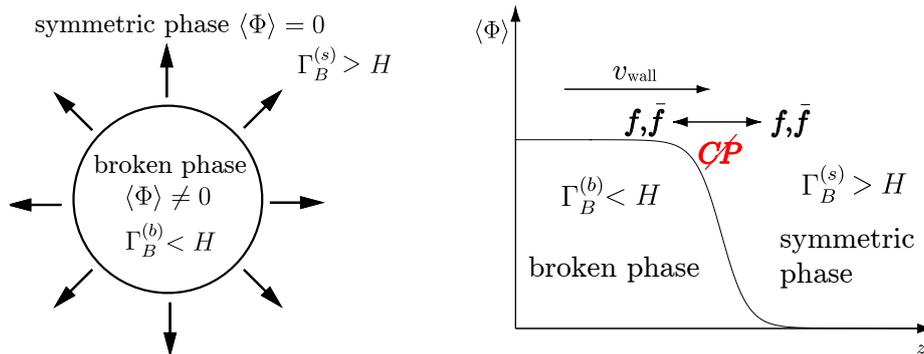


Figure 1: (Left) The bubble expansion. (Right) The Higgs VEV as function of  $z$  which is the direction of the bubble expansion.

## 2 EWBG mechanism

Foregoing Sakharov's conditions in the EWBG are satisfied as follows: (i)  $B$  violation is realized by an anomalous process at finite temperature (conventionally referred as *sphaleron process* although the sphaleron solution does not exist in the symmetric phase.) (ii)  $C$  is maximally violated by the chiral gauge interactions,  $CP$  violation comes from the Cabbibo-Kobayashi-Maskawa matrix or other complex parameters once the standard model (SM) is extended. (iii) Out of equilibrium is realized by the first-order EWPT with bubble nucleation and expansion.

The left panel of Fig. 1 shows a schematic picture of the expanding bubble wall. The inside of the bubble corresponds to the broken phase where the Higgs vacuum expectation value (VEV) is nonzero,  $\langle \Phi \rangle \neq 0$  while the outside of it represents the symmetric phase where  $\langle \Phi \rangle = 0$ . In the right panel of Fig. 1,  $\langle \Phi \rangle$  is depicted as a function of  $z$  which is a direction of the bubble expansion. The outline of the EWBG is as follows.

1. Because of  $CP$  violation induced by interactions between the bubble and the particles in the plasma, chiral charges are asymmetrized.
2. They diffuse into the symmetric phase and accumulate.
3.  $B$  is generated via sphaleron process.
4. After decoupling of the sphaleron process in the broken phase,  $B$  is fixed.

The last step may leave a detectable footprint in low energy observables. In the following, we will look into one of such possibilities.

## 3 Sphaleron decoupling condition

In order to preserve the generated BAU via the sphaleron process in the symmetric phase, the  $B$ -changing rate in the broken phase ( $\Gamma_B^{(b)}$ ) must be sufficiently suppressed. Namely,

$$\Gamma_B^{(b)}(T) \simeq (\text{prefactor}) e^{-E_{\text{sph}}(T)/T} < H(T) \simeq 1.66 \sqrt{g_*(T)} T^2 / m_{\text{P}} \quad (3.1)$$

is satisfied, where  $E_{\text{sph}}$  denotes the sphaleron energy,  $g_*$  is the degrees of freedom of relativistic particles in the plasma ( $g_* = 106.75$  in the SM) and  $m_{\text{P}}$  stands for the Planck mass which is about  $1.22 \times 10^{19}$  GeV. Since  $E_{\text{sph}}$  is proportional to the Higgs

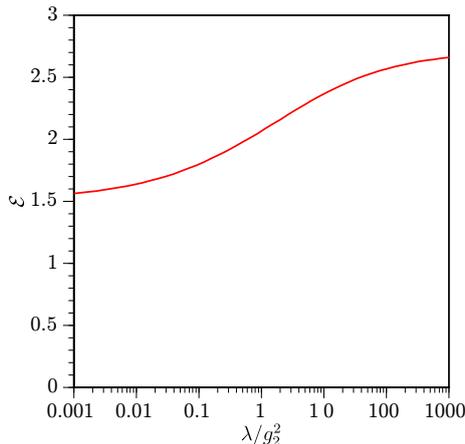


Figure 2: The dimensionless sphaleron energy  $\mathcal{E}(0)$  vs.  $\lambda/g_2^2$ .

VEV (denoted by  $v$ ), Eq. (3.1) can be realized if the EWPT is strongly first-order. Conventionally, the sphaleron energy is parametrized as  $E_{\text{sph}}(T) = 4\pi v(T)\mathcal{E}(T)/g_2$ , where  $g_2$  denotes the SU(2) gauge coupling constant. Eq. (3.1) is then cast into the form

$$\frac{v(T)}{T} > \frac{g_2}{4\pi\mathcal{E}(T)} \left[ 42.97 + \log \text{ corrections} \right]. \quad (3.2)$$

The dominant contributions on the right-hand side is  $\mathcal{E}(T)$  while the log corrections that mostly come from the zero mode factors of the fluctuations about the sphaleron typically amount to about 10% [5].

As an illustration, we evaluate the sphaleron energy at zero temperature,  $\mathcal{E}(0)$ , within the SM [6]. Since the  $U(1)_Y$  contribution is sufficiently small [7], it is enough to confine ourself to the  $SU(2)_L$  gauge-Higgs system. To find the sphaleron solution, we adopt a spherically symmetric configurations ansatz with a noncontractible loop [6].

In Fig. 2,  $\mathcal{E}(0)$  is plotted as a function of  $\lambda/g_2^2$ . We can see that as  $\lambda/g_2^2$  increases,  $\mathcal{E}$  increases. For the Higgs boson with a mass of 126 GeV, which corresponds to  $\lambda \simeq 0.13$ , one finds  $\mathcal{E}(0) \simeq 1.92$ . With this value, Eq. (3.2) becomes

$$\frac{v(T)}{T} > 1.16, \quad (3.3)$$

where only the dominant contributions are retained on the right-hand side in Eq. (3.2). Note that the use of  $\mathcal{E}(0)$  in the decoupling criterion leads to somewhat underestimated results since  $\mathcal{E}(T) < \mathcal{E}(0)$ . In the MSSM, using the finite-temperature effective potential at the one-loop level,  $v(T_N)/T_N > 1.38$  is obtained, where the sphaleron energy as well as the translational and rotational zero mode factors of the fluctuation around the sphaleron are evaluated at a nucleation temperature ( $T_N$ ) which is somewhat below  $T_C$  [5].

## 4 Electroweak phase transition

Here, we explicitly demonstrate why the SM EWBG fails, which may give a signpost searching for new physics. Using a high-temperature expansion, the one-loop effective

potential at finite temperature is reduced to

$$V_{\text{eff}}(\varphi; T) \simeq D(T^2 - T_0^2)\varphi^2 - ET\varphi^3 + \frac{\lambda_T}{4}\varphi^4, \quad (4.1)$$

where

$$D = \frac{1}{8v^2} (2m_W^2 + m_Z^2 + 2m_t^2), \quad E = \frac{1}{4\pi v^3} (2m_W^3 + m_Z^3) \simeq 10^{-2}, \quad (4.2)$$

$$\lambda_T = \frac{m_h^2}{2v^2} \left[ 1 - \frac{3}{8\pi^2 v^2 m_h^2} \left\{ 2m_W^4 \log \frac{m_W^2}{\alpha_B T^2} + m_Z^4 \log \frac{m_Z^2}{\alpha_B T^2} - 4m_t^4 \log \frac{m_t^2}{\alpha_F T^2} \right\} \right], \quad (4.3)$$

with  $\log \alpha_B = 2 \log 4\pi - 2\gamma_E \simeq 3.91$  and  $\log \alpha_F = 2 \log \pi - 2\gamma_E \simeq 1.14$ . Appearance of the cubic term with the negative coefficient dictates that the EWPT should be first-order. Note that since the origin of the cubic term is the zero Matsubara frequency mode, the only bosonic thermal loops contribute to  $E$ .

The critical temperature  $T_C$  is defined by a temperature at which  $V_{\text{eff}}(\varphi; T)$  has two degenerate minima. At  $T_C$ ,  $V_{\text{eff}}$  takes the form

$$V_{\text{eff}}(\varphi; T_C) = \frac{\lambda_{T_C}}{4}\varphi^2(\varphi - v_C)^2, \quad v_C = \frac{2ET_C}{\lambda_{T_C}}. \quad (4.4)$$

As we discussed in the previous section,  $v_C/T_C \gtrsim 1$  should hold to avoid the washout by the sphaleron in the broken phase. Since  $\lambda_{T_C} \simeq m_h^2/2v^2$ , one obtains the upper bound of the Higgs boson mass as

$$m_h \lesssim 2v\sqrt{E} \simeq 48 \text{ GeV}. \quad (4.5)$$

This mass range has been already excluded by the LEP experiments. According to nonperturbative studies, the EWPT in the SM is a crossover for  $m_h \gtrsim 73 \text{ GeV}$  [8].

From the above argument, one of the straightforward way-outs is to enhance  $E$  by adding the bosonic degrees of freedom.

## 5 Light stop scenario in the MSSM

Let us consider the MSSM case. The EWBG scenario in this model is the so-called ‘‘light stop scenario (LSS) [9]’’, which is now on the verge of being excluded. (see e.g. [10, 11]).

In order to realize the physical Higgs boson mass, the left-handed stop SUSY breaking mass ( $m_{\tilde{q}}$ ) has to be much greater than the right-handed one ( $m_{\tilde{t}_R}$ ). According to [11],  $m_{\tilde{q}}$  may be as large as  $\mathcal{O}(10^6)$  TeV. In such a case, the effective theory approach is more appropriate. The effective theory of the LSS is constructed in [12] and is applied to the EWBG [13, 11]. Here, to make our analysis simple, we take  $m_h$  as an input.

In the limit of  $m_{\tilde{q}} \gg m_{\tilde{t}_R}$ , the stop masses are reduced to

$$\bar{m}_{\tilde{t}_2}^2 = m_{\tilde{q}}^2 + \frac{y_t^2 \sin^2 \beta}{2} \left( 1 + \frac{|X_t|^2}{m_{\tilde{q}}^2} \right) \varphi^2 + \mathcal{O}(g^2) \simeq m_{\tilde{q}}^2, \quad (5.1)$$

$$\bar{m}_{\tilde{t}_1}^2 = m_{\tilde{t}_R}^2 + \frac{y_t^2 \sin^2 \beta}{2} \left( 1 - \frac{|X_t|^2}{m_{\tilde{q}}^2} \right) \varphi^2 + \mathcal{O}(g^2), \quad (5.2)$$

where  $X_t = A_t - \mu/\tan \beta$ . As discussed above, the heavy stop does not play any role as far as the first-order EWPT is concerned. Also, the small  $m_{\tilde{t}_R}^2$  and  $X_t$  are desirable. More precisely, at finite temperature, the light stop receives a thermal correction

$(\Delta m_{\tilde{t}_R}^2(T))$  which is of the order of  $T^2$  to leading order. So the  $m_{\tilde{t}_R}^2 + \Delta m_{\tilde{t}_R}^2(T)$  should be vanishingly small for the strong first-order EWPT, which implies  $m_{\tilde{t}_R}^2 < 0$  since  $\Delta m_{\tilde{t}_R}^2(T) > 0$ . In the LSS scenario considered in [13], the color-charge-breaking vacuum is the global minimum. On the other hand, the electroweak vacuum is metastable whose lifetime is longer than the age of the Universe.

For simplicity, we take  $m_{\tilde{t}_R}^2 = 0$  in the following discussion. The coefficient of cubic term in the one-loop effective potential at finite temperature is

$$V_{\text{eff}} \ni -(E_{\text{SM}} + E_{\tilde{t}_1})T\varphi^3, \quad E_{\tilde{t}_1} = \frac{y_t^3 \sin^3 \beta}{4\sqrt{2}} \left(1 - \frac{|X_t|^2}{m_{\tilde{q}}^2}\right)^{3/2}. \quad (5.3)$$

Therefore,  $E_{\tilde{t}_1}$  can strengthen  $v_C/T_C$ .

## 5.1 Overlooked issues

There are two problems which have not been properly addressed in the literature, i.e.,

- (i) validity of the high-temperature expansion (HTE) of the sunset diagram,
- (ii) sphaleron decoupling condition at the two-loop level.

In what follows, we will work out the former issue.

## 6 Two-loop analysis of thermal phase transition

As a first step toward the analysis in the MSSM, we consider the Abelian-Higgs (AH) model for the sake of simplicity. The Lagrangian of the AH is

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\Phi|^2 - V_0(|\Phi|^2), \quad (6.1)$$

where  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $D_\mu\Phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi$  and The scalar potential is given by

$$V_0(|\Phi|^2) = -\nu^2|\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\Phi|^4. \quad (6.2)$$

We parametrize the scalar field in terms of the VEV ( $v$ ) and fluctuation fields

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x) + ia(x)), \quad (6.3)$$

where  $h(x)$  is a physical state and  $a(x)$  is a Nambu-Goldstone boson which is eaten by the gauge boson. The field-dependent scalar and gauge boson masses are

$$m_h^2 = -\nu^2 + \frac{3\lambda}{4}v^2, \quad m_a^2 = -\nu^2 + \frac{\lambda}{4}v^2, \quad m_A^2 = e^2v^2, \quad (6.4)$$

where we work in the Landau gauge. In our study, the  $\overline{\text{MS}}$  scheme is used for renormalization.

We adopt a resummation method in which temperature-dependent mass terms  $[\Delta m^2]$  are added and subtracted in the original Lagrangian [14, 15]. The subtracted terms are considered as the counterterms. As is well known, thermal corrections to the longitudinal and transverse parts of the gauge boson self-energy are different. Consequently, the resummed Lagrangian is obtained as follows.

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{\text{CT}}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \mathcal{L}_R - \Delta m_\Phi^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{1}{2} A^\mu \left[ \Delta m_L^2 L_{\mu\nu}(i\partial) + \Delta m_T^2 T_{\mu\nu}(i\partial) \right] A^\nu \\ &\quad + \mathcal{L}_{\text{CT}} + \Delta m_\Phi^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{2} A^\mu \left[ \Delta m_L^2 L_{\mu\nu}(i\partial) + \Delta m_T^2 T_{\mu\nu}(i\partial) \right] A^\nu, \end{aligned} \quad (6.5)$$

where  $\mathcal{L}_{B(R)}$  are denoted by the bare (renormalized) Lagrangian and  $\mathcal{L}_{\text{CT}}$  by the counterterm. Note that Eq. (6.5) has the gauge invariant form.<sup>1</sup>  $L_{\mu\nu}(p)$  and  $T_{\mu\nu}(p)$  are the projection tensors which are given by

$$T_{00} = T_{0i} = T_{i0} = 0, \quad T_{ij} = g_{ij} - \frac{p_i p_j}{-\mathbf{p}^2}, \quad (6.6)$$

$$L_{\mu\nu} = P_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}, \quad P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad (6.7)$$

in the rest frame of the thermal bath. With the resummed Lagrangian (6.5), the scalar and gauge boson propagators take the form

$$\Delta_h(p) = \frac{1}{p^2 - m_h^2(T)}, \quad \Delta_a(p) = \frac{1}{p^2 - m_a^2(T)}, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{D}_{\mu\nu}(p) = \frac{-1}{p^2 - m_L^2(T)} L_{\mu\nu}(p) + \frac{-1}{p^2 - m_T^2(T)} T_{\mu\nu}(p), \quad (6.9)$$

where  $m_{h,a}^2(T) = m_{h,a}^2 + \Delta m_\Phi^2$  and  $m_{L,T}^2(T) = m_A^2 + \Delta m_{L,T}^2$ . Explicitly, the thermal masses are, respectively, given by

$$\Delta m_\Phi^2 = \frac{T^2}{12}(3e^2 + \lambda), \quad \Delta m_T^2 = 0, \quad \Delta m_L^2 = \frac{e^2}{3}T^2. \quad (6.10)$$

Although Eq. (6.9) can be used as the resummed gauge boson propagator [15], we can devise a more convenient form for two-loop calculations. Using  $L_{\mu\nu}(p) + T_{\mu\nu}(p) = P_{\mu\nu}(p)$ ,  $\mathbf{D}_{\mu\nu}(p)$  can be rewritten in terms of  $P_{\mu\nu}(p)$  and  $T_{\mu\nu}(p)$  or  $L_{\mu\nu}(p)$ . Let  $\mathbf{D}_{\mu\nu}^{(r=0)}(p)$  be the former case, and  $\mathbf{D}_{\mu\nu}^{(r=1)}(p)$  the latter one. The most general expression is cast into the form

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mu\nu}(p) &= (1-r)\mathbf{D}_{\mu\nu}^{(r=0)}(p) + r\mathbf{D}_{\mu\nu}^{(r=1)}(p) \\ &= \left[ \frac{-(1-r)}{p^2 - m_L^2} + \frac{-r}{p^2 - m_T^2} \right] P_{\mu\nu}(p) + \left[ \frac{-1}{p^2 - m_T^2} - \frac{-1}{p^2 - m_L^2} \right] (T_{\mu\nu}(p) - rP_{\mu\nu}(p)), \end{aligned} \quad (6.11)$$

where  $r$  denotes an arbitrary real parameter. Note that the noncovariant part yields less ultraviolet divergent loop integrals. It turns out that loop calculations are greatly simplified if  $r$  is chosen such that  $g^{\mu\nu}(T_{\mu\nu}(p) - rP_{\mu\nu}(p)) = 0$ , which leads to  $r = (d-2)/(d-1)$ .

After fixing  $r$ , let us denote Eq. (6.11) as

$$\mathbf{D}_{\mu\nu}(p) = D_{\mu\nu}^{\text{cov}}(p) + \delta D_{\mu\nu}(p), \quad (6.12)$$

With this gauge boson propagator, together with Eq. (6.8), we will compute the effective potential.

It turns out that noncovariant parts of the sunset diagrams involving  $\delta D_{\mu\nu}$  do not yield any effects on the thermal phase transition to leading order. For details, see [16].

<sup>1</sup>For non-Abelian gauge theories, however, this resummation method would break the gauge invariance. We also note that the thermal masses of  $h$  and  $a$  would be different if  $v$ -dependent corrections were included, rendering the gauge invariance spoiled. In our analysis, we keep the leading order corrections which are  $\mathcal{O}(T^2)$ , so the  $\Delta m_h^2(T) = \Delta m_a^2(T) = \Delta m_\Phi^2$ .

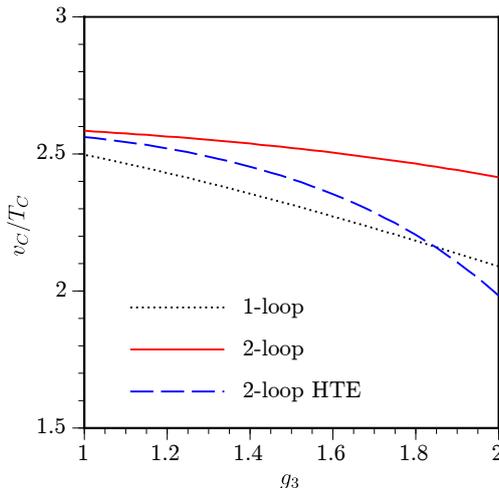


Figure 3:  $v_C/T_C$  in the three cases are shown as a function of  $g_3$ . The input parameters are given in the text.

## 6.1 MSSM-like toy model

We discuss the thermal PT using the scheme proposed in the previous section. As a first step toward the complete analysis of the two-loop driven first-order EWPT scenario such as the MSSM, we consider an extended AH model in which additional  $U(1)$  gauge boson and complex scalar are introduced. The added Lagrangian is

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + |D_\mu\tilde{t}|^2 - (m_0^2 + y^2|\Phi|^2)|\tilde{t}|^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{4}|\tilde{t}|^4, \quad (6.13)$$

where  $G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu$  and  $D_\mu\tilde{t} = (\partial_\mu - ig_3G_\mu)\tilde{t}$ .

In the MSSM the stop-stop-gluon sunset diagram enhances  $v_C/T_C$ . We scrutinize this effect with and without the HTE. The explicit forms of the scalar-scalar-vector and scalar-vector-vector type sunset diagrams can be found in Ref. [17]. Those sunset diagrams are composed of  $K_{--}(a_1, a_2, a_3)$  and the one-loop finite-temperature functions. Such one-loop thermal functions and two-loop ones of the type of  $K(a)$ ,  $K_{--}(a, a, 0)$ ,  $K_{--}(a, 0, 0)$  and  $K_{--}(0, 0, a)$  are evaluated by the numerical integrations. For other types of  $K_{--}(a_1, a_2, a_3)$  such as  $K_{--}(m_h/T, m_a/T, m_a/T)$ , the mass-averaging approximation is also employed.

In the following, by the HTE case we mean the following replacements

$$K(a) \rightarrow K^{\text{HTE}}(a) = -\frac{\pi^2}{3}(\ln a^2 + 3.48871), \quad (6.14)$$

$$K_{--}(a, a, 0) \rightarrow K_{--}^{\text{HTE}}(a, a, 0) = -\pi^2(\ln a^2 + 3.01398), \quad (6.15)$$

and all the rest are unchanged.

In FIG. 3,  $v_C/T_C$  is shown as a function of  $g_3$ . We set  $v = 246$  GeV,  $m_h = 35$  GeV,  $m_0^2 = 0$ ,  $y = 1.0$ ,  $e = 0.5$ ,  $\tilde{\lambda} = 0.3$  and  $\bar{\mu} = 150$  GeV. Here, we take  $m_h$  as an input instead of using  $\lambda$ . This trade is done at a loop level. The red curve represents the two-loop calculation, and the blue dashed curve denotes the two-loop calculation with the HTE. The one-loop calculation of  $v_C/T_C$  is also shown by the dotted black curve. This figure shows that enhancement of  $v_C/T_C$  due to the  $\tilde{t}\text{-}\tilde{t}\text{-}G_\mu$  diagram can still persist beyond the HTE. In this specific example, the use of the HTE leads to the

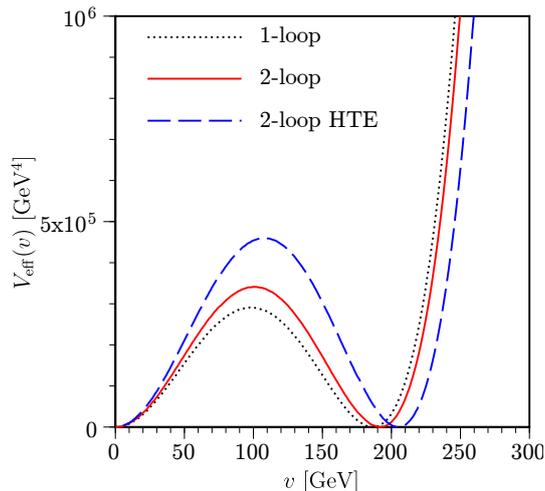


Figure 4: The shown is the effective potential at  $T_C$ . We take  $g_3 = 1.2$ . The remaining parameters are the same as in FIG. 3.

underestimated  $v_C/T_C$ . Note that in the limit of  $g_3 \rightarrow 0$ , the results would approach to those in the AH model. In such a limit, the difference between ‘2-loop’ and ‘2-loop HTE’ would be decreasing since the sunset diagrams are less important for the PT analysis. However, we emphasize that evaluation of the sunset diagrams without the HTE is necessary in the MSSM-like model.

The height of the barrier between the two degenerate vacua in the effective potential is also relevant to dynamics of the first-order PT. The effective potentials at  $T_C$  and  $g_3 = 1.2$  in the three cases are plotted in FIG. 4. The color and line coordinates are the same as in FIG. 3. We find that  $v_C/T_C|_{1\text{-loop}} = 186.55/76.75 = 2.43$ ,  $v_C/T_C|_{2\text{-loop}} = 191.84/74.80 = 2.56$  and  $v_C/T_C|_{2\text{-loop HTE}} = 204.98/81.31 = 2.52$ . The significant increase of  $T_C$  in the HTE case may be the consequence of the artificial negative contributions to the quadratic term in the scalar potential. It is also found that the barrier height at the two-loop level is somewhat higher than that of the one-loop case, delaying the onset of the PT. However, we may get the overestimated result once the HTE is used. We observe that generally the larger  $g_3$  can bring the larger errors in  $v_C$ ,  $T_C$  and the barrier height.

## 7 Summary

In this talk, the current status of electroweak baryogenesis is briefly reviewed. In particular, we focused on validity of the high-temperature expansion of the sunset diagrams in the MSSM. As a first step toward the complete analysis of the MSSM EWBG, we devised a tractable calculation scheme that can be applicable in the  $U(1)$  gauge theory. Our results suggest that  $v_C$  and  $T_C$  can be overestimated if the high-temperature expansion is used. However, the error of  $v_C/T_C$  may be within a few percent level. It is concluded that the scalar-scalar-vector type sunset diagram still plays an important role in enhancing  $v_C/T_C$ .

## References

- [1] J. Beringer *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012).
- [2] A. D. Sakharov, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **5**, 32 (1967) [JETP Lett. **5**, 24 (1967)] [Sov. Phys. Usp. **34**, 392 (1991)] [Usp. Fiz. Nauk **161**, 61 (1991)].
- [3] M. Shaposhnikov, J. Phys. Conf. Ser. **171**, 012005 (2009).
- [4] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **155** (1985) 36. For reviews on electroweak baryogenesis, see A. G. Cohen, D. B. Kaplan and A. E. Nelson, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **43** (1993) 27; M. Quiros, Helv. Phys. Acta **67** (1994) 451; V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Usp. Fiz. Nauk **166** (1996) 493; K. Funakubo, Prog. Theor. Phys. **96** (1996) 475; M. Trodden, Rev. Mod. Phys. **71** (1999) 1463; W. Bernreuther, Lect. Notes Phys. **591** (2002) 237; J. M. Cline, [arXiv:hep-ph/0609145]; D. E. Morrissey and M. J. Ramsey-Musolf, New J. Phys. **14**, 125003 (2012). T. Konstandin, arXiv:1302.6713 [hep-ph].
- [5] K. Funakubo and E. Senaha, Phys. Rev. D **79**, 115024 (2009).
- [6] N. S. Manton, Phys. Rev. D **28**, 2019 (1983); F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, Phys. Rev. D **30**, 2212 (1984).
- [7] B. Kleihaus, J. Kunz and Y. Brihaye, Phys. Lett. B **273**, 100 (1991); F. R. Klinkhamer and R. Laterveer, Z. Phys. C **53**, 247 (1992).
- [8] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. E. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett. **77**, 2887 (1996); K. Rummukainen, M. Tsypin, K. Kajantie, M. Laine and M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **532**, 283 (1998); F. Csikor, Z. Fodor and J. Heitger, Phys. Rev. Lett. **82**, 21 (1999); Y. Aoki, F. Csikor, Z. Fodor and A. Ukawa, Phys. Rev. D **60**, 013001 (1999).
- [9] M. S. Carena, M. Quiros and C. E. M. Wagner, Phys. Lett. B **380**, 81 (1996); D. Delepine, J. M. Gerard, R. Gonzalez Felipe and J. Weyers, Phys. Lett. B **386**, 183 (1996).
- [10] T. Cohen, D. E. Morrissey and A. Pierce, Phys. Rev. D **86**, 013009 (2012); D. Curtin, P. Jaiswal and P. Meade, JHEP **1208**, 005 (2012); K. Krizka, A. Kumar and D. E. Morrissey, arXiv:1212.4856 [hep-ph].
- [11] M. Carena, G. Nardini, M. Quiros and C. E. M. Wagner, JHEP **1302**, 001 (2013).
- [12] M. Carena, G. Nardini, M. Quiros and C. E. M. Wagner, JHEP **0810**, 062 (2008).
- [13] M. Carena, G. Nardini, M. Quiros and C. E. M. Wagner, Nucl. Phys. B **812**, 243 (2009).
- [14] R. R. Parwani, Phys. Rev. D **45**, 4695 (1992) [Erratum-ibid. D **48**, 5965 (1993)].
- [15] W. Buchmuller, T. Helbig and D. Walliser, Nucl. Phys. B **407**, 387 (1993).
- [16] K. Funakubo and E. Senaha, Phys. Rev. D **87**, no. 5, 054003 (2013) [arXiv:1210.1737 [hep-ph]].
- [17] P. B. Arnold and O. Espinosa, Phys. Rev. D **47**, 3546 (1993) [Erratum-ibid. D **50**, 6662 (1994)].

## 電弱スケール温度におけるニュートリノスペクトル関数

三浦光太郎<sup>1</sup>、日高義将<sup>2</sup>、佐藤大輔<sup>3</sup>、国広梯二<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 名古屋大学 素粒子宇宙起源研究機構

<sup>2,3</sup> 理化学研究所 仁科加速器研究センター

<sup>4</sup> 京都大学 理学研究科物理第二専攻

電弱スケール温度における左巻きニュートリノのスペクトル関数を、 $R_\xi$  ゲージにおける 1 ループ摂動論に基づいて計算する。温度と weak boson 質量が同程度の場合、スペクトル関数はゲージパラメータに依らずに 3 種類の集団励起モードを有する。結果の Resonant leptogenesis シナリオへの含意についても議論する。尚本研究は論文 [1] に基づく。

**研究背景** 素粒子物理学における標準理論の範囲内では、観測から示唆される宇宙のバリオン数非対称性 (Baryon Number Asymmetry, BAU) を説明できない。Thermal leptogenesis は、この困難を解決する有力仮説の一つである。この仮説においては、標準理論に加えて新しく導入された右巻きマヨラナニュートリノ ( $N_R$ ) が CP 不変性を破り、また標準理論のレプトン  $L = (\nu, l_L)^T$  及びヒッグス二重項  $\Phi$  への崩壊を通してレプトン数を生成する (図 1 参照)。生じたレプトン数は、電弱相転移におけるスファレロン過程を通して、所定の割合で BAU に転化される。初期宇宙における素粒子は、有限温度効果に依る集団励起モードを持つと考えられる。 $N_R$  の崩壊に参与する素粒子の集団励起モードは、崩壊率や CP の破れに影響を与える可能性があるとして近年注目が集まっている [2]。

Resonant leptogenesis [3] に代表される低エネルギー leptogenesis に於いては、電弱スケールにおける素粒子の励起モードがレプトン数生成に寄与する可能性がある。特に左巻きニュートリノの集団励起モードは、図 1 のダイアグラムに左巻きニュートリノのスペクトル関数が含まれる事から示唆される様に、右巻きマヨラナニュートリノの崩壊モードに含まれ、レプトン数生成と CP の破れ双方に寄与する。更に左巻きニュートリノは、quark-gluon plasma (QGP) における先行研究 [4–6]

からの類推で特殊な ultrasoft モードを持つ事が予想される。実際、ユニタリーゲージにおけるニュートリノの分散関係の研究により、ニュートリノにも ultrasoft モードが存在する事が示唆されている [7]。以上から電弱スケールにおける leptogenesis において、左巻きニュートリノの有限温度スペクトル関数は、重要な役割を果たすと期待される。本研究 [1] では、左巻きニュートリノの電弱スケール温度におけるスペクトル関数について解析する。有限温度スペクトル関数のゲージ不変性と ultrasoft モードの有無を  $R_\xi$  ゲージにおいて考察し、更に本研究の結果がレプトン数生成に与える影響についても議論する。

**計算方法と近似** 電弱理論のレプトンセクター Lagrangian を出発点とし、1 ループ摂動論の範囲で左巻きニュートリノの self-energy (図 2) を計算する。有限温度効果は self-energy のループ積分において松原 formalism を用いて評価する。Self-energy の real-part と imaginary-part を用いてスペクトル関数をもとめる。電弱理論のパラメータは以下の値を用いる：真空中のヒッグスの真空期待値

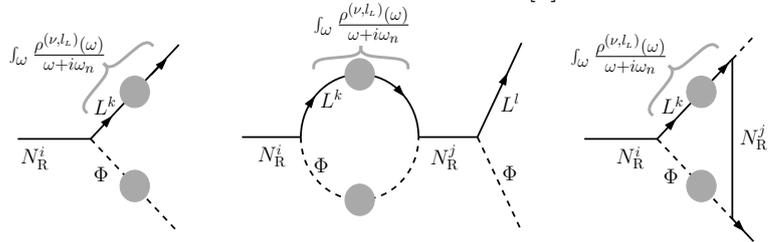


Figure 1: 右巻きマヨラナニュートリノ  $N_R$  から標準理論のレプトン  $L = (\nu, l_L)^T$  及びヒッグス二重項  $\Phi$  への崩壊。総てのダイアグラムに左巻きニュートリノのスペクトル関数 ( $\rho^{(\nu)}$ ) が含まれる。

<sup>1</sup>e-mail: miura@kmi.nagoya-u.ac.jp、登壇者

<sup>2</sup>e-mail: hidaka@riken.jp

<sup>3</sup>e-mail: daisuke.sato@riken.jp

<sup>4</sup>e-mail: kunihiro@ruby.scphys.kyoto-u.ac.jp

$v_0 = 246(\text{GeV})$ 、真空中のヒッグス質量  $m_H = 126(\text{GeV})$ 、ワインバーグ角  $\sin^2 \theta_w = 0.2325$ 、 $SU_w(2)$  ゲージ結合定数  $g = 0.6515$ 。

左巻きニュートリノ質量は、注目するスケール  $\sim 100(\text{GeV})$  に比べて非常に小さく、スペクトル関数への影響は無視できると考えられる Ref. [5]。この仮定に基づき零質量近似を用いると、左巻きニュートリノのスペクトル関数 ( $\rho^{(\nu)}$ ) は、以下の様に分解できる:

$$\rho^{(\nu)}(\mathbf{p}, \omega; T) = \sum_{s=\pm} [\mathcal{P}_R \Lambda_{s,\mathbf{p}} \gamma^0 \mathcal{P}_L] \rho_s^{(\nu)}(|\mathbf{p}|, \omega; T), \quad \mathcal{P}_{L/R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2}, \quad \Lambda_{\pm, \mathbf{p}} = \frac{1 \pm \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|}{2}. \quad (1)$$

有限温度効果は、spinor 構造に依らずに係数  $\rho_{s=\pm}^{(\nu)}(|\mathbf{p}|, \omega; T)$  で記述される点が重要である。尚、零質量近似においては左巻きニュートリノ間のフレーバー混合は現れない。図2の内線に現れる weak boson の有限温度質量 ( $M_{W,Z}(T)$ ) は、 $v_0 = 246(\text{GeV})$  を有限温度に於ける期待値  $v(T)$  に置き換えて評価する。この近似は、補正項として現れる thermal 質量  $gT$  に比べ  $M_{W,Z}(T) \sim gv(T)$  が十分大きい温度領域 ( $T < v(T)$ ) で有効である。尚  $v(T)$  はヒッグス有効 potential の最小点から決める。また図2内線に現れる荷電レプトン  $l^i$  に対し零質量近似を用いる。この近似はループ内に於ける支配的なスケールが weak boson 質量  $\sim gv(T)$  である限り有効であり、上記と同様の温度領域  $T < v(T)$  で妥当である。

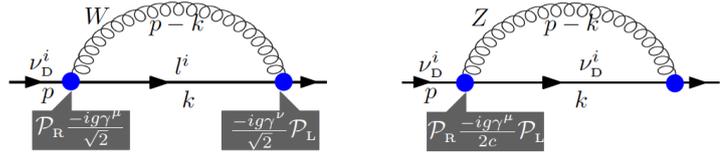


Figure 2: 標準理論における零質量ニュートリノの1ループ self-energy。

ヒッグス有効 potential は、tree-level に加えて  $R_\xi$  ゲージにおけるヒッグス粒子と weak boson の thermal 1 ループ効果を考慮する [8]。一般的にゲージ理論に於ける有効 potential にはゲージ依存性の問題があるが、本研究で用いる potential はゲージ依存しない利点がある。本研究の potential は2次相転移を記述し、 $v(T)$  及び  $M_{W,Z}(T)$  は温度の関数として連続的に変化する。従って  $T \sim M_{W,Z}(T)$  を満たす温度領域が存在する。これは実際の電弱相転移において期待できる性質かもしれない。なぜなら、発見されたヒッグス粒子の質量  $126\text{GeV}$  に対しては、電弱相転移は標準理論の範囲内ではクロスオーバーであり [9]、 $M_{W,Z}(T)$  が  $T$  の連続関数であると考えられるからである。

**主要結果** 図3の左図に、 $T/v_0 = 0.5$  におけるスペクトル関数  $\rho_+^{(\nu)} v_0$  のエネルギー-運動量依存性を示す。ゲージは 't Hooft-Feynman ゲージを採用している。この温度領域では、 $T \gtrsim M_{W,Z}(T)$  が成立する。低運動量領域に現れる3ピーク構造が特徴的である。中央の  $\omega/v_0 \sim 0$  付近に現れる“ultrasoft モード”は、温度  $T$  が他のスケールを圧倒する場合 (Hard Thermal Loop (HTL) 近似) には現れず、従って2つのスケール  $T$  及び  $M_{W,Z}$  の存在に依って生じる新規な集団励起モードである。一方他の2つのモードのピーク位置は、HTL 近似に於ける集団励起モードとして知られる quasiparticle モード及び antiplasmino モードに対応する事が確かめられる (詳細は Ref. [1] 参照)。尚、類似する3ピーク構造は、有限温度中のクォークとメソンソフトモードの相互作用系 (カイラル相転移近傍における QGP の有効模型) において報告されている [4–6]。この類似性は、本研究で考えている系 (電弱スケール温度 + 零質量ニュートリノ + ヒッグス機構で質量を獲得した weak boson) と上記の有効模型 (QCD スケール温度 + 零質量クォーク + カイラル相転移で質量を獲得したメソンソフトモード) の間の数学的類似性に由来する。

一般的に物理量はゲージ不変であり、実際零温度の電弱理論においては、弱結合展開の各オーダーで物理量のゲージ不変性が保証されている。しかし有限温度効果によって生じるスケール ( $gT$  や  $g\sqrt{T}$ ) は、 $T$  が大きい場合、弱結合展開を破綻させる恐れがあり、この破綻は物理量のゲージ依存を引き起こす。スペクトル関数における3ピーク構造のゲージ依存性を調べる事は、弱結合展開の有効範囲で得られているかどうかを検証する上で重要である [6]。図3の中図に、3ピーク構造が顕著に見られるパラメータセット ( $|\mathbf{p}|/v_0, T/v_0$ ) = (0.02, 0.05) におけるスペクトル関数  $\rho_+^{(\nu)} v_0$  を、幾つかのゲージパ

ラメータ  $\xi$  に対して示す。ユニタリーゲージの結果 [4] も比較の為に示されている。この図から明らかな様に、3 ピーク構造を持つスペクトル関数はゲージ不変であり、従って物理的な励起モードである事が判る。言い換えれば、中間温度領域 ( $T \gtrsim M_{W,Z}(T)$ ) においては、図 2 における右巻きマヨラナニュートリノの崩壊先が 3 ピークで表される励起モードである可能性が強く示唆された。

3 ピーク構造がスファレロン凍結温度  $T_*$  よりも高温で存在すれば、BAU に寄与する可能性がある。ここで  $T_*$  は、「Net なバリオン数生成率が宇宙の膨張率を上回る温度領域の下限」として定義される。スペクトル関数の評価に用いたヒッグス potential を用い  $T_*$  を見積ると、 $T_*/v_0 \simeq 0.65$  が得られる (詳細は Ref. [1], Sec. V 参照)。図 3 の右図に、 $T \sim T_*$  におけるスペクトル関数の温度発展を示す。運動量は  $|\mathbf{p}|/v_0 = 0.007$  に固定している。図から 3 ピーク構造は  $T \sim T_*$  において存在する事が判る。但し中央の ultrasoft モードが現れるのは運動量が非常に小さい領域 ( $|\mathbf{p}|/v_0 \lesssim 0.01$ ) に限られる。また凍結温度は  $T_*/v_0(T) \sim 1$  を満たし、本研究で用いた weak boson や荷電レプトンに対して用いた近似が良い近似ではなくなる温度領域にさしかかっている事が判る。これは、更なる定量的な研究を行い、本研究で得られた結果を検証して行く必要性を示している。

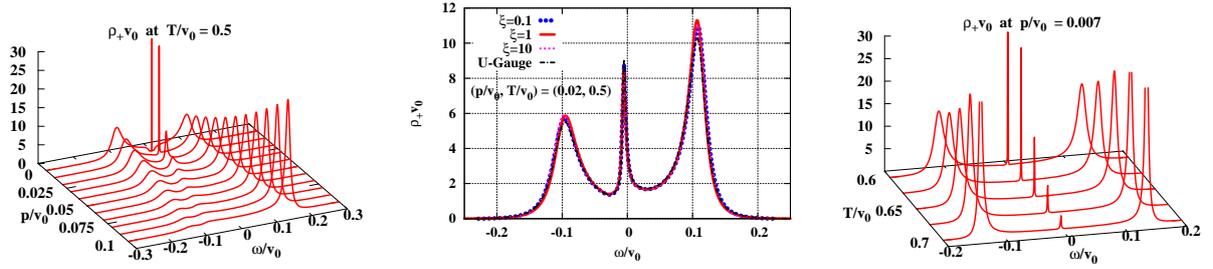


Figure 3: 左図: 中間温度領域  $T/v_0 = 0.5$  におけるニュートリノ-スペクトル関数  $\rho_+^{(\nu)} v_0$  のエネルギー-運動量依存性。中図:  $(|\mathbf{p}|/v_0, T/v_0) = (0.02, 0.05)$  におけるスペクトル関数  $\rho_+^{(\nu)} v_0$  のエネルギー-依存性、及び幾つかのゲージパラメータ  $\xi$  に対する比較。右図: スファレロン凍結温度  $T/v_0 = T_*/v_0 \sim 0.65$  付近のスペクトル関数  $\rho_+^{(\nu)} v_0$  の温度発展。運動量は  $|\mathbf{p}|/v_0 = 0.007$  に固定。

**まとめと今後の課題** 本研究では、電弱スケール温度における零質量 左巻きニュートリノのスペクトル関数を、 $R_\xi$  ゲージにおける 1 ループ摂動論に基づき評価した。温度と weak boson 質量が同程度の場合、スペクトル関数はゲージパラメータに依らずに 3 種類の集団励起モード (quasiparticle モード、antiplasmino モード、ultrasoft モード) を有する。またこれらのモードはスファレロン凍結温度付近に於いても存在する可能性があり、右巻きマヨラナニュートリノ  $N_R$  の崩壊から生じるレプトン数生成及び CP の破れに影響を与える事を示唆する。今後の最重要課題は、本研究で得られた左巻きニュートリノのスペクトル関数を用いて  $N_R$  の崩壊によるレプトン数の生成率を具体的に見積もり、特に ultrasoft モードのレプトン数生成への影響について考察する事である。加えて、スペクトル関数の計算において、ループの高次効果や有限のレプトン質量効果からくる補正効果を定量的に見積もる事も重要である。

## References

- [1] K. Miura, Y. Hidaka, D. Satow, and T. Kunihiro, Phys. Rev. D **88**, 065024 (2013).
- [2] For a recent review, see, M. Drewes, Int. J. Mod. Phys. E **22**, 1330019 (2013).
- [3] A. Pilaftsis and T. E. J. Underwood, Phys. Rev. D **72**, 113001 (2005).
- [4] M. Kitazawa, T. Kunihiro, and Y. Nemoto, Prog. Theor. Phys. **117**, 103 (2007).

- [5] M. Kitazawa, T. Kunihiro, K. Mitsutani, and Y. Nemoto, *Phys. Rev. D* **77**, 045034 (2008).
- [6] D. Satow, Y. Hidaka, and T. Kunihiro, *Phys. Rev. D* **83**, 045017 (2011).
- [7] D. Boyanovsky, *Phys. Rev. D* **72**, 033004 (2005).
- [8] Joseph I. Kapusta and Charles Gale, *Finite-Temperature Field Theory, Principles and Applications* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2006).
- [9] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2887 (1996); F. Csikor, Z. Fodor, P. Hegedus, A. Jakovac, S. D. Katz, and A. Piroth, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 932 (2000); Y. Aoki, F. Csikor, Z. Fodor, and A. Ukawa, *Phys. Rev. D* **60**, 013001 (1999); F. Csikor, Z. Fodor, and J. Heitger, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **73**, 659 (1999); *Phys. Rev. Lett.* **82**, 21 (1999).

# Brane-Antibrane at Finite Temperature in the Framework of Thermo Field Dynamics

Department of Physics, Hokkaido University Kenji Hotta

E-mail: khotta@particle.sci.hokudai.ac.jp

Previously we have investigated the thermodynamical properties of brane-antibrane pairs in the framework of Matsubara formalism. In this talk, we show the calculation of the thermal vacuum state and the partition function for a single open string on a brane-antibrane pair in the framework of thermo field dynamics. From this we can obtain free energy of multiple strings, and it agrees with that in the framework of Matsubara formalism.

## 1 Brane-Antibrane at Finite Temperature in the Framework of Matsubara Formalism

It is well known that ideal string gas has a characteristic temperature called the Hagedorn temperature. We can compute the one-loop free energy of strings by using path integral in Matsubara method. The one-loop free energy of strings diverges above this temperature. This Hagedorn temperature is limiting temperature for perturbative strings.

We have previously discussed the behavior of brane-antibrane pairs at finite temperature in the constant tachyon background [1]. At zero temperature, the spectrum of open strings on these unstable branes contains a complex scalar tachyon field  $T$ . In the brane-antibrane configuration, we have  $T = 0$ , and the potential of this tachyon field has a local maximum at  $T = 0$ . The tachyon potential has a non-trivial minimum, and the tachyon falls into it at zero temperature. The potential height of the tachyon potential exactly cancels the tension of the original brane-antibrane pairs. This implies that these unstable brane systems disappear at the end of the tachyon condensation.

We have calculated the finite temperature effective potential of open strings on these branes based on boundary string field theory. In this case we are confronted with the problem of the choice of Weyl factors in the two boundaries of the one-loop worldsheet, because the conformal invariance is broken by boundary action. Our calculation is based on the one-loop amplitude of open strings, which has been proposed by Andreev and Oft [2]. Their choice of Weyl factors is natural in the sense that both sides of the cylinder worldsheet are treated on an equal footing. Although brane-antibrane pairs are unstable at zero temperature, there are the cases that they become stable at finite temperature. For the D9-brane- $\overline{\text{D9}}$ -brane pairs, a phase transition occurs at slightly below the Hagedorn temperature and the D9-brane- $\overline{\text{D9}}$ -brane pairs become stable above this temperature. On the other hand, for the D $p$ -brane- $\overline{\text{D}p}$ -brane pairs with  $p \leq 8$ , such a phase transition does not occur. We thus concluded that not a lower dimensional brane-antibrane pairs but D9-brane- $\overline{\text{D9}}$ -brane pairs are created near the Hagedorn temperature.

## 2 Brane-Antibrane at Finite Temperature in the Framework of Thermo Field Dynamics

Let us turn to consider the finite temperature system of Brane-antibrane pair in the framework of thermo field dynamics. The thermal vacuum state for bosonic D-brane has been calculated by Vancea [3]. We treat an open string on these branes as first quantized string, since second quantized string field theory is quite difficult. Using the light-cone coordinates, we can express partition function for a single string as

$$Z_1(\beta) = \text{Tr} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta p^0\right) = \text{Tr} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta\left(p^+ + \frac{|\mathbf{p}|^2 + M^2}{p^+}\right)\right]. \quad (1)$$

Here we explain the calculation for Neveu-Schwarz string, which represents spacetime boson, and show only the results for Ramond string, which represents spacetime fermion. The mass spectra of Neveu-Schwarz open string is expressed as

$$M_b^2 = \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{I=2}^9 \alpha_{-l}^I \alpha_l^I + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{I=2}^9 r b_{-r}^I b_r^I + 2|T|^2 - \frac{1}{2} \right), \quad (2)$$

where  $\alpha_l$  ( $\alpha_{-l}$ ) are annihilation (creation) operators for bosonic oscillators, and  $b_r$  ( $b_{-r}$ ) annihilation (creation) operators for fermionic oscillators.  $\alpha'$  is the slope parameter, which is the only dimensionful parameter string theory has.

In the framework of thermo field dynamics, the thermal vacuum state is obtained from the Bogoliubov transformation of the vacuum state. In our case the generator of Bogoliubov transformation is given by

$$G_b = i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \theta_l (\alpha_{-l} \cdot \tilde{\alpha}_{-l} - \tilde{\alpha}_l \cdot \alpha_l) + i \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} \theta_r (b_{-r} \cdot \tilde{b}_{-r} - \tilde{b}_r \cdot b_r), \quad (3)$$

where the dot denotes inner product on transverse space. The thermal vacuum state is calculated as

$$\begin{aligned} |0_{1b}(\theta)\rangle\rangle &= \prod_{l=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{1}{\cosh(\theta_l)} \right)^8 \exp \left[ \frac{1}{l} \tanh(\theta_l) \alpha_{-l} \cdot \tilde{\alpha}_{-l} \right] \right\} \\ &\quad \times \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} \left\{ (\cos(\theta_r))^8 \exp \left[ \tan(\theta_r) b_{-r} \cdot \tilde{b}_{-r} \right] \right\} |0\rangle\rangle |p^+\rangle |\mathbf{p}\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Following the recipe of thermo field dynamics, we can compute the free energy for a single string from this thermal vacuum state, Hamiltonian operator and an appropriate entropy operator,

although we omit to show explicit calculation. The partition function for a single Neveu-Schwarz string on a  $Dp$ -brane–anti- $Dp$ -brane pair can be obtained by exponentiating this free energy as

$$Z_{1b}(\beta) = \frac{16\pi^4\beta\mathcal{V}_p}{\beta_H^{p+1}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \tau^{-\frac{p+1}{2}} e^{-4\pi|T|^2\tau} \left\{ \frac{\vartheta_3(0|i\tau)}{\vartheta_1'(0|i\tau)} \right\}^4 \exp\left(-\frac{\pi\beta^2}{\beta_H^2\tau}\right), \quad (5)$$

where  $\beta_H$  denotes the inverse of the Hagedorn temperature, and  $\mathcal{V}_p$  the volume of the system. Similarly, partition function for a single Ramond string can be calculated as

$$Z_{1f}(\beta) = \frac{16\pi^4\beta\mathcal{V}_p}{\beta_H^{p+1}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \tau^{-\frac{p+1}{2}} e^{-4\pi|T|^2\tau} \left\{ \frac{\vartheta_2(0|i\tau)}{\vartheta_1'(0|i\tau)} \right\}^4 \exp\left(-\frac{\pi\beta^2}{\beta_H^2\tau}\right). \quad (6)$$

From these single string partition functions, free energy of multiple strings can be obtained from the following equation.

$$F(\beta) = - \sum_{w=1}^{\infty} \frac{1}{\beta w} \{Z_{1b}(\beta w) - (-1)^w Z_{1f}(\beta w)\}. \quad (7)$$

We finally obtain

$$F(\beta) = - \frac{16\pi^4\mathcal{V}_p}{\beta_H^{p+1}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \tau^{-\frac{p+1}{2}} e^{-4\pi|T|^2\tau} \left[ \left( \frac{\vartheta_3(0|i\tau)}{\vartheta_1'(0|i\tau)} \right)^4 \left\{ \vartheta_3\left(0 \middle| \frac{i\beta^2}{\beta_H^2\tau}\right) - 1 \right\} - \left( \frac{\vartheta_2(0|i\tau)}{\vartheta_1'(0|i\tau)} \right)^4 \left\{ \vartheta_4\left(0 \middle| \frac{i\beta^2}{\beta_H^2\tau}\right) - 1 \right\} \right]. \quad (8)$$

This equals to the free energy based on Matsubara formalism. It should be noted that we have not been confronted with the problem of the choice of Weyl factors like in the case of Matsubara formalism. This implies that our choice of Weyl factors in that case is quite natural. We need to use second quantized string field theory in order to compute the free energy for multiple strings directly from their thermal vacuum state. We leave this calculation for future work.

## References

- [1] K. Hotta, JHEP **0212** (2002) 072, hep-th/0212063; JHEP **0309** (2003) 002, hep-th/0303236; Prog. Theor. Phys. **112** (2004) 653, hep-th/0403078.
- [2] O. Andreev and T. Oft, “On One-Loop Approximation to Tachyon Potentials,” Nucl. Phys. **B627** (2002) 330, hep-th/0109187.
- [3] I. V. Vancea, “Bosonic D-Branes at Finite Temperature,” Phys. Lett. **B487** (2000) 175, hep-th/0006228.

# 格子上の細谷機構

Hosotani Mechanism on the Lattice

韓国高等研究院 (KIAS) 幡中 久樹

## 概要

素粒子物理における電弱ゲージ・Higgs 統合模型で電弱対称性の破れを担う機構として細谷機構がある。我々は格子ゲージ理論での計算と、摂動論で計算した有効ポテンシャルに基づく相構造を調査し、両者の対応関係を明らかにした。(この講演は共同研究 [1] に基づく。)

## イントロダクション

素粒子物理のゲージ・ヒッグス統合模型 [2, 3, 4, 5] において電弱対称性の破れを担うのは余剰次元方向のゲージ場成分がつくるウィルソンラインの真空期待値であり、その破れの機構を細谷機構 [6, 7] と呼ぶ。ここでは  $d$  次元時空で 1 次元が半径  $R$  の円 ( $S^1$ ) にコンパクト化した場合を考え、ここでの  $SU(3)$  ゲージ理論で  $N_{\text{fd}}(N_{\text{ad}})$  個の基本表現 (随伴表現) フェルミオンが結合した模型を考える。この場合コンパクト化した次元方向のゲージ場は非零の真空期待値  $\langle A_z \rangle = \text{diag}[\theta_1, \theta_2, \theta_3]/(2\pi eR)$ ,  $\sum_i \theta_i = 0$  を持つことが許され、とくに  $S^1$  に沿った方向に線積分したウィルソンライン  $W = \mathcal{P} \exp i \oint dz g A_z$  は物理自由度として残る。連続理論での 1 ループ有効ポテンシャルは以下の形をとる:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= V_{\text{eff}}^{\text{g+gh}} + N_{\text{fd}} V_{\text{eff}}^{\text{fd}} + N_{\text{ad}} V_{\text{eff}}^{\text{ad}}, \quad V_{\text{eff}}^{\text{g+gh}} = (d-2) \sum_{j,k=1}^3 V(\theta_j - \theta_k, 0), \\ V_{\text{eff}}^{\text{ad}} &= -2^{[d/2]} \sum_{j,k=1}^3 V(\theta_j - \theta_k + \alpha_{\text{ad}}, m_{\text{ad}}), \quad V_{\text{eff}}^{\text{fd}} = 2^{[d/2]} \sum_{j=1}^3 V(\theta_j + \alpha_{\text{fd}}, m_{\text{fd}}), \\ V(\theta, m) &= -\frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{d/2} (2\pi R)^{d-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta) - 1}{n^d} B_{d/2}(mR), \quad B_{d/2}(x) = \frac{x^{d/2} K_{d/2}(x)}{2^{\frac{d}{2}-1} \Gamma(d/2)}, \quad (1) \end{aligned}$$

ここで  $m_{\text{fd,ad}}$  はフェルミオンの質量、 $\alpha_{\text{fd,ad}}$  は境界条件  $\psi_{\text{fd,ad}}(z + 2\pi R) = e^{i\alpha_{\text{fd,ad}}} \psi_{\text{fd,ad}}(z)$  である。

この表式は物質場の表現や質量、境界条件に依存する一方で、ゲージ結合  $g$  を陽に含まず、また次元  $d$  への依存性も小さい。紫外発散は抑制され、 $\theta_i$  に依存する部分では現れない。これらの性質はゲージ対称性や群の性質、時空の幾何学構造からくるものが大きく、ゲージ理論が  $d(> 4)$  次元で摂動論的に繰り込み不可能であるにも関わらず、(5次元やより高次元で構成された) ゲージヒッグス統合模型での対称性の動的な破れを摂動論的手法で扱う根拠となっていると言える。

上記の考察から細谷機構が格子ゲージ理論の計算でも起きていてもおかしくはない。以下では、 $3+1$  次元において連続理論での計算と、格子ゲージ理論で弱結合  $\beta \equiv 6/g_0^2 \gg 1$  での振る舞いが少なくとも定性的に一致することをしめす。以下の解析では、 $16^3 \times 4$  格子 (格子数の少ない方向がコンパクト化した次元と見なす) に基づき、格子フェルミオンにはスタッガードフェルミオンを使った。(そのため  $N_{\text{fd}} = 0, 4, 8, \dots$ ,  $N_{\text{ad}} = 0, 2, 4, \dots$  が許される)

## ゲージ場+随伴表現フェルミオン

ここでは  $(N_{\text{ad}}, N_{\text{fd}}) = (2, 0)$  で、 $\alpha_{\text{ad}} = 0$  の場合を扱う。この場合、連続理論では  $SU(3)$  対称性の破れが見られる。図 1 ではフェルミオン質量  $m_{\text{ad}}$  によって有効ポテンシャルの形が変わる様を表した。

ポテンシャルの最低点 (白いところ) での配位と対称性, そして基本表現ポリャコフループ  $P_3 = \frac{1}{3}(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + e^{i\theta_3})$  の値は

- $SU(3)$ :  $A_{1,2,3} : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 0, 0), (\pm \frac{2}{3}\pi, \pm \frac{2}{3}\pi, \pm \frac{2}{3}\pi), \quad \text{Tr}P_3 = 1, e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3},$
- $SU(2) \times U(1)$ :  $B_{1,2,3} : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, \pi, \pi), (\pm \frac{2}{3}\pi, \mp \frac{1}{3}\pi, \mp \frac{1}{3}\pi), \quad \text{Tr}P_3 = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}e^{\mp \pi i/3}$
- $U(1)^2$ :  $C : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, \frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi) \quad \text{Tr}P_3 = 0,$

と表される。またこれらのポリャコフープで特徴付けられる相をそれぞれ A,B,C 相とする。質量が大きくなるにつれて  $C \rightarrow B \rightarrow A$  と相が転移することがわかる。

図 2 では、格子ゲージ理論でのポリャコフープの分布を示した。(各ポリャコフープは余剰次元方向と直交する 3 次元面の各点から余剰次元方向に沿ってとった。) まず  $\beta$  が小さいところでは、強結合のため confinement が起きている相 X(confined 相)

$$X : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 0, 0)?, \quad \text{Tr}P_3 = 0? \quad (2)$$

が現れる。図 1 と図 2 を比べると、C 相では連続理論でのポテンシャル最低点と格子での分布の最大となるところは一致しているが、それ以外の相では  $\text{Tr}P_3$  の分布は似ているものの、 $\theta_i$  の分布では図 2 の色の濃い部分と図 1 の白い部分では様子が大きく異なる。(格子ゲージ理論での計算は [9] によってポリャコフープ  $\text{Tr}P_3$  の分布が調べられていたが、 $\theta_i$  の分布は調べられていなかった。) また X 相と C 相は  $\text{Tr}P_3$  の分布も原点に集中しており、その本質的な違いがわからない(そのため C 相は reconfined 相等とも呼ばれている)

連続理論での結果と、格子の結果を分けるものには、確率分布への Haar 測度による因子

$$\prod_{i>j} \sin^2 \frac{\theta_i - \theta_j}{2} \quad (3)$$

がある。これは上記有効ポテンシャルの計算では取り込まれなかった(取り込んだ場合は  $\theta_i$  間の“斥力”ポテンシャルとなる)が、格子計算では必然的に入ってくる要素である。図 3 では、Haar 測度の寄与(図最左)の寄与を用いて、ポリャコフープの分布を計算し直したものである。まず、X(confined) 相においては、Haar 測度で割ることによって非一様な分布が打ち消され一様な分布になる。これは confined 相においては量子ゆらぎが大きくなりポリャコフープの分布がランダムになるという予想と一致する。これにより X 相と C 相の違いが鮮明になった。また A 相、B 相に於いても、分布が最大となるところは連続理論でのポテンシャルの最低点と一致する。これによって連続理論と格子でのポリャコフープの挙動が対応することが明確に示された。我々はまた、基本表現と随伴表現のポリャコフープ  $|\text{Tr}P_3|, P_8$  の値と感受率をもちいて図 4 で示されるように、[9] よりも広いパラメータ ( $\beta$  とフェルミオン質量  $ma$ ) 領域での相構造を決定した。我々は主に固定された  $ma$  の値で  $\beta$  を変えて解析したが、 $\beta$  を固定しても  $ma$  が大きくなるにつれて  $C \rightarrow B \rightarrow A$  と相が変化することが確認された。これは連続理論での予想と一致する。

## ゲージ場+基本表現フェルミオン

随伴表現の代わりに基本表現フェルミオンを用いた場合を調べた。ここでは  $N_{\text{fd}} = 4$  とする。図 5 では、連続理論での有効ポテンシャルをプロットした。図からわかるように、 $\alpha_{\text{fd}}$  が増えるに従い、ポテンシャルの最低点は  $A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_2$  と移る。また最低点は常にこの 3 つのいずれかであり、 $\alpha_{\text{fd}} = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$  で非連続的に入れ替わる。また、この状況はフェルミオンの質量  $m_{\text{fd}}$  に依らない。

図 6 では、格子理論でのポリャコフープ  $\text{Tr}P_3$  の分布をプロットした。ここでも  $\beta$  が小さいところでは、分布は原点付近で  $\alpha_{\text{fd}}$  について連続的に変化するが、 $\beta$  が大きくなるに従って離散的に変化するようになり、連続理論での振る舞いと同じになる。我々は随伴表現のときと同じようにポリャコフープの期待値と感受率を用いて、相構造を決定した(図 7)。 $\beta > 5.20$  での相の振る舞いは連続理論での振る舞いを再現している。これらの結果はまた、有限温度 QCD でクォークが虚数化学ポテンシャルを持った場合の結果 [10, 11] と整合する。よってユークリッド化された場の理論での細谷機構と虚数化学ポテンシャルを持つ有限温度系の対応が直接示された。

## 展望

今回は  $3 + 1$  次元での連続理論と格子ゲージ理論で、コンパクト化した空間における細谷機構による対称性の破れを調べた。特に今回は基本表現ポリャコフループのトレースだけでなく固有値の分布も見ることで、有効ポテンシャルのパラメータ  $\{\theta_i\}$  との関係もより明確になり、二つの理論の対応関係を詳しく調べることが出来た。

細谷機構が格子ゲージ理論でも起きていることは明らかとなったが、まだ理解すべきことは多い。例えば、連続理論での理論パラメータ（ゲージ結合定数、コンパクト化の半径、フェルミオンの質量）と格子ゲージ理論でのパラメータ（ $\beta, ma$  と格子サイズの大きさ、余剰次元とそれ以外の方向の格子サイズの比）との関連はまだ詳しくわかっていない。これは格子の連続極限の問題と関係があり今後解決しなくてはならない。

最終的な目標である、余剰次元をもつ現象論模型への応用に向けても、まだまだ課題は多い。まず 5 次元以上の空間での格子ゲージ理論計算というまだ未解決な問題があり、また現象論的にリアリスティックなものにするには余剰次元のオービフォールド化や歪んだ余剰次元（Randall-Sundrum 時空など）の実現も必要となろう。これらの問題解決については、また諸氏の助言と協力を仰ぎたい。

## 謝辞

We thank E. Itou for the great contribution in all phases of this work. We would like to thank J. E. Hetrick for his enlightening comment which prompted us to explore the Hosotani mechanism on the lattice. We also thank M. D'Elia and Y. Shimizu for providing helpful information, H. Matsufuru for his help in developing the simulation code, and K. J. Juge for careful reading of the draft. Numerical simulation was carried out on Hitachi SR16000 at YITP, Kyoto University, and Hitachi SR16000 and IBM System Blue Gene Solution at KEK under its Large-Scale Simulation Program (No. T12-09 and 12/13-23). This work was supported in part by scientific grants from the Ministry of Education and Science, Grants No. 20244028, No. 23104009 and No. 21244036. G. C, E. I and J. N are supported in part by Strategic Programs for Innovative Research (SPIRE) Field 5. H. H is partly supported by NRF Research Grant 2012R1A2A1A01006053 (HH) of the Republic of Korea.

## 参考文献

- [1] G. Cossu, H. Hatanaka, Y. Hosotani and J. -I. Noaki, arXiv:1309.4198 [hep-lat].
- [2] N. S. Manton, Nucl. Phys. B **158**, 141 (1979).
- [3] H. Hatanaka, T. Inami and C. S. Lim, Mod. Phys. Lett. A **13**, 2601 (1998) [arXiv:hep-th/9805067].
- [4] Y. Hosotani, K. Oda, T. Ohnuma and Y. Sakamura, Phys. Rev. D **78**, 096002 (2008) [Erratum-ibid. D **79**, 079902 (2009)] [arXiv:0806.0480 [hep-ph]].
- [5] S. Funatsu, H. Hatanaka, Y. Hosotani, Y. Orikasa and T. Shimotani, Phys. Lett. B **722**, 94 (2013) [arXiv:1301.1744 [hep-ph]].
- [6] Y. Hosotani, Phys. Lett. B **126**, 309 (1983).
- [7] Y. Hosotani, Annals Phys. **190**, 233 (1989).
- [8] M. Fukugita, M. Okawa and A. Ukawa, Phys. Rev. Lett. **63**, 1768 (1989).
- [9] G. Cossu and M. D'Elia, JHEP **0907**, 048 (2009) [arXiv:0904.1353 [hep-lat]].
- [10] A. Roberge and N. Weiss, Nucl. Phys. B **275**, 734 (1986).
- [11] M. D'Elia and M. -P. Lombardo, Phys. Rev. D **67**, 014505 (2003) [hep-lat/0209146].

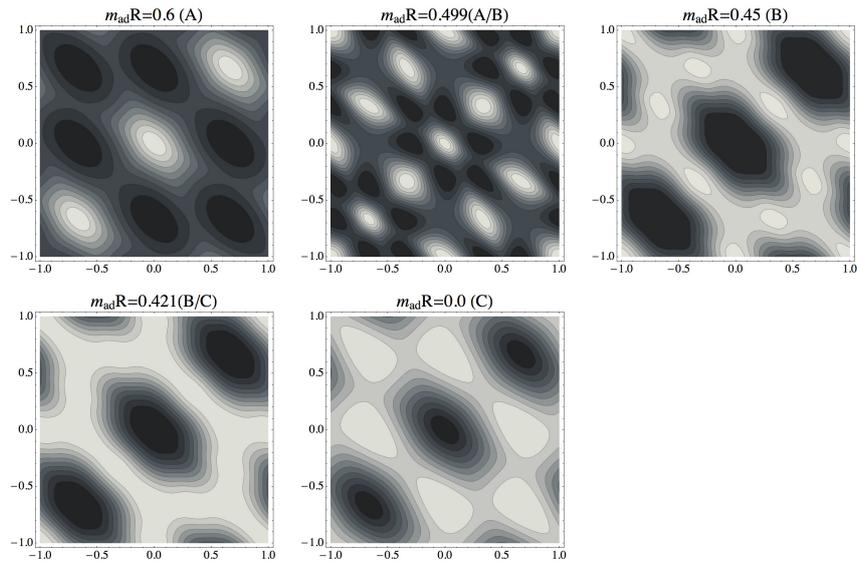


図 1:  $N_{\text{ad}} = 4$  の場合の連続理論での、 $m_{\text{ad}}R$  の値ごとの有効ポテンシャル。 $(\theta_1/\pi, \theta_2/\pi)$  平面で表した。明るい色がポテンシャルの低い方である。

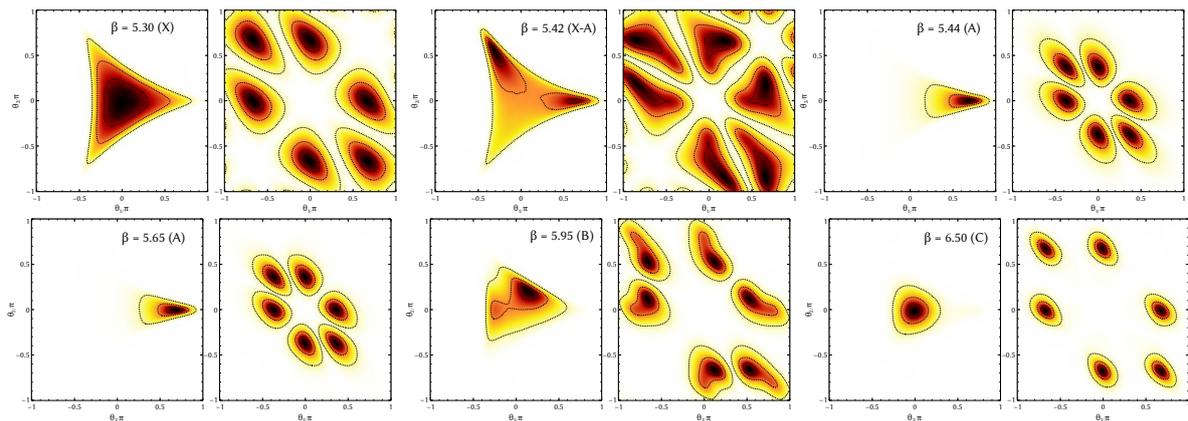


図 2:  $16^3 \times 4$  格子における各  $\beta$  での、Polyakov ライン固有値分布。それぞれ左側が  $\text{Tr}P_3$  を、右側は  $(\theta_1/\pi, \theta_2/\pi)$  平面での分布を表す。暗い色が分布が濃い方を表す。 $\beta$  の値とともに対応する相 (X,A,B,C) も記した。

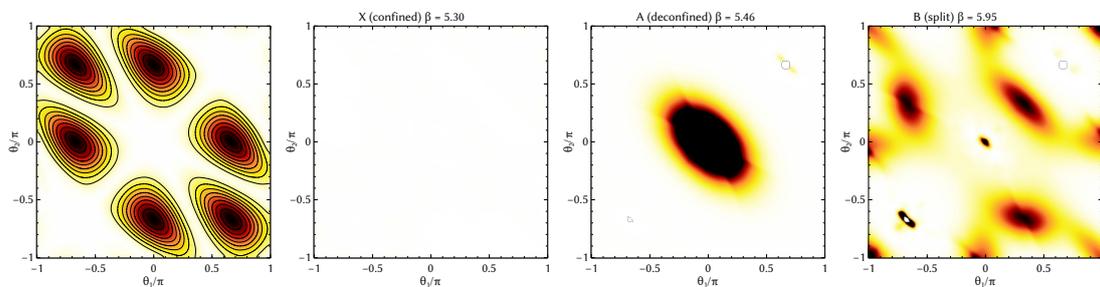


図 3: Haar 測度の効果。一番左の図は Haar 測度の寄与を表し。右側の三つの図は、各相での分布を Haar 測度の寄与で割ったもの。

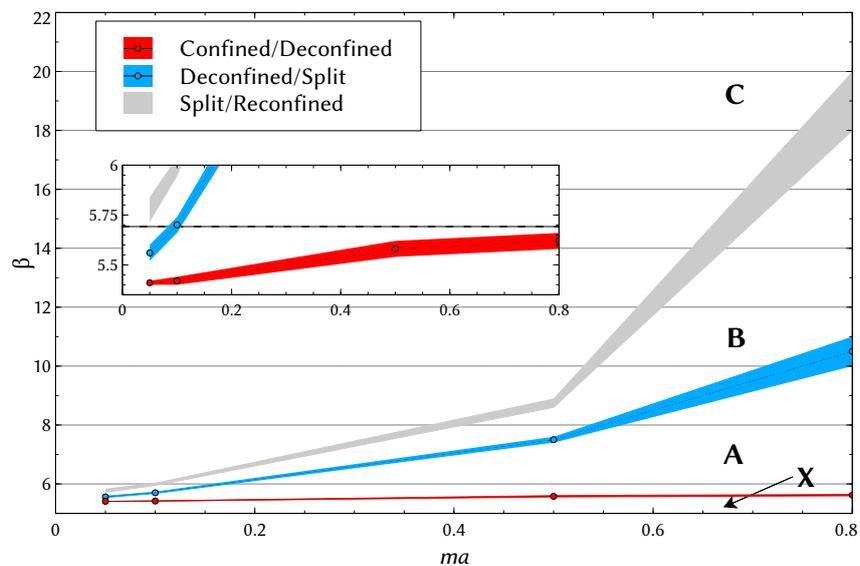


図 4:  $N_{\text{ad}} = 2$  での格子ゲージ理論の相図。灰色、青、赤の帯はそれぞれ C-B, B-A, A-X 相転移点を表す。また  $ma, \beta$  の小さい領域の拡大図も示した。点線は Pure gauge の値 [8]。

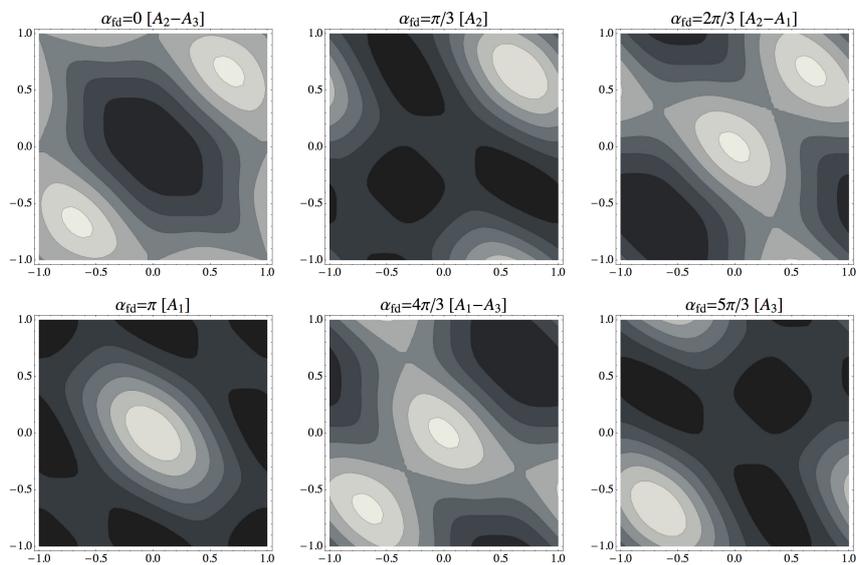


図 5:  $N_{\text{fd}} = 4$  での連続理論での有効ポテンシャルを  $(\theta_1/\pi, \theta_2/\pi)$  平面でプロットしたもの。明るい色がポテンシャルの低い部分を示す。

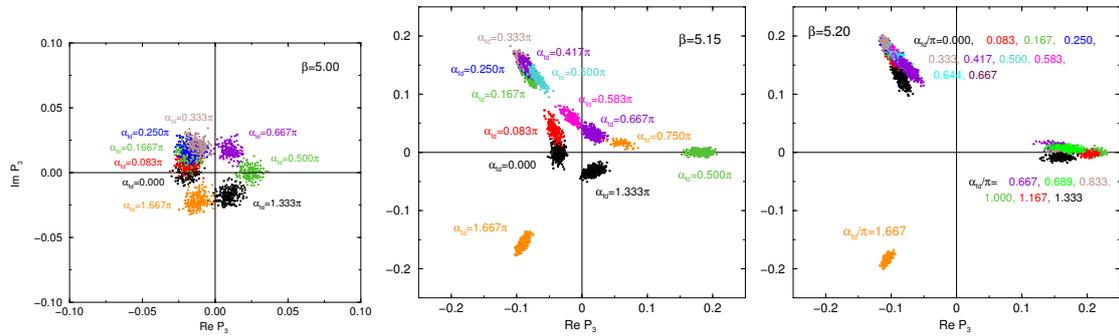


図 6:  $N_{fd} = 4$  での、 $\beta$  と  $\alpha_{fd}$  を変化させたときのポリャコフループ  $\text{Tr} P_3$  の分布。  $\beta = 5.00$  では分布は原点の近くにあり、 $\alpha_{fd}$  の値によってその分布の中心が連続的に変化する。  $\beta$  が大きくなると分布は  $A_{1,2,3}$  に対応する点の周りに集まるようになり、  $\beta \geq 5.20$  ではほぼ  $\alpha_{fd}$  に対して離散的に分布が変化する。

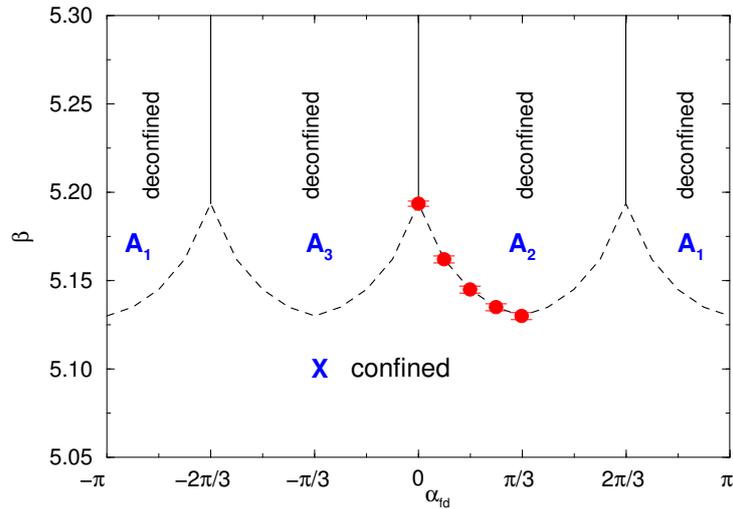


図 7:  $N_{fd} = 4$  での相図。赤いバーが今回測定された相転移点

# 原子気体のボース凝縮系における最近の進展： 人工ゲージ場の効果を中心として

笠松健一<sup>1</sup>

近畿大学理工学部 理学科物理学コース

講演では冷却原子気体におけるボース・アインシュタイン凝縮体 (BEC) における超流動現象 (量子流体力学) に関連した最近の研究を紹介し、レーザー光と原子の相互作用によって生み出される「人工」ゲージ場<sup>2</sup>とそれがもたらす豊富な物理現象を原子気体 BEC の研究の新たな展開として紹介した。この報告書では、講演であまり時間のとれなかった人工ゲージ場に関するトピックス、およびスピン軌道相互作用をもつ BEC の性質について述べる。

## 1 中性原子に対するゲージ場

物性物理学における主役は電子である。電子系における多くの興味深い現象は、系に電場や磁場、さらに強いスピン軌道相互作用がある時に発現する。近年、物性物理学で精力的に調べられている強相関係等の多体問題の物理を模倣する系を冷却原子系で作成し、その動力学を原子系でシミュレーションするという研究が注目されており、「量子シミュレーション」と呼ばれている [1, 2]。しなしながら、冷却原子系は粒子が中性である (電荷をもたない) ために粒子とゲージ場との結合はなく、スピン軌道相互作用もない。一方で、原子と光の相互作用を制御することにより、静的な外場として原子に作用する可換および非可換なゲージポテンシャルが生じる事が提案された [3, 4]。また、この研究の重要な応用として、縮退原子気体に対して実効的な「スピン軌道相互作用」を作り出すことがあった [5]。電子系におけるスピン軌道相互作用の効果は物性では活発に議論されており、有名な例の一つとして最近発見されたトポロジカル絶縁体がある [6]。縮退原子気体におけるスピン軌道相互作用は、この系の独特の性質を相まって、これまでに考えられた事のない新しい物理をもたらすと期待できる。2009 年から NIST の Spielman の実験グループによりこの提案が実行され、人工的な一様なゲージポテンシャル [7]、一様磁場 [8]、一様電場 [9]、およびスピン軌道相互作用 [10] が生成された。

この報告では、NIST で行われた実験的研究およびスピン軌道相互作用をもつボソン系の研究の発展に関して簡単に総説する。スピン軌道相互作用をもつボソン系というのはこれまで物理では全く調べられていない新しい系である。同様に冷却原子のフェルミオン系に対してもスピン軌道相互作用を生成することに成功しており [11, 12]、電子系との対応が注目されている。

## 2 NIST の実験

2009 年、NIST の Spielman らの実験グループは  $^{87}\text{Rb}$  原子の BEC を用いて初めて一様なベクトルポテンシャルを実現した [7]。実験の概略図を図 1 (a) に示す。 $^{87}\text{Rb}$  原子はスピン $^3F = 1$  をもち、その 3 つの超微細状態  $|F, m_F\rangle = |1, -1, 0, +1\rangle$  は外部から (本物の) 磁場をかける事でゼーマン分裂し

<sup>1</sup>e-mail address: kenichi@phys.kindai.ac.jp

<sup>2</sup>初期の研究では “artificial gauge fields” と呼ばれる事が多かったが、文献 [8] で “synthetic magnetic field” というタイトルがつけられて以来、synthetic gauge field と呼ばれる事が多くなっている。日本語では「人工ゲージ場」か「合成ゲージ場」と呼べると思われるが、この報告書では前者を用いる。

<sup>3</sup>アルカリ原子のスピンは電子の持つスピン  $\mathbf{S}$  と原子核のスピン  $\mathbf{I}$  から合成される。BEC が起こる極低温では  $\mathbf{S}$  と  $\mathbf{I}$  を結合させる超微細結合の相互作用エネルギーの大きさが温度に比べて十分大きく、その合成スピン  $\mathbf{F} = \mathbf{S} + \mathbf{I}$  が原子のスピンを記述する。

ている。 $x$  方向を向く二つの対向伝搬するレーザービームを BEC に照射し、原子の微細準位  $|1, -1\rangle$  と  $|1, 0\rangle$ 、および  $|1, 0\rangle$  と  $|1, 1\rangle$  間にラマン遷移を誘起する。準位間がラマン結合した原子のハミルトニアンは

$$H = \begin{pmatrix} \frac{k_x^2}{2m} + \epsilon_1 & \frac{\Omega}{2} e^{2ik_0x} & 0 \\ \frac{\Omega}{2} e^{-2ik_0x} & \frac{k_x^2}{2m} & \frac{\Omega}{2} e^{2ik_0x} \\ 0 & \frac{\Omega}{2} e^{-2ik_0x} & \frac{k_x^2}{2m} - \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

によって与えられる。ここで、 $k_0 = 2\pi/\lambda$  であり、 $\lambda$  は二つのラマンレーザーの波長、 $2k_0$  は 2 光子過程によって原子に移る運動量である。対角項に現れるパラメーターは  $\epsilon_1 = \Delta_1 + \delta\omega + \Delta_2$ 、 $\epsilon_2 = \Delta_1 + \delta\omega - \Delta_2$  と書け、 $\Delta_1$  は 1 次のゼーマンエネルギー、 $\delta\omega$  は 2 つのラマンレーザーの振動数差、 $\Delta_2$  は 2 次のゼーマンエネルギーを表す。非対角項に表れる  $\Omega$  はラマン過程におけるラビ振動数を与える。

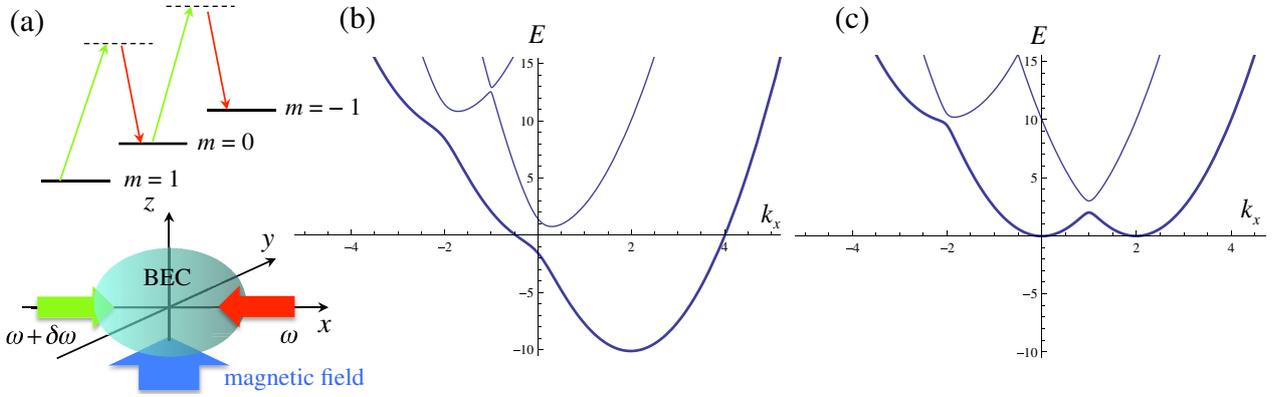


図 1: (a) NIST の実験の概略図。2 つの対向伝搬するラマンレーザーを BEC の気体に照射する。上の図は 3 つの  $F = 1$  の準位がどのようにラマン結合しているかを表す概略図である。(b) と (c) はそれぞれ一様な可換ベクトルポテンシャルおよび非可換なゲージ場を与える場合の式 (3) から得られる分散関係を表す。最低エネルギーのブランチを太線で示した。

ここで、ユニタリー変換

$$U = \begin{pmatrix} e^{-2ik_0x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2ik_0x} \end{pmatrix} \quad (2)$$

を波動関数に適応して見方を変える。このとき、ハミルトニアンは

$$H' = UHU^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{(k_x + 2k_0)^2}{2m} + \epsilon_1 & \frac{\Omega}{2} & 0 \\ \frac{\Omega}{2} & \frac{k_x^2}{2m} & \frac{\Omega}{2} \\ 0 & \frac{\Omega}{2} & \frac{(k_x - 2k_0)^2}{2m} - \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。ここで  $\epsilon_1$  と  $\epsilon_2$  の両方が比較的大きい場合を考えよう。 $H'$  を対角化して得られる 1 粒子エネルギー分散を図 1 (b) に示す。 $\Omega = 0$  のときは、極小がずれた 3 つの独立した放物型の分散が得られるが、 $\Omega \neq 0$  では準位交差が起こる所でエネルギーの分裂が起こる。 $\epsilon_1, \epsilon_2 \gg 1$  では最低ブランチで有限の波数の値にある極小が他のブランチと大きく分離することで、系の低エネルギーの振る舞いは有効ハミルトニアン  $H_{\text{eff}} = (k_x - A_x)^2/2m$  で与えられる。このときの固有状態は裸の原子の状態

$|F, m_F\rangle$  が光によって結合した「ドレスド状態」となっている。ここで、 $A_x$  は定数である。 $H_{\text{eff}}$  の形から、一様なベクトルポテンシャルが系に生じていると見なせる。

続く実験で、Spielman らのグループは系に  $y$  方向に沿った（本物の）磁場勾配を加えた [8]。この場合はゼーマンエネルギーが空間変化することで  $\epsilon_1$  および  $\epsilon_2$  が  $y$  依存性をもち、 $A_x$  は定数ではなく  $y$  の関数となる。この場合は有限の「人工」磁場  $B_z = -\partial_y A_x \neq 0$  が生み出される事が分かる。彼らは（本物の）磁場勾配の強さを変化させる事により、ある臨界「人工」磁場の強さ以上で BEC に複数の量子渦が生成することを観測した [8]。これは回転する超流動における量子渦形成に対する臨界回転振動数に相当するものである。別の実験では、 $A_x$  を時間依存させて有限の電場  $E_x = -\partial_t A_x \neq 0$  を作り出すことに成功した [9]。彼らは電場のパルス後に BEC の集団振動を観測した。

興味深い事に、彼らの実験のセットアップは保ったままでパラメータを調整する事のみにより、非可換ゲージ場が生み出される興味深い場合に議論が拡張される。非可換ゲージ場はスピン軌道相互作用と見なせ、2011 年に同じく Spielman らのグループにより「スピン軌道相互作用をもつ BEC」という新しいボース凝縮系が実現した [10]。

ゼーマンエネルギーとレーザーの振動数を調整することにより、 $\Delta_1 + \delta\omega \approx \Delta_2$  となる様にする。このとき、 $\epsilon_2 \approx 0$  であるが、 $\epsilon_1 \approx 2\Delta_2$  は大きな値のままである。この場合の式 (3) の分散を図 1(c) に示した。この場合の低エネルギーの振る舞いを決定する分散には二つのエネルギーの極小が含まれており、その極小それぞれは  $|1, -1\rangle$  と  $|1, 0\rangle$  状態に支配されている。従って、 $|1, -1\rangle$  と  $|1, 0\rangle$  の 2 つの状態のみを保持した低エネルギー有効ハミルトニアンを導く事ができる。2 つの状態を残したハミルトニアン

$$H = \begin{pmatrix} \frac{k_x^2}{2m} + \frac{\epsilon_2}{2} & \frac{\Omega}{2} e^{i2k_0x} \\ \frac{\Omega}{2} e^{-i2k_0x} & \frac{k_x^2}{2m} - \frac{\epsilon_2}{2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

を考える。ここで、エネルギーの基準を式 (1) のものから変えた。前と同様に、波動関数にユニタリー変換

$$U = \begin{pmatrix} e^{-ik_0x} & 0 \\ 0 & e^{ik_0x} \end{pmatrix} \quad (5)$$

を適応してハミルトニアンの表示を変えると、

$$H' = UHU^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{(k_x + k_0)^2}{2m} + \frac{\epsilon_2}{2} & \frac{\Omega}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & \frac{(k_x - k_0)^2}{2m} - \frac{\epsilon_2}{2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2m}(k_x + k_0\sigma_z)^2 + \frac{\Omega}{2}\sigma_x + \frac{\epsilon_2}{2}\sigma_z. \quad (7)$$

を得る。実際、擬スピンの回転  $\sigma_x \rightarrow -\sigma_z$ 、 $\sigma_z \rightarrow \sigma_x$  により、上記のハミルトニアンは

$$H' \rightarrow H_{\text{SO}} = \frac{1}{2m}(k_x + k_0\sigma_x)^2 - \frac{\Omega}{2}\sigma_z + \frac{\epsilon_2}{2}\sigma_x, \quad (8)$$

と同様である。これはスピン軌道相互作用を記述するハミルトニアンとなっている<sup>4</sup>。最初の項はラシュバ型 ( $k_x\sigma_x + k_y\sigma_y$ ) とドレッセルハウス型 ( $k_x\sigma_x - k_y\sigma_y$ ) スピン軌道相互作用の大きさが等しい場合と見なす事ができる。（多くの文献ではラシュバ型は  $k_x\sigma_y - k_y\sigma_x$ 、ドレッセルハウス型は  $k_x\sigma_y + k_y\sigma_x$  と記載されている場合があるが、これらはスピンの回転  $\sigma_x \rightarrow -\sigma_y$  と  $\sigma_y \rightarrow \sigma_x$  で同等となる。）実験

<sup>4</sup> 半導体中の伝導電子に働くスピン軌道相互作用では重要なものが 2 種類あり、ラシュバ項とドレッセルハウス項と呼ばれている。ラシュバ項は InGaAs/GaAs の構造で界面付近に形成される 2 次元電子系に垂直方向に電場がかかったときに発生し、ドレッセルハウス項は半導体の結晶構造の非対称性由来する。

では、図 1 (c) に対応する 2 つの極小に対応するドレド状態の凝縮体のドメインが相分離する様子が観測された [10]。

式 (8) のハミルトニアンで  $k_0\sigma_x = -\hat{A}_x$  とおくと、この項は  $2 \times 2$  行列のベクトルポテンシャルと見なせるが、1 次元の  $x$  成分しかないので、可換なゲージポテンシャルである。一般的に他の方向の成分もあれば、 $\hat{A}$  の各成分は交換しないので、これは非可換なゲージポテンシャルと見なせる。ラシュバ型とドレセルハウス型を含む 2 次元以上のスピン軌道相互作用をどのように作り出すかに関しては様々な提案がなされており [3, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]、実験的実現が待ち望まれている。

### 3 スピン軌道相互作用をもつ BEC

人工ゲージ場とスピン軌道相互作用の効果は一粒子問題で理解できるが、それらが存在するときの多体問題が物性としてはさらに重要である。冷却原子系は光格子やフェシュバハ共鳴でその相互作用の強さを制御できるというユニークな特色をもつ系であり [23]、以上の効果を融合すれば、得られる現象の多彩さは非常に豊かなものとなる事が予想される。この節ではスピン軌道相互作用がある場合の弱く相互作用する（平均場近似が有効的と思われる）ボース粒子系に関する研究に関して簡単に総説する。ここで強調したい点は、ラシュバ型のような等方的なスピン軌道相互作用の場合、1 粒子エネルギー分散において無限の縮退が生まれ、粒子間の相互作用の効果が劇的に増大する事である。その結果、相互作用そのものの強さは弱い状況でもその効果が本質となる。粒子間相互作用によって系は多体基底状態を選択し、低エネルギーの揺らぎの性質が決定される。スピン軌道相互作用をもつ BEC に関するレビューは H. Zhai [24]、X. Zhou et al. [25] などがあるので詳細はそちらを参照されたい。

弱く相互作用するボース気体ではガスパラメーターが  $a^3\rho \ll 1$  ( $a$  は  $s$ -波散乱長で  $\rho$  は原子数密度) であり、2 体の散乱過程が重要である。原子間の相互作用は次の接触型ポテンシャル

$$V_{\text{int}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (9)$$

で近似的に記述される。BEC の凝縮体波動関数  $\Psi = \langle \hat{\Psi} \rangle$  のダイナミクスは平均場近似の枠内では次のグロスピタエフスキー方程式 [23]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (10)$$

によって記述される。これは非線形光学系で知られる非線形シュレディンガー方程式と同等の形をしている。 $V(\mathbf{r})$  は原子気体を閉じ込めるための外部ポテンシャルで、通常は調和振動子型で与えられる。非線形項は密度  $\rho = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$  に比例する。この非線形項によって記述される相互作用の効果は理想気体と比較してダイナミクスを劇的に変え、BEC 実現直後から続く超流動性に関する多くの研究（素励起や量子渦の形成など）からも明らかである [26, 27]。

スピン軌道相互作用は相互作用する縮退ボース気体にどのような効果を与えるであろうか？この問いに関してはすでに多くの著者らによって調べられている [15, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37]。ここではスピン軌道相互作用が基底状態に与える影響に関して述べる。一般的なハミルトニアンは

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger \left[ \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \hat{\mathbf{A}})^2 + V(\mathbf{r}) + \hat{G}(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger) \right] \hat{\Psi} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (11)$$

ここでスピン軌道相互作用はゲージポテンシャル  $\hat{\mathbf{A}}$  で記述されている。 $\hat{\Psi}$  は多成分の秩序変数、 $V(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$  は振動数  $\omega$  をもつ閉じ込めポテンシャルである。原子間相互作用の正確な形  $\hat{G}(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger)$

は問題の物理的セットアップの詳細に依存する [23, 28, 29]。前節で見たように典型的には場の演算子  $\hat{\Psi}$  はドレスド状態（裸の原子準位の重ね合わせ）と関連し、 $\hat{G}(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger)$  に入っている 2 体の散乱長は異なる裸の原子状態に依存する。例えば  $\hat{G}_{\mu\nu}(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger) = g_{\mu\nu} \hat{\Psi}_\mu \hat{\Psi}_\nu^\dagger$  ( $g_{\mu\nu} \neq \text{const}$ ) のように書く事ができ、これはゲージポテンシャル  $\hat{\mathbf{A}}$  に独立である [28, 29]。

ここでは「擬」スピン 1/2 をもつボース粒子系（2 成分ボース系）で等方的なラシュバスピ軌道相互作用がある系の基底状態の性質について述べる。 $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2)^T$ 、であり、 $\hat{\mathbf{A}}$  はパウリ行列を用いて  $\hat{\mathbf{A}} = \hbar\kappa(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y)$  と簡単に書ける。このとき、一様系 ( $V(\mathbf{r}) = 0$ ) の 1 粒子エネルギースペクトルは二つのエネルギー分枝  $E_\pm(\mathbf{k}) \propto (|\mathbf{k}| \pm \kappa)^2$  を持つ。この分散関係を図 2 に示した。ラシュバ型の相互作用  $\hat{\mathbf{A}}$  が系に与える主要な特徴として、自由粒子の場合に凝縮する波数  $k_{\min}(\hat{\mathbf{A}} = 0) = 0$  を有限の波数  $k_{\min}(\hat{\mathbf{A}} \neq 0) = \kappa$  に変え、さらにその極小が波数平面でリング上に連続的に分布することである。これらの縮退した一粒子基底状態は多体問題に大きく影響する。ラシュバ型スピン軌道相互作用の存在下では、BEC の基底状態は原子間相互作用と非相互作用のモデルでのパラメータ（トラップ振動数  $\omega$  やラシュバ結合の強さ  $\kappa$ ）との複雑な競合で決まり、原子間相互作用は弱いとしても主要な効果を与える [24, 25]。

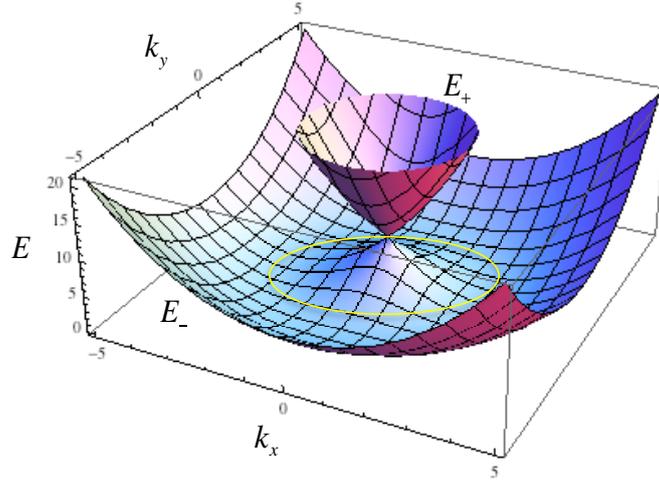


図 2: ラシュバ型スピン軌道相互作用をもつ期待の 1 粒子エネルギー分散。

### 3.1 一様系の場合

一様系  $V(\mathbf{r}) = 0$  におけるスピン軌道結合 BEC の基底状態の平均場の相図は簡単な相互作用項によって説明される [28]

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int d\mathbf{r} (g\hat{n}_1^2 + g\hat{n}_2^2 + g_{12}\hat{n}_1\hat{n}_2), \quad \text{i.e., } \hat{G}_{\mu\nu} = \left[ g\hat{1}_{\mu\nu} + \frac{g_{12}}{2}\hat{\sigma}_{\mu\nu}^{(x)} \right] \hat{\Psi}_\mu \hat{\Psi}_\nu^\dagger \quad (12)$$

ここでスピンに依存する原子間衝突を説明するモデルとして、2つの結合定数  $g$  と  $g_{12}$  を導入した。 $\hat{n}_\mu = \hat{\Psi}_\mu^\dagger \hat{\Psi}_\mu$  は密度演算子を表す。以下に述べる平均場の相図は Wang らによってハミルトニアン (11) と (12) 式から導出された 2 成分秩序変数  $\Psi(\mathbf{r}) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle$  に対するグロスピタエフスキー方程式を解く事によって得られた [28]。特徴としては以下の二つの場合に分けられる。(i)  $g_{12} < g$  のとき、二つのスピン成分に対する密度  $\rho_{1,2}(\mathbf{r}) = |\Psi_{1,2}|^2$  は空間的に一様であるが、凝縮体の位相  $\theta_{1,2} = \arg[\Psi_{1,2}(\mathbf{r})]$  はある一方向にそって周期的に変化する。この状態は自発的に回転対称性を破っている。この「平面

波相」を特徴づける波動関数は次の簡単な形

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}} e^{i\kappa x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

で書ける。ここで、一般性を失う事なしに、平面の方向を  $x$  方向にとった。(ii)  $g_{12} > g$  のとき、凝縮体はこの二つの平面波の重ね合わせで記述される。

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sqrt{\rho_1 + \rho_2} \left[ e^{i\kappa x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-i\kappa x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \sqrt{\rho_1 + \rho_2} \begin{pmatrix} \cos(\kappa x) \\ i \sin(\kappa x) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

この場合スピン密度は  $\rho_s(\mathbf{r}) = |\Psi_1(\mathbf{r})|^2 - |\Psi_2(\mathbf{r})|^2 = (\rho_1 + \rho_2) \cos(2\kappa x)$  と書かれ、周期的な空間変調を生み出す。この相は「ストライプ超流動」または「定常波相」と呼ばれる [28]。グロスピタエフスキー方程式から得られた一様系の平均場相図はスピン軌道相互作用  $\hat{\mathbf{A}}$  の (円筒対称性を失わない) 変形や追加で加わる場 (ゼーマン項など) の存在下でも一般的に成立する [24]。

### 3.2 トラップ系の場合

冷却原子気体系に一般的に存在する調和型の閉じ込め  $V(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$  によって基底状態の相図はより豊かになり、新しい相が出現する。ここでは Sinha 達による研究を紹介する [29]。まず、すべての原子間相互作用の項はスピンに依存しない形  $\hat{G}_{\mu\nu} = g_{\text{eff}} \hat{\Psi}_\mu^\dagger \hat{\Psi}_\nu$  をもつと仮定する。ここで  $g_{\text{eff}}$  はすべての衝突を記述する有効的な散乱長である [29]。この問題の簡略化により、スピン軌道結合 BEC においてトラップポテンシャルによって引き起こされる効果が浮き出る。調和トラップにより、更なるエネルギースケール  $\hbar\omega$  が上記で議論した一様系の問題に導入される。Sinha 等は無次元パラメータ  $\mathcal{G} = g_{\text{eff}} m/\hbar^2$  と  $\mathcal{K} = \kappa l_0$  ( $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ ) をスキャンして、トラップされた 2次元スピン軌道結合 BEC の相図を解明した。

スピン軌道相互作用が支配的な原子間相互作用のない場合では ( $\mathcal{G} = 0, \mathcal{K} \gg 1$ ), 上側の分枝  $E_+(\mathbf{k})$  は無視でき、1粒子波動関数  $\Psi(\mathbf{k}) = \psi(\mathbf{k}) \mathbf{u}_-(\mathbf{k})$  を得る。ここで、

$$\mathbf{u}_-(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ (k_x + ik_y)/k \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (15)$$

は低エネルギー分枝  $E_-(\mathbf{k})$  における一様系の固有状態である。 $\varphi$  は  $\mathbf{k}$  の方位角を表す。1粒子ハミルトニアンに閉じ込めポテンシャルを加え、 $H(\mathbf{k}) \propto (\hbar\mathbf{k} - \hat{\mathbf{A}})^2 - \nabla_{\mathbf{k}}^2$  とし、相当するシュレディンガー方程式を次のアンザッツ  $\psi(\mathbf{k}) = \sum_l k^{-1/2} f_l(\mathbf{k}) e^{il\varphi}$ , を用いて解くと、固有エネルギー

$$E_{nl} = \frac{(l+1/2)^2}{2\mathcal{K}^2} + n + \frac{1}{2}, \quad (16)$$

を得る。ここで  $n$  はメキシカンハットポテンシャルの極小  $k \approx \kappa$  の周りの動径方向の励起のラベルであり、 $l \in \mathbf{Z}$  である。エネルギー固有値より、量子数  $n = 0$  と  $l = \{0, -1\}$  の状態は縮退しており、その基底状態の波動関数は

$$\Psi_{l=\{0,-1\}}(k) \propto e^{-(k-\kappa)^2 l_0^2/2 + i l \varphi} \mathbf{u}_-(\varphi) \quad (17)$$

となる。実空間では、極座標  $(r, \theta)$  を使うと二つの縮退した基底状態が

$$\Psi_0(r, \theta) \propto \begin{pmatrix} J_0(\mathcal{K}r) \\ e^{i\theta} J_1(\mathcal{K}r) \end{pmatrix}, \quad \Psi_{-1}(r, \theta) \propto \begin{pmatrix} e^{-i\theta} J_1(\mathcal{K}r) \\ J_0(\mathcal{K}r) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

と書ける [15, 29, 28, 24, 25]。これらは半整数渦状態として知られ、様々な物理系（トポロジカル量子コンピューティング [38]、超流動  $^3\text{He}$  [39]、スピントリプレット超伝導など）に現れる。式 (18) における縮退状態とそれらの任意の線形結合は回転対称な密度分布を生み出す。文献 [29] で指摘されているように、この半整数渦の相はある有限の相互作用の強さ  $g < g_1$  まで生き残る。ここで  $g_1 \sim \kappa^{-2}$  は基底状態 ( $|l+1/2| = 1/2$ ) と高エネルギー ( $|l+1/2| = 3/2$ ) 状態間のエネルギーの差を表す。実際、スピン軌道相互作用が大きい  $\kappa^2 \gg 1$  の場合、逐次的な角度方向の励起間のエネルギー差 [式 (16)] は動径方向の励起に比べて非常に小さい。従って、高い角運動量を持つ状態 ( $l \geq 1$ ) のポピュレーションは  $\kappa$  が大きくなるにつれて増える傾向にある。相互作用が大きくなると、 $|l+1/2| = 3/2$  を満たす高い角運動量状態をもつ凝縮相が現れ、相互作用パラメータのある範囲  $g_1 < g < g_2$  で起こる。

もっと強い相互作用  $g > g_2$  の場合、気体は渦の格子相に入り、密度は六角形型格子の形に変化する。興味深い事に回転対称性が破れ、格子の周期が相互作用の強さ  $g$  に依存しない。実際、格子の最小間の距離はスピン軌道結合の強さ  $\kappa$  で与えられる。結果として生じる運動量分布は6つのピークをもつ頑固なリング型構造をもつ。

上記で議論した3つの相はすべて共通してその密度分布は回転又は離散的な回転対称性を保っている。より大きな相互作用の場合 ( $g \gg g_2$ ) ではこの事は成り立たない。この大きな相互作用の領域では、スピン軌道相互作用により BEC の状態はストライプ相へと入り、密度はある方向へと周期的に変調する。この非等方状態はスピンに依存する相互作用  $g_{12} > g$  をもつ一様系でみられたストライプ相と類似性をもっている。

## 4 まとめ

この報告書では人工ゲージ場に関する実験とスピン軌道相互作用をもつ BEC の基底状態に関して簡単にレビューした。スピン軌道結合 BEC の理論に関して、その動的な振る舞いを扱った研究は少なく、今後活発に議論されていくと思われる。また、本講演では扱っていないが、光格子がある場合にはより粒子間の相関が強まり、多彩な量子相が実現する事が予言されている [3, 4]。こちらの方も今後の急速な研究の展開が期待される。

## 参考文献

- [1] M. Lewenstein, A. Sanpera, and V. Ahufinger, *Ultracold Atoms in Optical Lattices: Simulating Quantum Many-body Systems* (Oxford University Press, 2012).
- [2] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbene, *Nat. Phys.* **8**, 267 (2012).
- [3] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas, and P. Öhberg, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1523 (2011).
- [4] N. Goldman, G. Juzeliūnas, P. Öhberg, and I. B. Spielman, arXiv:1308.6533.
- [5] V. Galitski and I. B. Spielman, *Nature (London)* **494**, 49 (2013).
- [6] M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010); X. L. Qi and S. C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).
- [7] Y. J. Lin, R. L. Compton, A. R. Perry, W. D. Phillips, J. V. Porto, and I. B. Spielman, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 130401 (2009).

- [8] Y. J. Lin, R. L. Compton, K. Jiménez-García, J. V. Porto, and I. B. Spielman, *Nature (London)* **462**, 628 (2009).
- [9] Y. J. Lin, R. L. Compton, K. Jiménez-García, W. D. Phillips, J. V. Porto, and I. B. Spielman, *Nat. Phys.* **7**, 531, (2011).
- [10] Y. J. Lin, K. Jiménez-García, and I. B. Spielman, *Nature (London)* **471**, 83 (2011).
- [11] P. Wang, Z.-Q. Yu, Z. Fu, J. Miao, L. Huang, S. Chai, H. Zhai, and J. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 095301 (2012).
- [12] L. W. Cheuk, A.T. Sommer, Z. Hadzibabic, T. Yefsah, W. S. Bakr, and M. W. Zwierlein, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 095302 (2012).
- [13] J. Ruseckas, G. Juzeliūnas, P. Öhberg and M. Fleischhauer, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 010404 (2005).
- [14] G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, M. Lindberg, L. Santos and P. Öhberg, *Phys. Rev. A* **77**, 011802(R) (2008).
- [15] T. D. Stanescu, B. Anderson, and V. Galitski, *Phys. Rev. A* **78**, 023616 (2008).
- [16] J. Y. Vaishnav and C. W. Clark, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 153002 (2008).
- [17] G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, and J. Dalibard, *Phys. Rev. A* **81**, 053403 (2010).
- [18] D. L. Campbell, G. Juzeliūnas and I. B. Spielman *Phys. Rev. A* **84**, 025602 (2011).
- [19] Z. F. Xu and L. You, *Phys. Rev. A* **85**, 043605 (2012).
- [20] B. M. Anderson, I. B. Spielman, and G. Juzeliūnas, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 125301 (2013).
- [21] Z. F. Xu, L. You and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **87**, 063634 (2013).
- [22] B. M. Anderson, G. Juzeliūnas, V. M. Galitski, and I. B. Spielman, *Phys. Lett. Lett.* **108**, 235301 (2012).
- [23] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [24] H. Zhai, *Int. J. Mod. Phys. B* **26**, 1230001 (2012).
- [25] X. Zhou, Y. Li, Z. Cai, and C. Wu, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **46**, 134001 (2013)
- [26] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [27] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [28] C. Wang, C. Gao, C. M. Jian, and H. Zhai, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 160403 (2010).
- [29] S. Sinha, R. Nath and L. Santos, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 270401 (2011).
- [30] X.-Q. Xu and J. H. Han, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 200401 (2011).

- [31] H. Hu, B. Ramachandhran, H. Pu, and X.-J. Liu, Phys. Rev. Lett. **108**, 010402 (2012).
- [32] Y. Zhang, L. Mao and C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **108**, 035302 (2012).
- [33] T. Ozawa and G. Baym, Phys. Rev. A **85**, 013612 (2012).
- [34] X. Cui and Q. Zhou, Phys. Rev. A **87**, 031604 (2013).
- [35] P. S. He, R. Liao, and W. M. Liu, Phys. Rev. A **86**, 043632 (2012).
- [36] R. Liao, Z. G. Huang, X. M. Lin, and W. M. Liu, Phys. Rev. A **87**, 043605 (2013).
- [37] Q. Zhou and X. Cui, Phys. Rev. Lett. **110**, 140407 (2013).
- [38] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, Rev. Mod. Phys. **80**,1083 (2008).
- [39] G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet* (Clarendon Press, Oxford, UK, 2003).

# ユニタリー・フェルミ気体の一粒子スペクトル関数に対する和則の構築

Philipp Gubler<sup>a,1</sup>, 西田祐介<sup>b</sup>, 山本直希<sup>c,d</sup>, 初田哲男<sup>a</sup>

<sup>a</sup> 理化学研究所、仁科センター, <sup>b</sup> 東京工業大学,

<sup>c</sup> 京都大学、基研物理学研究所, <sup>d</sup> University of Maryland

ユニタリー・フェルミ気体における一粒子自己エネルギーの虚部に対する和則を演算子積展開の結果から導出し、最大エントロピー法を用いて解析する。その結果から得られる一粒子スペクトル関数の運動量に対する変化を調べ、超流動ギャップなどのユニタリー・フェルミ気体の基本的な性質を引き出すことができる。本稿では、この手法の基本的な考え方について説明し、これまでに得られた結果を簡単に紹介する。

## 1 導入

ユニタリー・フェルミ気体は2成分を持つ非相対論的なフェルミ粒子からなる気体であり、その異なる成分の間の相互作用の強さの指標となる散乱長  $a$  が無限大になる強結合な量子多体系である。一般的な量子多体系を考えるとときに、 $k_F a$  ( $k_F$ :フェルミ運動量) が展開パラメータとしてよく使われるが、ユニタリー・フェルミ気体の場合にはこのような摂動論は破綻するはずなので、非摂動論的な手法が必要となる。

そこで、ユニタリー・フェルミ気体の様々な性質を摂動論的な方法に頼らずに理解するためには演算子積展開法 (Operator Product Expansion, OPE) が近年注目されてきている [1, 2]。特に、[3] では一粒子グリーン関数に対して演算子積展開が行われ、一粒子スペクトル関数の  $k_F$  より大きい高運動量領域において、演算子積展開法の結果が量子モンテ・カルロ法の数値シミュレーションから得られる振舞いとよく一致していることが分かった。この結果を低運動量領域に拡張し、超流動ギャップなどの物理量を評価することが本稿で紹介する研究の主な目的である。

そのためには、QCD の研究において以前から使われている QCD 和則 [4, 5] の方法に倣い、一粒子自己エネルギー  $\Sigma(\omega)$  のエネルギー  $\omega$  の関数としての解析性に基づいて、 $\text{Im}\Sigma(\omega)$  についてのある種の和則を構築する。この和則を最大エントロピー法 (Maximum Entropy Method, MEM) を用いて解析し、 $\text{Im}\Sigma(\omega)$  の最も確からしい形を抽出することで、最終的には一粒子スペクトル関数を引き出すことができる。

本稿では、和則の導出を説明した後、MEM の解析によって得られた一粒子自己エネルギー (の虚部) を示し、その結果から得られる一粒子スペクトル関数の中に現れるピークが運動量の関数としてどのように動くかについて考察する。最後にこれまでに得られた結果をまとめ、今後の展望について述べる。

## 2 和則の導出

$\text{Im}\Sigma(\omega)$  に関する和則を導くためには、まず  $|\omega| \rightarrow \infty$  の極限において有用な  $\Sigma(\omega)$  に対する何らかの展開式を用意する必要がある。このような展開式は演算子積展開法を用いれば実際に導出することができ [3]、以下の形で表せる：

$$\Sigma^{\text{OPE}}(\omega + i0^+, y) = -\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \frac{1}{\sqrt{-\omega - i0^+}} + \frac{0.207498}{3\pi^2} \zeta \frac{1}{\omega + i0^+} - \frac{\sqrt{2}}{15\pi} (3\xi - 5y^2) \frac{1}{(\sqrt{-\omega - i0^+})^3}. \quad (1)$$

<sup>1</sup>e-mail address: pgubler@riken.jp

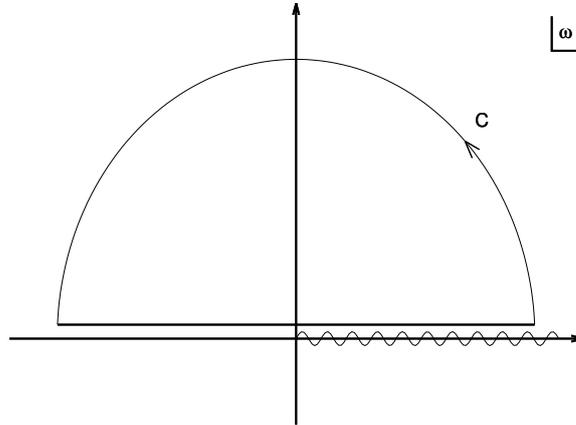


図 1: 和則を導くための  $\omega$  の複素平面上的経路 C。実軸上の波線は  $\Sigma(\omega)$  のカットを表している。

この展開が意味を持つためには  $\omega \gg \epsilon_k \gg \epsilon_F$  の条件が成り立つ必要がある。上の式を簡単にするために  $\Sigma$  と  $\omega$  をフェルミエネルギー  $\epsilon_F$  を単位として表しており、 $y$  は運動量を表すパラメータである ( $y = k/k_F$ )。また、 $\xi$  と  $\zeta$  はそれぞれはエネルギー密度  $\mathcal{E}$  とコンタクト密度  $C$  を無次元化した形で表したパラメータである：

$$\mathcal{E} = \xi \frac{k_F^5}{10\pi^2 m}, \quad C = \zeta \frac{k_F^4}{3\pi^2}. \quad (2)$$

この二つのパラメータの具体的な値としては量子モンテ・カルロ法の数値シミュレーションから得られた  $\xi = 0.372(5)$  [6] と  $\zeta = 3.40(1)$  [7] を用いる。なお、この値は両方ともゼロ温度のものである。式 (1) は演算子積展開の結果を  $y^2/\omega$  について展開し、1 次の項まで残した結果を示しているが、 $y^2/\omega$  についての展開を行わない定式化も可能である。ただし、本稿では議論を簡潔にするためにその具体的な式などを省略する。

さて、式 (1) から和則を導くためには図 1 に示してあるような  $\omega$  の複素平面上的経路 C を考える。 $\Sigma(\omega)$  は実軸上以外の  $\omega$  の複素平面上で解析的であるとすると、図 1 にある経路 C に沿った積分は 0 になるはずである。同様に、 $\Sigma^{\text{OPE}}(\omega)$  も実軸上以外の  $\omega$  の複素平面上で解析的であるため、C に沿った積分は 0 になるはずである。しかも、これらの関数に任意の解析的な関数  $K(\omega)$  をかけても、同じように経路 C に沿った積分は 0 になる。さらに、 $\Sigma^{\text{OPE}}(\omega)$  は  $|\omega| \rightarrow \infty$  の半円上の経路では本当の  $\Sigma(\omega)$  の良い近似になるはずなので、 $K(\omega)\Sigma^{\text{OPE}}(\omega)$  の半円上の経路に沿った積分は  $K(\omega)\Sigma(\omega)$  の同じ積分と (今使っている近似の範囲内で) 等しくなる。従って、 $K(\omega)$  は実軸上では実になることを要請し、最後に虚部をとれば、以下のような和則を導けることが分かる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega K(\omega) \text{Im}\Sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega K(\omega) \text{Im}\Sigma^{\text{OPE}}(\omega). \quad (3)$$

上の式の右辺は、 $K(\omega)$  の具体的な形を指定すれば、式 (1) を使って解析的または数値的に計算できるはずである。 $K(\omega)$  の選び方としては色々な形が考えられるが、QCD 和則の経験から指数関数的に減数する Borel Kernel

$$K_n(\omega, M) = \omega^n e^{-\omega^2/M^2}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

がその後の和則の解析をよりやりやすくすることが知られているため、本研究でもこの Borel Kernel を用いる。ここに現れるパラメータ  $M$  は Borel mass と呼ばれている。

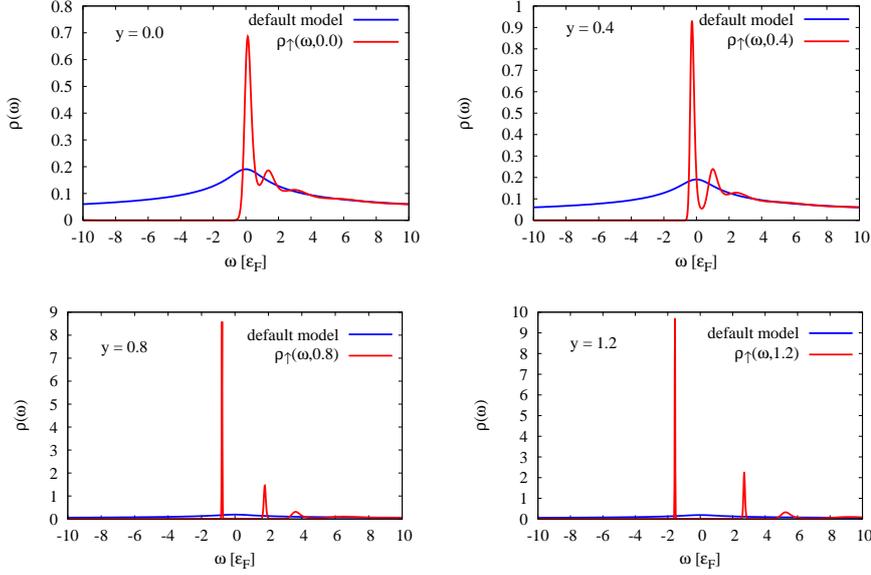


図 2: MEM 解析により得られた一粒子自己エネルギーの虚部:  $\rho(\omega) \equiv -\frac{1}{\pi}\text{Im}\Sigma(\omega)$ 。

### 3 和則の最大エントロピー法による解析

前の section で導出した和則から物理量を引き出すためには式 (4) から  $\text{Im}\Sigma(\omega)$  に関する情報を抽出する必要がある。このためには、ベイズの定理に基づき、与えられた情報から最も確からしい  $\text{Im}\Sigma(\omega)$  を引き出すことができる最大エントロピー法 (MEM) という手法を用いる。MEM が近年 QCD 和則の解析に応用されるようになり [5]、様々なハドロンの性質を引き出すために使われてきた [8, 9, 10, 11]。その最大の利点は、抽出しようとする関数を持つ形に関して強い仮定をおく必要がないところにある。MEM を用いて和則を解析するときの具体的な計算法などは文献 [5, 12] に譲り、ここでは結果のみを紹介することにする。

まずは、 $\rho(\omega) \equiv -\frac{1}{\pi}\text{Im}\Sigma(\omega)$  についての結果を図 2 に示す。ここでは、OPE の結果を  $y^2/\omega$  について展開しない式を使った。この結果を以下の Kramers-Kronig 関係式に代入し、数値的に積分すれば、自己エネルギー  $\Sigma(\omega)$  の実部もただちに求まる。

$$\text{Re}\Sigma(\omega) = -P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\rho(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (5)$$

これまでに述べた計算法より自己エネルギーが完全に決まるので、その形を

$$A(\omega, y) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{\omega + i0^+ - y^2 - \Sigma(\omega, y)} \quad (6)$$

に代入することで、一粒子スペクトル関数  $A(\omega, y)$  も求まる。 $A(\omega, y)$  の中に現れるいくつかのピークの位置を運動量  $k$  の関数として図 3 に示している。図の中では、原点に最も近い二つのピークを実線で示してあるが、その二つのピークが最も近づく運動量 ( $k \sim 0.4k_F$ ) から超流動ギャップ  $\Delta$  が読み取れる。その具体的な数値は  $\Delta = 0.53\epsilon_F$  であり、量子モンテ・カルロ法の数値シミュレーション [13] や実験データの解析 [14] から得られた値と矛盾しない結果となっている。

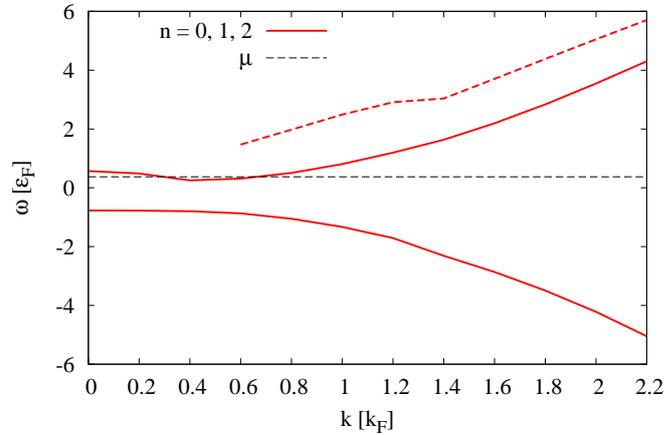


図 3: 一粒子スペクトル関数  $A(\omega, y)$  が持つピークの運動量  $k$  による振る舞い。赤い実線は原点に最も近い二つのピークの位置を示し、赤い破線は  $\omega > 0$  領域にある二つ目のピークの位置を示す。黒い破線は化学ポテンシャル  $\mu$  に対応している。

## 4 まとめ

本稿では、演算子積展開法と最大エントロピー法を用いてユニタリ・フェルミ気体の一粒子スペクトル関数を求める手法を議論した。まずは、一粒子自己エネルギー  $\Sigma(\omega)$  に関する OPE が与えられたときに、その解析性から一般的な Kernel  $K(\omega)$  を持つ和則をどのように導くかについて説明した。さらに、Kernel として式 (4) にあるような Borel Kernel を用いた和則を MEM により解析した結果を簡単に紹介し、一粒子スペクトル関数のピークは運動量の関数としてどのように振る舞うかを示した。

今後の展望としては、本稿で紹介した手法を有限温度を持つユニタリ・フェルミ気体に拡張し、擬ギャップなどの興味深い現象を調べることや、これまでにその OPE がまだ詳しく調べられていない物理量に適用するなど、いくつかの方向性が考えられる。

## 参考文献

- [1] E. Braaten and L. Platter, Phys. Rev. Lett. **104**, 223004 (2010).
- [2] D.T. Son and E.G. Thompson, Phys. Rev. A **81**, 063634 (2010).
- [3] Y. Nishida, Phys. Rev. A **85**, 053643 (2012).
- [4] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147**, 385 (1979); **147**, 448 (1979).
- [5] P. Gubler, M. Oka, Prog. Theor. Phys. **124**, 995 (2010).
- [6] J. Carlson, S. Gandolfi, K.E. Schmidt and S. Zhang, Phys. Rev. A **84**, 061602(R) (2011).
- [7] S. Gandolfi, K.E. Schmidt and J. Carlson, Phys. Rev. A **83**, 041601(R) (2011).
- [8] P. Gubler, K. Morita and M. Oka, Phys. Rev. Lett. **107**, 092003 (2011).

- [9] K. Ohtani, P. Gubler and M. Oka, *Eur. Phys. J. A* **47**, 114 (2011).
- [10] K. Ohtani, P. Gubler and M. Oka, *Phys. Rev. D* **87**, 034027 (2013).
- [11] K. Suzuki, P. Gubler, K. Morita and M. Oka, *Nucl. Phys.* **A897**, 28 (2013).
- [12] P. Gubler, “A Bayesian Analysis of QCD Sum Rules”, Springer Theses, Springer Japan (2013).
- [13] J. Carlson and S. Reddy, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 060401 (2005).
- [14] J. Carlson and S. Reddy, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 150403 (2008).

# 量子渦生成にともなう超流動崩壊の前駆現象

國見昌哉<sup>1</sup>, 加藤雄介<sup>2</sup>

東京大学大学院総合文化研究科

Bose-Einstein 凝縮体中を一定速度で動くポテンシャルがあるときに、Gross-Pitaevskii 方程式と Bogoliubov 方程式を用いて臨界速度近傍の励起スペクトルとゆらぎを計算した。その結果、第 1 励起エネルギーのスケールリング則と局所的な低エネルギーの密度ゆらぎの増大を見いだした。これらは量子渦生成にともなう超流動崩壊の前駆現象とみなすことができる。詳細は [1] を参照されたい。

## 1 イントロダクション

超流動状態を特徴付ける性質の一つとして臨界速度の存在が挙げられる [2, 3]。すなわち、臨界速度以下の状態では散逸が生じないが、臨界速度を超えると散逸が生じる状態になる。臨界速度以上では量子渦ができることが多い。このことは冷却原子系の実験において実際に観測されている [4, 5, 6, 7]。

超流動の崩壊の研究では、その系の励起状態の性質を調べるのが重要な課題となる。しかしながら、量子渦生成が起きる系では、量子渦の多彩な非線形ダイナミクスが数多く報告されているものの [8, 9, 10, 11]、この系における励起状態、ゆらぎの解析は行われていなかった。

本論文では Bose 多体系に対する平均場理論である Gross-Pitaevskii (GP) 理論 [12] と、秩序変数の最低次のゆらぎを記述する Bogoliubov 理論 [13] を用いて解析を行った結果を報告する。

## 2 モデル

$N$  個の Bose 粒子が 2 次元のトーラス状の容器  $[-L/2, L/2) \times [-L/2, L/2)$  に閉じ込められている系を考える。また、速度  $-v(v \equiv ve_x, v > 0)$  とする。 $e_x$  は  $x$  方向の単位ベクトル) で動くポテンシャル  $U(\mathbf{r} + vt)$  があるとする。ここで、ポテンシャルとともに動く座標系では、Bose-Einstein 凝縮の秩序変数  $\Psi(\mathbf{r})$  (凝縮体波動関数と呼ばれている) は以下の GP 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r})|^2\Psi(\mathbf{r}) = \mu\Psi(\mathbf{r}), \quad (1)$$

に従う。ここで、 $\mu$  は化学ポテンシャルで粒子数  $N = \int d\mathbf{r}|\Psi(\mathbf{r})|^2$  を一定にするように決める。外部ポテンシャルはガウス型 ( $U(\mathbf{r}) \equiv U_0 \exp[-(\mathbf{r}/d)^2]$ ) を採用する。 $g(> 0)$  は斥力相互作用の大きさを表す。また、座標変換を行ったことにより、境界条件は周期境界条件ではなく、捻られた境界周期境界条件

$$\Psi(\mathbf{r} + Le_x) = e^{imvL/\hbar}\Psi(\mathbf{r}), \quad \Psi(\mathbf{r} + Le_y) = \Psi(\mathbf{r}), \quad (2)$$

となり、ここにポテンシャルの速度の情報が含まれる。ここで、 $e_y$  は  $y$  方向の単位ベクトルである。この境界条件は変換  $v \rightarrow v + 2\pi\hbar n/(mL)$  ( $n$  は任意の整数) に対して不変である。以下では  $v$  を小さくしていったときに、 $|v| < \pi\hbar/mL$  の基底状態になるブランチに着目する。

Bose 凝縮体中の励起状態は以下の Bogoliubov 方程式

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} & -g[\Psi(\mathbf{r})]^2 \\ g[\Psi^*(\mathbf{r})]^2 & -\mathcal{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(\mathbf{r}) \\ v_i(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \epsilon_i \begin{bmatrix} u_i(\mathbf{r}) \\ v_i(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) - \mu + 2g|\Psi(\mathbf{r})|^2, \quad (4)$$

<sup>1</sup>e-mail address: kunimi@vortex.c.u-tokyo.ac.jp

<sup>2</sup>e-mail address: yusuke@phys.c.u-tokyo.ac.jp

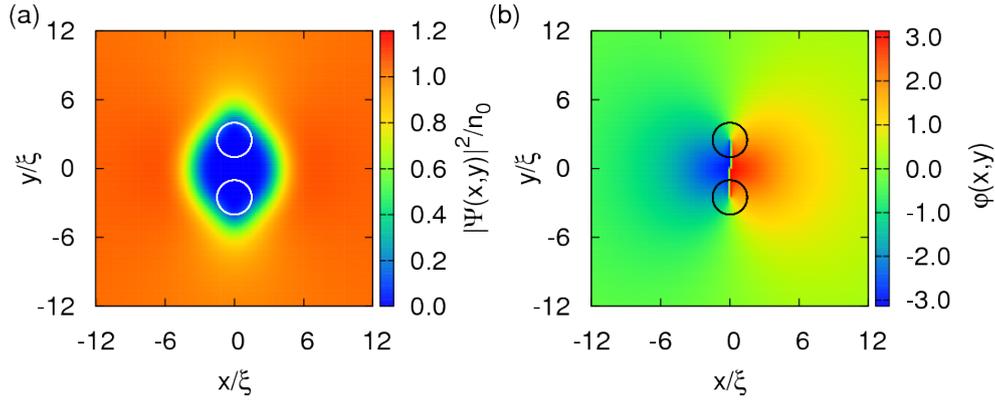


図 1: (a) 凝縮体密度の空間プロファイル (b) 凝縮体波動関数の位相の平面波成分  $e^{imvx/\hbar}$  を除いたものの空間プロファイル。パラメータは  $L = 48\xi$ ,  $U_0 = 5\epsilon_0$ ,  $d = 2.5\xi$ ,  $v = 0.426545v_s$  である。白丸または黒丸が GVP の位置を表す。

を対角化することで得られる。ここで、 $u_i(\mathbf{r})$  と  $v_i(\mathbf{r})$  は励起状態  $i$  の波動関数で、 $\epsilon_i$  が励起エネルギーを表す。励起状態の波動関数に対する境界条件はそれぞれ  $u_i(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_x) = e^{imvL/\hbar}u_i(\mathbf{r})$ ,  $u_i(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_y) = u_i(\mathbf{r})$ ,  $v_i(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_x) = e^{-imvL/\hbar}v_i(\mathbf{r})$ ,  $v_i(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_y) = v_i(\mathbf{r})$  である。

以下では長さ、速度、エネルギーをそれぞれ回復長  $\xi \equiv \hbar/\sqrt{mgn_0}$ 、音速  $v_s \equiv \sqrt{gn_0/m}$ 、 $\epsilon_0 \equiv \hbar^2/(m\xi^2) = gn_0$  で測ることにする。ここで、 $n_0 \equiv N/L^2$  は平均粒子数密度である。以下では  $1/\sqrt{n_0\xi^2} = 0.1$  の結果を示す。数値計算の詳細は [1] を参考にされたい。

### 3 結果

初めに、臨界速度近傍における GP 方程式の安定定常解を図 1 に示す。特徴的な振る舞いとして密度の小さい領域に量子渦が対で存在していることがわかる。このような量子渦対は幽霊渦 (Ghost vortex pair, GVP)[14, 11] と呼ばれている。GVP の存在はただちに超流動性が失われていることを意味しない。この状態には励起状態の異常性が見られないからである。

次に、第 1 励起状態のエネルギー (エネルギーギャップ) の速度依存性を図 2(a) に示す。図より、2 つの特徴的な振る舞いが見て取れる。1 つ目が速度が小さい領域における線形の振る舞いである。これはポテンシャルが無いときの一様系の性質が反映していると考えられる。なぜなら、一様系の第 1 励起状態のエネルギーは  $\Delta_{\text{umi}} = 2\pi gn_0/(L/\xi)[-v/v_s + \sqrt{\pi^2/(L/\xi)^2 + 1}]$  と書け、 $v$  について線形であるからである。2 つ目が臨界速度近傍におけるエネルギーギャップの急激な減少である。これを特徴付けるため、フィッティング関数を  $\Delta = \Delta_0 [(v_c - v)/v_c]^c$  と仮定し、臨界速度近傍の点を用い、フィッティングを行った。フィッティングパラメータは  $\Delta_0$ ,  $c$ ,  $v_c$  で、 $v_c$  は臨界速度を表す。結果を図 2(b) に示す。フィッティング結果より、我々は  $c = 1/4$  を得た。この指数の値は GP 方程式の定常解の分岐構造を反映していて、我々の結果は先行研究のもの [9] とコンシステントである。このスケール則の存在は、物理的には、臨界速度に近づくにつれて特徴的な時間スケールのべき的な発散があることを示している。

以上のように、我々は臨界速度近傍の励起スペクトルのスケール則を見い出したが、これだけでは量子渦の情報得られない。これを見るために、我々は密度ゆらぎに着目した。凝縮体波動関数と、励起状態の波動関数を用いて、密度ゆらぎは以下のように書けることが知られている：

$$\delta n_i(\mathbf{r}) \equiv \Psi^*(\mathbf{r})u_i(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})v_i(\mathbf{r}). \quad (5)$$

この計算結果を図 3 に示す。ポテンシャルの速度が十分小さいときには、図 3(a) から見てとれるように、低エネルギー領域における密度ゆらぎはほとんど存在しない。ポテンシャル速度を大きくしてい

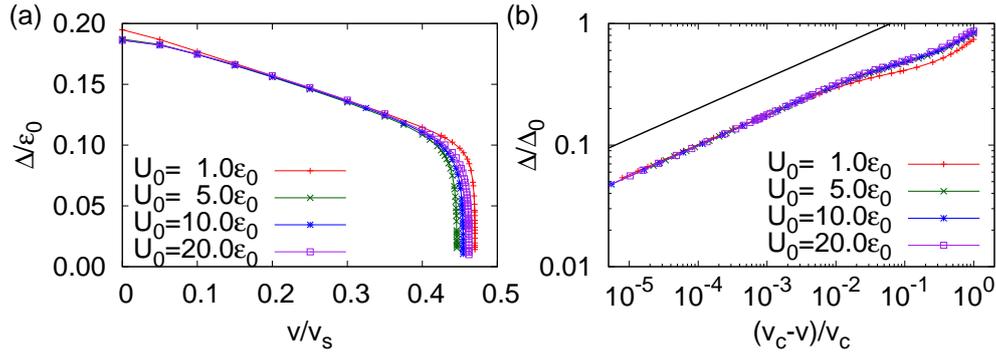


図 2: (a)  $L = 32\xi$ ,  $d = 2.5\xi$  のときの、エネルギーギャップの速度依存性。(b)(a) をフィッティングした結果。黒線は  $[(v_c - v)/v_c]^{1/4}$  を表す。

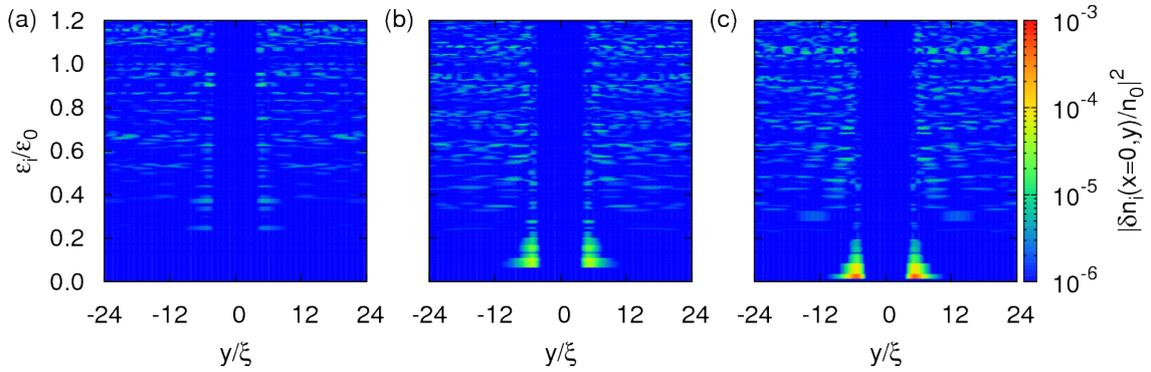


図 3:  $L = 48\xi$ ,  $U_0 = 10\epsilon_0$ ,  $d = 2.5\xi$ ,  $x = 0$  のときの局所的な密度ゆらぎの大きさを示したもの。(a)、(b)、(c) はそれぞれ速度が  $v = 0.1v_s$ ,  $0.42v_s$ ,  $0.43033v_s$  の結果である。

くと図 3(b)、(c) のように、低エネルギー領域での密度ゆらぎの増大が見られる。この大きな密度ゆらぎにより、ポテンシャルにピン止めされていた GVP がピン止めから外れ、ポテンシャルの外の領域に出てくるものと考えられる。

## 4 まとめ

ポテンシャルが一定速度で動いているとき、Gross-Pitaevskii 方程式と Bogoliubov 方程式を数値的に解いた。臨界速度近傍では第 1 励起状態のエネルギーにスケーリング則  $\Delta \sim |v_c - v|^{1/4}$  が成立することと、局所的な密度ゆらぎの増大を見いだした。これらの振る舞いは量子渦生成における超流動の崩壊の前駆現象であると言える。

## 参考文献

- [1] M. Kunimi and Y. Kato, arXiv:1305.3995 (2013), M. Kunimi and Y. Kato (in preparation).
- [2] L. D. Landau, J. Phys. (USSR) **5**, 71 (1941).
- [3] R. P. Feynman, J. Low. Temp. Phys. **1**, 17 (1995).
- [4] C. Raman, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2502 (1999).
- [5] R. Onofrio, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 2228 (2000).
- [6] T. W. Neely, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 160401 (2010).
- [7] K. C. Wright, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **110**, 025302 (2013).
- [8] T. Frisch, Y. Pomeau, and S. Rica, Phys. Rev. Lett. **69**, 1644 (1992).
- [9] C. Huepe and M-E. Brachet, Physica D, **140**, 126 (2000).

- [10] K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. Lett. **104**, 150404 (2010).
- [11] K. Fujimoto and M. Tsubota, Phys. Rev. A, **83**, 053609 (2011).
- [12] E. P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961), L. P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961).
- [13] N. N. Bogoliubov, J. Phys. USSR **11**, 23 (1947).
- [14] K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. A, **67**, 033610 (2003).

# Thermodynamical Property of Entanglement Entropy for Excited States

野崎 雅弘<sup>1</sup>、Jyotirmoy Bhattacharya<sup>2</sup>、高柳 匡<sup>3</sup>、宇賀神 知紀<sup>4</sup>

京都大学 基礎物理学研究所<sup>1,3,4</sup>、Kavli IPMU<sup>2,3,4</sup>

## 概要

我々は本研究によって非常に部分系を小さく取った時、そのエンタングルメント・エントロピーは理論の詳細に依らないユニバーサルな有効温度  $T_{ent}$  を通じて熱力学第一法則に似た関係式に従うことを見出した。

## 導入

昨今、多岐にわたる分野においてエンタングルメント・エントロピーが注目を集めている。例えば、物性理論においては零温度においても用いることができる量子的なオーダーパラメタとして注目を集め、素粒子理論においては  $AdS/CFT$  対応や重力理論を深く理解するための道具として注目を集めている [1][2][3]。

我々はこの様に現代物理学において非常に重要な物理量であるエンタングルメント・エントロピーの統計力学的側面に注目して本研究を行った。エンタングルメント・エントロピーは、非平衡系においても定義可能な物理量であるため、統計力学の分野では非平衡系の物理におけるエントロピーとして用いようという試みがある。このような試みにおいて、エンタングルメント・エントロピーの基本的な性質を明らかにしておくことは重要である。我々は熱力学エントロピーが従う熱力学法則に注目し、エンタングルメント・エントロピーにも類似した従うべき基本法則が存在するかどうか調べた。

その結果、Large  $N$  の非常に多くの場を含む強結合のゲージ理論において、高エネルギーではエンタングルメント・エントロピー  $\Delta S_A$  と内部エネルギー  $\Delta E_A$  が従うべき熱力学第一法則に似た法則

$$\Delta E_A = T_{ent} \cdot \Delta S_A \quad (1)$$

が存在し、この時、定義される有効温度  $T_{ent}$  はこの様なゲージ理論の詳細には依らないことを見出した [4]。この基本法則と有効温度  $T_{ent}$  に関して詳しく説明していく。

## エンタングルメント・エントロピー

初めにエンタングルメント・エントロピーの定義とその性質に関して簡単に説明する。ある時刻においてヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  を部分系  $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$  に分割する。この時に部分系  $\mathcal{H}_B$  の自由度に関してトレースを取り、その自由度を無視する。この時に定義される密度行列

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho \quad (2)$$

を用いて、フォン・ノイマン・エントロピーとしてエンタングルメント・エントロピーは

$$S_A = -\text{Tr}_A \rho_A \log \rho_A \quad (3)$$

と定義される。

このエンタングルメント・エントロピーは状態の持つ量子的なもつれを定量的に測定する量である。例えば

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A) \otimes (|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B) \quad (4)$$

の様に直積状態で書かれる量子的にもつれていない状態に対してはエンタングルメント・エントロピーは零になる。しかし、

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B) \quad (5)$$

の様に A のスピンの状態が観測されると同時に B のスピンの状態が分かる、量子的にもつれた状態に対してエンタングルメント・エントロピーは零ではなく、 $\log 2$  という値を持つ。この様にエンタングルメント・エントロピーは状態の量子的なもつれを定量的に測定する物理量である。

### ホログラフィック エンタングルメント・エントロピー

前節で定義したエンタングルメント・エントロピーについて、場の理論で解析を行う事は技術的に困難である。そのため、我々は  $AdS/CFT$  対応に基づいて解析を行った。この  $AdS/CFT$  対応とは  $d$  次元の多くの場を含む強結合のゲージ理論がもう一つ次元の高い  $d+1$  次元の  $AdS$  時空上の古典重力理論に等価であるという予想である。この対応は大雑把に言えば、ゲージ理論の物理量と重力理論の幾何的な量との対応を予言したものである。つまり、エンタングルメント・エントロピーにもホログラフィック エンタングルメント・エントロピーとよばれる対応するある幾何的な量が存在する。

このホログラフィック エンタングルメント・エントロピーは次の様に定義される。ある時刻において  $AdS$  時空の境界を部分系 A と B に分割する。この時、この部分系 A と B の境界を  $\partial A$  と呼ぶ。この  $\partial A$  からバルク中に伸びていく曲面の内、最も面積が小さくなる曲面は最小曲面  $\gamma_A$  と呼ばれる。この曲面の面積  $Area(\gamma_A)$  を重力定数  $G_N$  で割ったものとしてホログラフィック エンタングルメント・エントロピーは

$$\Delta S_A = \frac{Area(\gamma_A)}{4G_N} \quad (6)$$

と定義される。我々はこのホログラフィック エンタングルメント・エントロピーに関して解析を行い、エンタングルメント・エントロピーが従うべき基本法則が存在するかどうか調べた。

### 基本法則について

我々はエンタングルメント・エントロピーに対しても熱力学第一法則の様な基本法則が存在するか調べる為、次の様なセットアップで解析を行った。

#### セットアップ

$d$  次元の共形場理論において熱化や量子熱化の様な何らかの方法によって系を少しだけ励起させることを考える。この時、系の状態は一般に非平衡状態になる。この様な場の理論に対応する重力理論は境界から非常に離れた部分を変形した  $AdS$  時空上の重力理論となる。計量の形として

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left[ -f(z)dt^2 + g(z)dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (dx^i)^2 \right] \quad (7)$$

を仮定する。この時、 $z$  が零の近傍では  $g(z), f(z)$  はそれぞれ

$$g(z) \simeq \frac{1}{f(z)} \simeq 1 + mz^d \quad (8)$$

と展開できる。ここで現れる  $m$  というパラメタは対応する場の理論の励起エネルギーのスケールとなっている。この様に系を励起させた際に生じる部分系に含まれるエネルギーの変化とその部分系に対するエンタングルメント・エントロピーの変化を調べた。

#### エンタングルメント・エントロピーとエネルギー密度

この様なセットアップの下、エンタングルメント・エントロピー  $\Delta S_A$  と部分系に含まれる内部エネルギー  $\Delta E_A$  についてホログラフィックに解析を行った。この時、部分系として球形の場合とストリップの場合を考えたがここでは簡単のため、球形の場合の結果について述べる。また、前述した様に系の励起エネルギーは非常に小さく取った。これは定量的には部分系の特徴的な大きさ  $l$  を

$$ml^d \ll 1 \quad (9)$$

を満たすように取ることを意味する。この時、エンタングルメント・エントロピーとこの部分系に含まれる内部エネルギーはホログラフィックにそれぞれ

$$\begin{aligned} \Delta S_A &= \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{4(d+1)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \cdot \frac{R^{d-1}}{G_N} \cdot ml^d, \\ \Delta E_A &= \frac{\pi^{\frac{d-3}{2}}}{8\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \cdot \frac{R^{d-1}}{G_N} \cdot ml^{d-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

と求まる。この時、エンタングルメント・エントロピーは (9) の条件の下、 $ml^d$  について展開を行い、その一次まで評価した結果である。この結果から

$$\Delta E_A = T_{ent} \cdot \Delta S_A \quad (11)$$

という関係がエンタングルメント・エントロピーと内部エネルギーの間に成り立つ事が分かる。またこの時、定義される有効温度  $T_{ent}$  は

$$T_{ent} = \frac{d+1}{2\pi l} \quad (12)$$

と求まる。(12) からこの有効温度  $T_{ent}$  は部分系の特徴的な大きさの逆数に比例するが重力定数  $G_N$  や  $AdS$  半径  $R$  等には依存しないため、理論の詳細に依らない事が分かる。

#### まとめと展望

強結合で Large  $N$  のゲージ理論において、(9) を満たす非常に高エネルギーではエンタングルメント・エントロピーは理論の詳細に依らないユニバーサルな有効温度  $T_{ent}$  を通じての熱力学第一法則に類似した関係式 (11) に従うことを見出した。

今後の展望としては熱力学第二法則の様な他の熱力学法則に類似した基本法則がエンタングルメント・エントロピーに対しても存在するか調べることや、有効温度についてのより深い物理的な理解を行う事が挙げられる。

- [1] M. Nozaki, T. Numasawa, A. Prudenziati and T. Takayanagi, “Dynamics of Entanglement Entropy from Einstein Equation,” Phys. Rev. D **88**, 026012 (2013) [arXiv:1304.7100 [hep-th]].
- [2] M. Nozaki, S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic Geometry of Entanglement Renormalization in Quantum Field Theories,” JHEP **1210**, 193 (2012) [arXiv:1208.3469 [hep-th]].
- [3] D. D. Blanco, H. Casini, L. -Y. Hung and R. C. Myers, “Relative Entropy and Holography,” JHEP **1308**, 060 (2013) [arXiv:1305.3182 [hep-th]].
- [4] J. Bhattacharya, M. Nozaki, T. Takayanagi and T. Ugajin, “Thermodynamical Property of Entanglement Entropy for Excited States,” Phys. Rev. Lett. **110**, no. 9, 091602 (2013) [arXiv:1212.1164].

# 新奇な非平衡臨界現象を記述する現象論<sup>1</sup>

南 佑樹  
理化学研究所

最近、定常電流が流れる非平衡定常系で、新奇な相転移がゲージ・重力対応により理論的に見出された。本研究では、この相転移を理解するための第一歩として、現象論の構成をする。ここでは、平衡相転移のランダウ理論の拡張を議論する。

## 1 導入

最近、定常電流が流れる非平衡定常系で新奇な相転移がゲージ・重力対応により理論的に見出された [1]。以下で、どのような相転移なのかについて簡単に紹介する。

まず、定電場  $E$  が掛けられており定常電流  $J$  が駆動されている、非平衡定常系を考えよう。電場が弱ければ、定常電流は電場に比例する。この領域は線形領域と呼ばれる。電場を強くしていくと、この線形関係は破れ、電流は電場に対して非線形な応答を示すことになる。この領域では線形応答理論が使えず、理論的に微視的に扱うのが非常に困難な状態である。しかしながら、ゲージ・重力対応では、この領域も計算可能であり、実際、微分抵抗 ( $\partial E/\partial J$ ) が負になる非線形領域に特徴的な現象も [2, 3]、理論的に再現されている [4]。

この非線形領域で系と接している熱浴の温度を変化させると、電場と電流の関係に特異性が表れ、微分抵抗に関する相転移のように見えるというのが、最近、ゲージ・重力対応により見出された新奇な相転移である。図 1 が、電流と電場の関係が温度によりどう変化するか、ゲージ・重力対応により計算したものである。一番上の曲線が臨界温度以下、 $T < T_c$  で、真ん中の曲線が  $T = T_c$  のとき、下の曲線が  $T > T_c$  である。<sup>2</sup> どれも、電流が小さい領域では微分抵抗が負で、一方、大きい領域では微分抵抗は正となっている。

まず、 $T < T_c$  では、微分抵抗が正負の領域はスムーズにつながっている。次に、 $T = T_c$  の曲線を見ると、連続的につながっているが、ある臨界電流  $J_c$  で電場の傾きが発散している。つまり、微分抵抗に特異性が表れる。最後に  $T > T_c$  では一見、電場は連続的に見え、点 D から G の間で多価になっている。しかし、この曲線の D  $\rightarrow$  E  $\rightarrow$  F の部分は不安定であると考えられている [1]。つまり、低電流領域から電流を大きくしていくと、点 D から点 F に不連続にジャンプすることになる。この振る舞いは、微分抵抗が負から正への 1 次相転移のように見える。さらに、 $T = T_c$  の振る舞いは 2 次相転移、 $T < T_c$  はクロスオーバーのようにみえる。これらの振る舞いを相転移とみなし相図を書くと、図 1 の右上部のようなになる。この相図をみると、1 次相転移線の端点が 2 次相転移点になっており、気液相転移の相図や QCD 相図と似ていることがわかる。

さらに、この 2 次相転移点近傍では非線形電気伝導度 ( $\sigma \equiv J/E$ ) がスケール則を示すことが見出されている [1]。一次相転移線に沿って、臨界点に近づくと

$$\sigma - \sigma_c \sim (T - T_c)^{1/2} \quad (1)$$

また、 $T = T_c$  に保って  $J > J_c$  から近づくと

$$\sigma - \sigma_c \sim (J - J_c)^{1/3} \quad (2)$$

<sup>1</sup>この講演は、日高義将氏と中村真氏との共同研究に基づきます。

<sup>2</sup>ここでは、定性的な振る舞いに興味があるとして、「 $T_c$  の値がどのくらいなのか？」などは考えないことにする。詳細については、文献 [1] を参照。

と振る舞う。ここで、 $\sigma_c$ は非線形伝導度の臨界点での値。

以上が、ゲージ・重力対応より見出された新奇な非平衡相転移である。これは非平衡定常系で起こるまったく新しい相転移であり非常に興味深い現象である。しかし、ここで問題になるのが、ゲージ重力・対応では「どのような物理がおこっているのか？」がわからないということである。また、この相転移は非線形非平衡状態で起こる現象であり、どのような理論形式で記述できるのかについても、全く明らかではない。

平衡相転移では、拡張した自由エネルギーをオーダーパラメーターについて最小化することにより、定性的な振る舞いが一般に記述できることが知られている。これはランダウ理論と呼ばれ、新しい相転移を解析する際にとられる最初の一步となっている [5]。

本研究では、この平衡相転移のランダウ理論の非平衡相転移への拡張を試みる。非平衡定常状態にそもそも拡張できるかどうか明らかではないが、ここではチャレンジしてみることにする。これにより、新奇な非平衡相転移を理解するための第一歩を踏み出すことを目指す。

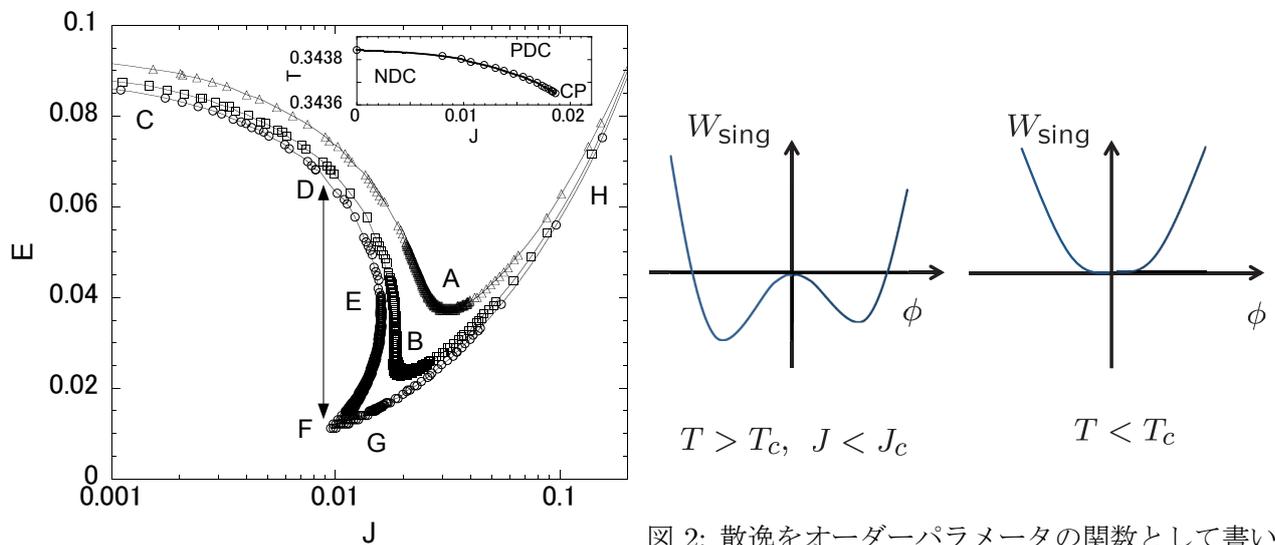


図 1: 電場—電流曲線の温度依存性。 $\Delta$ :  $T < T_c$ 、 $\square$ :  $T = T_c$ 、 $\circ$ :  $T > T_c$  を表す。図の右上部は相図。では、一重井戸型で最小値は  $J$  に対してスムーズに变化する (右図)。

図 2: 散逸をオーダーパラメータの関数として書いた概略図。 $T > T_c$  では、二重井戸型で  $J$  を変化させることにより一次相転移を起こす (左図)。 $T < T_c$  では、一重井戸型で最小値は  $J$  に対してスムーズに変化する (右図)。

## 2 ランダウ理論の拡張

### 2.1 母関数としての散逸

ランダウ理論の拡張を考えた際にまず問題になるのが、「非平衡定常系で自由エネルギーにあたるものは何か？」ということである。ここで、平衡状態の自由エネルギーに代わるものとして、電流の関数として書いた散逸  $W(J, T)$  を考えよう。これを、電流で微分すれば、与えられた  $J, T$  での電場を得る。

$$\frac{\partial W(J, T)}{\partial J} = E(J, T) \quad (3)$$

つまり、散逸を電場の母関数、平衡系での自由エネルギーにあたるものとみなす。

簡単な例として、線形領域におけるジュール熱を考えてみよう。ジュール熱は

$$W(J) = \frac{1}{2\sigma} J^2 \quad (4)$$

で与えられる。ここで $\sigma$ は線形電気伝導度。このとき、電場は

$$E(J) = \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{1}{\sigma} J \quad (5)$$

となる。つまり、通常の線形関係

$$J = \sigma E \quad (6)$$

を得る。

今、非線形領域への拡張を考える。

$$W(J) = aJ^2 - bJ^4 + cJ^6 \quad (7)$$

ここで、 $a, b, c$ はある正のパラメーター。非線形性を表すために、6次の項まで加えた。これにより、電場のクロスオーバー的な振る舞いを記述できる。

## 2.2 オーダーパラメーターの導入

さて、散逸関数にオーダーパラメーター $\phi$ への依存性を導入することで、相転移を記述できるように拡張しよう。ランダウ理論のアナロジーから、拡張した散逸をオーダーパラメーターについて最小化することにより、定常状態が決まると仮定する。つまり、

$$\frac{\partial W(\phi, J, T)}{\partial \phi} = 0 \quad (8)$$

の解、 $\bar{\phi}(J, T)$ が、与えられた $J, T$ でのオーダーパラメーターの値である。さらに、これを拡張した散逸に代入したもの $W(\bar{\phi}(J, T), J, T)$ が、 $J, T$ での散逸で、

$$\frac{\partial W(\bar{\phi}(J, T), J, T)}{\partial J} = E(J, T) \quad (9)$$

と電場の母関数になるとする。

さて、拡張した散逸の具体的な関数形を考えよう。まず、オーダーパラメーターとカップルし特異性を生む部分と、スムーズな部分に分けて書くことにする。

$$W(\phi, J, T) = W_{\text{sing}}(\phi, J, T) + W_{\text{reg}}(J, T) \quad (10)$$

$W_{\text{sing}}$ が特異性を生む部分。 $W_{\text{reg}}$ がスムーズな変化を与える部分であり、ここでは(7)式で与えられるものとする。 $W_{\text{sing}}$ は二次相転移点近傍で

$$W_{\text{sing}}(\phi, J, T) = -r(T - T_c)\phi^2 + \frac{u}{4}\phi^4 - d(J - J_c)\phi \quad (11)$$

と書けると仮定する。ここで、 $r, u, d$ は定数。このとき、電場は

$$E(J, T) = E_{\text{reg}}(J, T) - d\bar{\phi}(J, T) \quad (12)$$

となる。ここで $E_{\text{reg}} = \partial W_{\text{reg}} / \partial J$ である。つまり、オーダーパラメーターの特異性は電場にそのまま反映される。

今、 $W_{\text{sing}}$  は  $T > T_c$  で、図 2 のように二重井戸型であり、 $J$  が  $J_c$  より大きくなると、最小値が左の井戸の底から右に飛ぶことになる。つまり、 $J = J_c$  で、一次相転移を起こす。また、 $T < T_c$  では、一重井戸型になるので  $J$  を変化させても、最小値はジャンプせずスムーズに変化する。つまり、クロスオーバーである。一次相転移とクロスオーバーが定性的に記述できることがわかる。

次に、スケール則についてみる。 $T = T_c$  に固定して臨界点に近づくと、(11) 式の最小化から

$$\bar{\phi}(J, T_c) \sim (J - J_c)^{1/3}, \quad (13)$$

$$\sigma - \sigma_c \sim (J - J_c)^{1/3} \quad (14)$$

を得る。さらに、 $J = J_c$  に固定して、近づくと

$$\bar{\phi}(J_c, T) \sim (T - T_c)^{1/2}, \quad (15)$$

$$\sigma - \sigma_c \sim (T - T_c)^{1/2} \quad (16)$$

を得る。式 (1)、(2) のスケール則を再現できていることがわかる。

## 2.3 まとめ

本研究では、定常電流が流れる非平衡定常系での新奇な相転移を理解するための第一歩として、平衡相転移のランダウ理論の拡張を議論した。その結果、拡張した散逸の最小化により、一次相転移、クロスオーバーの定性的振る舞い、および、スケール則が記述できることがわかった。また、この相転移を記述するためには、変数として、電流  $J$ 、電場  $E$ 、温度  $T$  のほかにオーダーパラメータが必要であることが示唆された。さらに、そのオーダーパラメータは臨界点近傍で、式 (13)、(15) のように振る舞うであろうことが分かった。

しかし、この現象論には記述できない点の一つだけある。図 1 をみると、 $J = J_c, T = T_c$  で、電場の傾きは左から近づくと  $-\infty$  となるが、右から近づくと正の有限の値となっている。しかし、(11) 式の最小化では、電場の傾きは、どちらから近づいても  $-\infty$  となり記述できない。この傾きが、臨界点に近づく方向により違うという現象は、平衡相転移の場合と大きくことなる点である。

今後の展望としては、「記述できない点がなぜ現れるのか?」、「オーダーパラメータはどのような物理量に対応するのか?」、この現象論の統計力学的な基礎付け、などがあげられる。

## 参考文献

- [1] S. Nakamura, Phys. Rev. Lett. **109**, 120602 (2012) [arXiv:1204.1971 [hep-th]].
- [2] E. Scholl, *Nonlinear Spatio-Temporal Dynamics and Chaos in Semiconductors* (Cambridge University Press, Cambridge 2001).
- [3] Y. Taguchi, T. Matsumoto and Y. Tokura, Phys. Rev. B **62**, 7015 (2000).
- [4] S. Nakamura, Prog. Theor. Phys. **124**, 1105 (2010) [arXiv:1006.4105 [hep-th]].
- [5] P. A. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principle of condensed matter physics*, (Cambridge University Press, 1995) .

# AdS/CFT 対応における定常粘性流

小川 軌明<sup>1</sup>

韓国高等科学院 (KIAS)

外力の作用により速度勾配が定常に保たれた流体系は、時観的に不変でありながらエネルギー・運動量の散逸が存在する非平衡定常系である。本研究ではそのような系に対して、強結合領域で AdS/CFT 対応に基づく重力双対の構成と、それに基づく散逸の計算を試みた。その結果、無質量クォーク流体の場合、エネルギーおよび運動量の散逸に荷電カレント勾配の 2 乗から始まる粘性項が現れることを見出した。

## 1 セットアップ

ゲージ対称性  $SU(N_c)$  を持つ  $\mathcal{N} = 4$  Yang-Mills 理論に  $\mathcal{N} = 2$  の超対称性を持つ  $N_f$  組のクォーク (ハイパー多重項) が結合した理論を考える。ここで前者 (グルーオン・セクタ) は一定温度のプラズマ状態にあり、後者のクォーク流体が外力を受けて流速勾配を持っているとする。ここで  $N_c \gg N_f$  であれば前者の熱容量は後者に比べてはるかに大きく、後者の振る舞いに注目すれば前者は熱浴の役割を果たす。本稿では以下、この非平衡定常系に対して AdS/CFT 対応による重力双対を構成し、その散逸を計算する。

## 2 重力双対

この理論には重力側で、表 1 のような D3-D7 配位が対応することが良く知られている [1]。ゲージ理論側の  $N_c, N_f$  は D3 および D7 の枚数にそれぞれ対応し、 $N_c \gg N_f$  で D7 は D3 のつくる背景時空中のプローブとして扱ってよい。すなわち、このとき背景時空中は熱浴温度に対応した  $AdS_5$ -Schwarzschild ブラックホール時空

$$ds^2 = -\frac{(1 - (z/z_H)^4)^2}{z^2(1 + (z/z_H)^4)} dt^2 + \frac{dz^2}{z^2} + \frac{1 + (z/z_H)^4}{z^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + d\Omega_5^2 \quad (1)$$

であり、その上を運動するプローブ D7 プレーンの DBI 作用

$$S_{DBI}^{D7} = -N_f T_{D7} \int d^8 \xi \sqrt{-\det(\tilde{g} + 2\pi\alpha' F)} \quad (2)$$

を考えれば良い。ここで  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  は D7 プレーン上の誘導計量、 $F_{\mu\nu}$  は D7 プレーン上の U(1) ゲージ場  $A_\mu$  の強さである。また D7 プレーンの埋め込み形状  $\theta(z)$  の遠方 ( $z \rightarrow 0$ ) での振る舞いがクォーク質量に対応する ( $\theta(z) \sim m_q z + \mathcal{O}(z^2)$ ) が、特にクォーク質量が 0 の場合には  $\theta(z) \equiv 0$  となる。簡単のため、以下では専らこの場合を扱う。

また、クォーク・セクタのエネルギー運動量テンソルおよび散逸は、重力側では D7 上でゲージ場  $A_\mu$  が作るエネルギー運動量テンソルから求められる [2]。特に散逸は、重力側ではエネルギーや運動量のホライズンへの流入と捉えることができ、エネルギー散逸は  $T_0^z{}^{(D7)}$ 、 $x_1$  方向の運動量散逸は  $T_1^z{}^{(D7)}$  となる。非平衡定常系ではこれらは外力の仕事および力積と釣り合う必要がある (エネルギーや運動量の流入と流出が等しい)。従って外力の大きさ  $F$  およびその仕事率  $W$  は

$$F = T_1^z{}^{(D7)}, \quad W = -T_0^z{}^{(D7)}, \quad (3)$$

と表されることがわかる。

<sup>1</sup>e-mail address: noriaki@kias.re.kr

	$t$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$r$	$\theta$	$\phi$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
D3	○	○	○	○						
D7	○	○	○	○	○	$\theta(r)$		○	○	○

表 1: D3-D7 配位。  $x_4 \sim x_9$  の  $\mathbb{R}^6$  を極座標表示し、  $S^5$  を  $S^2$  上の  $S^3$  ファイバーで表した。  $\theta, \phi$  はそれぞれ  $S^2$  の緯度・経度座標、  $\sigma_1 \sim \sigma_3$  は  $S^3$  の座標を表す。

### 3 解の構成

ここで速度勾配に代え、定常なクォークカレント勾配のある配位を考える<sup>2</sup>。具体的には

$$J^0 = J_{(0)}^0, \quad J^1 = J_{(0)}^1 + x_2 J_{(1)}^1 + \mathcal{O}(x_2^2), \quad J^2 = J^3 = 0, \quad (4)$$

とし、  $x_2$  の領域および勾配  $J_{(1)}^1$  は小さいとして、これらでの展開を考える<sup>3</sup>。すると D7 上のゲージ場  $A_\mu$  は関数  $a_0^{(0)}(z)$ ,  $a_1^{(0)}(z)$ ,  $a_1^{(1)}(z)$  を用いて

$$A_0(z) = \mu + Ex + a_0^{(0)}(z) = \mu + Ex + \frac{J_{(0)}^0}{2\pi^2 N_f T_{D7} \alpha'^2} z^2 + \mathcal{O}(z^3), \quad (5)$$

$$A_1(z) = a_1^{(0)}(z) + x_2 a_1^{(1)}(z) = \frac{J_{(0)}^1 + x_2 J_{(1)}^1}{2\pi^2 N_f T_{D7} \alpha'^2} + \mathcal{O}(z^3), \quad (6)$$

と表すことができる。最右辺は無遠 (AdS 境界)  $z \rightarrow 0$  における漸近形である。またここで  $x_1$  方向の一様電場  $E$  を導入した。

この式を作用 (2) に代入すれば、具体的に運動方程式を解くことができる。またそれを用いて  $T_0^{z(D7)}$  および  $T_1^{z(D7)}$  を求めることができ、最終的に外力およびその仕事率は

$$F = EJ_{(0)}^0 + \frac{E^3 (J_{(0)}^0)^3}{2^{11} (N_f T_{D7})^3 (J_{(0)}^1)^2} (J_{(1)}^1)^2 + \mathcal{O}\left((J_{(1)}^1)^3\right), \quad (7)$$

$$W = E \left( J_{(0)}^1 + x_2 J_{(1)}^1 \right) + \frac{E^3 (J_{(0)}^0)^2}{2^{11} (N_f T_{D7})^3 J_{(0)}^1} (J_{(1)}^1)^2 + \mathcal{O}\left((J_{(1)}^1)^3\right), \quad (8)$$

と求められる。これらのうち各々右辺第 1 項は抵抗によるジュール熱を表しており、勾配  $J_{(1)}^1$  に依存する第 2 項が粘性の寄与と考えられる。またここで  $J_{(0)}^0$  および  $J_{(1)}^1$  は  $E$  の関数として求められる [1] ことにも注意されたい。

### 4 議論

上記結果は、粘性応力らしきものがカレント勾配の 2 次から始まるという一見して奇妙なものである。AdS/CFT を用いた通常の線形応答理論による計算で、この系のクォーク・セクタの擦り粘性係数は 0 でないことがわかっている [3]。その結果との整合性を保つためにも、流速勾配とカレント勾配の関係を整理すること、用いている近似の妥当性を検証する<sup>4</sup>ことなどが少なくとも必要である。それらが解決されれば、数値解析などにより非線形領域を調べることも可能になると考えられる。

<sup>2</sup>非相対論的な場合にはこれらは単なる比例関係であり問題はない。ただ以下の計算は  $m_q = 0$  の場合であり、クォーク対生成が容易に起こるために一般に両者には大きな違いが生じている。ポスターセッションにて中村真氏にご指摘頂いた。

<sup>3</sup>高次の効果を取り入れるには偏微分方程式を解く必要があり、解析的に扱うことには困難があると予想される。ただ、数値的な取扱いは可能であろう。

<sup>4</sup>本稿で考えた摂動項は、重力側で  $z$  の領域によっては必ずしも小さいと見なすことができない可能性がある。ポスターセッションにて高柳匡氏にご指摘頂いた。

## 参考文献

- [1] A. Karch and A. O'Bannon, JHEP **0709**, 024 (2007) [arXiv:0705.3870 [hep-th]].
- [2] A. Karch, A. O'Bannon and E. Thompson, JHEP **0904**, 021 (2009) [arXiv:0812.3629 [hep-th]].
- [3] D. Mateos, R. C. Myers and R. M. Thomson, Phys. Rev. Lett. **98**, 101601 (2007) [hep-th/0610184].

# 冷却原子系を用いた量子シミュレーション： 格子場の理論に対する新奇シミュレーション技術の現状と未来

一瀬郁夫

名古屋工業大学大学院工学研究科

現在、冷却原子系は実験・理論ともに精力的に研究され急速に進歩している物理学分野のひとつである。特にその中で冷却原子系にレーザーを当て、光格子を構成し、そこに原子を自在にトラップさせる技術が開発された。この技術を用いて、現存する計算機シミュレーション（古典シミュレーション）では解明が難しかった量子系、有限密度 QCD や強相関電子系などの研究を行うことが提案され、量子シミュレーションと呼ばれている。このレビュー講演では、その現状を概観し、特に興味深いテーマについて詳細に紹介する。その後、今後の展開を議論する。本テーマについてのレビュー講演は未だ多く為されていないので、広い意味での素粒子論研究者を聴衆と考えて講演の構成を行った。

## 1 Introduction

まず、量子シミュレーションについて簡単に説明しておこう。この考えは、量子コンピュータと同時代に、Feynman によって提唱されたことになっている。いつの時代にも物理的に興味のある量子系は存在し、なお且つその幾つかは解析的にその構造を解明することが難しく（だから面白い）、またその時代の計算機技術では信頼する解析が出来ないという状況が現れる。現在の例としては、有限密度量子色力学 (QCD) や高温超電導を代表とする強相関電子系がその範疇である。Einstein の言葉を借りると「問題はそれが生まれた枠内では解決することが出来ない。」この「名言」が意味するように、上記のような問題の解決には、別の枠組みの出現が必要であると考えてるのが自然であろう。

量子シミュレーションとは、興味のある量子系に対して疑似的な量子系を人工的に構成し、その物理的性質を調べ、元の量子系について新しい知見を得ることである [1]。この疑似系は十分に制御可能でなくてはならない。また、汎用性も要求されるであろう。疑似系を用いた実験では、系のパラメータは自在にコントロール出来、また物理現象を実際に時間を追って観測出来ることが望ましい。

ここで、素粒子物理学と物性物理学における「理論」およびシミュレーションの意味合いの違いについて注意しておく。素粒子論では QCD, QED に代表されるように自然を統括する理論はシンプルであり、基本的にその理論を「解く [2]」ことが目標とされる。この「解く」目標に量子シミュレーションは向かうこととなる。一方物性物理学においては、高温超電導現象に代表されるように、発見された物理現象の本質的な起源は明らかではなく、理論モデルはそれぞれの研究者の好みで提唱される。理論モデルは物質のある側面のみを記述していると考えてべきで、量子シミュレーションはどのモデルが本質を捉えているかというように、モデルの識別に使われることになるであろう。

現在、この量子シミュレーションを実現する量子系として、希薄原子系が注目を集めている。この系は磁場や電場でトラップされた  $10^6 \sim 10^7$  個からなる原子集団であり、その次元や粒子間相互作用を自在にコントロール可能な点がその他の系と大きく異なっている。更に近年この原子系にレーザーを当て、人為的に空間格子を構築し、その格子点に原子をトラップすることが可能となった。これを光格子と呼ぶ。これにより、格子場の理論と密接に関連した量子系が存在することとなった。

ここで原子と素粒子との関係について説明しておこう。原子は内部自由度を持つ。この事実を積極的に使い、相対論的場の量子論の量子シミュレーターとして冷却原子系を用いることが可能となる。例えば  $a$  および  $b$  という 2 つの原子があり、その励起状態をそれぞれ  $a^*$ ,  $b^*$  としよう。散乱により  $a + b \rightarrow a^* + b^*$  となる過程を考える。ここで  $a^*$ ,  $b^*$  はその磁氣的、電氣的性質が  $a, b$  と異なるため、

別の粒子に変化したと見なすことが出来、実際  $a, a^*$  を別の光格子にトラップすることが可能である。そのトラップポテンシャルの形状が異なるために、2つの粒子は異なる質量を持つことが出来る。素粒子論的に見ると、上記の過程は2体粒子の散乱により、別の粒子が生成されたことになる。この例のように、原子系では原子そのものが消滅・生成されることはないが、その励起状態を上手く使うことにより、素粒子間の相互作用を疑似的に表現することが出来る。

この講演においては、光格子上の冷却原子系が興味ある量子系を疑似的に表す例を3つほど挙げ、その基本的な性質を説明することとする。

## 2 SU(N) 反強磁性スピンモデルと $CP^{N-1}$ シグマモデル：

### 1/N-展開法の信頼性の実験的検証

このセクションではまず強相関物性系の典型である反強磁性量子スピン系についての量子シミュレーションを紹介しよう。またこの量子系は場の量子論の興味深いモデルである  $CP^{N-1}$  シグマモデルと密接に関連している。

電子のスピンは言うまでもなく  $1/2$  であり、格子サイト上の強い斥力下では、電子数と格子数が同じときにはスピンの自由度のみが生き残り、系は反強磁性スピンモデルで記述される。これを Heisenberg モデルで表すとその Hamiltonian は、

$$H_{\text{SU}(2)} = J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j, \quad (1)$$

である。ここで  $\hat{\mathbf{S}}_i$  は2次元正方格子のサイト  $i$  上のスピン演算子である。このスピン演算子を粒子の生成・消滅演算子で記述することを考えよう。スピン  $\uparrow, \downarrow$  に対応して2種類のボソン演算子  $\hat{z}_{i,1}, \hat{z}_{i,2}$  を導入すると、スピン演算子は  $\hat{\mathbf{S}}_i = \frac{1}{2} \hat{z}_i^\dagger \boldsymbol{\sigma} \hat{z}_i$  と表されるがスピンの大きさが  $1/2$  なので、ボソンの Hilbert 空間に  $\sum_a \hat{z}_{i,a}^\dagger \hat{z}_{i,a} |\text{Phys}\rangle = |\text{Phys}\rangle$  と制限を付ける。この表現は Schwinger ボソン表現として知られるが、その経路積分表示に対応する変数  $\sum_a |z_{i,a}|^2 = 1$  は  $CP^1$  変数 (Complex Projective) と呼ばれる。スピンの  $SU(2)$  対称性は、この  $CP^1$  変数の  $SU(2)$ -unitary 変換に対する対称性に他ならない。

ここでスピンの大きさが大なる系を考えよう。単純に考えると、スピンの大きくなれば量子揺らぎは小さくなり、古典スピンに近づくこと期待される。電子のスピンは  $1/2$  と決まっているが、原子では例えば  $^{132}\text{Cs}$ ,  $^9\text{Be}$ ,  $^{135}\text{Ba}$  などがスピン  $3/2$  を持ち、これらの原子は光格子にトラップされることが知られている。本来これらの反強磁性系も対称性としてスピン  $SU(2)$  を持つが、on-site の原子間相互作用を調節することにより、その対称性を最大の  $SU(4)$  にまで、高めることが可能であることが示される [3, 4]。原子はスピン  $3/2$  を持つので、その  $z$ -成分は  $(3/2, 1/2, -1/2, -3/2)$  であり、 $SU(4)$  対称性はこの4成分を混ぜる unitary 変換に他ならない。同様にスピン  $\ell/2$  ( $\ell=\text{odd}$ ) まで拡張すると、その系は  $SU(2\ell+1)$  対称性を持つことになる。そしてこの  $SU(2\ell+1)$  Heisenberg model は上記の  $CP^{N-1}$  変数  $z_{i,a}$  ( $a = 1, 2, \dots, N$ ) を用いて表される。ただしここで  $N = 2\ell + 1$  である。

拡張された  $SU(N)$  Heisenberg モデルの低エネルギー励起は、以下の連続時空間で定義された  $CP^{N-1}$  シグマモデルで表されることが知られている、

$$Z = \int D\bar{z} D z D\sigma \exp \left( - \frac{N}{2g} \int d^3 r [\bar{D}_\mu \bar{z} D_\mu z + \sigma(|z|^2 - 1)] \right), \quad (2)$$

ここで  $D_\mu = \partial_\mu - (\bar{z} \partial_\mu z)$  であり、 $\sigma$  は  $CP^{N-1}$  の物理的状態の拘束条件を架すための multiplier である。また結合定数  $g$  は系の anisotropy  $\lambda = J_x/J_y$  により  $g = (1 + \lambda)/(\sqrt{2\lambda})$  と表される。系が対称

である場合は  $\lambda = 1$  に対応し、 $g$  は小さく系は自発的に対称性を破っているが、anisotropy が大きくなると  $g$  は大きくなり、対称性の破れは回復する。つまり、 $g$  を変化させていくと、量子相転移が起ることになる。場の理論のモデルである式 (2) は、local gauge 変換  $z_x \rightarrow e^{i\alpha_x} z_x$  に対して不変であることに注意しよう。この対称性は元のスピン演算子が  $z_x$  の bilinear で出来ていることから生じている。また、 $A_{x\mu} \equiv i(\bar{z}\partial_\mu z)$  と定義すると、 $A_{x\mu}$  はゲージ場の役割を果たし、自然な形でこの複合ゲージ場を新たな自由度として理論に導入することが可能であることが実際の計算により示すことが出来る。さて、モデル式 (2) の相構造を調べることを考えよう。ここで  $N$  が十分大きな場合を考える。すると結合定数  $g$  の大きさには制限を付けることなく  $1/N$  を展開パラメーターとして、モデルの性質を解析的に求めることが出来る。  $1/N$  展開の leading では、先のゲージ場とのカップリングを無視することが出来、非自明な期待値として  $\langle z_N \rangle$  と  $\langle \sigma \rangle$  を考えればよく、それらの有効ポテンシャルは  $z_a (a \neq N)$  の単純なガウス積分を実行することにより、求めることが出来る。その結果、予想されるように 2 つの相が存在し、それらの内  $\langle z_N \rangle \neq 0, \langle \sigma \rangle = 0$  の相は反強磁性の長距離秩序をもつ相であり、また、 $\langle z_N \rangle = 0, \langle \sigma \rangle \neq 0$  の相はエネルギーギャップを持つ常磁性相である。この 2 つの相間の相転移は 2 次転移であり、 $1/N$  の高次の効果を考えてもその結果は変わらない [5]。

さてここで、連続極限を取る前の有限格子上で定義された格子  $CP^{N-1}$  理論を考えよう [4]。格子上的のモデルに対しては、数値計算的手法のモンテカルロ・シミュレーションが適応できる。  $CP^{N-1}$  拘束についてはその変数を三角関数を用いて正確に表現することが出来る。ただし、あまり大きな  $N$  については変数の数が多くなるので計算に長い時間を取り、実行は難しくなる。実際の計算結果を格子  $CP^2$  モデルについて示すと、図 2 に見るように、比熱がシステムサイズ依存性を示し、その依存性が有限サイズスケールで綺麗にフィット出来ることから転移が 2 次であると結論できる。格子  $CP^1$  モデルについても、同様な結果が得られている。

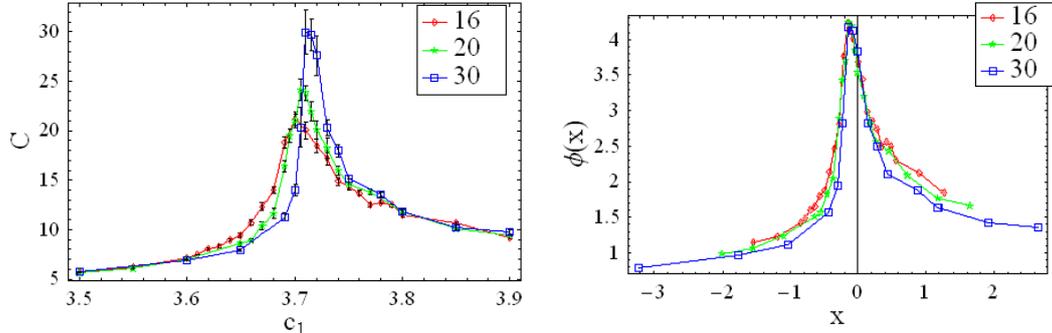


図 1: 格子  $CP^2$  モデルの比熱システムサイズ依存性と有限サイズスケールリングの結果。2 次の相転移の存在を強く示している。  $C_1 \equiv N/g$ 。

さて次に注目している  $N = 4$  の結果を、図 2 に示そう。内部エネルギーは  $C_1 \sim 4.5$  付近で飛びを示し、さらに比熱は非常に大きな値を持っている。この振る舞いは転移が 1 次であることを強く示している。この考察を確かめるために状態密度のエネルギー分布  $N(E)$  を計算した結果が、図 3 である。  $C_1 = 4.498$  で  $N(E)$  はダブルピークを示し、内部エネルギーが異なる 2 つの状態が共存していることを示している。これらの計算結果より、  $N = 4$  のモデルでは 1 次転移と考えて良さそうであるが、いづれにしても計算は有限系で行われており、確定した結果とは言い切れない。

以上の結果は連続理論の  $1/N$ -展開の結果と、格子上的の理論の数値計算の結果が矛盾していることを示している。可能な解釈としては  $1/N$ -展開の収束半径は有限で、  $1/4$  より小さいとなるが、最近の研究では  $N \geq 4$  の全てにおいて 1 次転移との結論が得られている [6]。そこで先に述べた極低温原子系での実験が実現すれば、この問題に対する回答が得られると期待される。

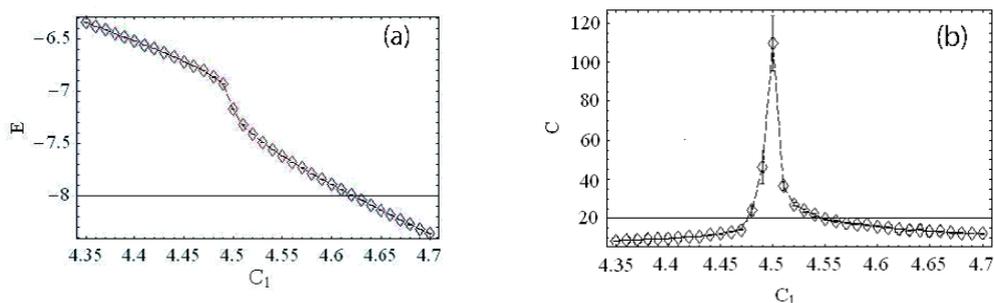


図 2: 格子  $CP^3$  モデルの内部エネルギーと比熱の結果。1 次の相転移の存在を強く示している。  $C_1 \equiv N/g$ 。

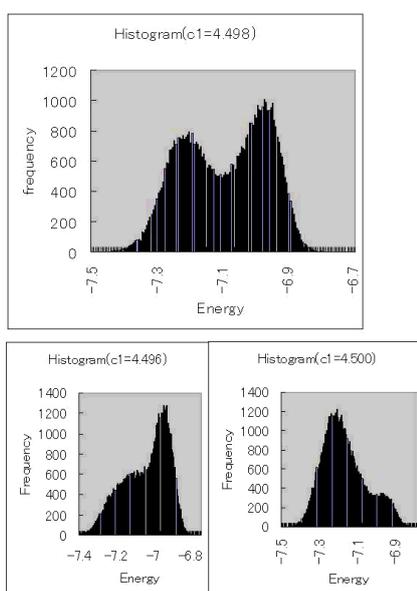


図 3: 格子  $CP^3$  モデルの状態密度のエネルギー分布。1 次の相転移の存在を強く示している。  $C_1 \equiv N/g$ 。

### 3 Schwinger model (cQED<sub>2</sub>)

近年、格子ゲージ理論の量子シミュレーションを実現するために種々の提案がなされている。基本的に空間格子は先に説明した光学格子により実現し、時間は連続の実時間である。つまり Hamiltonian 形式となる。クォーク等の fermion は格子サイトに配置され、ゲージ場の役割を担う boson はリンク上に置かれる。この実験設定は現時点で可能と考えてよい。問題となるのは局所ゲージ対称性の出現である。

現時点で格子ゲージ理論の定式化には2つの方法がある。この章ではそのうちの一つを紹介し、もうひとつは次の章で説明しよう。モデルとしては最も簡単で、また詳しく調べられている2次元 compact QED (Schwinger model と呼ばれる) を考える。

一般的に格子サイト上に置かれた物質場  $\psi_n$  はゲージ変換により  $\psi_n \rightarrow V_n \psi_n$  と変換される。ここで  $V_n$  はゲージ群の元である。一方、ゲージ場  $U_{n,k}$  は  $U_{n,k} \rightarrow V_n U_{n,k} V_{n+k}^\dagger$  と変換される。先に述べたようにモデルは連続時間形式で定式化されるので、 $U_{n,k}$  に共役な演算子として電場  $E_{n,k}$  が導入され、交

換関係

$$[E_{n,k}, U_{m,\ell}] = \delta_{n,m} \delta_{k,\ell} \quad (3)$$

が満たされる。原子系においてゲージ理論を実現するためには、この交換関係 (3) を満たすことを考えなくてはならないことになる。そこで、quantum link model (QLM) と呼ばれる以下の方法を紹介しよう。

各リンク上に2つの原子（より正確には、同じ原子の2つの異なる状態） $a$  と  $b$  を置き、それぞれの粒子数演算子を  $N_a, N_b$  とする。リンク上の粒子数の和  $N_a + N_b$  は一定で  $2\ell$  とする。角運動量演算子を作る要領で以下の昇降演算子  $L_+, L_-$  および  $z$  成分演算子を定義する。

$$L_+ = a^\dagger b, \quad L_- = b^\dagger a, \quad L_z = \frac{1}{2}(N_a - N_b). \quad (4)$$

上の演算子 (4) で定義される角運動量の大きさは  $\ell$  であることが容易に確かめられる。さてここで、 $L_+ \leftrightarrow U, L_- \leftrightarrow U^\dagger, L_z \leftrightarrow E$  と対応させると、ゲージ理論の交換関係 (3) が再現されることに注目しよう。この事実をもちいてゲージ理論を原子で表現する提案を QLM と呼ぶ。各リンク上に2つの原子を準備するので、pure gauge ではないことに注意する。このゲージ角運動量対応を用いて容易に Kogut-Susskind ゲージ理論 Hamiltonian が定式化出来る。更に詳しい検討は fermion についての説明の後に行う。

格子 fermion については staggerd fermion について説明を行う。Wilson fermion についても提案がなされていることだけ、記しておく。格子点を even site, odd site に分け、それぞれ  $c$  および  $d$  の fermion を置き、 $c_n (n \in \text{even}), d_n (n \in \text{odd})$  とする。（ここで  $c, d$  fermion は同じフェルミ原子の異なる内部状態であることを注意しておく。）質量項を  $H_M = M \sum_n (-1)^n \psi_n^\dagger \psi_n$ 、ここで  $\psi_n = c_n (d_n), n = \text{even} (n = \text{odd})$  である。実験において Dirac sea を実現するには、odd サイト上の  $d$  原子のみを詰めた状態から始めればよいことが分かる。また、有限密度系を実現するには更に even サイト上の  $c$  原子を必要なだけ置けばよいことになる。ゲージ場とのカップリングは以上のことより  $H_P = \lambda \sum_n (\psi_n^\dagger L_{+,n} \psi_{n+1} + \text{h.c.})$  となる。ここで空間1次元の場合について書いたが、高次元への拡張は明らかである。

以上説明した方法で、光学格子上に QED を再現することが出来る。非可換ゲージ理論を作りたければ、複数のボソンをリンク上に準備すればよい。局所ゲージ不変性は  $H_P$  で与えられる  $a, b$  boson と  $c, d$  fermion の相互作用において全角運動量が保存するので、それぞれの  $z$ -成分を電荷と読み替えれば実現されていることが分かる [7]。以下に問題点を述べておく。

1. 角運動量の Hilbert 空間は有限次元である。一方、ゲージ場の空間は無次元である。
2.  $L_+, L_-$  は unitary 演算子ではない。ただし  $\ell \rightarrow \infty$  では unitary となる。
3. QLM と格子ゲージ理論の相構造の対応を古典シミュレーションで明確にしておく必要がある。
4. この compact QED は  $M$  や密度を変化させると相転移が起ることが期待される。実際に実験でその転移はどのように観測されるのか？

## 4 格子ゲージ理論: Gauge-Higgs model

先の章ではゲージ場を表すのに角運動量の演算子を用いた。もうひとつの可能性としてリンク上に作られた BEC を用いる方法がある [8, 9]。図4に正方格子のリンク上に作られた BEC の図を示す。そこに示したように、4種類の異なる内部自由度をもつ BEC を  $\Psi_k (k = 1, \dots, 4)$  で表すと系の Hamiltonian は（連続空間表記で）

$$H = \Psi^\dagger(x) \left[ \delta_{k\ell} \left( -\frac{\nabla^2}{2m} + V_k(x) \right) + \Omega_{k\ell} \right] \Psi_\ell + g_{k\ell} \Psi_k^\dagger(x) \Psi_\ell^\dagger(x) \Psi_\ell(x) \Psi_k(x), \quad (5)$$

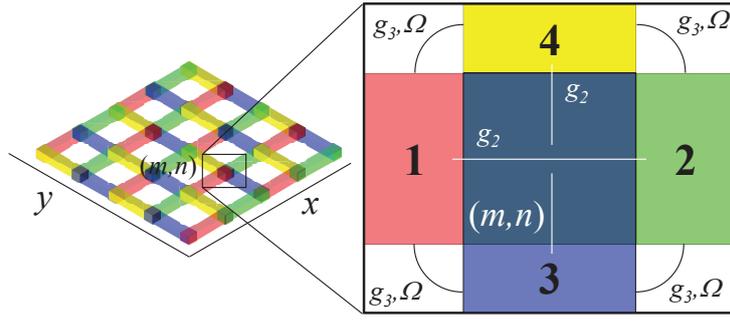


図 4: 格子リンク上に置かれた BEC とその間の相互作用。1, ..., 4 は BEC の種類を表す。

で与えられる。ここで  $V_k(x)$  は原子  $k$  のポテンシャル、 $g_{kl}$  は相互作用であり、 $\Omega_{kl}$  はラマン散乱によるラビ振動を表す。それぞれのパラメーターで有限の値を持つ量は図 4 に示してある。また、化学ポテンシャルの項は省略している。

さて、上記の BEC の位相をゲージ場と見なすわけであるが、数学的にその構造を見るために、以下のような変数を導入する。

$$\Psi_{ri} = \sqrt{\hat{\rho}_{ri}} e^{i\hat{\theta}_{ri}}, \quad \hat{\rho}_{ri} = \rho_0 + \hat{\eta}_{ri}. \quad (6)$$

ここで  $\rho_0$  は平均密度（化学ポテンシャルで制御される）であり、演算子  $\{\hat{\eta}_{ri}, \hat{\theta}_{ri}\}$  は互いに共役な演算子である。従って、 $\hat{\theta}_{ri}$  を格子リンク  $(r, i)$  上のゲージ場と見なしたときに、 $\hat{\eta}_{ri}$  は電場と理解される。この変数を用いて Hamiltonian (5) を書きなおす。そのときに式 (5) の相互作用項の  $g_{kl}$  を調節して、密度（電場） $\hat{\eta}_{ri}$  がガウス則を近似的に満たすようにする。

$$\begin{aligned} \hat{H}_a &= \frac{1}{2\gamma^2} \sum_r \left( \sum_i \nabla_i \hat{\eta}_{ri} \right)^2 + V_0 \sum_{r,i} \hat{\eta}_{ri}^2 + \hat{H}_L(\{\hat{\theta}_{ri}\}), \\ \hat{H}_L &= 2g'\rho_0 \sum_{r,i < j} \left( \cos(\hat{\theta}_{ri} - \hat{\theta}_{rj}) + \dots \right). \end{aligned} \quad (7)$$

ここで  $\gamma^2 \propto (g_{kl})^{-1}$  であり、また  $V_0$  はポテンシャルからくるパラメーターである。

Hamiltonian (7) の第 1 項において、 $\gamma \rightarrow 0$  の極限を考えると、明らかにガウス則を満たす状態  $(\sum_i \nabla_i \hat{\eta}_{ri})|_{\text{Phys}} = 0$  のみが物理的な有限エネルギー状態として現れ、その subspace での有効理論を考えれば良いことになる。これはこの極限における有効理論では局所ゲージ対称性が出現することを意味する。しかしながら、この極限は fine tuning であり、原子系の実験では厳密にこの極限を実現することは難しい。そこで、この条件を緩めたときにどのような理論が出現するかを調べることにする [9]。詳しく調べるために、以下では経路積分表示に移ることにする。

経路積分表示で分配関数  $Z$  は

$$\begin{aligned} Z_a &= \int \prod_{x,i} [d\eta_{xi} d\theta_{xi}] \exp \left[ \sum_{x,i} \left( -i\eta_{xi} \nabla_4 \theta_{xi} - \Delta\tau V_0 \eta_{xi}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta\tau}{2\gamma^2} \sum_x \left( \sum_i \nabla_i \eta_{xi} \right)^2 - \Delta\tau \sum_{x_4} H_L(\{\theta_{xi}\}) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

となる。 $\Delta\tau$  は時間方向の格子間隔である。ここで問題となる因子

$$\tilde{G} \equiv \prod_x \exp[(-\Delta\tau/2\gamma^2) Q_x^2], \quad Q_x \equiv -\sum_i \nabla_i \eta_{xi}$$

に注目すると、

$$\tilde{G} \simeq \int_0^{2\pi} \prod_x \frac{d\theta_{x4}}{2\pi} \exp \left( \frac{\gamma^2}{\Delta\tau} \cos \theta_{x4} - i\theta_{x4} \sum_i \nabla_i \eta_{xi} \right), \quad (9)$$

と、時間方向のリンクに乗ったゲージ場の第4成分  $\theta_{x4}$  を用いて表すことが出来る。この式 (9) を式 (8) に代入し、 $\eta_{xi}$  についてのガウス積分を実行すると、以下の式が導かれる

$$\begin{aligned} Z_a &= \int [dU] \exp(A_a), \quad A_a = A_I + A_P + A_L, \\ A_I &= \sum_{x,\mu} c_{1\mu} \cos \theta_{x\mu}, \quad A_P = \sum_{x,\mu<\nu} c_{2\mu\nu} \cos \theta_{x\mu\nu}, \\ A_L &= \sum_{x,\mu<\nu} c_{3\mu\nu} \left[ \cos(\theta_{x\mu} - \theta_{x\nu}) + \cos(\theta_{x\mu} + \theta_{x+\mu,\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\theta_{x+\mu,\nu} - \theta_{x+\nu,\mu}) + \cos(\theta_{x\nu} + \theta_{x+\nu,\mu}) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $U_{x\mu} = e^{i\theta_{x\mu}}$ ,  $c_{14} = \gamma^2/\Delta\tau$ ,  $c_{1i} = 0$ ,  $c_{2i4} \simeq (2\Delta\tau V_0)^{-1}$  であるが、それらの項を含み上記モデルを冷却原子系で実現するための提案が多くなされている。そこでここではモデル (10) について詳しく調べることにする。

モデル (10) は明らかに局所ゲージ不変性を破る。しかしここで、サイト上に新たにボソン場  $\phi_x = e^{i\varphi_x}$  を導入することにより、局所ゲージ不変な形にモデル (10) を書き換えることができる。その結果

$$\begin{aligned} Z_{\text{GH}} &= \int [d\phi][dU] \exp A_{\text{GH}}(\{U_{x\mu}\}, \{\phi_x\}), \\ A_{\text{GH}} &= A'_I + A_P + A'_L, \quad \int [d\phi] \equiv \prod_x \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_x}{2\pi}, \\ A'_I &= \sum_{x,\mu} c_{1\mu} \cos(\varphi_x + \theta_{x\mu} - \varphi_{x+\mu}), \\ A'_L &= \sum_{x,\mu<\nu} c_{3\mu\nu} \left[ \cos(\varphi_{x+\nu} + \theta_{x\mu} - \theta_{x\nu} - \varphi_{x+\mu}) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\varphi_x + \theta_{x\mu} + \theta_{x+\mu,\nu} - \varphi_{x+\mu+\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\varphi_{x+\mu} + \theta_{x+\mu,\nu} - \theta_{x+\nu,\mu} + \varphi_{x+\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\varphi_x + \theta_{x\nu} + \theta_{x+\nu,\mu} - \varphi_{x+\nu+\mu}) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

はモデル (10) と等価である。実際、以下のゲージ不変性を用いて、 $Z_{\text{GH}} = Z_a$  を示すことが出来る。

$$\begin{aligned} \theta_{x\mu} &\rightarrow \theta'_{x\mu} = \theta_{x\mu} + \Lambda_{x+\mu} - \Lambda_x, \\ \phi_x &\equiv e^{i\varphi_x} \rightarrow \phi'_x = e^{i\Lambda_x} \phi_x \quad (\varphi_x \rightarrow \varphi'_x = \varphi_x + \Lambda_x). \end{aligned} \quad (12)$$

以上の変換性より、 $\phi_x$  は Higgs 場と理解することが出来る。

種々の gauge-Higgs モデル (11) について、モンテ-カルロ・シミュレーションにより調べた相構造を以下に示そう。モデルのパラメーターの定義は表 13 に与える。

Model	$c_{14}$	$c_{1i}$	$c_{2i4}$	$c_{2ij}$	$c_{3i4}$	$c_{3ij}$
IP	$c_1$	$c_1$	$c_2$	$c_2$	0	0
ItPtLs	$c_1$	0	$c_2$	0	0	$c_3$
ItPLs	$c_1$	0	$c_2$	$c_2$	0	$c_3$
PL	0	0	$c_2$	$c_2$	$c_3$	$c_3$

それらのモデルの (3+1) 次元系の相構造を図 5 に示そう。相は Higgs 相、閉じ込め相およびクーロン相からなる。ここで冷却原子系の言葉で各相を理解すると、Higgs 相は BEC 相に対応し、閉じ込め相はモット相、そしてクーロン相は gapless の励起が存在しながら長距離相関が無い相であり、

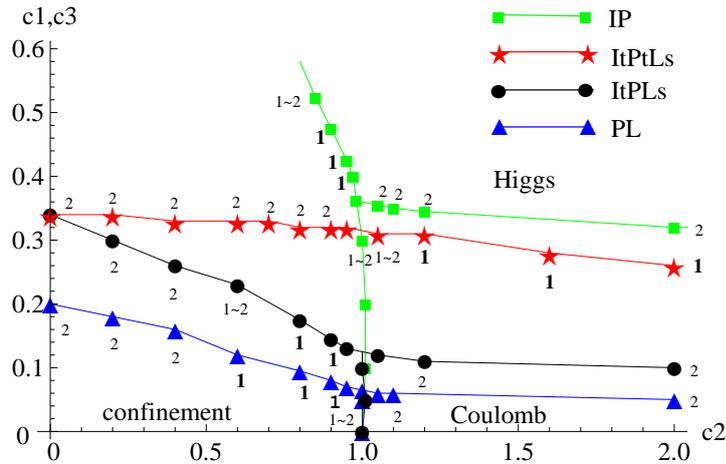


図 5: 表 13 に示したモデルの  $c_2 - c_{1,3}$  平面での相構造。相境界の数字は転移の次数をあらわす。

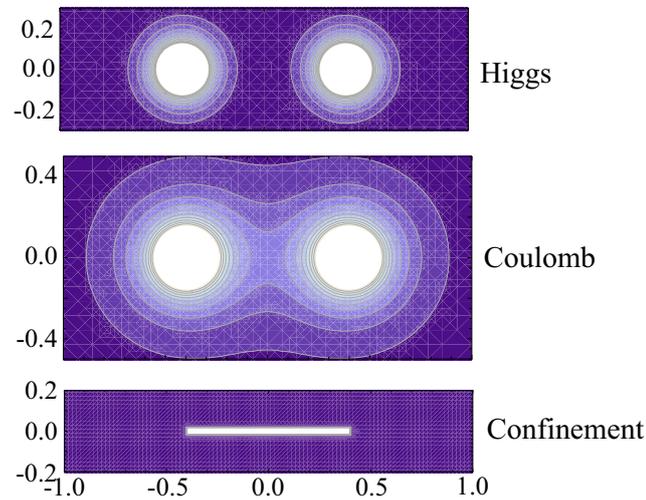


図 6: static source (quark-antiquark) による原子密度の揺らぎの模式図。  $\Delta\rho_r \equiv (\sum_i \eta_{ri}^2/3)^{1/2}$  を示す。

plaquette 項を持つモデル特有の相と言える [10]。この plaquette 項が小さい場合、図 5 に示すように、先の  $\gamma$  の大きさを小さくしていくと、Higgs 相から閉じ込め相への転移が観測されるはずである。

数値計算ではゲージ場の位相に対応する BEC の位相が変数となっているが、実際の冷却原子の実験では、原子密度の空間依存性がまず始めに観測される量であろう。ゲージ理論における static source はポテンシャル  $V_k(x)$  を変形させることにより、比較的容易に冷却原子系に持ち込むことが出来ると予想される。quark-antiquark を static source として系に持ち込んだときの電場=密度揺らぎを図 6 に表しておく。

## 5 まとめと将来の展望

1. この講演では現在提案されている量子シミュレーションの具体例を紹介した。
2. 実験技術の向上により、提案された種々の格子モデルは実現可能となるであろう。
3. その中で、ゲージ理論としては gauge-Higgs モデルが最初に実現されると期待される。

4. local gauge 対称性を実現する新しいアイデアの提唱が待たれる。
5. 実験的には温度をコントロールすることが出来れば、得るところは多い。
6. 時間変化を追いながら相転移現象が観測出来ることが期待される。
7. 有限密度ゲージ理論の実現には符号問題等の大きな問題がないので、近い将来の実現が待望される。

## 参考文献

- [1] 例えば、M. Lewenstein, A. Sanpera, and V. Ahufinger, *Ultracold Atoms in Optical Lattices: Simulating Quantum Many-body Systems* (Oxford University Press, 2012).
- [2] 基礎理論が観測される現象を説明することを確認することも含む。
- [3] Y. Qi and C. Xu, Phys. Rev. B78, 014410(2008).
- [4] K.Kataoka, S. Hattori, and I. Ichinose, Phys. Rev. B83, 17449(2011).
- [5] 例えば、I.Ya. Areeva and S.I. Azakov, Nucl. Phys. B162, 298(1980).
- [6] A. Nahum, J.T. Chalker, P. Serna, M. Ortuno, and A.M. Somoza, Phys. Rev. Lett. 107, 110601(2011); arXiv:1308.0144
- [7] 例えば、E. Zohar, J. Ignacio, and B. Reznik, arXiv:1303.5040 およびそこに引用されている文献.
- [8] E. Zohar and B. Reznik, Phys. Rev. Lett. **107**, 275301 (2011).
- [9] K.Kasamatsu, I. Ichinose, and T. Matsui, Phys. Rev. Lett. 111, 115303(2013); arXiv:1212.4952.
- [10] H. P. Büchler, M. Hermele, S. D. Huber, M. P. A. Fisher, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **95**, 040402 (2005).

発表題目:

一次元量子気体の二重極振動の減衰における量子位相滑り

発表者:

段下一平、京都大学基礎物理学研究所

概要:

近年の光格子中の一次元ボース気体を用いた実験において、閉じ込めポテンシャルを突然ずらすことによって引き起される二重極振動が調べられ、高次元系には見られない顕著な減衰が観測されている[1]。我々はこの振動の顕著な減衰を量子位相滑りによる超流動流の崩壊と関連付けて議論した。振動が減衰する間のエネルギー損失についての定性的な考察とtime-evolving block decimation法による厳密な数値計算から、振動の減衰率が位相滑りの生成率を流速で割った量に比例することを見いだした。この関係式とさらなる数値計算から、実験で観測された振動の減衰の原因が主として量子位相滑りによるものであると主張した。さらに、有限温度において流速を変化させた際に減衰率が普遍的なクロスオーバー的振る舞いを示すことを提案した。この発表の内容は発表者の最近の原著論文[2]に基づく。

[1] M. Cazalilla, R. Citro, T. Giamarchi, E. Orignac, and M. Rigol, *Rev. Mod. Phys.* 83, 1405 (2011).

[2] I. Danshita, *Phys. Rev. Lett.* 111, 025303 (2013).

## 2 重井戸型ポテンシャルに捕捉された冷却原子気体の非平衡初期分布緩和過程に対する非平衡 Thermo Field Dynamics

中村祐介, 桑原幸朗, 山中由也, 早大基幹理工電子光システム

### 1 はじめに

実時間正準場の理論形式である Thermo Field Dynamics (TFD) は、空間の自由度を倍加することにより、熱的な混合状態期待値を倍加された空間における純粋状態の期待値として表現する形式である [1, 2]。我々は超演算子形式 [3] における準粒子描像という概念から非平衡 TFD 形式を導き、非平衡 TFD では仮定であった密度演算子の特別な構造が、より基本的な要請から自然に得られることを示した [4]。この際非摂動ハミルトニアン構造も同時に決定され、非摂動ハミルトニアンに許されるパラメータは時間依存する 2 つの実パラメータのみであることが導かれた。その 2 つのパラメータはそれぞれ粒子分布の時間変化および準粒子エネルギーと解釈される。本研究では、仮定した要請の一部を見直し、非摂動ハミルトニアンに準粒子の寿命と解釈できる第三のパラメータが許されることを示す。さらにこのもとで、2 重井戸型ポテンシャルに捕捉された冷却原子気体系の非平衡緩和過程に対する数値計算を行う。

### 2 超演算子形式から非平衡 Thermo Field Dynamics へ

最初に論文 [4] で導入された超演算子形式の方法を簡単にレビューする。本稿では表記簡単化の為、1 モードの Bose 粒子系の場合のみを記す。Fermi 粒子系、多モードの系への拡張は容易である。

生成消滅演算子  $a, a^\dagger$  の粒子数状態  $\{|m\rangle\}$  で張られる Fock 空間  $\mathcal{H}$  を考える。 $\mathcal{H}$  に作用する線形演算子の集合は Liouville 空間と呼ばれる線形空間  $\bar{\mathcal{H}}$  をなす。 $\bar{\mathcal{H}}$  の要素を  $|A\rangle$  の様に二重ブラケットで表記することにし、その内積を  $\langle\langle A|B\rangle\rangle = \text{Tr}[A^\dagger B]$  と定義する。 $\mathcal{H}$  上の演算子  $A$  を別の演算子  $B$  に変換する超演算  $\hat{O}: A \mapsto B$  は、超演算子形式では  $\hat{O}|A\rangle = |B\rangle$  と表記される。超演算  $\check{a}, \check{a}^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$  をそれぞれ

$$\check{a}: A \mapsto aA, \quad \check{a}^\dagger: A \mapsto a^\dagger A, \quad \tilde{a}: A \mapsto Aa^\dagger, \quad \tilde{a}^\dagger: A \mapsto Aa \quad (1)$$

と定義すると

$$\check{a}|m, n\rangle = \sqrt{m}|m-1, n\rangle, \quad \check{a}^\dagger|m, n\rangle = \sqrt{m+1}|m+1, n\rangle, \quad (2)$$

$$\tilde{a}|m, n\rangle = \sqrt{n}|m, n-1\rangle, \quad \tilde{a}^\dagger|m, n\rangle = \sqrt{n+1}|m, n+1\rangle \quad (3)$$

及び交換関係

$$[\check{a}, \check{a}^\dagger] = 1, \quad [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \quad \text{otherwise} = 0 \quad (4)$$

が成立する。ただし  $|m, n\rangle \equiv ||m\rangle\langle n|$  である。超演算子形式では熱的な期待値は  $\text{Tr}[A\rho] = \langle\langle I|A|\rho\rangle\rangle$  と書くことが出来る。ここで  $\langle\langle I| = \sum_m \langle\langle m, m|$  である。さらに  $|m, n\rangle$  は  $\check{a}, \tilde{a}$  に対する Fock 空間とみなすことも出来る：

$$|m, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n!}} (\check{a}^\dagger)^m (\tilde{a}^\dagger)^n |0, 0\rangle \quad (5)$$

この見方では倍加された Fock 空間  $\{|m, n\rangle\}$  上の純粋状態  $\langle\langle I|, |\rho\rangle\rangle$  の内積によって熱的期待値が記述されている。これが TFD の形式である。

Schrödinger 描像における Liouville-von Neumann 方程式  $i\frac{d}{dt}\rho_S(t) = [H_S, \rho_S(t)]$  で記述される熱的な系を考える。超演算子形式では Liouville-von Neumann 方程式を  $i\frac{d}{dt}|\rho_S(t)\rangle\rangle = \hat{H}_S|\rho_S(t)\rangle\rangle$  と表すことが出来る。ただし  $\hat{H}_S = \check{H}_S - \tilde{H}_S$  である。

次にある非摂動ハミルトニアン  $\hat{H}_u(t)$  を選び、相互作用描像を定義する：

$$i\frac{d}{dt}\hat{U}(t) = \hat{U}(t)\hat{H}_u(t), \quad \check{a}(t) = \hat{U}^{-1}(t)\check{a}_S\hat{U}(t), \quad \tilde{a}(t) = \hat{U}^{-1}(t)\tilde{a}_S\hat{U}(t), \quad (6)$$

Liouville 空間や密度演算子は相互作用描像の  $\{\check{a}, \tilde{a}\}$ -演算子を通して構築されるため、 $\hat{H}_u(t)$  を選び、準粒子描像を明確に定義することが重要である。しかし熱的状況（特に非平衡系）においてその選択は自明ではない。これらは以下の3つ基本的な要請を課すことによって決定することが出来る：(a) 各時刻において準粒子描像が存在する。(b) 未来のマクロな量が現在に影響を及ぼさない、という熱的な因果律が成立する。(c)  $t = \infty$  で熱平衡になる。

要請 (a) より、密度行列がエルミート性、正值性、規格化が任意の時間で保証されていなくてはならない。その為には非摂動ハミルトニアンが

$$\hat{H}_u = \omega \left( \check{a}^\dagger \check{a} - \tilde{a}^\dagger \tilde{a} \right) + i \left\{ \zeta_1 \check{a} \tilde{a} + \zeta_2 \check{a}^\dagger \tilde{a}^\dagger + \zeta_3 \left( \check{a}^\dagger \tilde{a} + \tilde{a}^\dagger \check{a} \right) - \zeta_2 \right\} \quad (7)$$

となっている必要がある。ただし

$$\zeta_1 = \dot{n} + \kappa, \quad \zeta_2 = \dot{n} + \frac{n}{1+n}\kappa, \quad \zeta_3 = -\dot{n} - \frac{1+2n}{2(1+n)}\kappa \quad (8)$$

である。つまり3つの実数パラメータ  $(\dot{n}, \omega, \kappa)$  を含んでいる。このうち  $\dot{n}$  は分布関数の時間微分、 $\omega$  は準粒子エネルギーであることがすぐ分かるが、 $\kappa$  の物理的意味は非自明であった。

ここで以下の伝搬関数を考える：

$$\Delta(t_1, t_2) = -i \langle\langle I | T \left[ \hat{A}_1(t_1) \hat{A}_2(t_2) \right] | \rho \rangle\rangle \quad (9)$$

$$= -i\theta(t_1 - t_2) \langle\langle I | \hat{A}_1(t_1) \hat{A}_2(t_2) | \rho \rangle\rangle - i\theta(t_2 - t_1) \langle\langle I | \hat{A}_2(t_2) \hat{A}_1(t_1) | \rho \rangle\rangle \quad (10)$$

ただし  $\hat{A}$  は  $\check{a}, \check{a}^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$  の何れかである。T積の為、後の時刻の演算子が  $\langle\langle I |$  に掛かることに注意する。従って要請 (b) を守るためには、 $\langle\langle I | \hat{A}(t)$  がマクロな量に依存してはいけない。

先行研究 [4] では  $\omega$  は微視的な量であり、 $\dot{n}$  は巨視的な量であることを前提とした。また  $\kappa$  の物理的な意味は非自明であったが、非摂動ハミルトニアンの虚部に現れることから  $\dot{n}$  と同様、巨視的な量であると解釈した。 $\langle\langle I | \hat{A}(t)$  が  $\kappa$  と  $\dot{n}$  に依存しないためには、 $\kappa = 0$  が必要であることがすぐ分かる。このようにして非摂動ハミルトニアンが  $\omega, \dot{n}$  の2つのパラメータしか持たないと結論付けた。

### 3 非摂動ハミルトニアンの第3のパラメータ

パラメータ  $\kappa$  を

$$\gamma = 2(1+n)\kappa \quad (11)$$

と  $\gamma$  に置き換え、更に式 (7) に熱的 Bogoiubov 変換

$$\xi^\mu = B^{\mu\nu} a^\nu, \quad \bar{\xi}^\mu = \bar{a}^\nu B^{-1,\nu\mu}, \quad B^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+n & -n \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (12)$$

を施す。ここで  $A^\mu = \begin{pmatrix} A & \tilde{A}^\dagger \end{pmatrix}^t$ ,  $\bar{A}^\nu = \begin{pmatrix} A^\dagger & -\tilde{A} \end{pmatrix}$  という熱的2重項表記を用いている。すると式 (7) は

$$\hat{H}_u = (\omega - i\gamma)\xi^\dagger\xi - (\omega + i\gamma)\bar{\xi}^\dagger\bar{\xi} + i\dot{n}\xi^\dagger\bar{\xi}^\dagger \quad (13)$$

となる。相互作用描像の  $a$  演算子に関する Heisenberg 方程式  $i\partial_t a^\mu = [a^\mu, \hat{H}_u]$  と  $\xi$  の定義 (12) より  $i\partial_t \xi^\mu = [\xi^\mu, \hat{H}_u - i\dot{n}\xi^\dagger\bar{\xi}^\dagger]$  であり、これを解くと

$$\xi(t) = \xi e^{\int^t ds [-i\omega(s) - \gamma(s)]}, \quad \xi^\dagger(t) = \xi^\dagger e^{\int^t ds [i\omega(s) + \gamma(s)]} \quad (14)$$

となっている。従って  $\gamma$  は準粒子の寿命の逆数と解釈できる微視的な量である。《 $I|\hat{A}$  は  $\gamma$  には依存していないので、熱的因果律に対する要請 (b) は  $\gamma \neq 0$  を許している。このようにして非摂動ハミルトニアンに第 3 のパラメータ  $\gamma$  が許されるようになった。正しい解釈として、熱的期待値  $\langle\langle I|\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)|\rho\rangle\rangle$  で制限される  $n(t)$  やその時間微分  $\dot{n}(t)$  は巨視的な量であり、 $\omega, \kappa$  のようにその種の制限のない量は微視的な量であると見做せば良い。

式 (13) から分かる通り非摂動ハミルトニアンは非エルミートである。しかしブラ  $\langle\langle I|$  とケット  $|\rho_0\rangle\rangle$  は共役の関係にないため、ハミルトニアンが非エルミートであっても物理量が複素数にはならない。物理量の実性に必要なのは  $\langle\langle I|\hat{H}_u = 0$  であって、これは  $\gamma \neq 0$  であっても成立している。このようにして、TFD では準粒子の寿命という概念を相互作用描像のレベルで自然に取り入れることが出来る。

## 4 2重井戸型模型に対する数値計算

前章で得られた  $\gamma$  の効果を確認するために、以下の様な冷却 Bose 原子気体に対する単純な 2 重井戸型模型を考える：

$$H = -J \sum_{\ell} \left( \psi_{L\ell}^\dagger \psi_{R\ell} + \psi_{R\ell}^\dagger \psi_{L\ell} \right) + \sum_{\ell} \nu_{\ell} \left( \psi_{L\ell}^\dagger \psi_{L\ell} + \psi_{R\ell}^\dagger \psi_{R\ell} \right) + \frac{U}{2} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4} g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4} \left( \psi_{L\ell_1}^\dagger \psi_{L\ell_2}^\dagger \psi_{L\ell_3} \psi_{L\ell_4} + \psi_{R\ell_1}^\dagger \psi_{R\ell_2}^\dagger \psi_{R\ell_3} \psi_{R\ell_4} \right). \quad (15)$$

ここで  $J$  は井戸間のホッピング項、 $U$  は井戸内の相互作用定数、 $\ell$  は井戸内の準位である。各井戸は 1 次元調和振動子で作られ、その励起エネルギーは  $\nu_{\ell} = \Omega(\ell + 1/2)$  である。相互作用項には井戸内の準位に応じた係数  $g_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4} = \int dz u_{\ell_1}(z) u_{\ell_2}(z) u_{\ell_3}(z) u_{\ell_4}(z)$  が掛かっている。ここで  $u_{\ell}(z)$  は調和振動子の固有関数である。

冷却原子系の非平衡初期分布の緩和に関する典型的な実験を模すために、 $t < 0$  では  $J = 0$  であり、系は全ての粒子が左の井戸に集まっているものとする。そして  $t = 0$  で瞬間的に  $J$  を正にし、系を非平衡にする。このように用意した状態を初期条件とし、非平衡 TFD を用いて導出した量子輸送方程式を解いた結果を Fig. 1 に示す。 $\gamma$  の効果によって粒子が時間の経過に伴って左右の井戸に均等に分配し、緩和していくことが分かる。一方  $\gamma = 0$  とした計算では緩和しない。 $\gamma$  を非摂動ハミルトニアンに取り入れることが、緩和現象を記述するにあたって重要である。

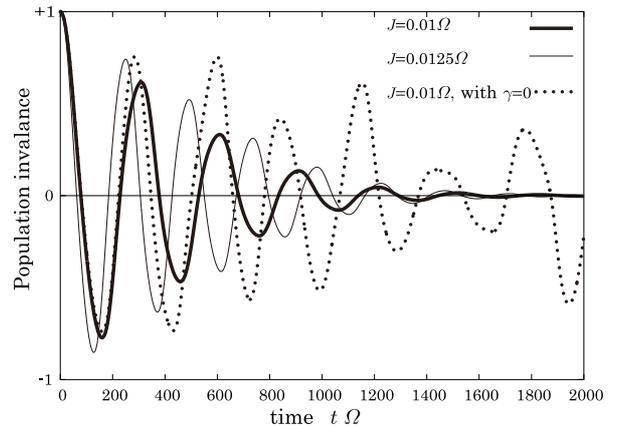


Fig. 1: 左右の井戸の粒子数の偏りの時間変化。+1 は全ての粒子が左の井戸に、-1 は全ての粒子が右の井戸に、0 は左右均等に存在していることを示している。点線は非摂動ハミルトニアンにおいて  $\gamma = 0$  とした場合の計算結果である。

## 参考文献

- [1] H. Umezawa, *Advanced Field Theory — Micro, Macro, and Thermal Physics* (AIP, New York, 1993).
- [2] H. Chu and H. Umezawa, *Int. J. Mod. Phys. A* **10**, 1693 (1995).
- [3] M. Schmutz, *Z. Physik B* **30**, 97 (1978).
- [4] Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **331**, 51 (2013).

# Numerical Simulation of Quantum Transport Equation for Bose-Einstein Condensate system of Cold gases in One Dimensional Optical Lattice

Y. Kuwahara, Y. Nakamura, and Y. Yamanaka

Department of Electronic and Photonic Systems, Waseda University

## 1 Introduction

The system of cold neutral atomic gas has attracted attentions since Bose-Einstein condensates were realized. The time scales of the thermal processes are sufficiently slow to observe various nonequilibrium phenomena. We apply the nonequilibrium Thermo Field Dynamics (TFD) [1] to the system, and derive the non-Markovian quantum transport equations [2, 3].

In our previous work [3], we considered the one dimensional system of cold neutral atomic Bose gas confined by combined harmonic and optical lattice potentials. We investigated the thermal process for the system after a sudden displacement of the former potential by solving the quantum transport equation numerically, but assumed there was no condensate. In this work, we extend the previous one to the case where the system has a condensate, and derive the coupled equations consisting of the quantum transport equation, the time-dependent Gross-Pitaevskii (TDGP) one and the time-dependent Bogoliubov-de Gennes (TDBdG) one.

## 2 Model Hamiltonian

We consider the following Bose-Hubbard Hamiltonian [4] which describes the one dimensional system of cold neutral atomic Bose gas confined by a combined harmonic and optical lattice potentials:

$$H(t) = \sum_{i=1}^{I_s} \left[ -J\psi_i^\dagger(t)(\psi_{i+1}(t) + \psi_{i-1}(t)) + \{\nu_i(t) - \mu\}\psi_i^\dagger(t)\psi_i(t) + \frac{U}{2}\psi_i^\dagger(t)\psi_i^\dagger(t)\psi_i(t)\psi_i(t) \right], \quad (1)$$

$$\nu_i(t) = (i - I_c + \theta(-t)d)^2V, \quad (2)$$

where the field operator  $\psi_i$  satisfies the following canonical commutation relations:

$$[\psi_i(t), \psi_j^\dagger(t)] = \delta_{ij}, \quad [\psi_i(t), \psi_j(t)] = [\psi_i^\dagger(t), \psi_j^\dagger(t)] = 0. \quad (3)$$

The parameters  $J$ ,  $V$ ,  $\mu$ ,  $U$ ,  $i$ ,  $I_s$ ,  $I_c$ , and  $d$  represent the inter-site hopping, the strength of the harmonic potential, the chemical potential, the on-site coupling, the site index, the total number of sites, the center site index, and the harmonic potential displacement, respectively. The step function  $\theta(-t)$  indicates a sudden displacement of the harmonic potential at  $t = 0$ .

Considering the existence of the condensate, we divide the field operator  $\psi_i(t)$  into a classical part  $\zeta_i(t)$  and a quantum one  $\varphi_i(t)$  by the criterion  $\langle 0|\varphi_i(t)|0\rangle = 0$ . The order parameter  $\zeta_i(t) = \langle 0|\psi_i(t)|0\rangle$  is an arbitrary time-dependent function at this stage because the vacuum has been not specified yet and will be done self-consistently later. We note that due to the time-dependence of  $\zeta_i(t)$  the unperturbed Hamiltonians for  $\psi_i(t)$  and  $\varphi_i(t)$  in the interaction picture are different from each other. We choose the unperturbed Hamiltonian for  $\psi_i(t)$  as follows:

$$H_0 = \sum_{ij} \left[ \frac{1}{2}\bar{\varphi}_i^\alpha \left( T_{0,ij}^{\alpha\beta} + \delta T_{ij}^{\alpha\beta} \right) \varphi_j^\beta + \varphi_i^\dagger (h_{0,ij}\zeta_j + \delta_{ij}\delta C_i) + \varphi_i (h_{0,ij}\zeta_j^* + \delta_{ij}\delta C_i^*) \right], \quad (4)$$

where

$$\varphi_i^\alpha(t) = \begin{pmatrix} \varphi_i(t) \\ \varphi_i^\dagger(t) \end{pmatrix}^\alpha, \quad \bar{\varphi}_i^\alpha(t) = \begin{pmatrix} \varphi_i^\dagger(t) & -\varphi_i(t) \end{pmatrix}^\alpha, \quad (5)$$

$$T_{0,ij}^{\alpha\beta}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{0,ij}(t) & \mathcal{M}_{0,ij}(t) \\ -\mathcal{M}_{0,ij}^*(t) & -\mathcal{L}_{0,ij}(t) \end{pmatrix}^{\alpha\beta}, \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{0,ij}(t) = -J(\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}) + \delta_{ij}(\nu_i(t) - \mu + 2U|\zeta_i(t)|^2), \quad (7)$$

$$\mathcal{M}_{0,ij}(t) = U\delta_{ij}\zeta_i^2(t), \quad (8)$$

$$h_{0,ij}(t) = -J(\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}) + \delta_{ij}(\nu_i(t) - \mu + U|\zeta_i(t)|^2). \quad (9)$$

The counter terms  $\delta T_{ij}^{\alpha\beta}(t)$  and  $\delta C_i(t)$  are to be determined self-consistently. The criterion  $\langle 0|\varphi_i(t)|0\rangle = 0$  at any  $t$  leads

$$\delta C_i = i\dot{\zeta}_i - \sum_{ij} h_{0,ij}\zeta_j, \quad (10)$$

and the unperturbed Hamiltonian for  $\varphi_i(t)$ , denoted by  $H_0^\varphi(t)$ , becomes

$$H_0^\varphi = \sum_{ij} \frac{1}{2} \bar{\varphi}_i^\alpha \left( T_{0,ij}^{\alpha\beta} + \delta T_{ij}^{\alpha\beta} \right) \varphi_j^\beta. \quad (11)$$

Because the matrix  $T_{0,ij}^{\alpha\beta}(t) + \delta T_{ij}^{\alpha\beta}(t)$  is time-dependent, the field operator  $\varphi_i(t)$  should be expanded in terms of the  $2 \times 2$ -matrix time-dependent orthonormal complete set  $\{W_{i\ell}(t)\}$  [5] each of which obeys the TDBdG equation:

$$\varphi_i^\alpha(t) = \sum_{\ell} W_{i\ell}^{-1,\alpha\beta}(t) a_{\ell}^\beta, \quad \bar{\varphi}_i^\beta(t) = \sum_{\ell} \bar{a}_{\ell}^\alpha W_{i\ell}^{\alpha\beta}(t), \quad (12)$$

$$a_{\ell}^\alpha = \begin{pmatrix} a_{\ell} \\ a_{\ell}^\dagger \end{pmatrix}^\alpha, \quad \bar{a}_{\ell}^\alpha = \begin{pmatrix} a_{\ell}^\dagger & -a_{\ell} \end{pmatrix}^\alpha, \quad (13)$$

$$\sum_i W_{i\ell_1}(t) W_{i\ell_2}^{-1}(t) = \delta_{\ell_1\ell_2}, \quad \sum_{\ell} W_{i_1\ell}^{-1}(t) W_{i_2\ell}(t) = \delta_{i_1i_2}, \quad (14)$$

$$i\dot{W}_{i\ell}^{-1}(t) = \sum_{ij} (T_{0,ij}(t) + \delta T_{ij}(t)) W_{j\ell}^{-1}(t). \quad (15)$$

### 3 Applying nonequilibrium TFD

In this section, we apply nonequilibrium TFD to the condensed system above. The time-dependent number distribution function  $n_{\ell}(t)$  is introduced as an unknown parameter [1], then the parameter  $n_{\ell}(t)$ , the counter term  $\delta T_{ij}^{\alpha\beta}(t)$  and the order parameter  $\zeta_i(t)$  are simultaneously determined by the self-consistent renormalization conditions. Calculating the self-energy at one-loop level in Feynman diagram method and according to the renormalization conditions on the time-dependent on-shell self-energy which we have proposed recently [6], the quantum transport equation and the counter term  $\delta T_{ij}^{\alpha\beta}(t)$  are fixed as

$$\begin{aligned} \dot{n}_{\ell}(t) = 4U^2 \text{Re} \sum_{\ell_1\ell_2} \int_0^t ds & \{ C_1[\zeta, W; t] C_1^*[\zeta, W; s] \{ n_{\ell_1} n_{\ell_2} (1 + n_{\ell}) - (1 + n_{\ell_1})(1 + n_{\ell_2}) n_{\ell} \}_s \\ & + C_2[\zeta, W; t] C_2^*[\zeta, W; s] \{ n_{\ell_1} (1 + n_{\ell_2})(1 + n_{\ell}) - (1 + n_{\ell_1}) n_{\ell_2} n_{\ell} \}_s \\ & + C_3[\zeta, W; t] C_3^*[\zeta, W; s] \{ (1 + n_{\ell_1}) n_{\ell_2} (1 + n_{\ell}) - n_{\ell_1} (1 + n_{\ell_2}) n_{\ell} \}_s \\ & + C_4[\zeta, W; t] C_4^*[\zeta, W; s] \{ (1 + n_{\ell_1})(1 + n_{\ell_2})(1 + n_{\ell}) - n_{\ell_1} n_{\ell_2} n_{\ell} \}_s \}, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\delta T_{ij}^{\alpha\beta}(t) = \delta_{ij} U \begin{pmatrix} 2\tilde{n}_i(t) & \tilde{m}_i(t) \\ -\tilde{m}_i^*(t) & -2\tilde{n}_i(t) \end{pmatrix}^{\alpha\beta}. \quad (17)$$

The subscript  $s$  of the braces in Eq. (16) denotes the time argument of  $n$ , and the coefficients  $C_k[\zeta, W; t]$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) depend on both the order parameter  $\zeta_i(t)$  and the eigenfunctions  $\{W_{i\ell}(t)\}$ ,

though their explicit expressions are suppressed for simplicity here. The elements in the matrix of Eq. (17) are

$$\tilde{n}_i = \langle 0|\varphi_i^\dagger\varphi_i|0\rangle = \sum_{\ell} \left[ n_{\ell} \left( W_{i\ell}^{11}W_{i\ell}^{-1,11} - W_{i\ell}^{21}W_{i\ell}^{-1,12} \right) - W_{i\ell}^{21}W_{i\ell}^{-1,12} \right], \quad (18)$$

$$\tilde{m}_i = \langle 0|\varphi_i\varphi_i|0\rangle = \sum_{\ell} \left[ n_{\ell} \left( W_{i\ell}^{22}W_{i\ell}^{-1,12} - W_{i\ell}^{12}W_{i\ell}^{-1,11} \right) + W_{i\ell}^{22}W_{i\ell}^{-1,12} \right]. \quad (19)$$

On the other hand, the order parameter  $\zeta_i(t)$  is restricted by the criterion of  $\langle 0|\varphi_i(t)|0\rangle = 0$ , from which follows the TDGP equation,

$$i\dot{\zeta}_i(t) = \sum_j (h_{0,ij}(t) + \delta_{ij}2U\tilde{n}_i(t))\zeta_j(t) + U\tilde{m}_i(t)\zeta_i^*(t) - i\gamma(t)\zeta_i(t), \quad (20)$$

$$\gamma = \frac{1}{2\sum_i |\zeta_i|^2} \sum_{\ell} \dot{n}_{\ell} \left( W_{i\ell}^{11}W_{i\ell}^{-1,11} - W_{i\ell}^{21}W_{i\ell}^{-1,12} \right). \quad (21)$$

Here we have included the contributions to  $\delta C_i(t)$  up to two-loop order, and the last term in Eq. (20) comes from the two-loop order and is necessary to conserve the total particle number.

Thus we have derived a set of the coupled equations, i.e., the quantum transport equation (16), the TDBdG one (15), and the TDGP one (20). The interactions between the condensate and non-condensed excitation modes are taken account of properly. The crucial point in our derivation is that the coupled equations have been derived systematically from the single concept of the self-consistent renormalization. It is remarked that the quantum transport equation derived in our approach has an additional term which is absent in the other methods, namely the last term on the right side of Eq. (16), which we call the triple production term. The term corresponds to the process where three quasiparticles are created or annihilated. The process prevents the system from the thermal relaxation because the collision term is always non-zero  $(1+n_{\ell_1})(1+n_{\ell_2})(1+n_{\ell}) - n_{\ell_1}n_{\ell_2}n_{\ell} > 0$ . If the negative energy mode does not exist in the system, the process is forbidden because of the energy conservation, but once the negative energy mode appears, the triple production term induces the decay of the condensate. This corresponds to the scenario of the Landau instability.

As a future task, we will perform numerical calculations of the set of the coupled equations. It will be an interesting subject then to trace temporal behaviors of the system with the Landau instability in detail.

## References

- [1] H. Umezawa, *Advanced Field Theory — Micro, Macro, and Thermal Physics* (AIP, New York, 1993).
- [2] Y. Nakamura, T. Sunaga, M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **325**, 426 (2010); Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **326**, 1070 (2011).
- [3] 桑原幸朗, 中村祐介, 山中由也, 基研研究会「熱場の量子論とその応用」, 京都大学, 2012年8月; 素粒子論研究・電子版, Vol. 11, No. 1, pp. 143-145, 2012年12月.
- [4] D. Jaksh, C. Burder, J. I. Cirac, C. W. Gradiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998).
- [5] H. Matsumoto and S. Sakamoto, *Prog. Theor. Phys.* **105**, 573 (2001).
- [6] Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **331**, 51 (2013).

# Is “Quark-Gluon Plasma = Black Hole” in string theory?

**Gautam Mandal**

Department of Theoretical Physics, Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai 400 005, India

E-mail: mandal(at)theory.tifr.res.in

**Takeshi Morita**

High Energy Accelerator Research Organization (KEK), 1-1 Oho, Tsukuba, Ibaraki 305-0801, JAPAN

E-mail: tmorita(at)post.kek.jp

## Abstract.

超弦理論における AdS/CFT 対応の発見以降、AdS/CFT 対応を応用した QCD の解析が試みられるようになった。特に近年では、重イオン加速器実験の進展に伴い、クォーク・グルオン・プラズマ状態 (QGP) をブラックホールを用いて解析することが盛んになされている。しかし、AdS/CFT 対応がある程度対応が確立しているのは、あくまで超対称性ゲージ理論と 10 次元超重力理論の間で、超対称性を持たない QCD の QGP 状態に対してブラックホールを用いた解析がどの程度信頼出来るのかきちんとした理解はなされていない。そこでこの研究では Witten と酒井杉本によって提唱された D4 プレーンを用いた Holographic QCD のモデルを解析し、そのモデルでの QGP 状態がどのように bulk 理論で実現するのか検証した。その結果ブラックホールでない重力解が QGP と対応することを示した。これは QCD の QGP を古典重力におけるブラックホールでは記述できないことを超弦理論が示唆しており、これまでの期待とは大きく異なる結果である。

## 1. Introduction

AdS/CFT 対応を用いると、large- $N$   $SU(N)$   $p + 1$  次元 maximally supersymmetric Yang-Mills theory が有限温度で強結合にある場合、10 次元古典超重力理論における black  $D_p$  brane 解というある種のブラックホール解を用いて解析できることを示せる [1]。そこでこのアイデアを拡張し一般に有限温度の強結合の場の理論も、なんらかの古典重力理論におけるブラックホール解で解析出来るのではないかという主張がなされるようになった。

このようなアイデアに基づいた研究の 1 つに、QCD への応用がある。特に重イオン加速器実験の進展に伴い、QCD の QGP 状態をブラックホール解を用いて解析することが盛んに行われてきた。そして適当な重力理論を用意し、古典重力の解析をおこなうと、それなりに実験や格子ゲージ理論の結果を再現出来ることが知られるようになった。ただしここで注意しなければならないのは、このような解析は現象論的に行われており、古典重力理論におけるディラトン場のポテンシャルなどを適当に tune することによって、いくらでも欲しい結果が得られる点である。そのため既存の QCD の結果を重力理論として解釈することは出来るが、新しい現象に対する予言能力はあまりなく、モデルとしてどこまで有用なものなのかはよくわかっていない。また QCD を記述するための重力のモデル自体が多数ありどのようなモデルが良いのかもよく理解されていない。

そこで我々は Witten によって提唱された D4 ブレーンを用いた Holographic QCD の模型 [2]<sup>1</sup> を用いて、本当に QCD の QGP をブラックホールで記述出来るのか検証した [4]。この模型の利点として、現象論的な Holography の模型と異なり、QCD を超弦理論からきちんと導出出来るため、原理的には QCD と bulk の理論の対応を厳密につけられる。(超弦理論における Holography ではゲージ理論に対応する理論が必ずしも単なる古典超重力理論であるとは限らない。量子重力的な補正や高階微分項の補正が一般には必要である。そのため単なる重力理論とは区別して、この論文では「bulk の理論」と呼ぶことにする。)そして単なる古典重力で本当に QCD を記述出来るのかという問題について議論していく。

実はこの D4 ブレーン模型における QGP の解析はすでに行われており、black D4 brane 解と呼ばれる重力解で QGP を記述出来るという予言がなされてきた [5, 6]。しかし我々の検証の結果、これらの予言は誤りであることが証明され、さらに別のブラックホール解ではない bulk 理論の解で QGP が記述出来るところが示された。詳しくは本文で議論するが、この結果は QGP を bulk 理論で記述するためには、単純な重力理論を考えるだけでは難しく超弦理論的な補正が必要なことを強く示唆している。

## 2. Witten の D4 ブレーンを用いた holographic QCD の模型の紹介

Witten は 4 次元 large- $N$   $SU(N)$  pure Yang-Mills 理論 (YM4) に対する bulk 理論を得るために、D4 ブレーンを用いて以下に示すような構成を行った。まず  $N$  枚の D4 ブレーンを考えると、その有効理論は 5 次元  $U(N)$  SYM 理論 (SYM5) で与えられ、その作用は次のようになる<sup>2</sup>。

$$S = \frac{N}{\lambda_5} \int d^5x \text{Tr} \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (D_\mu \Phi^I)^2 + \Psi D\Psi + \dots \right) \quad (1)$$

ここで  $\lambda_5$  は SYM5 の 't Hooft 結合定数で、 $\Phi^I$  と  $\Psi$  は各々 adjoint 表現に属する massless の scalar 場と fermion 場である。この理論で Large- $N$  極限をとり強結合領域を考えると、10 次元超重力理論における記述が良くなる [1]。そのため SYM5 は強結合領域で重力による解析が可能である。

一方、我々が興味があるのは YM4 である。そこで Witten は SYM5 を  $S^1$  コンパクト化し、その  $S^1$  方向に対し、fermion に半周期境界条件 (=有限温度の fermion と同じ境界条件) を課すことを考えた。

$$S = \frac{N}{\lambda_5} \int d^4x \int_0^{L_4} dx_4 \text{Tr} \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (D_\mu \Phi^I)^2 + \Psi D\Psi + \dots \right), \quad \Psi(x_4 + L_4) = -\Psi(x_4) \quad (2)$$

ここでこの  $S^1$  の半径を  $L_4$  とし、この理論の無次元有効結合定数を  $\lambda_4 \equiv \lambda_5/L_4$  とする。するとこの系では fermion が質量  $1/L_4$  を持つため低エネルギーでは decouple する。これにより超対称性が破れ、adjoint scalar  $\Phi^I$  や 5 次元方向のゲージ場  $A_5$  も量子補正で質量 ( $\sim \lambda_4/L_4$ ) を獲得する。その結果、低エネルギーでも massless で残るのは、ゲージ対称性で mass が守られた 4 次元ゲージ場のみである。そのため SYM5 から 4 次元の pure Yang-Mills 理論 (YM4) を低エネルギーで得ることが出来る。もう少し正確に SYM5 から YM4 を得るための条件を述べると、YM4 における dynamical QCD scale  $\Lambda_{QCD}$  が KK scale  $1/L_4$  に比べて十分小さくなる必要があり、そのためには  $\lambda_4 \ll 1$  という弱結合極限をとる必要がある [2]。(直感的には強結合では KK モードが massless 場と結合するため、YM4 を得るためには弱結合をとる必要がある。)

<sup>1</sup> Witten は D4 ブレーンを用いて 4 次元 large- $N$  pure Yang-Mills 理論に対する dual な bulk 理論の構成を行った。さらに酒井杉本によって、この模型に D8 ブレーンを組み合わせることで、カイラル対称性を持ったクオーク場を導入出来ることが示された [3]。これにより 4 次元 large- $N$  QCD を bulk 理論で記述する方法が理解された。ただし、これらの研究は 4 次元 QCD を bulk 理論で記述するためには弦理論的な補正項が必要なことを示唆しており、単なる古典重力で QCD を記述出来るとは主張していない。またこれらの研究では温度 0 の閉じ込め相に関して議論しており、QGP に関しては触れていない。我々の研究 [4] は Witten や酒井杉本の研究に基づいており、これらの研究に問題があるといっているわけではない。

<sup>2</sup> 一般に 5 次元のゲージ理論は繰り込み不可能であると考えられている。しかし 5 次元 SYM 理論は 6 次元 (2,0) 超共型場理論という繰り込み可能な理論を  $S^1$  コンパクト化した場合の低エネルギー有効理論として定義出来ると考えられているので、6 次元まで理論を拡張すれば問題はないと期待されている。

このようにして D4 ブレーンから弱結合極限をとることで YM4 を得ることができることが理解出来たので、次は bulk 理論で YM4 に対応する解を得る方法について議論する。そのためにはゲージ理論同様に 10 次元超重力理論を  $S^1$  コンパクト化し、低エネルギー極限 ( $\lambda_4 \ll 1$ ) を考えればよい。まず bulk を  $S^1$  コンパクト化し、fermion に半周期境界条件を課すと、D4 ソリトン解という超重力解が強結合領域 ( $\lambda_4 \gg 1$ ) で安定に存在することが解明された。この解は SYM5 の強結合領域 ( $\lambda_4 \gg 1$ ) を記述するので、YM4 を得るためにはこの解の弱結合極限 ( $\lambda_4 \ll 1$ ) を取れば良い。しかし、この解で弱結合極限を取ると超重力による記述が悪くなり、必ず弦の励起モードを取り入れなければならないことを示せる。このような励起モードを取り入れるためには、bulk 理論で  $R^n$  のような高階微分項による補正を付け加える必要がある。

そのため YM4 を bulk 理論で記述するためには超重力理論に高次の高階微分項を加えて解析すれば良い。ただしこのような高階微分項を評価するのは非常に困難なことが知られており、この理論を用いて YM4 を解析するのは現実的ではない。そこで Witten やその後の研究者達は、YM4 を直接 bulk 理論で記述するのはあきらめ、(高階微分を無視した) 強結合における超重力理論でも定性的に YM4 の性質を外挿出来るのではないかと主張した [2, 3, 5, 7]。このアイデアは格子ゲージ理論における強結合展開と似ている。

	強結合領域	弱結合領域 (YM4)
格子ゲージ理論	強結合展開による解析	MC による数値解析
Witten の D4 ブレーン模型	超重力理論による解析	高階微分を取り入れた理論による解析

格子ゲージ理論も Witten の模型も強結合では解析が容易だが、YM4 を得るための弱結合領域では解析的な計算が難しい。しかし強結合領域で計算した結果でも弱結合領域の物理を外挿し、定性的に議論出来ることがある。一般的にもこのような強結合展開を用いた解析は定性的なレベルではそれほど悪くないことがある。ただしこのような強結合展開からの外挿が正しく機能するためには、強結合領域と弱結合領域の間で転移が起きずに物理量が連続的につながる必要がある。また格子ゲージ理論の doubler のように非物理的なモードが強結合領域では存在する可能性があるので、それらのモードをうまく取り除く必要がある。これらの点に注意すれば強結合展開は定性的にはそれほど悪くない解析だと期待出来るので、D4 ブレーン模型の強結合領域を古典超重力で解析し、YM4 と比較することは意味があると考えられる。実際にこのアイデアに基づき、D4 ソリトン解の性質を調べると YM4 の閉じ込め相と定性的に似た性質を持つことがわかる。さらに D4 ソリトン解を用いて glueball spectrum [7] や QCD の meson spectrum [3] などが計算され格子 QCD などと興味深い一致が見られてきた。

### 3. 有限温度における Witten の D4 ブレーン模型の解析

前節で議論したように、Witten の D4 ブレーン模型は強結合展開を通じた定性的なレベルではあるが QCD を記述出来る。そこでこの模型を有限温度に拡張し、QGP の性質を bulk 理論で解析するというのは自然なアイデアである。有限温度の QCD を評価するためには、時間  $t$  をユークリッド化して、周期  $\beta$  を持たせればよい。念のため 10 次元時空における D4 ブレーンの配位を示すと

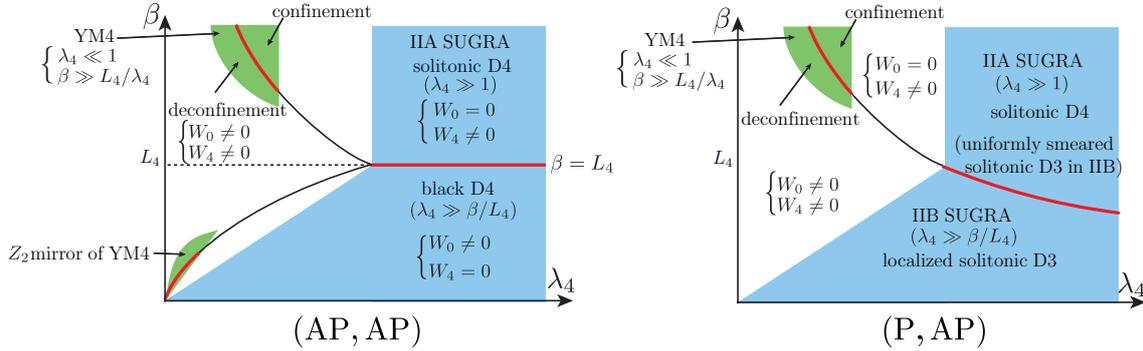
$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & (t) & 1 & 2 & 3 & (4) & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 \hline
 \text{D4 ブレーン} & & & & & & - & - & - & - & -
 \end{array} \quad (3)$$

となる。ここで  $()$  で囲った座標は  $S^1$  コンパクト化されている。

前節で議論したように SYM5 から YM4 を得るためには弱結合である必要がある。さらに有限温度の場合は、少なくとも温度が KK mode の質量よりも低くなる必要がある。それらは次のような条件で与えられる。

$$\lambda_4 \ll 1, \quad \beta \gg \frac{L_4}{\lambda_4}. \quad (4)$$

そのため bulk 理論を強結合領域で解析し、この条件を課したときにどのようなことが起こるのか外挿することで、QGP の性質を議論出来る。



**Figure 1.** D4 プレーンを  $S^1_\beta \times S^1_{L_4}$  にコンパクト化した場合の相図。P/AP は  $S^1_\beta \times S^1_{L_4}$  に対する fermion の周期性 (周期/半周期) を表している。青い領域は古典重力における解析が信頼出来る強結合領域である。一方、緑の領域は弱結合極限 (4) により YM4 が得られる領域である。(左図の左下の緑の領域は YM4 に  $\beta \leftrightarrow L_4$  という変換を課すと得られる領域である。詳細は文献 [4] 参照) その他の空白の部分はあまり良い解析法を持たない領域で、そこでの相構造は外挿によって推測されたものである。赤い実線は相の境界 (相転移点) を表しており、黒い実線はその相の境界を外挿したものである。(左図の黒い点線上は相転移が起こる可能性があるが明確な証拠がない。) 各領域でのオーダーパラメータである Polyakov loop の値も記した。右図でも左図でも低温領域では、YM4 の閉じ込め相と D4 ソリトン (solitonic D4) が同じ相に属することを示唆している。一方、高温領域では fermion の周期によって振る舞いが大きく異なる。左図では bulk の高温で出現する black D4 解と YM4 の非閉じ込め相が異なる相に属し、両者の間で必ず相転移が起こる。一方、右図では bulk の高温で出現する localized D3 ソリトン解と YM4 の非閉じ込め相が同じ相に属している。これは高温における bulk の物理が、YM4 の物理と連続的につながることを示唆しており、強結合展開で YM4 の QGP を解析出来ることを意味している。

ただしここでもう一点注意する点がある。それは SYM5 の adjoint fermion  $\Psi$  のユークリッド時間  $S^1_\beta$  に対する周期性である。一般に理論に  $S^1$  コンパクト空間がある場合、fermion には境界条件として、周期境界条件か半周期境界条件のどちらかを課す必要がある。今の場合、興味のある YM4 では fermion は存在せず、SYM5 の adjoint fermion  $\Psi$  は非物理的なモードである。また条件 (4) をとることで fermion は decouple する。そのため YM4 の物理には、fermion の周期性は影響を与えないはずである。具体的に式で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} Z_{(\text{AP}, \text{AP})}^{\text{SYM5}} &= \text{Tr} e^{-\beta H_{\text{SYM5}}} \rightarrow \text{Tr} e^{-\beta H_{\text{YM4}}}, & (\lambda_4 \rightarrow 0, L_4/\lambda_4 \beta \rightarrow 0), \\ Z_{(\text{P}, \text{AP})}^{\text{SYM5}} &= \text{Tr}(-1)^F e^{-\beta H_{\text{SYM5}}} \rightarrow \text{Tr} e^{-\beta H_{\text{YM4}}}, & (\lambda_4 \rightarrow 0, L_4/\lambda_4 \beta \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (5)$$

ここで (A)P は (半) 周期境界条件を表し、 $F$  は fermion 数である。各分配関数で周期性を 2 つ書いたのは、考えている有限温度 SYM5 において、温度に対する  $S^1_\beta$  と、元々 YM4 を得るために用いた  $S^1_{L_4}$  の 2 つが存在し、その各々に対する fermion の周期性を表すためである。(1 つ目の周期性が  $S^1_\beta$  に対するもので、2 つ目が  $S^1_{L_4}$  に対するものである。)

一方、我々が実際に解析を行うのは bulk の強結合領域であり、そこでは fermion が強く結合しているため、fermion の周期性によって物理的な性質が変わりうる。そこで fermion の寄与をきちんと調べるために我々は通常の有限温度の系で課す半周期境界条件の他に周期境界条件も課し、各々の結果を比較してみることにする。

### 3.1. 有限温度 D4 プレーン模型の相構造

有限温度における D4 プレーン模型の相図を Fig. 1 にのせた。ここでは逆温度  $\beta$  と有効結合定数  $\lambda_4$  の 2 つのパラメータによる相構造を図示してある。また fermion の  $S^1_\beta$  方向に対する周期性を、

AP と P の二種類とつたため、2 つの図で示した。

3.1.1. オーダーパラメータ まず相構造を見ていく上で有用なオーダーパラメータを定義する。今 SYM5 は  $S^1_\beta$  と  $S^1_{L_4}$  という 2 つの  $S^1$  にコンパクト化されている。そのため各々の  $S^1$  に対する Polyakov loop をオーダーパラメータとして定義する。

$$W_0 = \frac{1}{N} \text{Tr} P e^{i \int_0^\beta A_0 dx^0}, \quad W_4 = \frac{1}{N} \text{Tr} P e^{i \int_0^{L_4} A_4 dx^0}. \quad (6)$$

よく知られているように  $W_0 = 0$  の場合が confinement を表し、 $W_0 \neq 0$  の場合が deconfinement を表す。

3.1.2. (AP,AP) 境界条件の場合 はじめに温度  $S^1_\beta$  に半周期境界条件を課した場合の結果を見る。我々の研究以前は D4 プレーン模型ではこの周期境界条件しか調べられていなかった。

まず bulk での記述が良い強結合領域に関して議論する。(図 1 左図 青色の領域) この領域では低温で D4 ソリトン解が安定に存在する。この解は 2 節ですでに議論した閉じ込め相に対応する重力解である。だがこの解より熱力学的に安定な black D4 プレーン解と呼ばれる重力解が高温 ( $\beta < L_4$ ) で現れ、両者の間での相転移が  $\beta = L_4$  上で起こる。

実は長年この相転移が YM4 における閉じ込め・非閉じ込め相転移と対応し、black D4 プレーン解が YM4 の deconfinement 相と対応すると考えられていた [5]。しかしこの相図を見るとすぐにこの対応に問題があることに気がつく。それは black D4 プレーン解と YM4 の非閉じ込め相の間で相転移が起きていることである [6]。またこれと関連してオーダーパラメータ  $W_4$  の値がこれら 2 つの相で異なる。(オーダーパラメータに関する詳細は文献 [4] で詳しく議論してある。) これは black D4 プレーンでの物理量が、YM4 の非閉じ込め相の物理量と連続的につながらないことを意味しており、長年信じられてきた black D4 プレーン解と YM4 の非閉じ込め相の対応が誤りであったことを示している。そのため (AP,AP) 境界条件の場合は QGP など高温での YM4 の振る舞いを bulk 理論でこのまま解析することは出来ない<sup>3</sup>。

3.1.3. (P,AP) 境界条件の場合 次に温度  $S^1_\beta$  に周期境界条件を課した場合の結果を見る。この場合も低温では閉じ込め相に対応する D4 ソリトン解が安定に存在する。そして高温にいくと相転移が

$$T_c \sim \frac{\lambda_4}{L_4} \quad (7)$$

で起こり、localized D3 ソリトンと呼ばれる解がこの温度より高温では安定に存在する。ここで重要なのはこの localized D3 ソリトン解が YM4 と同じオーダーパラメータの振る舞いを示し、両者の間に相転移が起こらない可能性が高いことを示唆する点である。これは localized D3 ソリトンが YM4 の非閉じ込め相に対応し、温度 (7) での bulk 理論の相転移が YM4 での閉じ込め・非閉じ込め相転移に対応することを強く示唆している。特に相転移温度 (7) が  $\lambda_4$  に比例するのは良い傾向で、YM4 が出現する弱結合極限 (4) で、この相転移が実際に YM4 の現れる低温に向かうことを意味している。(図 1 右図)

ただしここで一点注意することがある。この相転移温度 (7) は結合定数  $\lambda_4$  に比例し、強結合領域では非常に高温で起こる。このような高温では温度  $S^1_\beta$  の半径が非常に小さくなり、string スケールに達してしまうため、通常の超重力理論の解析が信頼出来なくなる。しかしこの問題は温度  $S^1_\beta$  に対して T-dual をとることで、回避することができ T-dual をとった後の理論では超重力

<sup>3</sup> black D4 プレーン解を YM4 と連続的につながらない非物理的な解だと見なし、無視することで、(AP,AP) 境界条件でも YM4 を解析できる可能性がある。実際  $\beta = L_4$  の相転移は一次相転移なので D4 ソリトンはこの温度より高温でも安定に存在できる。そしてある程度高温では、(AP,AP) 境界条件も (P,AP) 境界条件の場合と同様に D4 ソリトンが不安定化し、YM4 の閉じ込め・非閉じ込め相転移を記述できると期待されている。

の解析が信頼出来る [4]。(T-dual をとる前の超重力理論は IIA 型で、T-dual をとった後の超重力理論は IIB 型である。D4 ソリトンも IIA 型で記述され、localized D3 ソリトンは IIB 型で記述されている。)

このように T-dual をとらなければ、YM4 の非閉じ込め相を超重力理論で記述出来ないと言うことは重要である。これは YM4 の低温から高温までの全ての温度領域を記述するような 1 つの重力理論は存在していないことを意味している。

YM4 の非閉じ込め相に対応する localized D3 ソリトン解は、(T-dual をとる前の)IIA 型超重力の視点だと弦の励起によって構成された解となっており、もはや IIA 型超重力の範疇では記述出来ない。逆に YM4 の高温での記述が良い IIB 型超重力理論では、YM4 の低温のを記述するためには IIB 型の弦の励起を取り入れる必要がある。

このように YM4 の閉じ込め・非閉じ込め相転移を記述するために (IIA の視点では) 弦の励起を取り入れる必要があるという今回の bulk の解析の結果は、Yang-Mills 理論による既存の閉じ込め・非閉じ込め相転移の描像と定性的に似ている。Yang-Mills 理論では閉じ込め・非閉じ込め相転移は QCD string のハゲドロン不安定性と関係があるとされていた [8]。一方、今回の解析では、相転移点 (7) 近傍で、D4 ソリトン時空が string の効果で不安定化することを示せる。そしてこの不安定 string と YM4 の QCD string の不安定性は定性的に類似していることがわかった [4]。これは我々の解析は自然に YM4 を記述できることを示唆している。

#### 4. Conclusion

この研究では Witten によって提唱された D4 プレーン模型を用いて、4 次元 YM 理論の非閉じ込め相や閉じ込め・非閉じ込め相転移が bulk の理論でどのように記述されるのか議論した。そして既存の black D4 プレーンを用いた解析では本質的に問題があることを指摘し、localized D4 ソリトン解を用いることで、この問題を回避出来ることを示した。そしてこの結論は様々な重要な点を示唆している。

##### 4.1. universal viscosity ratio

viscosity ratio  $\eta/s$  は高階微分のないアインシュタイン重力における black hole 解に関しては常に  $1/4\pi$  という一定値をとることが知られている [9]。しかし今回の結論は QGP に対応する bulk 理論では弦の励起が重要なことを示唆しており、単なるアインシュタイン重力による記述はおそらく悪い。そのため viscosity ratio が  $1/4\pi$  となる根拠はない。実際に viscosity がどのような値を取るのか localized D3 ソリトンで評価すれば良いのだが、その解析はいくつかの困難のためなされていない。またそれが出来たとしても強結合展開に頼る bulk の解析では定量的な議論は難しいと考えられる。

##### 4.2. 有限温度におけるカイラル対称性の回復

今回問題があることが解明された black D4 プレーン解は、酒井杉本模型における高温でのカイラル対称性の回復の機構を説明するためにも用いられた [6]。そのため black D4 プレーン解を応用し、有限密度や磁場がカイラル対称性に与える影響を調べるという研究が数多くなされてきた。しかし今回の研究で black D4 プレーン解自体に問題があることが理解されたため、カイラル対称性の研究も localized D3 ソリトンを用いて見直す必要がある。

localized D3 ソリトンを用いてカイラル対称性がどのように高温で回復するかは、文献 [4] ですでに議論されているので、有限密度や磁場を加えた解析もそれほど難しくはないのではと考えられている。

##### 4.3. 現象論的な holographic QCD の模型に関するコメント

この研究では、YM4 の閉じ込め・非閉じ込め相転移や非閉じ込め相を記述するためには bulk で弦の励起を取り入れるか、T-dual をとって解析する必要性が理解された。この結果を深刻にとらえると、これまで現象論的に構成されてきた holographic QCD(AdS/QCD) における重力の模型は弦の励起をあまり考慮していないので、きちんと QGP の性質をとらえ切れていない可能性が

高い。(もちろんある特定のパラメータ領域や特定の性質は現象論的にうまく YM 理論を再現出来る可能性はある。) 今後の課題として、QGP の性質でどのような性質が単純な重力理論で記述でき、どのような性質に弦理論的な補正が重要になるのかを理解する必要がある。

## References

- [1] N. Itzhaki, J. M. Maldacena, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, “Supergravity and the large N limit of theories with sixteen supercharges,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 046004 [arXiv:hep-th/9802042].
- [2] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 505 [arXiv:hep-th/9803131].
- [3] T. Sakai and S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **113** (2005) 843 [arXiv:hep-th/0412141].
- [4] G. Mandal, T. Morita, “Gregory-Laflamme as the confinement/deconfinement transition in holographic QCD,” *JHEP* **1109** (2011) 073. [arXiv:1107.4048 [hep-th]].
- [5] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111].
- [6] O. Aharony, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, “A holographic model of deconfinement and chiral symmetry restoration,” *Annals Phys.* **322** (2007) 1420 [arXiv:hep-th/0604161].
- [7] D. J. Gross and H. Ooguri, “Aspects of large N gauge theory dynamics as seen by string theory,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 106002 [arXiv:hep-th/9805129].
- [8] J. J. Atick, E. Witten, “The Hagedorn Transition and the Number of Degrees of Freedom of String Theory,” *Nucl. Phys.* **B310** (1988) 291-334.
- [9] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, “The Shear viscosity of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 081601 (2001) [hep-th/0104066].

# Magnetic QCD Critical Point

Naoki Yamamoto

Maryland Center for Fundamental Physics, University of Maryland

## 1 Introduction

Quantum chromodynamics (QCD) is known to have rich phase structures at finite temperature  $T$  and baryon chemical potential  $\mu_B$ . Understanding the QCD phase diagram is particularly relevant to the physics of heavy ion collisions, neutron stars, and the early Universe. However, these systems are often subject to a strong magnetic field  $B$ . It is thus important to unravel the QCD phase diagram in the presence of  $B$  in addition to  $T$  and/or  $\mu_B$ .

In this work, we present a general argument for the possible existence of a new critical point associated with the deconfinement transition in the  $(T, B)$  plane. For the detail, see Ref. [1]. In the following, we assume the homogeneous magnetic field with the magnitude  $B$  in the  $\hat{z}$  direction.

## 2 QCD in a strong magnetic field

We first consider the regime at  $eB \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$ , where the strong coupling constant is sufficiently small,  $\alpha_s \ll 1$ , and the analysis is under theoretical control. If we turn off the interactions, the energy levels induced by the magnetic field (Landau levels) are given by

$$E_n^2 = p_z^2 + (2n + 1)e_q B - 2e_q B S_z, \quad (1)$$

where  $n$  is nonnegative integer,  $e_q$  are the charges of the quarks,  $(e_u, e_d, \dots) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \dots) e$ , and  $S_z$  is the spin in the  $\hat{z}$  direction. For the low-energy physics well below  $\sqrt{eB}$ , quarks in the higher Landau levels ( $n \geq 1$ ) are irrelevant, and we can concentrate on the quarks in the lowest Landau level (LLL) with  $n = 0$ . Now turning on the interactions, the quarks in the LLL acquire the mass gap, which is given by

$$M_{\text{dyn}} = C(\alpha_s) \sqrt{|e_q B|}, \quad (2)$$

where the explicit form of  $C(\alpha_s)$  is found by solving the self-consistent gap equation [2]. Here we just note that  $M_{\text{dyn}} \rightarrow \infty$  for  $B \rightarrow \infty$  instead of giving the detailed expression for  $C(\alpha_s)$ . Then, quarks in the LLL also decouple from the low-energy dynamics well below  $\sqrt{eB}$  at sufficiently large  $B$ .

That all the quarks decouple from the low-energy physics at large  $B$  means that the low-energy effective theory there is pure gluodynamics. In the presence of the magnetic field, the rotational invariance is explicitly broken. Thus, the lowest-order effective theory for low-energy dynamics is described by an anisotropic pure SU(3) gauge theory of the form

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} F^{a\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \equiv g_{\alpha}^{\mu} g_{\beta}^{\nu} + (\epsilon_{zz} - 1)(\delta^{\mu 3} \delta^{\nu 0} \delta_{\alpha 3} \delta_{\beta 0} + \delta^{\mu 0} \delta^{\nu 3} \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 3}), \quad (3)$$

where  $\epsilon_{zz} \gg 1$  [2]. Higher order terms are suppressed by factors of  $p/M_{\text{dyn}}$  at low energy, where  $p$  is a characteristic momentum.

## 3 Magnetic critical point

One immediately notes that the low-energy effective theory in Eq. (3) has an emergent center symmetry. For the isotropic pure SU(3) gauge theory, it is well known that the center symmetry is

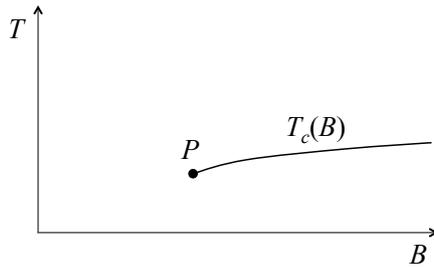


Figure 1: Putative phase diagram in the  $(T, B)$  plane.  $T_c(B)$  denotes the critical temperature of the first-order deconfinement transition as a function of  $B$  that ends at the critical point  $P$ .

unbroken at  $T = 0$  while it is broken at higher  $T$ , and the deconfinement phase transition between the two is first order [3, 4]. We assume it is also the case for our anisotropic effective theory in Eq. (3). Note that this assumption can be directly checked in the lattice studies relatively straightforwardly as it does not require the calculation of a fermion determinant. Then, it follows that the underlying theory, namely, QCD at sufficiently large  $B$ , must have a first-order deconfinement transition as a function of  $T$  too, because small corrections of the effective theory cannot smear the transition due to the existence of a nonzero latent heat.

On the other hand at  $B = 0$ , it has been well established from lattice QCD calculations that the deconfinement regime emerges as a result of a crossover at finite  $T$  [5]. Therefore, the line of first-order deconfinement transitions at large  $B$  above has to terminate at some point. The most natural way for this to occur is for it to terminate at a critical point in the  $T$ - $B$  plane— $(T_c, B_c)$  as shown in Fig. 1. Although other scenarios are also possible logically, we suspect that they are unlikely to be realized in QCD [1]. As QCD with  $B$  does not have a sign problem unlike QCD with  $\mu_B$ , practical lattice QCD studies can distinguish between these scenarios and determine the location of the magnetic critical point.

## 4 Experimental signatures

What is the possible experimental signatures of the magnetic critical point  $P$  in heavy ion collisions? The magnetic critical point is characterized by the vanishing screening mass of the glueball [6]. Due to the mixing between the glueball and the flavor-singlet meson  $\bar{q}q$ , the divergence of the Polyakov loop susceptibility at the point  $P$  is reflected in that of the chiral susceptibility,

$$\chi = \int d^3\mathbf{x} \langle \bar{q}q(\mathbf{x})\bar{q}q(\mathbf{0}) \rangle_c \sim \xi^{2-\eta}, \quad (4)$$

where “c” denotes the connected part of the static correlator,  $\xi$  is the correlation length, and  $\eta$  is the anomalous dimension.

In the presence of nonzero quark masses and small  $\mu_B$ , as is the realistic case in the heavy ion collisions, the symmetry does not forbid a mixing between these order parameters and the baryon number density  $n_B$ . Then, unless the point  $P$  disappears by a small perturbation of  $\mu_B$ , the singular behavior is also reflected in the baryon number susceptibility. Therefore, physical observables of the magnetic critical point are similar to the conventional QCD critical point.

## 5 Cosmological implications

Figure 1 also points to an interesting possibility in the cosmology. If a large magnetic field of order (or above)  $\Lambda_{\text{QCD}}$  existed at the first  $10^{-5}$ – $10^{-4}$  second of the early Universe, the QCD phase

transition at that time would be strengthened to be first order by the magnetic field; this would then result in the hadronic bubbles when the quark-gluon plasma supercools, implying the inhomogeneous big bang nucleosynthesis (see, e.g., Ref. [7] and references therein). The first-order deconfinement transition may also generate some relics, e.g., the strange quark matter as dark matter. This should be contrasted with the scenario without (or with weak) magnetic fields, where the QCD is known not to have phase transitions from the first principle QCD calculations [5] and nothing remarkable happens.

Conversely, if the astrophysical constraints could ever disfavor the first-order deconfinement transition in the early Universe, the position of the magnetic critical point ( $B_c$ ) would in turn give the upper bound of the strength of the magnetic field at the time of the hadronization.

## 6 Conclusion

In this work, we have argued a possible new critical point in the phase diagram on the  $(T, B)$  plane. We have also discussed its possible experimental signatures in heavy ion collisions and cosmological implications. Among others, it would be most interesting to determine the location of this critical point in the lattice simulations without suffering from the sign problem. Whether the magnetic critical point persists at large  $\mu_B$  would also be an interesting question to be explored in the future.

## References

- [1] T. D. Cohen and N. Yamamoto, arXiv:1310.2234 [hep-ph].
- [2] V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. D **66**, 045006 (2002).
- [3] L. G. Yaffe and B. Svetitsky, Phys. Rev. D **26**, 963 (1982); B. Svetitsky Phys. Rept. **132**, 1 (1986).
- [4] M. Fukugita, M. Okawa and A. Ukawa, Phys. Rev. Lett. **63**, 1768 (1989); Nucl. Phys. B **337**, 181 (1990).
- [5] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, Nature **443**, 675 (2006).
- [6] Y. Hatta and K. Fukushima, Phys. Rev. D **69**, 097502 (2004).
- [7] D. J. Schwarz, Annalen Phys. **12**, 220 (2003).

# クォーク・グルーオン・プラズマ中の中間子の遮蔽効果\*

前澤 祐 (Brookhaven National Laboratory)

## 概要

本研究では有限温度中における中間子の遮蔽質量を格子QCDシミュレーションにより計算した。遮蔽質量は空間方向の相関関数の指数減衰として定義され、高温媒質中における中間子内のクォーク構造の表出の指標となる。本研究ではクォーク場の格子化として高改良スタガード型作用を用い、特にストレンジとチャームからなる中間子に注目した。その結果、ストレンジ中間子には相転移温度以下でも大きな温度効果があらわれ、一方チャーモニウムは1.2倍の転移温度程度まで熱的影響を受けないことを見出した。これはハドロン相でさえも熱媒質の影響によりストレンジ中間子は強く遮蔽されるのに対し、チャーモニウムはクォーク・グルーオン・プラズマ相でもある温度までは安定に存在できることを示唆する。

## 1 序

有限温度での中間子の性質の解明は、重イオン衝突実験により生成された高温媒質中でのクォークとグルーオンの振舞いを理解する上で重要である[1]。特に熱媒質中では重い中間子の生成が抑制される重中間子抑制(Quarkonium suppression)が起き、その観測は実験におけるクォーク・グルーオン・プラズマ生成の直接のシグナルになると期待されている[2]。重中間子抑制は中間子の熱的変形と深く関係するため、その性質の理論的解明は重要な課題である。

QCDが導く多彩な物理現象は、格子シミュレーションにより第一原理から非摂動的に計算できる。一般に格子QCDはユークリッド時空上で定義され、中間子の質量や構造は時間方向の相関関数から計算される。しかしながら有限温度では松原形式により時間方向は温度の逆数( $1/T$ )で物理的に制限されるため、このような計算が難しくなる。限られた時間方向の相関から定量的な情報を得るための方法がいくつか提案されているが(例えば、最大エントロピー法や変分法など[3])、それらの手法は非等方格子上で有用となるため多くの計算が媒質中の動的なクォークを無視したクエンチ近似で行われている。

一方、空間方向には原理的な制限がないため、中間子相関関数の空間方向への計算から多くの物理的な情報を得ることができる。また、中間子の質量と構造を決めるスペクトル関数は空間相関関数とも関係するため、この関数の計算からも熱媒質中での中間子の性質を引き出すことができる。空間相関関数は遠距離で指数関数的に減衰し、その減衰は遮蔽質量により特徴づけられる。遮蔽質量の温度依存性( $M(T)$ )は、以下のように熱媒質中の中間子の性質を反映する。熱的影響のない十分低温では、中間子の空間相関関数は時間方向の相関関数と一致するため、遮蔽質量の大きさは対応する中間子のゼロ温度での極質量(pole mass;  $m_0$ )と等価になる。温度が上昇すると熱媒質の効果により遮蔽質量は変化し、高温極限では漸近的自由性のため、中間子を構成するクォークと反クォークは束縛状態を作ることができず自由粒子として振舞う。このとき遮蔽質量は2つの自由クォークによる値、 $M_{\text{free}}(T) = 2\sqrt{(\pi T)^2 + m_q^2}$ に収束する。ここで $\pi T$ はフェルミオンの最低次の松原振幅、 $m_q$ は裸のクォーク質量を表す。従って遮蔽質量の温度依存性は中間子の熱的変形を特徴づけることができる。

本研究では遮蔽質量の温度依存性を、高改良スタガード型作用(Highly Improved Staggered Quarks; HISQ)を用いた格子QCDシミュレーションにより計算する。HISQ作用は従来の作用に比べ、スタガード型固有の格子化による誤差であるテイスト対称性の破れを小さく抑えることに成功した[4]。そのため高い精度で遮蔽質量の温度依存性を見積もることができる。本研究では特にストレンジネス( $s\bar{s}$ )、オープンチャーム( $s\bar{c}$ )、チャーモニウム( $c\bar{c}$ )に注目し、擬スカラー(pseudo-scalar; PS)とベクター(vector; V)チャンネルの基底状態の遮蔽質量を計算する。これらの中間子はそれぞれ( $\eta_{s\bar{s}}, \phi$ )、( $D_s, D_s^*$ )、( $\eta_c, J/\psi$ )に対応する。ここで $\eta_{s\bar{s}}$ は軽いフレーバーの混ざりを考慮しない $\eta$ 状態であり、その質量は $M_{\eta_{s\bar{s}}} = \sqrt{2M_K^2 - M_\pi^2}$ で与えられる。

\*本抄録はA. Bazavov氏(Iowa), F. Karsch氏(BNL, Bielefeld), S. Mukherjee氏(BNL), P. Petreczky氏(BNL)との共同研究の結果である。

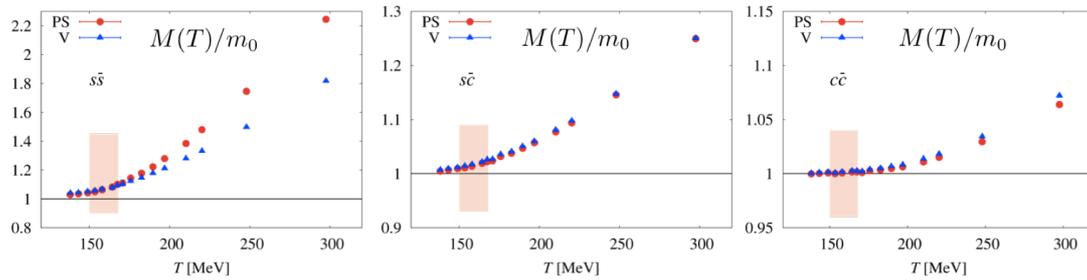


図1: 遮蔽質量の温度依存性。結果は遮蔽質量を対応するゼロ温度での極質量で規格化している。左からストレンジネス( $s\bar{s}$ )、オープンチャーム( $s\bar{c}$ )、チャーモニウム( $c\bar{c}$ )に対応する。

## 2 格子QCDシミュレーションの結果

本シミュレーションはHISQ作用による2+1フレーバーQCDに基づいて行われる。格子サイズは $N_s^3 \times N_\tau = 48^3 \times 12$ とし、温度領域  $T = 138 \sim 245$  MeVで計算を行う。さらに高温での計算のため比 $N_s/N_\tau = 4$ を固定し、 $N_\tau = 10, 8, 6, 4$ で同様のシミュレーションを行う。これは温度領域  $T = 297 \sim 743$  MeVに対応する。ストレンジクォーク質量( $m_s$ )は現実の値に固定し、軽いクォーク質量は $m_l = m_s/20$ とする。これらの値ではゼロ温度でパイ中間子とK中間子の質量がそれぞれ160 MeV、504 MeVとなる。本研究では動的なチャームクォークの寄与は無視している。文献[4]において同様のパラメータでカイラル相転移の振舞いについて研究され、 $O(N)$ スケーリング則の結果から相転移温度は $T_c \sim 159 \pm 9$  MeVと見積もられている。

図1は遮蔽質量の温度依存性の計算結果である。横軸は温度、縦軸は $M(T)/m_0$ すなわち、遮蔽質量を対応するゼロ温度での極質量で規格化した大きさを表す。左からストレンジネス( $s\bar{s}$ )、オープンチャーム( $s\bar{c}$ )、チャーモニウム( $c\bar{c}$ )の結果であり、バンドはクロスオーバー相転移の転移温度を表す。●(▲)は擬スカラー(ベクター)チャンネルの結果である。共通の傾向として、低温では1に近い値になり温度上昇に伴い遮蔽質量は徐々に増加することが分かる。これは熱媒質の効果を受けにくい低温では遮蔽質量のスペクトル関数はゼロ温度の形から大きな変更を受けず、一方高温では中間子は大きな熱的変形を受けるため遮蔽質量の値が極質量から大きく変化する。遮蔽質量は高温極限で $M_{\text{free}}(T) = 2\sqrt{(\pi T)^2 + m_q^2}$ という値に収束するため、その振舞いは高温で温度に比例して増加する。

さらに定量的な温度依存性に注目すると、ストレンジネスは転移温度以下で既に1からずれているのに対し、オープンチャームは転移温度以上で顕著なずれが見られ、一方チャーモニウムは約200 MeVまで遮蔽質量と極質量の値が変わらないことがわかる。従って、ストレンジネス中間子は転移温度以下でも大きな熱的影響を受けているのに対し、チャーモニウムは少なくとも1.2 $T_c$ 程度の温度まで熱の影響を受けず安定に存在することを意味する。

またチャンネル間の温度依存性に注目すると、転移温度以上ではチャーモニウムとオープンチャームではチャンネル間に大きな差異が現れないのに対し、ストレンジネスでは擬スカラーの増加がベクターに比べて非常に大きくなる。このような擬スカラー中間子の強い熱的変形はストレンジフレーバーのカイラル対称性の回復に関係する。実際に先攻研究においてストレンジカイラル凝縮も転移温度以上でその値が徐々に小さくなることが知られており[4]、本研究の結果は、ストレンジフレーバーにおいてもカイラル対称性の回復は対応する中間子の性質に大きな影響を与えることを示唆している。

次に高温における遮蔽質量の振舞いに注目する。本研究により計算された遮蔽質量の全温度領域での結果は図2に示される。高温での比較のため遮蔽質量は温度で規格化( $M(T)/T$ )されている。図は再び左からストレンジネス( $s\bar{s}$ )、オープンチャーム( $s\bar{c}$ )、チャーモニウム( $c\bar{c}$ )の結果であり、図中の点線は高温での収束値 $2\pi$ を示す。図からオープンチャームとチャーモニウムでは、 $M(T)/T$ は温度上昇とともに単調に減少し $2\pi$ に収束する。この振舞いは高温極限における自由クォークの振舞い $M_{\text{free}}(T) = 2\sqrt{(\pi T)^2 + m_q^2}$ に一致する。一方、ストレンジネスではどちらのチャ

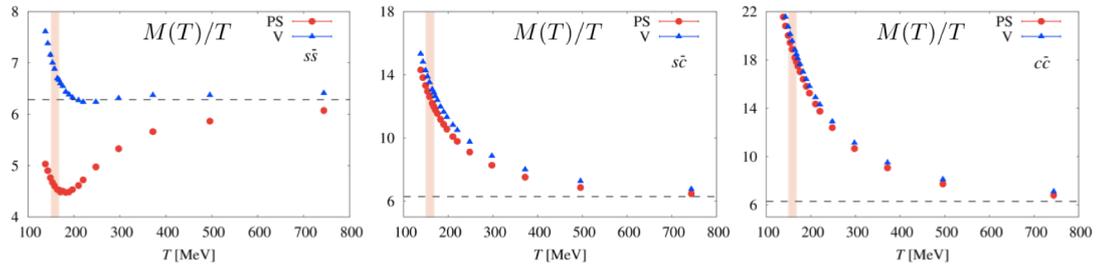


図 2: 高温における遮蔽質量の振舞い。結果は温度で規格化した遮蔽質量を表す。

ンネルでも転移温度直上程度まで減少するが、その後増加するという特徴的な振舞いを見せる。そして高温での収束が $2\pi$ に対しベクター(V)は正から、擬スカラー(PS)は負から近づく。

高温での遮蔽質量の振舞いは弱結合有効理論による予想があり、十分高温では全てのチャンネルが縮退し、その温度依存はクォーク質量がゼロの極限で、 $M_{\text{weak}}(T)/T = 2\pi(1 + 0.033g^2)$ と与えられる( $N_f = 3$ のとき)[5]。ここで $g$ はQCDの結合定数である。すなわち高温極限では最低次松原振幅である $2\pi T$ に収束するが、その収束は正から近づくことを示唆する。この振舞いは図2のストレンジネスにおけるベクターの振舞いと一致する。一方、擬スカラーは異なる振舞いを見せる。また、 $T \sim 750$  MeVにおいてもチャンネル間の縮退は見られない。すなわち $T \sim 4.7T_c$ では中間子相関関数の弱結合有効理論による記述は十分とは言えず、遮蔽質量にはさらに非摂動的な寄与が多く含まれていることを意味する。このような中間子遮蔽質量の格子QCDシミュレーションと弱結合有効理論の差異は先行研究でも報告されている[6]。高温における格子QCDと弱結合有効理論の比較は摂動論的手法の適用可能温度領域を検討する上でも重要であるため、今後有限体積効果などに配慮したさらに高温での遮蔽質量の格子シミュレーションが必須である。

### 3 まとめ

本研究では遮蔽質量の温度依存性から熱媒質中における中間子の温度変化を調べた。その結果、ストレンジネス中間子は相転移温度以下でも熱媒質により強く影響を受けるが、一方オープンチャーム中間子は転移温度以上、チャーモニウムは転移温度の1.2倍以上でないと熱媒質の影響を受けないことを見出した。すなわちチャーモニウム抑制は、重イオン衝突実験におけるクォーク・グルーオン・プラズマ生成のシグナルになることが第一原理計算により裏付けられた。またストレンジネスでは転移温度以上で、擬スカラー中間子にストレンジフレーバーのカイラル対称性の回復が起因すると考えられる強い熱的变化が現れた。

また、 $T \sim 750$  MeVにおいても格子QCDの結果と弱結合有効理論の予想には差異が見られた。高温での両計算の定量的な比較は、非摂動的手法の有効温度領域を見積もる上でも重要なため、今後さらなる研究が必要である。

### 参考文献

- [1] H. Satz, Lect. Notes Phys. 841, 1 (2012).
- [2] T. Matsui and H. Satz, Phys. Lett. B 178, 416 (1986).
- [3] 例えば最近のレビューとして、A. Mocsy, P. Petreczky and M. Strickland, Int. J. Mod. Phys. A 28, 1340012 (2013).
- [4] A. Bazavov, T. Bhattacharya, M. Cheng, C. DeTar, H. T. Ding, S. Gottlieb, R. Gupta and P. Hegde et al., Phys. Rev. D 85, 054503 (2012).
- [5] M. Laine and M. Vepsalainen, JHEP 0402, 004 (2004).
- [6] M. Cheng, S. Datta, A. Francis, J. van der Heide, C. Jung, O. Kaczmarek, F. Karsch and E. Laermann et al., Eur. Phys. J. C 71, 1564 (2011).

# 重イオン衝突実験における非ガウスゆらぎ

北沢正清<sup>1</sup>

大阪大学大学院理学研究科

近年重イオン衝突実験での観測が精力的に進む保存電荷のバルクなゆらぎ、特に高次キュムラントについて、ハドロン相中における散逸が観測値に及ぼす効果を拡散マスター方程式を用いて考察する。また、実験で測定される高次キュムラントのラピデティ幅依存性を利用して、重イオン衝突終状態のゆらぎが持つ物理的意味を探る手段を提案する。

## 1 はじめに

有限温度 QCD が持つ、非閉じ込め・カイラル相転移や、臨界温度付近の物質が持つ強結合性等の物性現象は、ハドロン物理のみならず、様々な分野から注目を集める興味深い研究課題である。これらの物理現象に実験的に迫る手段として、重イオン衝突実験が世界各地で活発に行われている [1, 2]。また、格子 QCD 数値解析による高温物質の研究も、臨界温度付近の強結合物質の非摂動論的側面を第一原理的に調べる手段として精力的に推し進められている。近年、これらの分野において、保存電荷ゆらぎ、特にゆらぎの非ガウス性を特徴づける高次キュムラントが持つ観測量としての有用性が注目を集め [3, 4]、観測・研究が活発に行われている [1, 2]。重イオン衝突実験では、イベント毎解析により衝突終状態のある位相空間内の保存電荷数ゆらぎを観測することができる。一方、保存電荷ゆらぎは格子 QCD 数値解析でも測定可能であり、重イオン衝突実験での測定値は格子 QCD の数値解析結果と直接比較することができる。これらそれぞれの系で測定される保存電荷ゆらぎを相互に比較し、またこれらを理論的に考察することにより、QCD 相図上における QCD 臨界点の存在の実験的確認など、様々な物理が明らかになることが期待されている。

ただし、このような比較をするうえで注意しないといけないのが、格子 QCD を含む多くの理論研究において考察されるゆらぎは大正準集団の平衡状態におけるそれに相当するのに対し、重イオン衝突の終状態におけるゆらぎは完全には熱平衡化していないということである。実際、重イオン衝突終状態でのゆらぎの非平衡性は最近のいくつかの研究により強く示唆されている。まず、LHC の ALICE 実験で観測された電磁電荷の 2 次ゆらぎが、ゆらぎを観測するラピデティ幅に強く依存するという結果が得られた [1] が、このような振る舞いはゆらぎが熱平衡に至っているとすると説明できない。また、最近行われた、格子 QCD 計算と RHIC の STAR 実験での実験結果 [2] との比較においても、粒子収量から決められた温度と、ゆらぎの観測値から推定された温度とに有意な差があるという結果が得られており [5]、重イオン衝突終状態のゆらぎが熱平衡化してないことを示唆している。

これらの結果が意味するのは、重イオン衝突実験で観測されるゆらぎの性質を正しく理解し、また格子 QCD を含む理論計算との比較を適切に進めるためには、衝突で生成された高温物質中でのゆらぎの非平衡性を考慮し、時間発展の様相を正しく記述することが不可避だということである。反面、終状態のゆらぎが熱平衡に至っていないということはまた、観測されるゆらぎが高温物質の時間発展の歴史を記憶しており、それゆえに非平衡性を正しく記述することにより、この観測量を重イオン衝突全体のダイナミクスを理解する新たな情報源として利用できることを示唆している。高温物質中でのゆらぎの時間発展に関しては、ガウスゆらぎ、すなわち 2 次のゆらぎに関しては先行研究が存在する [6] もの、最近注目を集めるようになった高次ゆらぎに関する研究はこれまで行われてこなかった。本研究では、この問題に取り組むため、拡散マスター方程式を用いて高次ゆらぎの時間発展を記述することを試みる [7]。また、この解析で得られる結果を実験で観測されるゆらぎのラピデティ幅依

<sup>1</sup>e-mail address: kitazawa@phys.sci.osaka-u.ac.jp

存性と比較することにより、重イオン衝突終状態におけるゆらぎの物理的性質を正しく理解するための具体的手段を提案する。

## 2 拡散マスター方程式

流体の時間発展を記述する基本方程式である流体方程式は決定論的であり、初期条件を定めればその後の時間発展は一意に決定される。一方、現実の流体においては、マクロにはまったく同じ初期条件から時間発展を開始しても、熱運動などのランダムな運動によって、一定の時刻が経過したあとの物質の状態は流体方程式の解の周りにゆらぎを持って分布することができる。このようなゆらぎを記述する理論的形式として、流体ゆらぎの理論を挙げることができる [8]。この理論では、流体方程式は確率論的な揺動項が付加された、Langevin 型の方程式となる。流体ゆらぎの理論はガウスゆらぎの範囲では様々な問題に適用され、広く成功を収めている。しかし、この形式を非ガウスゆらぎに適用することは、そう自明な問題ではない。ガウスゆらぎに関しては、揺動項が揺動散逸関係で決定するのに対し、高次ゆらぎに関しては同種の自明な関係が存在しないためである。また、重イオン衝突実験が観測するゆらぎは Poisson 分布に近いのだが [1, 2]、流体方程式のように粒子の離散性が粗視化によって消失した形式では、離散系で自然に現れる分布である Poisson 分布に従う高次キュムラントを論じるのが難しいという困難も挙げられる。Poisson 分布に従う高次キュムラントを記述するためには、粒子の離散性を保った枠組みを用いる必要がある [7]。

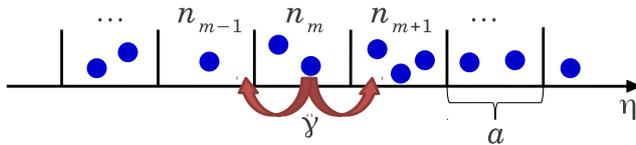


図 1: 拡散マスター方程式 (1) によって記述される系の概念図。

本研究では、このような要請を満たすモデルとして、以下のようなもの採用する [7]。まず、図 1 に示すように空間を長さ  $a$  の離散的なセルに分割し、各セルに存在する粒子が単位時間あたり一定の確率  $\gamma$  で隣接するセルに移動すると仮定する。このとき、 $m$  番目のセルに含まれる粒子数がそれぞれ  $n_m$  である確率  $P(\mathbf{n})$  は、拡散マスター方程式

$$\partial_\tau P(\mathbf{n}, \tau) = \gamma \sum_m [(n_m + 1)\{P(\mathbf{n} + \mathbf{e}_m - \mathbf{e}_{m+1}, \tau) + P(\mathbf{n} + \mathbf{e}_m - \mathbf{e}_{m-1}, \tau)\} - 2n_m P(\mathbf{n}, \tau)], \quad (1)$$

に従う。このモデルで各セルの長さ  $a$  を小さくする連続極限を取れば、各粒子は相互に無相関なブラウン粒子として振る舞う。また、この極限で  $D = \gamma a^2$  が拡散係数に相当するので、極限は  $D$  を固定したうえで取る必要があり、このとき粒子数の期待値及びガウスゆらぎの時間発展は通常の高次キュムラントを解析すれば、重イオン衝突実験の終状態におけるゆらぎと比較することができる。特に、実験では保存電荷のキュムラントをラピデティ幅  $\Delta\eta$  の関数として測定することができるので [1]、 $\Delta\eta$  依存性を (1) 式から得られる結果と比較することで様々な物理を論じることが可能となる。

## 3 高次キュムラントの $\Delta\eta$ 依存性

図 2 に、拡散マスター方程式 (1) で計算された  $Q(\tau)$  の 2 次および 4 次キュムラントの振る舞いを示す。ただし横軸は  $1/X = \Delta\eta/\sqrt{D\tau}$  である。図のそれぞれの線は異なる初期状態に対応しており、左の図が初期状態でゆらぎが全く存在しなかった場合、右図は比較的小さいが有限のゆらぎが存在する

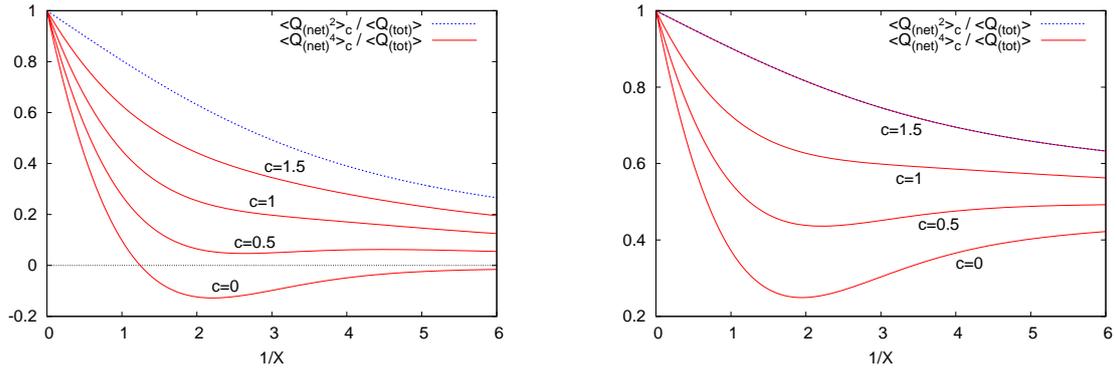


図 2: 時刻  $\tau$  に、ラピディティ幅  $\Delta\eta$  の領域に存在する保存電荷のネット粒子数  $Q_{(net)}$  の 2 次および 4 次キュムラント [7]。横軸は  $1/X = \Delta\eta/\sqrt{D\tau}$ 。

場合である。また  $c$  は初期状態に依存したパラメータ。詳細は文献 [7] に示してある。実験で観測されるゆらぎが固定されたフリーズアウト時刻  $\tau$  のものと思えば横軸は  $\Delta\eta$  に比例するので、これらの結果は実験における各キュムラントの  $\Delta\eta$  依存性と直接比較することができる。

図を見ると、2 次のゆらぎは  $\Delta\eta$  の増大とともに減少していくが、この結果は最近 ALICE で観測された電磁電荷ゆらぎの振る舞い [1] と整合する。一方、4 次キュムラントは広いパラメータ領域に渡って 2 次のゆらぎよりも小さい値を持っている。4 次ゆらぎの  $\Delta\eta$  依存性は現状では観測されていないが、ここで得られた 4 次ゆらぎが 2 次より抑制されるという結果は、高次ゆらぎの測定値に対する最初の理論的予測であり、今後実験的に検証されることが望まれる。

また、図 2 からは、 $\Delta\eta$  の関数としての各次数のキュムラントが初期条件に強く依存して特徴的に振る舞うことが見て取れる。特に 4 次キュムラントは、初期条件によっては単調減少でない振る舞いをするし、負にすらなり得る。このように、高次キュムラントの  $\Delta\eta$  依存性が初期条件に強く依存することは、終状態のキュムラントの  $\Delta\eta$  依存性を観測することで初期状態の性質を実験的に明かにできることを示唆している。このように、各種キュムラントの  $\Delta\eta$  依存性は非常に興味深く重要な観測量であり、今後これらの量の実験的測定が行われることにより、重イオン衝突全体のダイナミクスの理解が深まることが期待される。

## 参考文献

- [1] B. Abelev *et al.* [ALICE Collaboration], Phys. Rev. Lett. **110**, 152301 (2013).
- [2] L. Adamczyk, et al. [STAR Collaboration], arXiv:1309.5681 [nucl-ex].
- [3] V. Koch, arXiv:0810.2520 [nucl-th].
- [4] M. Asakawa, S. Ejiri, and M. Kitazawa, Phys. Rev. Lett. **103**, 262301 (2009).
- [5] S. Mukherjee and M. Wagner, arXiv:1307.6255 [nucl-th].
- [6] E. V. Shuryak and M. A. Stephanov, Phys. Rev. C **63**, 064903 (2001).
- [7] M. Kitazawa, M. Asakawa, H. Ono, arXiv:1307.2978 [nucl-th].
- [8] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Physics: Part 2*, (Pergamon, Oxford, 1980).

## 3 フレーバー PNJL 模型による QCD 相転移の研究

山崎加奈子<sup>1</sup>、松井哲男  
東京大学駒場

### 概要

メソン励起を取り込んだ 2 フレーバー PNJL 模型を 3 フレーバーに拡張し、ゼロ密度で状態方程式の計算を行った。3 フレーバーに拡張したことで、低温相では  $\pi$  中間子の他に  $K$  中間子などのストレンジクォークを含むメソンが現れる。本講演では、低温でのメソンの圧力への寄与の仕方や、相転移に伴いそれらがどう変化するかについて議論する。

## 1 はじめに

クォーク-ハドロン相転移の研究は QCD の重要な課題の一つである。QCD 相転移についての研究は有効模型や格子 QCD 計算で数多く行われているが、ハドロン相とクォーク相の中間領域がどうなっているのか未だ明らかではない。この研究の目的はハドロン相とクォーク相の間で自由度がどう変化するかを知るために、状態方程式の振る舞いを調べることである。我々はクォークと反クォークの場で書かれた有効模型から出発し、クォーク-反クォーク間に相関を取り入れることでメソンを記述する。カイラル相転移と非閉じ込め相転移を同時に扱うため、Nambu-Jona-Lasinio model with the Polyakov loop (PNJL 模型)[1] を用いる。本研究では、2 フレーバー PNJL 模型でメソン励起を取り込み状態方程式の計算を行った我々の先行研究 [2] を 3 フレーバーに拡張し、ストレンジネス自由度を取り込んだ。この報告は [3] に基づく。

## 2 モデルセットアップ

PNJL 模型の分配関数を以下のように導入する。

$$Z(T, A_4) = \int [dq][d\bar{q}] \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}(q, \bar{q}, A_4) \right]. \quad (1)$$

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^3 \bar{q}_i (i\not{D} - \hat{m})_{ij} q_j + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 \quad (2)$$

ここで、4 点相互作用  $\mathcal{L}_4$  は、

$$\mathcal{L}_4 = G \sum_{a=0}^8 [(\bar{q}\lambda^a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\lambda^a q)^2] \quad (3)$$

<sup>1</sup>e-mail address: kyamazaki@nt1.c.u-tokyo.ac.jp

$\mathcal{L}_6$  は

$$\mathcal{L}_6 = -K [\det \bar{q}(1 + \gamma_5)q + \det \bar{q}(1 - \gamma_5)q] \quad (4)$$

である。 $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3) = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ ,  $D_\mu = \partial_\mu + gA_0\delta_{\mu,0}$  で、ゲージ場はダイナミカルな場ではなく外場として取り扱われる。分配関数を計算する際、相互作用にクォーク場の 4 次と 6 次の項があるため、このままではクォーク場についての積分を実行することが出来ない。そこで 4 次と 6 次の項を取り除くため、補助場  $\phi_a, \pi_a$  を導入し、ダミー積分を挿入することでボソン化を行う。この手続きによって、フェルミオン場の最高次が 2 次になり、フェルミオン場についての積分が実行できる。さらに補助場として導入したメソン場の積分を鞍点法で処理することで、熱力学ポテンシャルが温度の関数として以下のように求まる。

$$\Omega(T) = T \left( I_0 + \frac{1}{2} \text{Tr}_M \ln \frac{\delta^2 I}{\delta \phi_a \delta \phi_b} + \frac{1}{2} \text{Tr}_M \ln \frac{\delta^2 I}{\delta \pi_a \delta \pi_b} \right). \quad (5)$$

第一項目は平均場近似に相当し、二項目、三項目がメソン励起の寄与である。

### 3 状態方程式

平均場近似での圧力  $p_{MF}$  は (5) 式の一項目から

$$p_{MF}(T) = p_{MF}^0 + 2 \times 3 \sum_f \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}^2}{3E_f} f_\Phi(E_f) - \mathcal{U}(T, \Phi) \quad (6)$$

となる。 $f_\Phi(E_f)$  はクォークの分布関数で温度と Polyakov ループに依存する。 $\mathcal{U}(T, E_\Phi)$  は高温でグルーオンの圧力を再現するように与えられたポテンシャルである。

メソン励起の圧力は (5) 式の二項目、三項目から

$$p_M = - \sum_n \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left\{ 3 \ln \mathcal{M}_\pi(\omega_n, q) + 4 \ln \mathcal{M}_K(\omega_n, q) + \ln \mathcal{M}_\eta(\omega_n, q) + \ln \mathcal{M}_{\eta'}(\omega_n, q) \right. \\ \left. + \ln \mathcal{M}_\sigma(\omega_n, q) + 4 \ln \mathcal{M}_\kappa(\omega_n, q) + 3 \ln \mathcal{M}_{a_0}(\omega_n, q) + \ln \mathcal{M}_{f_0}(\omega_n, q) \right\} \quad (7)$$

$$\mathcal{M}_M(\omega_n, q) = \frac{1}{2G'_M} - \Pi_M(\omega_n, q). \quad (8)$$

と書ける。 $G'_M$  は各メソンについて 4 点相互作用の結合定数  $G$  と 6 点相互作用の結合定数  $K$  を適当な重みで足したものの、 $\Pi_M$  は各メソンの自己エネルギーである。平均場近似で得られた圧力とメソンの効果を取り込んだ圧力を図 1 に示す。ただしこの計算ではメソンは  $\pi, K, \sigma$  のみを取り込んだ。平均場みの圧力 (図 1, 青) とメソンを取り込んだ圧力 (図 1, 赤) で、低温での振る舞いに顕著な差が現れる。メソンが無い場合、低温では Polyakov ループがクォークの励起を抑えるため圧力はほぼゼロになるのに対し、メソンを取り込んだ場合、Polyakov ループはメソンの励起には効かないためメソンが低温での圧力を支配する。高温になると、メソンを取り込んだ圧力はクォー

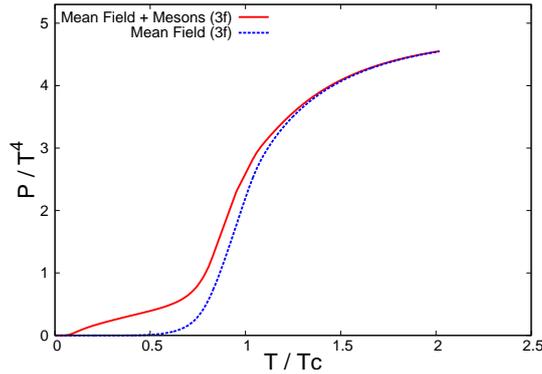


図 1: 圧力の温度変化。赤：メソン励起を取り込んだ圧力。青：平均場の圧力。

クと手で与えたグルーオンが支配する平均場の圧力に近づく。このことはあるところで collective mode としてのメソンが溶け、クォーク-反クォークの熱励起に変わったことを意味している。またこの計算では  $\pi$ ,  $K$ ,  $\sigma$  を取り込んだ計算を行ったが、低温の圧力はほぼ  $\pi$  と  $K$  の寄与から成り、 $\sigma$  からの寄与はほとんど無い。

## 4 まとめ

クォーク-ハドロン相転移を、カイラル相転移と非閉じ込め相転移を同時に取り扱うことが出来る 3 フレーバー PNJL 模型で調べた。SU(3) フレーバー対称性が破れた状況下では、4 種類の擬スカラーメソン ( $\pi$ ,  $K$ ,  $\eta$ ,  $\eta'$ ) と、4 種類のスカラーメソン ( $\sigma$ ,  $\kappa$ ,  $f_0$ ,  $a_0$ ) が異なる質量を持つメソンとして現れる。このうち低温での圧力は  $\pi$  と  $K$  によって支配され、それらのメソンは温度上昇に伴いクォーク・反クォークに溶ける。その結果、十分高温で圧力はクォーク、反クォークと手で与えたグルーオンによって支配される。

## 参考文献

- [1] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591** (2004) 277.
- [2] K. Yamazaki and T. Matsui, Nucl. Phys. A **913** (2013) 19.
- [3] K. Yamazaki and T. Matsui, arXiv:1310.4960.

# AdS/CFT 対応による非平衡定常系の有効温度の解析

名古屋大学大学院理学研究科 中村 真<sup>1</sup>

E-mail: nakamura@hken.phys.nagoya-u.ac.jp

## Introduction

非平衡統計物理学は現代物理学のフロンティアの一つである。特に、平衡から離れ線形応答領域を超えた系の記述に関しては、まだ未知の部分が多い。本研究では、線形応答領域を超えた非平衡定常系において、物理自由度の揺らぎを AdS/CFT 対応の枠組みで解析し、非平衡定常系における有効温度とその振る舞いについて解析した。本稿ではその概要を報告する。

非平衡系は大きく二つに分類することが出来る。一つは時間に依存する系であり、もう一つは非平衡だが時間には依存しない非平衡定常系である。本研究では、後者の非平衡定常系、特に

1. 電場と平行な方向に定常電流の流れる系（定常電流系と呼ぶことにする）
2. 熱浴中を一定の外力によって一定速度で牽引されるテスト粒子の系（ランジュバン系と呼ぶことにする）

について考える。これらの非平衡定常系はいずれも「着目系」「熱浴」および「外力を与える外部系」から構成されている。上記の例では荷電粒子の集合やテスト粒子が着目系に対応する。着目系は一定温度  $T$  の熱浴と接しているものと仮定する。着目系には外部電場や外力が供給されており、熱浴との相互作用により絶えず熱が生成され、非平衡にドライブされている。熱が生成される一方では着目系を定常に保つことができないが、熱生成と同じ割合で熱を熱浴に逃がして着目系の熱収支をバランスさせると、マクロ変数が時間変化しない非平衡定常状態が実現される。熱浴の自由度、つまり熱浴の比熱は十分大きくとり、着目系からの熱流入に関わらず熱浴の温度は一定値を保つものとする。

ここで一つの基本的な問いを考えることにしよう。

熱平衡にある系では、系の巨視的な性質は、温度などのごく少数の巨視的パラメータで特徴づけることができた。それでは、非平衡定常系においても、系を巨視的に特徴づける少数のパラメータは存在するであろうか。そしてもし存在すれば、どのような振る舞いをするのであろうか？

ここでは、この問いをさらに具体化し、非平衡定常状態に温度と類似の概念が存在するか、存在するとしたらどのように定義され、どのように振る舞うのか、について考察する。以後、非平衡定常系における「温度」を「有効温度」と呼ぶことにする。

## AdS/CFT 対応

AdS/CFT 対応とは、あるクラスの強結合量子ゲージ理論を古典重力理論にマップする枠組みである。この対応を用いると、ゲージ理論側の非摂動的解析を重力理論を用いて行うことが可能となり、QCD や物性系への応用に向けた研究がなされている。特に、物性物理学への応用上注目すべき点は、多自由度系の扱いが簡略化され得る点であろう。AdS/CFT 対応を用いてゲージ粒子の多自由度系を重力理論にマップすると、巨視的物理量の従う関係式が、重力理論の古典力学の

<sup>1</sup>本研究はカリフォルニア工科大学 / KIPMU の大栗博司氏との共同研究に基づきます。

関係式として容易に得られる場合がある。また重力理論という異なる描像に移ることで、統計系に対する新たな視点が得られる場合もある。

本研究で特に注目するのは、AdS/CFT 対応による重力理論側での温度概念についてである。通常、平衡系での温度  $T$  を定義するにはいくつかの方法が存在する（以下、 $k_B = 1$  とする。）:

1. 統計分布  $P$  による定義:  $P \propto \exp[-E/T]$   
ここで  $E$  は注目する状態のエネルギーである。
2. 熱力学第一法則による定義:  $dE = TdS$   
 $E$  は系の内部エネルギー、 $S$  はエントロピーである。
3. 揺動散逸定理による定義:  $D = T\mu$   
ここでは例としてブラウン粒子系を考え、「揺らぎ」として拡散係数  $D$  を、「散逸」として易動度  $\mu$  を用いたが、一般に「揺らぎ」と「散逸」の比から温度を決めることができる。

一方、重力理論側では第 4 番目の定義方法が存在する:

4. ホーキング温度による定義:  $\xi^\mu \nabla_\mu \xi^\nu = 2\pi T \xi^\nu$   
ここで  $\xi^\mu$  は時空の Killing vector であり、この式はホライズン上で求めるものとする。ホライズン上において  $\xi^\mu$  は光円錐面に直交する。

これらの平衡系での温度の定義式のうち、非平衡定常系へ一般化可能と思われる定義はどれだろうか。まず、非平衡系では統計分布がどのような形となるのか先験的には非自明であり、1 の定義を採用するのは危険であろう。2 については、非平衡系においても熱力学第一法則が存在するのか、また存在するとしても非平衡系におけるエントロピーをどのように定義したら良いのか、についていずれも非自明であるから、この定義を用いるのも得策ではない。一方、非平衡系においても揺動、散逸は定義・測定可能であるから、少なくとも 3 を用いた定義は可能である。実際、非平衡物理学の研究者の間では、揺動散逸関係式による有効温度の定義が用いられることがある [2]。

本研究での主張は以下の通りである。

- AdS/CFT 対応で非平衡定常系を扱う場合、4 のホーキング温度（ただし、以下で述べるように、通常のブラックホールに対するものとは異なる）による有効温度の定義が自然に現れる。さらに、このホーキング温度による有効温度の定義は、3 の揺動散逸関係式による定義と等価となる。
- 非平衡定常系での揺らぎの相関関数は、この有効温度で特徴付けられる。
- 非平衡にドライブすることで、有効温度が熱浴の温度よりも「低くなる」場合が存在する。

以下、紙数が許す範囲でこれらの主張について説明をしたい。

## 重力側における有効ホライズン

非平衡定常系は「着目系」「熱浴」「外力を供給する外部系」から構成されることは既に述べた。ここで「外部系」については、適切な外力を境界条件等の形で理論に課すことで表現できる。また、重力理論側において、熱浴の構成は比較的容易である。AdS/CFT 対応によれば、熱平衡にあるゲージ理論系は高次元のブラックホール時空に対応することが知られている<sup>2</sup>。そこで重力側にホーキング温度  $T$  のブラックホール時空を用意することによって、温度  $T$  の熱浴を系に用意したことになる。

<sup>2</sup>ここでは非閉じ込め相にあることを仮定する。

AdS/CFT 対応の枠組みでの着目系については、通常、適切なオブジェクトを、このブラックホール時空に挿入することで実現される。例えば、ランジュバン系のテスト粒子は、重力時空の境界からブラックホールのホライズンに向かって伸びる弦で表現される。この場合、境界上の弦の端点には「端点の移動速度  $v$ 」を境界条件として課す。また定常電流系の場合は、着目系は重力時空の境界からホライズンに向かって伸びる D-brane で表現され、D-brane 上には一定の外部電場  $E$  を境界条件として課す。

さてここで、テスト粒子の位置の「揺らぎ」や定常電流系の電流密度の「揺らぎ」に着目することにしよう。これらの揺らぎは、重力理論側における弦の振動や D-brane 上の電磁場の振動として表現される。そこで重力側のこれらの自由度の従う方程式を、非平衡定常状態に相当する解の近傍で求めてみると、以下のような式が得られる：

$$\partial_\mu [\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \partial_\nu \delta x] = 0, \quad (1)$$

$$\partial_\mu [\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu} \delta f_{\nu\rho} \tilde{g}^{\rho\lambda}] = 0. \quad (2)$$

ここで、 $\delta x$ 、 $\delta f_{\mu\nu}$  はそれぞれ弦の微小変位、および D-brane 上の電磁場の field-strength の微小変位であり、変位の 2 次以上の項は無視した。これらの方程式から気づくことは、 $g_{\mu\nu}$  や  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  を計量とみなすと、これらの方程式は曲がった時空上のクラインゴールドン方程式、あるいは曲がった時空上のマクスウェル方程式に他ならないことである。従って、今着目している微小振動は  $g_{\mu\nu}$  や  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  で現される「有効時空」上の自由度と見なすことができる。一般に、この有効時空は、弦や D-brane が挿入された、熱浴を表すブラックホール時空とは異なる時空となっている。

この有効時空上には、これらの微小変位の波動が逃げ出すことのできない領域が存在する。この領域は、ちょうどブラックホールにおける光が逃げ出すことのできない領域に類似しており、ブラックホールのホライズンと同様、微小変位が脱出できる限界の位置が有効時空上に存在する。この限界の位置を「有効ホライズン」と呼ぶことにする。有効ホライズン近傍の微小変位の従う運動方程式は、ブラックホール時空上の場の運動方程式と全く同じ形をしているため、ブラックホールのホーキング輻射と同様に、この有効ホライズンは微小変位を輻射することになる。従って、この微小変位が感じる「ホーキング温度」を「有効ホライズン」上で定義することが出来る。この有効ホライズンで定義されるホーキング温度を「有効温度」と呼ぶことにする。

この有効温度は物理的に意味を成すのであろうか。実際、非平衡定常状態まわりの微小変位の相関関数はこの有効温度に支配されていることを示すことができる。また、非平衡定常状態まわりの揺動散逸関係式に現れる温度は、熱浴の温度ではなく有効温度であることも示される。AdS/CFT 対応では、このような有効温度がホーキング温度の描像で現れることは興味深い。

本研究では、このような有効温度の視点を明確にするとともに、様々な系について具体的に有効温度を外力の関数として計算した。その結果、外力を加えて非平衡にドライブすることで、系の有効温度を周囲の熱浴の温度よりも「下げる」ことが出来る例を多く構成することが出来た。一見、外力を加えることで有効温度が下がることは直観に反するのように感じるが、実はそのような振る舞いを示す物性モデルも構成されており [3]、このような振る舞いは何ら物理的理由で禁止されていない。なお、熱浴の温度と有効温度の差異は、外力の 2 次のオーダーから現れるため、このような効果は線形応答領域を超えて初めて見られる効果である。

本稿では、紙数の関係上、研究の詳細を具体的な形で紹介するよりも、概略を述べる形とさせて頂いた。詳細や、より正確な記述は文献 [1] や、そこで引用されている文献を参考にして頂きたいが、この記事を読まれて詳細に興味を持たれた方々は、遠慮なくコンタクト頂ければ幸いである。

参考文献：

[1] Shin Nakamura and Hiroshi Ooguri, “Holographic Refrigerator,” arXiv:1309.4089 [hep-th]. なお、本稿中の [2][3] は、この論文での引用文献 [9][8] をそれぞれ参照して頂きたい。

# First Order phase transition in Maxwell-Chern-Simon QED<sub>3</sub> in covariant gauge

Yuichi Hoshino, Tomohiro Inagaki, Yuichi Mizutani  
Kushiro National College of Technology, Hiroshima University

October 19, 2013

## Abstract

We study the first order phase transition which is caused by tiny value of the Chern-Simon term above which the chiral order parameter vanishes and parity violating phase remain in three dimensional QED with Chern-Simon term.

## 1 Introduction

IN 1995 Kondo and Maris discussed the parity violating effects of Chern-Simon term in three dimensional QED with Chern-Simon term in Dyson-Schwinger equation with four component fermion and non-local gauge. They argued that there exists critical value of Chern-Simon coefficient  $\theta_c$  above which the chiral order parameter vanishes and parity violating phase remains. Below the critical value  $\theta_c$  chiral symmetry and parity are both broken. In 2011 Raya and his coworkers tried this problem in the Ladder Landau gauge. They obtained the value about  $\theta_c = .008e^2$ . In the gauge covariant approximation which satisfy Ward-Takahashi identity we would like to solve this problem and test the gauge invariance of the results .

## 2 results

We adopted the Ball-Chiu ansatz for the vertex which satisfy Ward-Takahashi identity for the vertex function and the fermion propagator.

$$(p - q)_\mu \Gamma_\mu(p, q) = S^{-1}(q) - S^{-1}(p). \quad (1)$$

Simplest solution of this equation was given by Ball, Chiu(1980). Assuming the following form of the vertex function

$$\Gamma_\mu^L(p, q) = a(p, q)\gamma_\mu + b(p, q)(p + q) \cdot \gamma(p + q)_\mu - c(p, q)(p + q)_\mu, \quad (2)$$

Their solution is given

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^L(p, q) &= \frac{A(p) + A(q)}{2} \gamma_\mu + \frac{A(p) - A(q)}{2(p^2 - q^2)} (p + q) \cdot \gamma (p + q)_\mu \\ &\quad - \frac{B(p) - B(q)}{p^2 - q^2} (p + q)_\mu. \end{aligned} \quad (3)$$

We apply these to the Dyson-Schwinger equation in Euclidean space

$$D_{\mu\nu}^{-1}(p) = D_{0,\mu\nu}^{-1}(p) - Z_1 e^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\gamma_\mu S(q) \Gamma_\nu(q, k) S(k)], \quad (4)$$

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) + Z_1 e^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \gamma_\mu S(q) \Gamma_\nu(q, p) D_{0,\mu\nu}(k), \quad (5)$$

with  $k_\mu = (q - p)_\mu$ . The general form of the dressed fermion propagator  $S(p, \xi)$  and the photon propagator  $D_{\mu\nu}(p, \xi)$  with massless loop correction is given by

$$\begin{aligned} S(p, \xi) &= \frac{i\gamma \cdot p A(p, \xi) + B(p, \xi)}{p^2 A^2(p, \xi) + B^2(p, \xi)}, \\ D_{\mu\nu}(p, \xi) &= (\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}) D^T(p) - \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho} p_\rho}{p^2} D^O(p) + \xi \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} \\ D^T(p) &= \frac{p^2 + c|p|}{(p^2 + c|p|)^2 + \theta^2 p^2}, D^O(p) = \frac{\theta p^2}{(p^2 + c|p|)^2 + \theta^2 p^2}, \end{aligned}$$

where  $c$  is a vacuum polarization function for massless loop  $\Pi^T(p) = e^2/8|p|, c = e^2/8, D^O(p)$  is a parity odd part of the photon propagator. There is a nice explanation about gauge covariant approximation and the Ball, Chiu type vertex function in Ref[1]. Fortunately we find the reasonable solution of Dyson-Schwinger equation in which the discontinuity of the chiral order parameter  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  at  $\theta_c$  indicates first order phase transition in quenched Landau gauge and the case with screening effect by massless fermion loop which was first analysed by Kondo and Maris. The value of  $\theta_c$  is about  $\theta_c \simeq .01e^2$  in both cases. At present we could not get the final answer for the BC vertex by round off error comes from third terms in  $\Gamma_\mu^{BC}(p, q)$ . Detailed results may be shown in[4].

### 3 References

- [1] C.S.Fischer, R. Alkofer, T. Dahm, and P. Maris, Phys.Rev. **D70**:073007, (2004).
- [2] K.I Kondo, P. Maris, Phys.Rev.Lett. 74(1995)18-21, Phys.Rev. D52(1995)1212-1233.
- [3] S.S. Madrigal, C.P. Hofman, A. Raya, J. Phys. Conf. Ser. 287:01208, 2011.
- [4] Y. Hoshino, T. Inagaki, Y. Mizutani in preparation.

# カイラル線形シグマ模型における磁気効果の非摂動くりこみ群を用いた解析

青木 健一, 佐藤 大輔<sup>1</sup>, 山田 雅俊  
金沢大学

## 1 はじめに

一定外部磁場の加わった量子色力学 (QCD) では, その磁場に対してカイラル凝縮が単調に増加する magnetic inhibition (MI) と呼ばれる現象が知られており [1], 格子 QCD シミュレーションでは低温度において実証されている. この現象は, 空間次元の減少と関連させて良く説明される. 古典論では荷電粒子が磁場の方向に巻き付いて横方向の運動が制限されるが, 量子論ではこの横方向の運動量が離散化されて Landau 準位が現れる. 荷電フェルミオンはこの Landau 準位に零モードがあるために, ループ補正の infrared singularity の次数が上がり,  $1+1$  次元の時空間でのものと同じになる. この singularity のために, 平均場近似では必ずカイラル対称性の自発的破れが起こる. これをもって空間次元の減少に関連付けるが, 本当に次元が下がるわけでもない. なぜなら  $1+1$  次元以下では, Mermin–Wegner–Coleman (MWC) の定理により連続対称性の自発的破れは禁止されてしまうからである.

しかし, 最近, 格子 QCD シミュレーションで, カイラル相転移温度が逆に磁場に対して減少する結果が報告された [2, 3]. 低温での結果と相反することから, この現象の理由がいかに非自明かが分かる. ここではこの現象を magnetic inhibition (MI) と呼ぶ [4]. MI を説明する機構として, この報告では福嶋氏と日高氏らの仕事 [4] を取り上げる. 彼らは, MWC の定理に注目した. MWC の定理では, 南部・Goldstone モードの量子補正の infrared singularity が重要になるが, 荷電パイメソンは磁場程度の質量を持ったように振る舞うため脱結合してしまうし, 中性のパイメソン  $\pi^0$  は磁場を感じない. しかし, クォークで構成される  $\pi^0$  の内部構造が効いてくるほどの磁場の強さがあれば,  $\pi^0$  は磁場を感じ, その量子補正の infrared singularity のために対称性が回復する可能性がある. 特に, 有限温度では松原周波数の周期性のためにフェルミオンよりボソンの寄与が支配的になって, MI が起きると考えられる.

我々はこの MI の機構を非摂動くりこみ群 (NPRG) を使って検証する. その定式化の一つとして Wetterich のフロー方程式 [5]

$$\partial_t \Gamma_k[\Phi] = \text{STr} \left( \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi^t} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi} + R_k \right)^{-1} \partial_t R_k \quad (1)$$

を用いる. ここで,  $\Gamma_k[\Phi]$  は量子補正がスケール  $k$  で赤外切断された有効作用で,  $R_k$  はその赤外切断を与える正則化関数である. 今, 紫外から赤外に向かって解くのでくりこみのスケールパラメータを  $t = \log \Lambda/k$  とおいている.  $\Lambda$  は理論を定義する初期スケールで, 理論を定義する作用  $S_0$  を初期条件  $\Gamma_{k=\Lambda} = S_0$  として式 (1) を解けば, フルな量子補正が取り込まれた有効作用  $\Gamma_{k \rightarrow 0} = \Gamma$  が得られる. この方程式を厳密に解くことはできないので近似を用いる必要があるが, この近似を改善する系統的方法を伴うために非摂動現象の解析に威力を発揮する.

<sup>1</sup>e-mail address: satodai@hep.s.kanazawa-u.ac.jp

## 2 線形シグマ模型

MI の検証を行うために、クォーク場  $\psi$  を基本自由度とする NJL 模型の解析を行いたいですが、NPRG を用いた解析では 4-fermi 結合定数の発散をうまく取り扱わなければならない、直接的な方法では難しい [6] . そこで、今回は NJL 模型を補助場の方法を用いてメソン場  $\phi^t = (\sigma, \pi)$  を導入した模型、所謂、線形シグマ模型について、一定外部磁場  $B = (0, 0, B) = \nabla \times \mathbf{A}$  のもとでの解析を行う . 実際には、local potential 近似を改善した以下の有効作用を考える :

$$\Gamma_k[\Phi] = \int_x \left\{ \frac{Z_\phi^\parallel}{2} (\partial_\parallel \phi)^2 + \frac{Z_\phi^\perp}{2} (\partial_\perp \phi)^2 + U_k(\phi) + \bar{\psi} i (\not{D} + \bar{g} \tau^t \cdot \phi) \psi \right\}. \quad (2)$$

ここで、クォークの共変微分を  $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$  とした . メソン場の運動項は磁場  $B$  に対して縦の成分と横の成分の微分  $\partial_{\parallel, \mu} = \delta_{\mu, 4} \partial_4 + \delta_{\mu, 3} \partial_3$  に分け、その係数  $Z_\phi^\parallel, Z_\phi^\perp$  を区別する . これらはメソン場の波動関数くりこみの逆数に対応しており、初期スケール  $k = \Lambda$  で零になるべきである . しかし、それではメソン場の伝播関数の分母が零になって解析できないので、徐々に零に近づけてその極限で得られた結果を採用する .

メソン場に関する有効ポテンシャルは、その最小値を与える点  $\rho_0 = \sigma_0^2/2$  の周りで展開して途中で止める近似を行う :

$$U_k(\phi) \equiv U_k(\rho, \sigma) = \sum_{n=0}^3 \frac{\bar{\lambda}_i}{n!} (\rho - \rho_0)^n - \bar{c}\sigma. \quad (3)$$

ここで  $\rho = (\sigma^2 + \pi^2)/2$  とおいた .  $\bar{c}\sigma$  はカイラル対称性を陽に破る線形項である . 実際には、カイラル極限  $\bar{c} \rightarrow 0$  で評価するが、数値計算の都合でこの線形項を導入した .

ここで解析する模型ではクォークのフレーバー数  $N_f$  を 1 としたので、NG モードの数は一つである . QCD の有効模型としては、 $N_f = 2$  が適しているが、荷電パイメソン  $\pi^\pm$  は磁場程度の質量を持つ一方、中性パイメソン  $\pi^0$  はその影響を受けない . このため、磁場が大きい ( $qB \sim f_\pi^2$  程度) 場合には、 $N_f = 1$  の模型で十分である .

## 3 背景場フロー

有効作用 (2) のくりこみ群発展は、Wetterich 方程式 (1) を背景場の導入により修正した背景場フロー方程式 [7, 8] を用いて評価する . ここでは、背景場フローについて簡単に説明する<sup>2</sup> . 例えばスカラー場  $\phi(x)$  の理論では、通常の正則化関数  $R_k(-\partial^2)$  は微分を引数とするが、この方法では背景場  $\tilde{\phi}$  を導入して定義した有効作用  $\Gamma_k[\phi, \tilde{\phi}]$  の 2 点関数  $\tilde{x} := \frac{\delta^2}{\delta \phi^2} \Gamma_k[\phi, \tilde{\phi}] \Big|_{\phi=\tilde{\phi}}$  を引数にする . この方法は元々、ゲージ不変なくりこみ群フローを得るために導入された . ここでは、背景場と通常の間を同一視する近似を行う :  $\tilde{\phi} = \phi$  . その結果、フロー方程式の左辺が proper-time 表示で表される :

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \frac{1}{x + R_k(x)} \partial_t R_k(x) = -\text{Tr} \int \frac{ds}{s} \partial_t f_k(s) e^{-sx}. \quad (4)$$

ここで、 $f_k(s)$  が proper-time  $s$  について正則化を与える関数であり、 $R_k(x)$  から一意に決まる . 同様にして、フェルミオンの自由度が加わった有効作用 (2) についての背景場フロー方程式が得られる .

この背景場フローの方法の利点は、伝播関数が proper-time 表示で表現できるので、Schwinger の方法 [9] が使えることである . これにより、伝播関数が運動量固有状態で表せるので、微分 (運動量)

<sup>2</sup>詳しくは他の記事で解説する: K.-I. Aoki, D. Sato and M. Yamada in preparation (2013).

展開が容易に行え，運動項の係数についてのくりこみ群方程式の導出が可能となる．最終的には次の有効ポテンシャル  $U_k(\rho, \sigma)$  とメソン運動項の係数  $Z_\phi^\parallel, Z_\phi^\perp$  に関するくりこみ群方程式が得られる：

$$\partial_t U_k(\rho) = \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_p \partial_t f_k(s; a) \left[ -e^{-s(\omega_n^2 + p_3^2 + v_\perp^2 p_\perp^2 + M_\sigma^2)} - e^{-s(\omega_n^2 + p_3^2 + v_\perp^2 p_\perp^2 + M_\pi^2)} + 4N_c e^{-s\left(\nu_n^2 + p_3^2 + \frac{\tanh qBs}{qBs} p_\perp^2 + M_\psi^2\right)} \right], \quad (5)$$

$$\partial_t Z_\phi^\parallel = 4N_c \bar{g}^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_p \partial_t f_k(s; a) s^2 e^{-s\left(\nu_n^2 + p_3^2 + \frac{\tanh qBs}{qBs} p_\perp^2 + M_\psi^2\right)}, \quad (6)$$

$$\partial_t Z_\phi^\perp = 4N_c \bar{g}^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_p \partial_t f_k(s; a) s^2 \frac{\tanh(qBs)}{qBs} e^{-s\left(\nu_n^2 + p_3^2 + \frac{\tanh qBs}{qBs} p_\perp^2 + M_\psi^2\right)}. \quad (7)$$

ここで， $\omega_n = 2n\pi T$ ， $\nu_n = (2n+1)\pi T$ ， $p_\perp^2 = p_1^2 + p_2^2$  とおいた．メソン  $\sigma, \pi$  とクォーク  $\psi$  の質量に対応するものはそれぞれ，

$$M_\sigma^2 = Z_\phi^{\parallel -1} (\partial_\rho U + 2\rho \partial_\rho^2 U), \quad M_\pi^2 = Z_\phi^{\parallel -1} \partial_\rho U, \quad M_\psi^2 = 2\bar{g}^2 \rho \quad (8)$$

と与えられる．proper-time の正則化関数は  $\partial_t f_k(s; a) = (sk^2)^a e^{-sk^2} / \Gamma(a)$  の形をとる．ここで， $\Gamma(a)$  は Gamma 関数である．式 (5)–(7) 中にメソンの横運動量  $p_\perp^2$  の係数として横速度の 2 乗  $v_\perp^2 = Z_\phi^\perp / Z_\phi^\parallel$  が現れる．この小ささが対応するループ補正の infrared singularity の大きさに対応する．

ここでの解析では  $a = 5/2$  に選ぶ．また，ここでは湯川結合定数  $\bar{g}$  の補正を無視している．

実際の解析では，赤外 ( $t \rightarrow \infty$ ) での有効ポテンシャルの最小点  $\sigma_0$  を評価する．この点の値がパイメソンの崩壊定数  $f_\pi$  に一致する．モデルのパラメータとしては，湯川結合定数はクォークの構成質量と  $f_\pi$  との比から  $\bar{g} = 3.2$  と決まる．初期スケール  $\Lambda$  は現実的な有効モデルの値と比べて大きな値に選び ( $\Lambda = 2 \text{ GeV}$ )， $T = qB = 0$  で  $f_\pi = 0.030 \text{ GeV}$  となるように他のモデルパラメータを設定する [10]．ここで，現実的な値から  $\Lambda$  を大きく取り， $f_\pi$  を小さく取ったのはモデルの cutoff artifact を避けつつ，磁場  $qB$  のスケールが  $f_\pi$  より十分大きな領域を調べたいからである．

## 4 結果と議論

異なる外部磁場  $qB$  における  $f_\pi$  の温度  $T$  依存性を計算した結果を図 4 に載せる．この結果から分

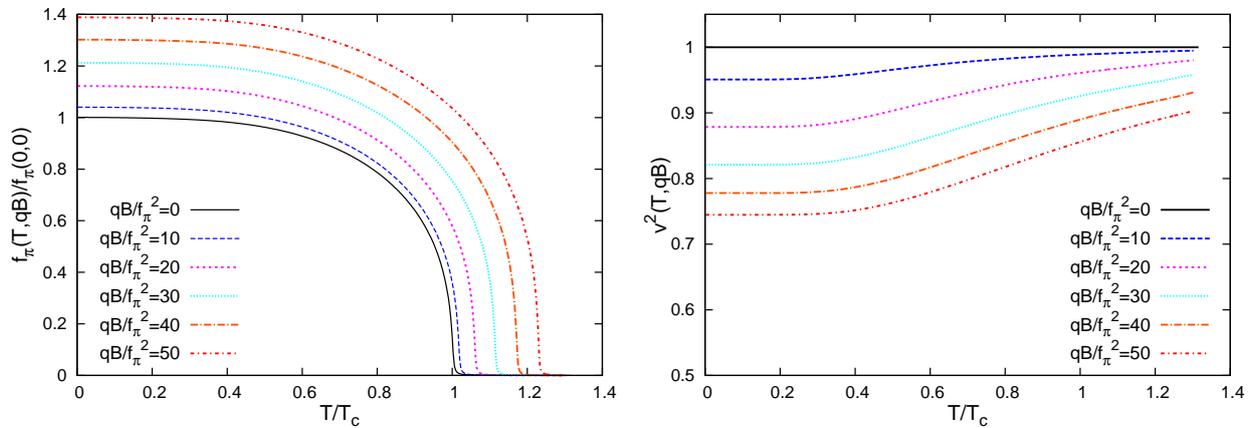


図 1: 左図：崩壊定数  $f_\pi$  の温度依存性．それぞれの線は異なる外部磁場  $qB$  での結果を表す．右図：横運動速度の二乗  $v_\perp^2$  の温度依存性．

かるように，磁場を大きくしても相転移温度  $T_c$  は単調に増加するのみである．したがって，magnetic catalysis(MC) しか見られず，期待された magnetic inhibition(MI) の兆候は現れなかった．実際，MI を引き起こす横速度  $v_{\perp}$  が磁場に対して小さくなりきれていないように思われる．

式 (5) から，クォークの量子補正による MC は横速運動量の 2 乗  $p_{\perp}^2$  の係数  $\tanh qBs/qBs$  が小さくなることから現れると解釈できる．従って，これとパイメソンの量子補正による MI との競合が起きるには，横速度の 2 乗がこの係数と同程度に小さい必要がある：

$$v_{\perp}^2 \sim \frac{k^2}{qB}. \quad (9)$$

ここで  $qB \gg k^2$  と，proper-time  $s$  が  $\partial_t f(s; a)$  のピーク値から  $s \sim k^{-2}$  と見なすことができる事実を使った．今，相転移の次数が 2 次であると仮定しているので，有効ポテンシャル  $U_k(\phi)$  の原点  $\phi = 0$  での振る舞いを調べれば十分である．さらに， $Z_{\phi}^{\parallel}$  と  $Z_{\phi}^{\perp}$  に対するメソンからの補正は小さいとして無視し，Lowest Landau level を取る近似をすると，零温度  $T = 0$  での横速度の 2 乗は

$$v_{\perp}^2 \sim \frac{2k^2}{qB} \log \frac{\Lambda^2}{k^2} \quad (10)$$

となり，式 (9) より大きくなってしまう．この結果，MI は起きないと結論できる．有限温度の場合は自明でないが，クォークの温度方向の半周期性により松原モードに零エネルギーがなくなって横速度  $v_{\perp}$  の減少が抑えられてしまうことから，MI は起きないと考えられる．

零温度での結果は，具体的に秩序変数を評価したわけではないが文献 [1] ですでに指摘されていた．文献 [4] で MI が見える結論に至っていたのは，パイメソンの横運動量に  $\sqrt{qB}$  程度の切断を入れていたからである．実際，我々の解析にこの運動量切断を導入したところ（その結果は示さないが） $T_c$  が磁場に対して非単調な振る舞いを示した．しかし，この様な有限磁場  $qB \neq 0$  における切断とゼロ磁場  $qB = 0$  における切断とを繋げることのできる有効模型は自明でない．

## 参考文献

- [1] V. Gusynin, V. Miransky, and I. Shovkovy, Nucl.Phys. **B462**, 249 (1996), hep-ph/9509320.
- [2] G. Bali *et al.*, JHEP **1202**, 044 (2012), 1111.4956.
- [3] G. Bali *et al.*, Phys.Rev. **D86**, 071502 (2012), 1206.4205.
- [4] K. Fukushima and Y. Hidaka, Phys.Rev.Lett. **110**, 031601 (2013), 1209.1319.
- [5] C. Wetterich, Phys.Lett. **B301**, 90 (1993).
- [6] K.-I. Aoki and D. Sato, PTEP **2013**, 043B04 (2013), 1212.0063.
- [7] D. F. Litim and J. M. Pawłowski, Phys.Rev. **D66**, 025030 (2002), hep-th/0202188.
- [8] D. F. Litim and J. M. Pawłowski, Phys.Lett. **B546**, 279 (2002), hep-th/0208216.
- [9] J. S. Schwinger, Phys.Rev. **82**, 664 (1951).
- [10] J. Braun, Phys.Rev. **D81**, 016008 (2010), 0908.1543.

# Weak Solution of the Non-Perturbative Renormalization Group Equation Encountering the First Order Phase Transition.

Ken-Ichi Aoki, Yasuhiro Fujii, Shin-Ichiro Kumamoto, and Daisuke Sato  
*Institute for Theoretical Physics, Kanazawa University*

## Abstract

We propose quite a new method of analyzing the dynamical chiral symmetry breaking. Starting with the non-perturbative renormalization group equation for the Wilsonian fermion potential, we define the weak solution of it in order to mathematically authorize solutions with singularity. The weak solution successfully predicts the physically correct vacuum, chiral condensates, dynamical mass, through its auto-convexizing power for the effective potential. Thus it works perfectly even for the first order phase transition in the finite density Nambu-Jona-Lasinio model.

## 1 Introduction

We analyze the dynamical chiral symmetry breaking by solving non-perturbative renormalization group equations (NPRGEs) of the Wilsonian effective potential  $V_W(x, t)$  and the mass function  $M(x, t) \equiv \frac{\partial V_W(x, t)}{\partial x}$ , where  $x$  and  $t$  are the bilinear fermion operator  $\bar{\psi}\psi$  and the renormalization scale  $\log(\Lambda_0/\Lambda)$  respectively. These NPRGEs are nonlinear partial differential equations (PDEs). In case that the dynamical chiral symmetry breaking occurs, these PDEs encounter some singularities at  $t = t_c$  even though the initial functions at  $t = 0$  are continuous and smooth. Therefore, we can not go beyond  $t_c$ , and there is no way to calculate infrared physical quantities such as the chiral condensates or the dynamical mass.

Various methods have been used to bypass these singularities, e.g., the bare mass[10], auxiliary fields[3, 4, 9], *etc.* Here we propose a new direct method to solve the NPRGEs as PDEs [14, 15]. Such singular evolutions are unacceptable as classical solutions of the PDEs, but it is known that we can treat such solutions as the weak solutions of the PDEs. Taking the finite density Nambu-Jona-Lasinio model, we construct the weak solutions by using the method of characteristics.

## 2 Partial differential equations and the method of characteristics

The NPRGEs of  $V_W(x, t)$  and  $M(x, t)$  in the local potential approximation are

$$\frac{\partial V_W(x, t)}{\partial t} + f(M, t) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(M(x, t), t)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Here

$$f(M, t) = -\frac{e^{-3t}}{\pi^2} \left[ \theta(e^{-2t} + M^2 - \mu^2) \sqrt{e^{-2t} + M^2} + \theta(-e^{-2t} - M^2 + \mu^2) \mu \right], \quad (3)$$

where  $\mu$  is the chemical potential. The initial conditions are  $V_W(x, 0) = 2\pi^2 g x^2$  and  $M(x, 0) = 4\pi^2 g x$ , where  $g$  is the coupling constant of the NJL 4-fermi interaction. The equation (1) can be viewed as the Hamilton-Jacobi type equation well-known in the analytical mechanics, where  $t$ ,  $x$ ,  $V_W(x, t)$ ,  $M(x, t)$  and  $f(M, t)$  correspond to the time, the coordinate, the the action, the

momentum and the time-dependent Hamiltonian respectively. The equation (2) is derived from the equation (1) and it should be noted that it takes the form of the conservation law, where  $M(x, t)$  and  $f(M, t)$  correspond to the charge density and the current flux.

We obtain the ordinary differential equations (ODEs) equivalent to (1) and (2) by the method of characteristics,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial M}, \\ \frac{dM}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{dV_W}{dt} &= M \frac{\partial f}{\partial M} - f. \end{aligned} \quad (4)$$

The ODEs of  $x(t)$  and  $M(x, t)$  correspond to the canonical equations of Hamilton in the analogy of analytical mechanics. Their solution  $x(t)$  are called characteristics which are also contours of  $M(x, t)$  in this simple case (Fig. 1 (a)). There are regions where three or five contours simultaneously passes at a point, which represent a multi-leaf structure that  $M(x, t)$  seems to have the ‘‘multivalued’’ solution after  $t_c$  (Fig. 1(b)).

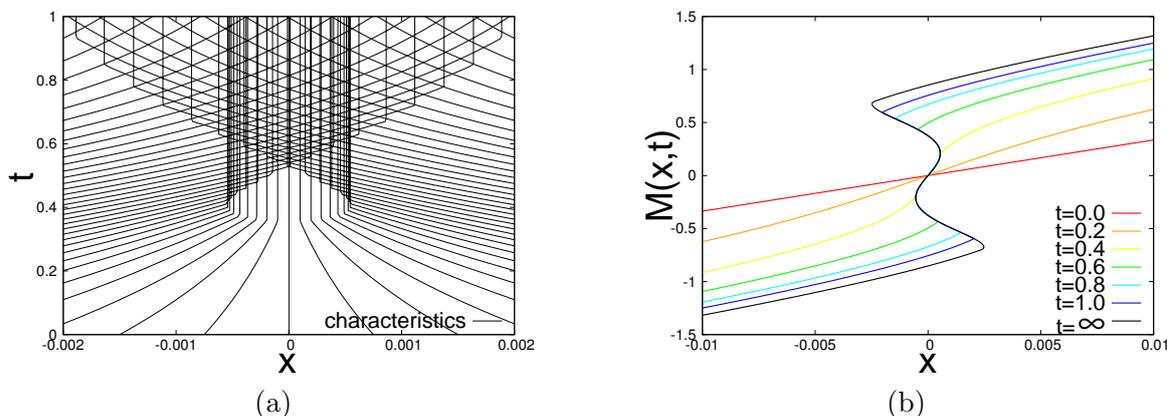


Figure 1:  $g = 1.7g_c$ ,  $\mu = 0.7$ . (a) Characteristics. (b) Evolution of mass function.

### 3 Weak solution of conservation law

The mass function  $M(x, t)$  must be a single-valued function because it is the physical quantity defining the effective action at scale  $t$ . Instead of throwing away the NPRGE description after  $t_c$ , we introduce the weak solution of the PDE (2) [11, 14, 15]. We will make a patchwork of the leaves to define a single-valued function  $M(x, t)$ , but with discontinuities, so that it might be the weak solution.

The integral form of the PDE (2) is

$$\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \left[ \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial f(M, t)}{\partial x} \right] \varphi(x, t) = 0, \quad (5)$$

where  $\varphi(x, t)$  is an arbitrary test function that is continuously differentiable and vanishes at  $x = \pm\infty$  and  $t = +\infty$ . We integrate it by parts and obtain

$$\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \left[ M \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(M; t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \int_{-\infty}^\infty dx M(x, 0) \varphi(x, 0) = 0. \quad (6)$$

In contrast to the equation (5), the equation (6) makes sense even for the discontinuous  $M(x, t)$ . The weak solution of the PDE (2) is defined as to satisfy the equation (6) for any smooth and bounded test function  $\varphi(x, t)$ . The weak solution satisfies the original PDE (2) except for the points of discontinuities. The position of discontinuity  $x = D(t)$ , which is called the shock, is controlled by the Rankine-Hugoniot (RH) condition,

$$\frac{dD(t)}{dt}[M_+ - M_-] = f(M_+, t) - f(M_-, t), \quad (7)$$

where  $M_+$  and  $M_-$  are right and left limits at the position of discontinuity respectively. The graphical interpretation of the RH condition for  $M(x, t)$  is that the discontinuity must cut off lobes of equal area as shown in Fig. 2(a), where the solid lines show the weak solution[12]. In this way we uniquely determine the shock  $D(t)$  which is showed in Fig. 2(b), where two shocks appears pairwise and they move towards the origin to be merged finally.

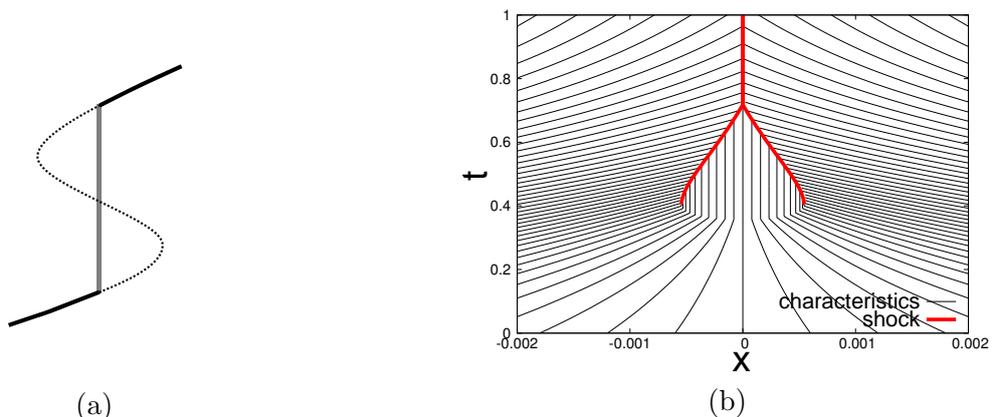


Figure 2: (a) Equal area rule. (b) Characteristics and shock of mass function.

## 4 Weak solution results for physical quantities

We show the results in the finite density NJL model where the first order phase transition occurs. Snapshots in the course of renormalization are shown in Fig. 3, where the mass function  $M(t, x)$ , the Wilsonian effective potential  $V_W(x, t)$  and the Legendre effective potential  $V_L(x, t)$  for  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  are plotted. The five-fold structure of  $M(x, t)$  appears at the second row of Fig. 3, which means a pair of shocks are generated. At the third row, the mass function is five-fold even at the origin, which corresponds to the three-fold local minima in the Legendre effective potential. The time when the two shocks are merged with each other at the origin is exactly the first order phase transition point where the free energy of three local minima coincide. Finally at the fourth row, the chiral symmetry is dynamically broken with the unphysical metastable symmetric phase at the origin.

It is astonishing that our method of weak solution uniquely determines their singularity structures and the resultant Legendre effective potential is always convexized. This means the dynamical mass and the chiral condensates are uniquely calculated, and perfectly correct in the sense that even in case there are multi local minima, the lowest free energy minimum is always chosen automatically. This feature is quite a new finding and shows powerfulness of the purely fermionic non-perturbative renormalization group and its weak solution[15]. This analysis has been applied to QCD, even with finite density or non-ladder, and proved to work perfectly to give physical quantities without any ambiguity[13].

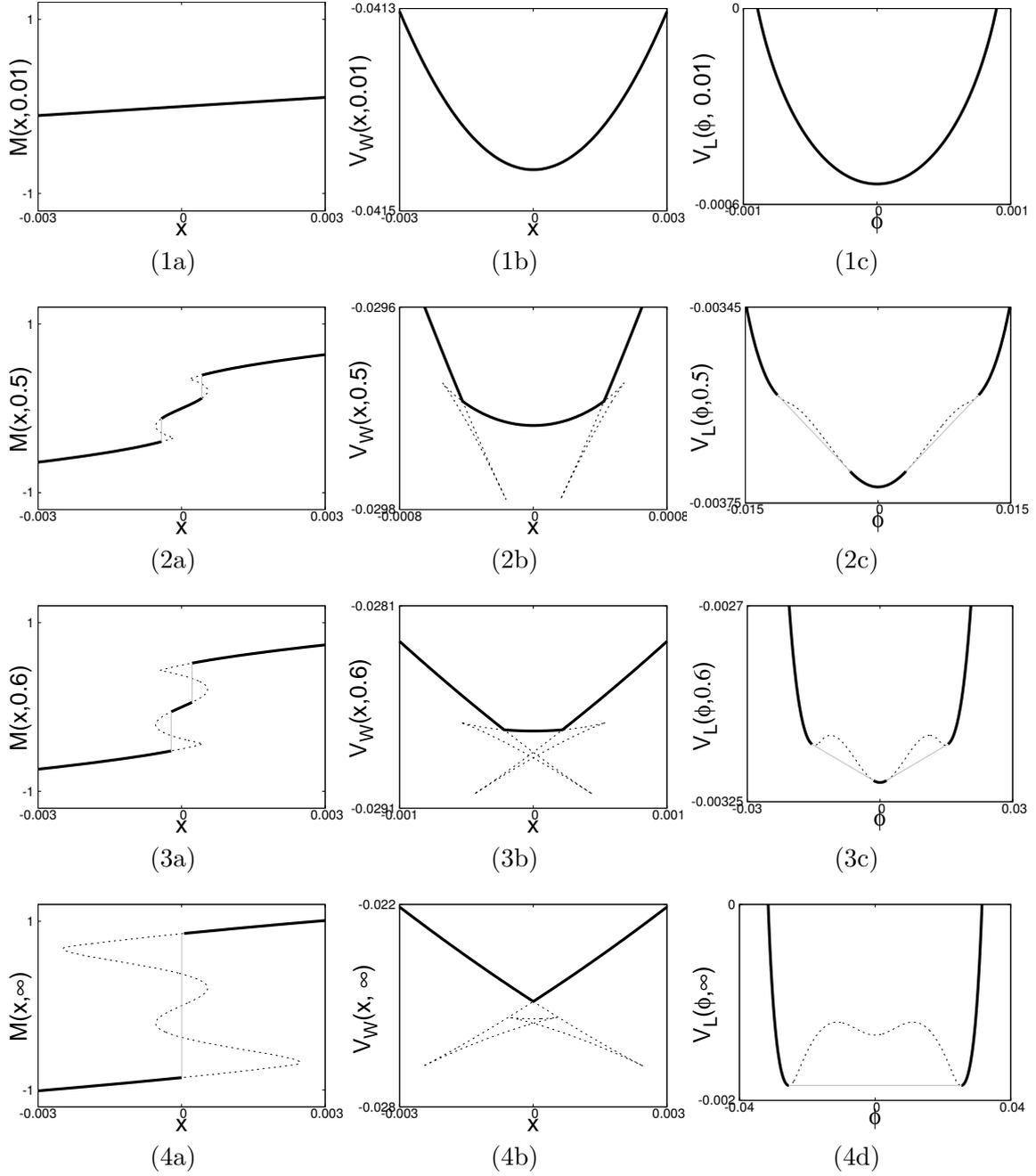


Figure 3: Evolution of physical quantities by weak solution (NJL  $g = 1.7g_c$ ,  $\mu = 0.7$ ,  $t = 0.01, 0.5, 0.6, \infty$ ). (a) Mass function. (b) Wilsonian fermion potential. (c) Legendre effective potential.

## References

- [1] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961).
- [2] F. J. Wegner and A. Houghton, *Phys. Rev. A* **8**, 401 (1973).
- [3] K-I. Aoki, *Proc. SCGT96*, 171 (1996):hep-ph/9706264, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **131**, 129 (1998), *Int. J. Mod. Phys. B* **14**, 1249 (2000).
- [4] K-I. Aoki, K. Morikawa, J.-I. Sumi, H. Terao and M. Tomoyose, *Prog. Theor. Phys.* **102**, 1151 (1999), *Phys. Rev. D* **61**, 045008 (2000).
- [5] J. M. Burgers, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam* **43**, 2 (1940).
- [6] W. J. M. Rankine, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **160**, 277 (1870).
- [7] H. Hugoniot, *de l'École Polytechnique* **57**, 3 (1887).
- [8] H. Hugoniot, *de l'École Polytechnique* **58**, 1 (1889).
- [9] H. Gies and C. Wetterich *Phys. Rev. D* **65**, 065001 (2002).
- [10] K-I. Aoki and K. Miyashita *Prog. Theor. Phys.* **121**, 875 (2009).
- [11] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed. (AMS, 2010).
- [12] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*. (Wiley-interscience publication, 1974).
- [13] K-I. Aoki and D. Sato *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2013**, 043B04 (2013).
- [14] K-I. Aoki and S.-I. Kumamoto and D. Sato, arXiv:1304.3289.
- [15] K-I. Aoki and S.-I. Kumamoto and D. Sato in preparation.

# QCD物質の緩和と相対論的流体方程式の輸送係数

室谷 心<sup>1</sup>

松本大学総合経営学部

相対論的な双曲型流体方程式である Israel-Stewart 方程式の輸送係数を、ハドロンの分子動力学モデルの数値シミュレーションで評価する。ハドロンの分子動力学モデルとしては、確率的衝突事象生成コード URASiMA を用いる。Israel-Stewart 方程式に新たに表れる輸送係数  $\alpha$  や  $\beta$  の振る舞いを議論した。

## 1 はじめに

RHIC での  $v_2$  の振る舞いに対する成功以来、流体モデルは高エネルギー重イオン衝突で生成される QGP の時空発展を記述する現象論的モデルとして、一定の評価を得たといつてよいであろう。多くの場合、現象論として使われているのは QGP に対する完全流体モデルである [1]。完全流体は緩和時間ゼロの理想的な系であり、強く相互作用しているであろう QGP を記述するモデルとしては自然なものである。しかし、次のステップとして緩和の一次のオーダーを取り込むように理論を進めることも解析の自然な進歩であろう。

緩和の影響を取り込んだ流体方程式としてはナビエ・ストークス方程式がよく知られている。しかしながらナビエ・ストークス方程式は時間微分については1階で空間微分については2階の拡散型方程式であり、相対論的に共変になっていない。相対論から要請されるように、時空の扱いが対等になるようにナビエ・ストークス方程式を拡張した方程式として、イスラエルとスチュアートによる因果的流体方程式が知られている。イスラエル・スチュアート方程式には熱力学流について時間の2階微分の項や異なった熱力学流との相互作用項が存在し、時間微分と空間微分が対称に入っていて、相対論的には好ましい形に作られている。これらの新しい項の存在は、通常のナビエ・ストークス方程式にはなかった新しい輸送係数がモデルに存在することを意味し、流体モデルの立場からはこの新しい係数も、流体方程式を解く前に温度や密度といった熱力学量の関数としてあらかじめ与えられているべきものである。イスラエル・スチュアートにしたがって時間の2階微分の項の係数を  $\beta$ 、異なった流れの間の相互作用項の係数を  $\alpha$  と描くことにする。

## 2 輸送係数の微視的な表式

相対論的流体の微視的な表式については、ボルツマン方程式に基づく議論がよくなされているが [4]、ここでは、輸送係数を熱力学量の関数として求める際により扱いやすい、非平衡密度演算子に基づく方法をとる。すでに文献 [5] で議論したように、Nakajima-Zubarev 流の非平衡密度演算子

$$\hat{\rho} = Q^{-1} \exp \left[ \int d\mathbf{x}^\mu \left\{ \beta(\mathbf{x}, t) U^\nu(\mathbf{x}, t) \hat{T}_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) - \beta(\mathbf{x}, t) \mu(\mathbf{x}, t) U^\nu(\mathbf{x}, t) \hat{J}_\nu(\mathbf{x}, t) \right\} \right. \\ \left. - \int d^d \mathbf{x} \int_{-\infty}^t U^\rho dx_\rho e^{\varepsilon(t-t')} \left[ \hat{T}_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t') \partial^\mu (\beta U^\nu(\mathbf{x}, t')) + \hat{J}_\nu(\mathbf{x}, t') \partial^\nu (\beta(\mathbf{x}, t') \mu(\mathbf{x}, t')) \right] \right]$$

からスタートし、熱力学的な力  $\partial^\mu (\beta U^\nu(\mathbf{x}, t'))$  や  $\partial^\nu (\beta(\mathbf{x}, t') \mu(\mathbf{x}, t'))$  の変化は巨視的なものであると考えて、微視的な相関の外に出してやれば、熱力学量を通してのみ場所の関数であるような局所的な係数を持つ時空発展の方程式が得られる。

<sup>1</sup>e-mail address: muroy@matsu.ac.jp

上式右辺の指数関数で第一項目だけとれば熱力学的な力のない局所平衡分布関数  $\rho_l$  となる．エネルギー運動量テンソルの期待値  $\langle T^{\mu\nu} \rangle$ ，電荷流の期待値  $\langle J^\mu \rangle$  を上の非平衡密度行列でとり，熱力学的力の項を無視すれば，局所平衡分布関数  $\rho_l$  の期待値で

$$\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x) \rangle_l = (\varepsilon + P)U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu} \quad (1)$$

$$\langle \hat{J}^\mu(x) \rangle_l = n J^\mu \quad (2)$$

となり，両辺の発散を取れば完全流体の方程式と電荷流保存の式が得られる．非平衡密度演算子の指数部第 2 項の熱力学的な力の部分を展開して，線形応答の範囲で一次までとることにする．展開した演算子の熱力学的力の部分を期待値を取る演算子  $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$  や  $\hat{J}^\mu(x)$  の座標点の周りで展開し 0 次（巨視的变化なので微視的には時空点によらず定数）だけを考えれば，粘性

$$\int d^3 \mathbf{x}' \int_{-\infty}^t dt' e^{(t-t')} (\hat{T}^{\mu\nu}(x), \hat{T}_{\rho\sigma}(x'))$$

や電気伝導率

$$\int d^3 \mathbf{x}' \int_{-\infty}^t dt' e^{(t-t')} (\hat{J}^\mu(x), \hat{J}_\rho(x'))$$

を与えるカノニカル相関の久保公式となる．ここで  $(\hat{O}, O')$  はカノニカル相関である．

さらに座標に関する展開の 1 次までとれば

$$\int d^3 \mathbf{x}' \int_{-\infty}^t dt' e^{(t-t')} (\hat{T}^{\mu\nu}(x), U^\lambda (x'_\lambda - x_\lambda) \hat{T}_{\rho\sigma}(x'))$$

や

$$\int d^3 \mathbf{x}' \int_{-\infty}^t dt' e^{(t-t')} (\hat{T}^{\mu\nu}(x), (x'_\lambda - x_\lambda) \hat{J}_\rho(x'))$$

がイスラエル・スチュアートの流体方程式に現れる輸送係数  $\beta$  や  $\alpha$  を与えることがわかる．つまり，通常の粘性係数や電気伝導率は熱力学流や電荷電流のカノニカル相関の積分で与えられるが，イスラエル・スチュアートの新しい輸送係数は，熱力学流や電荷電流のカノニカル相関に二つの演算子の時間差や距離の重みを付けて積分したものとなる． $\beta$  は時間差の重みを付けて自己相関を取ったものなので，すでに知られているようにそのカレントの緩和時間となる． $\alpha$  は異なったカレントとの相関なのでキュリーの定理で落ちてしまいそうに思えるが，重みとして入った時空間距離が対称性の違いを補償することになる．したがってゼーベック効果やペルティエ効果のような異なったカレント間の相関の効果が現れる．詳しくは [5] を見てほしい．

### 3 HadroMorecular な計算

輸送係数がカノニカル相関で与えられることが解ったので，あとは，これを有限温度場の理論で計算すれば，QGP やハドロン流体の方程式の係数が完全に決まることになる．しかしながらこの計算は，現実問題としては非常に難しいので，ここではハドロンの分子動力学的な計算による評価でとりあえずは我慢することにする．

ここで使うハドロン分子力学系は，散乱衝突事象生成子 URASiMA に基づくものであり [6]，我々は 10 年ほど前に，拡散係数や輸送係数の評価を行った [7]．また，ずれ粘性エントロピー比  $\eta/s$  の評価も行ったことがある [8]．今回この統計力学系を使って，時間や距離の重みの付いたカノニカル相関の評価を試みた．

流れの演算子  $\hat{O}_1$ ,  $\hat{O}_2$  のカノニカル相関積分

$$\langle\langle O_1|O_2\rangle\rangle = \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\zeta(t-t')} \int d^3x' \left( \hat{O}_1(\mathbf{x}, t), \hat{O}_2(\mathbf{x}', t') \right),$$

を考え, そのうちの時間積分だけ残し空間積分を実行した

$$\int d^3x' \left( \hat{O}_1(\mathbf{x}, t), \hat{O}_2(\mathbf{x}', t') \right),$$

を  $\langle \hat{O}_1(t) | \hat{O}_2(t') \rangle$  とする. 分子力学的に評価し, この  $\langle \hat{O}_1(t) | \hat{O}_2(t') \rangle$  の非零領域が有限な時間内におさまっていれば, 時間積分も適切に実行することができる.

温度が 140MeV 程度ハドロンガスの場合についてバリオン数流とずれ粘性の間のクロス相関で現れる  $\alpha$  のための, 相関  $\langle I_B | \mathbf{x} | \pi \rangle$  を計算してみたところ, 図1のようになった.

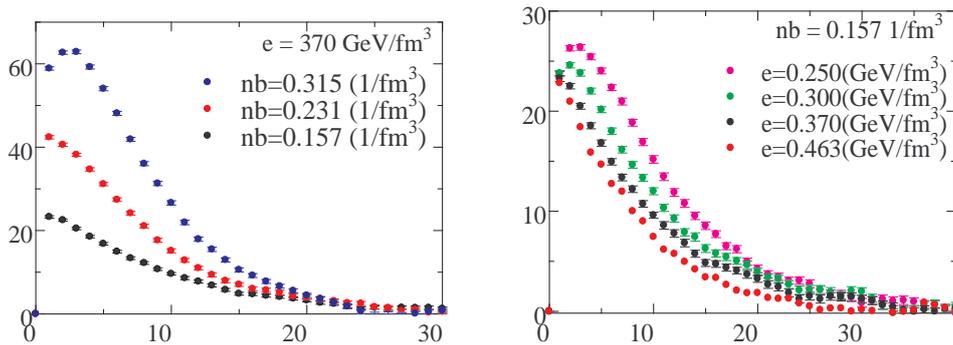


図 1:  $\langle I_B | \mathbf{x} | \pi \rangle$  横軸は時間/fm . エネルギー密度を一定にしバリオン数密度を変えた場合 (左) および, バリオン数密度を一定にしエネルギー密度を変えた場合 (右)

図1のグラフを積分すれば, バリオン流とずれ粘性の間の係数  $\alpha$  を, バリオン数密度とエネルギー密度の関数として求めることができる. 現在, さらに解析を進めているところである.

## 参考文献

- [1] For example see, T. Hirano, N. van der Kolk, A. Bilandzic, Lect. Notes Phys. **785**, 139-178 (2010).
- [2] W. Israel, Ann. of Phys. **100**(1976), 310.
- [3] W. Israel and J. M. Stewart, Ann. of Phys. **118**, 341 (1979).
- [4] K. Tsumura and T. Kunihiro, Phys. Lett. **B690**, 255 (2010); K. Tsumura, T. Kunihiro and K. Ohnishi, Phys. Lett. **646B**, 134 (2007).
- [5] S. Muroya and M. Mizutani, arXiv:1211.7173; see also S. Muroya, Prog. Theor. Phys. Suppl. **193**, 327(2012).
- [6] N. Sasaki, Prog. Thor. Phys. **106**, 783 (2001).
- [7] N. Sasaki, O. Miyamura, S. Muroya and C. Nonaka, Europhys. Lett. **54**, 38 (2001); N. Sasaki, O. Miyamura, S. Muroya and C. Nonaka, Phys. Rev. **C62**, 011901(R)(2000).
- [8] S. Muroya and N. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **113**, 457 (2005).

# 相対論的場の理論における散逸モードの微視的同定

斎藤陽平（高エネルギー加速器研究機構）

本講演は、共同研究 [1] に基づく。詳細な議論については、そちらを参照されたい。

## 1 はじめに

重イオン衝突におけるクォーク・グルオン・プラズマ (QGP) の時間発展 [2] を始め、BEC の低エネルギー励起 [3] や超新星爆発のシミュレーション [4] など、系の相関長  $\xi$  や相関時間  $\tau$  と比べ、はるかに長い空間・時間的スケールの現象を記述する際には、巨視的な有効理論である流体方程式が広く用いられている。流体方程式において、粒子間衝突などの、 $\tau, \xi$  と比べはるかに小さいスケールで起きる過程は積分されて定数（輸送係数）として扱われ、その結果ダイナミクスはエネルギーや運動量といった巨視的な物理量（保存量）で記述される。

次に QCD 臨界点のサーベイなどで重要となる、臨界点近傍におけるダイナミクスに興味がある場合の有効理論を考える。系が臨界点 ( $T = T_c$ ) に近づくと、大きな揺らぎのために秩序変数の相関長  $\xi$  および相関時間  $\tau$  が

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}, \quad \tau \sim \xi^z, \quad (1)$$

のように発散する。特に  $\tau$  の発散は、平衡状態への緩和が非常に遅くなることを意味する。 $\xi, \tau$  の発散に伴い、いくつかの輸送係数も臨界点で発散する<sup>1</sup>。  $T \sim T_c$  でダイナミクスの時間スケールが非常に大きくなる現象を動的臨界現象と呼ぶ。臨界領域における系の振る舞いを調べるには、動的臨界現象の理解が必要不可欠である。また式 (1) 中の  $z$  は動的臨界指数と呼ばれ、秩序変数の相関時間だけでなく、輸送係数の発散も決定する。すなわち、臨界ダイナミクスそのものを特徴づける量である。臨界ダイナミクスは巨視的なスケールの現象ではあるが、相関長・相関時間の発散により、 $\xi, \tau$  よりはるかに大きなスケールを扱う流体方程式は破綻してしまう。しかし臨界領域では系の自由度の時間スケールが分離しており、自由度を遅い変数と速い変数に分けることができる。動的臨界現象は非常に長時間のダイナミクスであるため、系で最も遅い変数である、秩序変数と散逸モード（分散が  $p_0 \propto -ip^2$  で与えられるモード）の時間スケールでみればよい。このとき、他の速い変数は白色ノイズとして扱うことができる。このようなメソスコピックな有効理論（モード結合理論 [7, 8]）は、動的臨界指数  $z$  の評価に大きな成果を上げ、QCD の臨界ダイナミクスにも適用されている [5, 6]。

以上のように、どのスケールの現象に興味があるかによって、用いる有効理論は変わってくる。一方どのようなスケールであろうとも、原理的には微視的な方程式からダイナミクスを理解することは可能である。しかし微視的な理論は粒子同士の衝突を直接扱うため、無数の衝突過程が含まれる巨視的スケールの現象を、単純な摂動論で扱うことは困難である [9]。そこで無数の衝突効果を再足し上げにより取り込むことで、微視的な理論から巨視的スケールの現象を記述することを目指した。二粒子既約 (2PI) 有効作用 [10, 11] は、場の期待値  $\langle \varphi \rangle$  に加え、その 2 点相関関数 ( $\sim \langle \varphi \varphi \rangle$ ) も自己無撞着な方程式で与えることにより、2 点関数までの再足し上げを系統的に行うことができる手法である。本稿では、 $O(N)$   $\varphi^4$  模型を 1PI および 2PI 有効作用の  $1/N$  展開 next-leading-order (NLO) で扱い、 $\varphi$  の 2 点相関関数が長距離・長時間（赤外領域）で散逸モードを持つかどうかを調べる。さらに臨界点における 2 点相関関数から、相関時間  $\tau$  の発散を表す動的臨界指数  $z$  の評価を行う。

## 2 微視的モードの同定

非保存量の秩序変数  $\varphi$  は、現象論的には長距離・長時間で拡散方程式に従う。そのため  $\varphi$  の 2 点関数は、

$$G_{\text{pheno}}(p_0, \mathbf{p}) \sim \frac{1}{-ip_0/\Gamma + \mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (2)$$

の様に散逸的に振る舞う。式 (2) を時間についてラプラス変換すると、 $G_{\text{pheno}}(t, \mathbf{p}) \sim e^{-\Gamma(\mathbf{p}^2 + m^2)t}$  となるため、 $\Gamma$  は緩和時間を与える緩和係数であることが分かる。

<sup>1</sup>例えば、QCD 相転移と同じ普遍性クラスとされている気液相転移 [5, 6] では、ずり粘性係数が発散する。

次に微視的な理論で  $\varphi$  の緩和を扱う。流体描写が有効な平衡状態近傍においては、線形応答理論を適用できる。従って  $\varphi$  の緩和は、平衡状態における  $\varphi$  の遅延相関関数  $G_R(p)$  で与えられる。 $G_R(p)$  は形式的に、 $G_R(p_0, \mathbf{p}) = [-p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m_0^2 - \text{Re} \Sigma_R(p_0, \mathbf{p}) - i \text{Im} \Sigma_R(p_0, \mathbf{p})]^{-1}$  と書けるため、 $\text{Im} \Sigma_R(p)$  が

$$\gamma^{-1} \equiv \lim_{\mathbf{p} \rightarrow 0} \lim_{p_0 \rightarrow 0} \left( \frac{\partial}{\partial p_0} \text{Im} \Sigma_R(p_0, \mathbf{p}) \right) \neq 0, \infty, \quad (3)$$

を満たせば、 $G_R(p)$  は式 (2) の  $G_{\text{pheno}}(p)$  と同様、長距離・長時間（赤外領域）で散逸的に振る舞うといえる。我々は、式 (3) を散逸モードが存在するための条件とした。

本稿では相対論的  $O(N)$   $\varphi^4$  模型

$$S[\varphi] = \int dt d^d x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_a(x) \partial^\mu \varphi_a(x) - \frac{m_0^2}{2} \varphi_a(x) \varphi_a(x) - \frac{\lambda_0}{4! N} (\varphi_a(x) \varphi_a(x))^2 \right], \quad (4)$$

を用いて、式 (3) を評価する。ただし  $m_0, \lambda_0$  は、それぞれ裸の質量と裸の結合定数であり、場の添え字  $a$  は、 $a = 1, \dots, N$  である。また  $O(N)$  対称性から、遅延相関関数  $G_R(p_0, \mathbf{p})$  は、

$$G_R(p_0, \mathbf{p}) \delta_{ab} = G_R^{ab}(p_0, \mathbf{p}) = \int dt d\mathbf{x} e^{i(p_0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \theta(t) \text{Tr} \{ e^{-\beta H} [\varphi_a(t, \mathbf{x}), \varphi_b(0, \mathbf{0})] \}, \quad (5)$$

で与えられる。散逸は熱浴中の粒子との散乱により生じるので、散乱過程が含まれる  $1/N$  展開の NLO を用いる。このとき自己エネルギーのダイアグラムは、図 1 で与えられる。



図 1: 自己エネルギーの  $1/N$  展開 NLO ダイアグラム。点線部分はバブルダイアグラムの足し上げを表している。

ここでバブルダイアグラム  $\Pi$  と、 $\Pi$  を足し上げた相関関数  $D \sim \langle \varphi^2 \varphi^2 \rangle$  を定義する。特に遅延相関関数  $\Pi_R(p)$ ,  $D_R(p)$  は、

$$\Pi_R(p) = \int \frac{dq_0 d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} n(q_0) \rho(q) [G_R(p+q) + G_A(q-p)], \quad (6)$$

$$D_R(p) = \frac{\Pi_R(p)}{1 + \frac{\lambda}{6} \Pi_R(p)}, \quad (7)$$

で与えられる。このとき自己エネルギーの虚部  $\text{Im} \Sigma_R(p)$  は、

$$\text{Im} \Sigma_R(p) = \frac{\lambda}{6N} \frac{\lambda}{6} \int \frac{dq_0 d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \rho(q) \rho_D(p+q) [n(q_0) - n(p_0 + q_0)], \quad (8)$$

となる。ただし  $\rho(p)$ ,  $\rho_D(p)$  はそれぞれ  $G_R(p)$ ,  $D_R(p)$  のスペクトル関数で、 $n(x) = (e^{\beta x} - 1)^{-1}$  である。式 (3) より  $\gamma^{-1}$  は、

$$\gamma^{-1} = -\frac{\lambda}{6N} \frac{\lambda}{6} \int \frac{dq_0 d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \rho(q_0, \mathbf{q}) \rho_D(q_0, \mathbf{q}) n'(q_0), \quad (9)$$

となる。式 (9) より、 $\rho(p)$ ,  $\rho_D(p)$  が積分領域にオーバーラップを持てば、 $\gamma^{-1} \neq 0$  となることが分かる。

まず 1PI 有効作用で評価する。 $\rho(q)$  は質量殻上 ( $q_0^2 - \mathbf{q}^2 = m^2$ ) に  $\delta$  関数のピークを持ち、一方  $\varphi^2$  のスペクトル関数  $\rho_D(q)$  は、 $\varphi^2 \rightarrow \varphi\varphi$  と  $\varphi^2\varphi \rightarrow \varphi$ （およびその逆過程）に対応して、それぞれ  $s = q_0^2 - \mathbf{q}^2 > (2m)^2$  と  $s < 0$  に 0 でない値を持つ（図 2 左）。従って  $\rho(q)$ ,  $\rho_D(q)$  はオーバーラップを持たず、 $\gamma_{\text{1PI}}^{-1} = 0$  となり、1PI NLO で散逸モードは存在しないことが確認できた。

次に 2PI 有効作用で評価を行う。2PI の枠組みでは、2 点相関関数が自己無撞着な方程式 (Kadanoff-Baym 方程式) で与えられる。すなわち自己エネルギーダイアグラムに現れる相関関数は、自由場の相関関数ではなく、相互作用効果の入った相関関数 (full propagator) となる。式 (3) 中のスペクトル関数にも、すでに熱浴との多重散乱効果を取り込まれている。そのため  $\rho(q)$  は  $\delta$  関数ではなく、有限の幅を持つ。また  $\rho_D(q)$  にも同様に熱浴との散乱による効果を取り込まれている。多重散乱効果によるスペクトル関数の広がり进行评估すると、 $\rho(p)$ 、 $\rho_D(p)$  は積分領域のほぼ全領域に 0 でない値を持つことが分かる。従って積分領域にオーバーラップが生じ (図 2 右) 2PI NLO では  $\gamma_{2PI}^{-1} \neq 0$  となる。さらに次元解析などを用いて、 $\gamma_{2PI}^{-1} \neq \infty$  も示すことができる。これらの結果から、散逸モードの導出には多重散乱効果が重要であることが分かった。

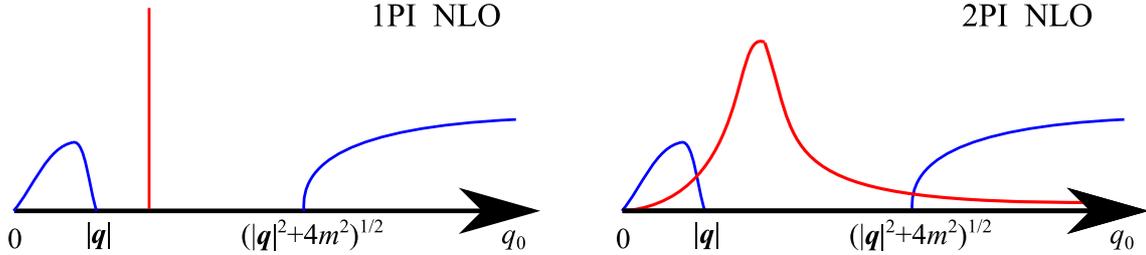


図 2: それぞれ 1PI NLO (左図) と 2PI NLO (右図) について、スペクトル関数  $\rho(q_0, q)$  (赤線) と  $\rho_D(q_0, q)$  (青線) の概形を図示した。ただし 2PI NLO の方は、 $\rho(q_0, q)$  のみ再足し上げの効果を取り入れた概形を描いた ( $\rho$ 、 $\rho_D$  のオーバーラップをみるには、これで十分である)。1PI NLO では二つのスペクトル関数はオーバーラップ領域を持たないが、2PI NLO ではオーバーラップを持つことが分かる。

### 3 動的臨界指数 $z$ の評価

系が臨界点に近づくと大きな揺らぎが生じ、相関長と相関時間が発散する。このとき空間と時間のスケール変換に対する不変性が発生する。特に 2 点相関関数はスケール変換に対して、

$$G_R(p_0, \mathbf{p}) = b^{2-\eta} G_R(b^z p_0, b\mathbf{p}), \quad (10)$$

となる (ただし  $b > 1$ )。ここで  $\eta$  は静的臨界指数で、 $\mathcal{O}(1/N)$  の量である。さらに  $b = \Lambda/|\mathbf{p}|$  とおくと<sup>2</sup>、

$$G_R(p_0, \mathbf{p}) = \left(\frac{\Lambda}{|\mathbf{p}|}\right)^{2-\eta} \cdot G_R\left(\frac{\Lambda^z p_0}{|\mathbf{p}|^z}, \Lambda\right) = \Lambda^{-2} \left(\frac{\Lambda}{|\mathbf{p}|}\right)^{2-\eta} \cdot \tilde{G}_R\left(\Lambda^{z-1} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|^z}\right), \quad (11)$$

となり、動的臨界指数  $z$  が  $p_0$  と  $\mathbf{p}$  の冪の比として得られることが分かる。また  $G_R(p)$  の質量次元が  $-2$  であることを用い、無次元量の関数  $\tilde{G}_R$  を定義した。

臨界点における  $G_R(p)$  の関数形について考察する。赤外領域における 2 点相関関数が散逸的であること、および静的臨界現象による  $\text{Re } \Sigma_R(p)$  の評価を行うと、

$$G_R(p_0, \mathbf{p}) \sim \frac{1}{-i\Gamma^{-1} p_0 + \Lambda^\eta p^{2-\eta}} = \Lambda^{-2} \left(\frac{\Lambda}{|\mathbf{p}|}\right)^{2-\eta} \cdot \frac{1}{-i\Gamma^{-1} \Lambda^{-\eta} p_0 / |\mathbf{p}|^{2-\eta} + 1}, \quad (12)$$

となる。式 (11)、(12) を比較すると、 $z = 2 - \eta$  が得られる。

式 (12) では、緩和係数  $\Gamma$  が臨界点においても定数であると仮定したが、一般的には  $\mathbf{p}$  に依存し得る。緩和係数の主要な寄与を  $\Gamma \sim \Gamma_0 |\mathbf{p}|^{-c}$  と置くと、臨界点における  $G_R(p)$  の関数形は、

$$G_R(p_0, \mathbf{p}) \sim \frac{1}{-i\Gamma_0^{-1} (\Lambda/|\mathbf{p}|)^c p_0 + \Lambda^\eta p^{2-\eta}} = \Lambda^{-2} \left(\frac{\Lambda}{|\mathbf{p}|}\right)^{2-\eta} \cdot \frac{1}{-i\Gamma_0^{-1} \Lambda^{c-\eta} p_0 / |\mathbf{p}|^{2-\eta+c} + 1}, \quad (13)$$

となる。式 (11)、(13) を比較すると、 $z$  を形式的に  $z = 2 - \eta + c$  と書くことができる [1]。

<sup>2</sup>ここで  $\Lambda$  は臨界温度  $T_c$  と同じオーダーの量である。

ここまでが論文 [1] に基づく内容であるが、今回講演者はさらに式 (13) を用いて、自己無撞着に Schwinger-Dyson 方程式を解き、 $c$  の値を求めることを試みた。臨界ダイナミクスは赤外領域の物理で記述されるため、 $\varphi$  の相関関数  $G_R(p)$  だけでなく、 $\varphi^2$  の相関関数  $D_R(p)$  についても、周波数  $p_0$  について 1 次近似をして評価を行った。その結果、動的臨界指数として  $z = 3 + \mathcal{O}(1/N)$  を得た。しかし  $N \rightarrow \infty$  の極限では相互作用が弱くなるため、臨界点でも緩和係数  $\Gamma$  は特異的な振る舞いはせず定数のままであり、従って  $z = 2 + \mathcal{O}(1/N)$  となるはずである。このことから、自己無撞着な方程式による  $c$  の評価は未だ不十分であり、その原因は  $D_R(p)$  を周波数について 1 次近似したことにあると考えられる。

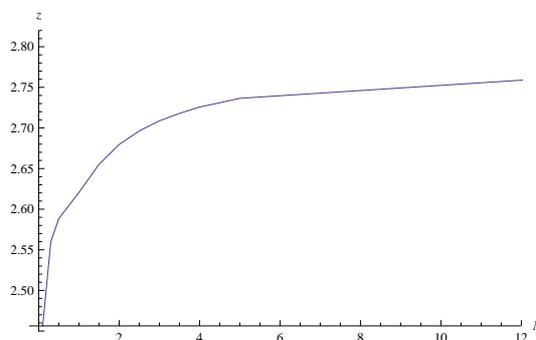


図 3: 臨界指数  $z$  を  $N$  の関数としてプロットした。

## 4 まとめと今後の展望

本稿では、まず相対論的  $O(N)$   $\varphi^4$  模型の  $1/N$  展開を用い、 $T \neq T_c$  における 2 点相関関数  $G_R(p)$  が、赤外領域に散逸モード ( $p_0 \propto -ip^2$ ) を持つかどうかを調べた。その結果、1PI 有効作用の NLO には散逸モードが現れないが、再足し上げによる多重散乱効果を取り込める 2PI 有効作用を用いると、NLO で散逸モードが現れることを確認できた。

続いて、臨界領域における系のダイナミクスを特徴づける、動的臨界指数  $z$  の評価を行った。 $T = T_c$  における 2 点相関関数  $G_R(p)$  の散逸的振る舞いから、我々は  $z = 2 - \eta$  という値を得た。さらに臨界点における緩和係数  $\Gamma$  の運動量依存性 ( $\Gamma \sim \Gamma_0 p^{-c}$ ) を考慮することで、臨界指数の値が  $z = 2 - \eta + c$  と改善されることについても触れた。 $c$  の正確な評価については今後の課題としたい。

## 参考文献

- [1] Y. Saito, H. Fujii, K. Itakura, and O. Morimatsu, arXiv:1309.4892 (2013).
- [2] P. F. Kolb and U. Heinz, in *Quark-Gluon Plasma* (2004), vol. 1, p. 634.
- [3] S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **77**, 2360 (1996).
- [4] T. Takiwaki, K. Kotake, and Y. Suwa, ApJ **749**, 98 (2012).
- [5] H. Fujii, Phys. Rev. D **67**, 094018 (2003).
- [6] D. T. Son and M. A. Stephanov, Phys. Rev. D **70**, 056001 (2004).
- [7] K. Kawasaki, Ann. Phys. **61**, 1 (1970).
- [8] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. **49**, 435 (1977).
- [9] L. P. Kadanoff and P. C. Martin, Ann. Phys. **24**, 419 (1963).
- [10] J. M. Luttinger and J. C. Ward, Phys. Rev. **118**, 1417 (1960).
- [11] J. M. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis, Phys. Rev. **D10**, 2428 (1974).

# 量子電磁力学に基づく原子分子系における時間発展の計算方法の研究

市川和秀<sup>1</sup>、福田将大、立花明知  
京都大学工学研究科

量子電磁力学 (Quantum Electrodynamics, QED) に基づいて原子や分子系の時間発展をシミュレートする方法の定式化を行い、いくつかの近似のもとで水素原子と水素分子について数値計算を行った。その結果、電子電荷密度の時間変化に高速の振動が見られ、その周期は電子質量の2倍の逆数に対応するものであった。この振動は、仮想電子陽電子の対生成対消滅に起因すると考えられる。また、電子の自己エネルギープロセスを考慮するとこの振動の周期は減少することが見いだされた。

## 1 はじめに

QED に基づいて原子や分子系の時間発展をシミュレートするためには、摂動論によって散乱振幅を計算するいわゆる普通の QED では現れなかった状況が生じる。それは、(i) 原子核が存在する、(ii) 物質粒子が束縛状態にある、(iii) 系の発展を時々刻々追う (非平衡系を扱う)、というものである。これらの場の量子論的取り扱い、それぞれではある程度方法が確立されているが、三つの要素を同時に扱う方法はわれわれの知る限り行われていない。以下ではわれわれの試みを紹介する [1, 2]。 (i) については原子核場をシュレディンガー場として電子と光子の QED に追加することを試みているが、本稿では Born-Oppenheimer 近似を採用し、原子核の自由度は扱わないことにする。(ii) については平面波ではなく局在した関数で場の演算子を展開するという対処する。特に、電子場は外場存在下でのディラック方程式の解を展開関数にとる。(iii) については、ハイゼンベルク表示を用いて、場の方程式に従って時間発展を追うことにしている。

## 2 時間発展方程式

電子場を  $\hat{\psi}(x)$ 、光子場を  $\hat{A}_\mu(x)$  で表す。電子場はディラック場の方程式  $i\hbar\gamma^\mu\hat{D}_{e\mu}(x)\hat{\psi}(x) = m_e c\hat{\psi}(x)$  に従う。ここで、ゲージ共変微分は、 $\hat{D}_{e\mu}(x) = \partial_\mu + i\frac{Z_e e}{\hbar c}\hat{A}_\mu(x)$  ( $Z_e = -1$ ) である。上で述べたように電子場を  $\hat{\psi}(ct, \vec{r}) = \sum_{n=1}^{N_D} \sum_{a=\pm} \hat{e}_{n^a}(t)\psi_{n^a}(\vec{r})$  のように展開する。ここで  $\psi_{n^+}(\vec{r})$  と  $\psi_{n^-}(\vec{r})$  は4成分ディラック-ハートリー-フォック (DHF) 方程式の  $n$  番目のそれぞれ電子解と陽電子解で、 $N_D$  はそれら展開関数の数である。これらは  $\int d^3\vec{r}\psi_{n^a}^\dagger(\vec{r})\psi_{m^b}(\vec{r}) = \delta_{nm}\delta_{ab}$  のように正規直交している。この記法では  $\hat{e}_{n^+}$  が電子消滅演算子で、 $\hat{e}_{n^-}$  が陽電子生成演算子である。この展開方法は Furry 表示 [3, 4] と呼ばれるものに類似しているが、われわれは生成消滅演算子の時間発展をエネルギー固有値で決めるということとはしない。これらは同時刻反交換関係  $\{\hat{e}_{n^a}(t), \hat{e}_{m^b}^\dagger(t)\} = \delta_{nm}\delta_{ab}$  に従い、場の方程式に従って時間変化するものとする。ディラック場の方程式に上の展開を代入して得られる生成消滅演算子の時間発展方程式は、

$$i\hbar\frac{\partial\hat{e}_{n^a}}{\partial t} = \sum_{m=1}^{N_D} \sum_{b=\pm} h_{n^a m^b} \hat{e}_{m^b} + \sum_{m,p,q=1}^{N_D} \sum_{b,c,d=\pm} (n^a m^b | p^c q^d ) \hat{e}_{p^c}^\dagger \hat{e}_{q^d} \hat{e}_{m^b} - \frac{1}{c^2} \sum_{m=1}^{N_D} \sum_{b=\pm} \sum_{k=1}^3 \int d^3\vec{r} d^3\vec{s} j_{n^a m^b}^k(\vec{r}) \frac{\hat{j}_T^k(cu, \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|} \hat{e}_{m^b}$$

<sup>1</sup>e-mail address: kazuhide@me.kyoto-u.ac.jp

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sqrt{4\pi\hbar^2}}{\sqrt{c(2\pi\hbar)^3}} \sum_{m=1}^{N_D} \sum_{b=\pm} \sum_{k=1}^3 \sum_{\sigma=\pm 1} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2p^0}} \left[ F_{n^a m^b}^k(\vec{p}) e^k(\vec{p}, \sigma) e^{-icp^0 t/\hbar} \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \hat{e}_{m^b} \right. \\
& \left. + F_{n^a m^b}^k(-\vec{p}) e^{*k}(\vec{p}, \sigma) e^{icp^0 t/\hbar} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^\dagger \hat{e}_{m^b} \right], \quad (1)
\end{aligned}$$

である。ここで、各種係数行列は以下のように定義されている。第1項目の  $h_{n^a m^b} \equiv T_{n^a m^b} + M_{n^a m^b} + \sum_{a=1}^{N_n} (Z_a e) V_{n^a m^b}(\vec{R}_a)$  は、電子運動エネルギー積分  $T_{n^a m^b} \equiv -i\hbar c \int d^3\vec{r} \psi_{n^a}^\dagger(\vec{r}) \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \nabla \psi_{m^b}(\vec{r})$  と電子質量エネルギー積分  $M_{n^a m^b} \equiv m_e c^2 \int d^3\vec{r} \psi_{n^a}^\dagger(\vec{r}) \gamma^0 \psi_{m^b}(\vec{r})$  と核引力積分 (原子核のスカラーポテンシャルへの寄与)  $V_{n^a m^b}(\vec{R}) \equiv (Z_e e) \int d^3\vec{s} \frac{\psi_{n^a}^\dagger(\vec{s}) \psi_{m^b}(\vec{s})}{|\vec{s}-\vec{R}|}$  の和である。第2項目は電子のスカラーポテンシャルへの寄与であるが、ここで二電子積分 ( $n^a m^b | p^c q^d \rangle \equiv (Z_e e)^2 \int d^3\vec{r} d^3\vec{s} \psi_{n^a}^\dagger(\vec{r}) \psi_{m^b}(\vec{r}) \frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|} \psi_{p^c}^\dagger(\vec{s}) \psi_{q^d}(\vec{s})$ ) を定義した。第3項目は、 $\hat{A}_\mu(x)$  を Yang-Feldman 方程式 [5] のように自由輻射場と遅延ポテンシャルの項の和で書いた時の後者からの寄与であるが、本稿ではこれを無視する近似を行っているため、説明は [1, 2] に譲る。よって本稿で考慮する光子場のベクトルポテンシャルの寄与は自由輻射場  $\hat{A}_{\text{rad}}^k(ct, \vec{r}) = \frac{\sqrt{4\pi\hbar^2 c}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sum_{\sigma=\pm 1} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2p^0}} \left[ \hat{a}_{\vec{p}\sigma} e^k(\vec{p}, \sigma) e^{-icp^0 t/\hbar} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} + \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^\dagger e^{*k}(\vec{p}, \sigma) e^{icp^0 t/\hbar} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \right]$  のみである。ここで、 $\hat{a}_{\vec{p}\sigma}$  は運動量  $\vec{p}$  でヘリシティ  $\sigma$  の光子の消滅演算子で、 $\vec{e}$  は偏極ベクトルである。われわれはクーロンゲージを採用している。ここにでてくる積分は電子電流の関数  $j_{n^a m^b}^k(\vec{r}) \equiv Z_e e c \left[ \psi_{n^a}^\dagger(\vec{r}) \gamma^0 \gamma^k \psi_{m^b}(\vec{r}) \right]$  のフーリエ変換で、 $F_{n^a m^b}^k(\vec{p}) \equiv \int d^3\vec{r} j_{n^a m^b}^k(\vec{r}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$  という定義である。これらの積分は展開関数がガウス型関数の和で表されていれば、解析的に行うことができ、その表式はよく知られている。

われわれが計算したい物理量は電子電荷密度演算子  $\hat{\rho}_e(x) = Z_e e \hat{\psi}(x) \gamma^0 \hat{\psi}(x)$  の期待値である。これを生成消滅演算子で表すと、 $\hat{\rho}_e(x) = \sum_{n,m=1}^{N_D} \sum_{a,b=\pm} \rho_{n^a m^b}(\vec{r}) \hat{\mathcal{E}}_{n^a m^b}(t)$  と書け、ここで  $\rho_{n^a m^b}(\vec{r}) \equiv (Z_e e) \psi_{n^a}^\dagger(\vec{r}) \psi_{m^b}(\vec{r})$  で、励起演算子  $\hat{\mathcal{E}}_{n^a m^b} \equiv \hat{e}_{n^a}^\dagger \hat{e}_{m^b}$  を定義した。必要なのは、励起演算子の期待値 (これを密度行列と呼び、 $\mathcal{E}_{n^a m^b} \equiv \langle \Phi | \hat{\mathcal{E}}_{n^a m^b} | \Phi \rangle$  と表す) の時間発展である。(実際には  $t=0$  での物理量の真空期待値がゼロになるように、 $\rho_e(x) = \sum_{n,m=1}^{N_D} \sum_{a,b=\pm} \rho_{n^a m^b}(\vec{r}) \left\{ \mathcal{E}_{n^a m^b}(t) - \mathcal{E}_{n^a m^b}^0(t=0) \right\}$  を計算している。ここで  $\mathcal{E}_{n^a m^b}^0 \equiv \langle 0 | \hat{\mathcal{E}}_{n^a m^b} | 0 \rangle$  である。) 密度行列の閉じた時間発展方程式を得るためには3次以上の演算子の項の期待値を因子分解するなどして近似的に密度行列で表すことが必要である。例えば、スカラーポテンシャルの電子からの寄与の項では  $\langle \hat{e}_{n^a}^\dagger \hat{e}_{p^c}^\dagger \hat{e}_{q^d} \hat{e}_{r^e} \rangle \approx \mathcal{E}_{n^a r^e} \mathcal{E}_{p^c q^d} - \mathcal{E}_{n^a q^d} \mathcal{E}_{p^c r^e}$  とする。自由輻射場の項については、二種類の近似方法を考えている。一つ目は、 $\langle \hat{e}_{n^a}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \hat{e}_{r^e} \rangle \approx \langle \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \rangle \mathcal{E}_{n^a r^e}$  とするもので、初期光子状態がコヒーレント状態 (光子消滅演算子の固有状態) である場合に有限の寄与を与える。この時、密度行列の時間発展は  $\frac{\partial \mathcal{E}_{n^a m^b}}{\partial t} = \mathcal{O}_{n^a m^b}^\dagger + \mathcal{O}_{n^a m^b}$  で、

$$\begin{aligned}
i\hbar \mathcal{O}_{n^a m^b} & = \sum_{r=1}^{N_D} \sum_{e=\pm} h_{m^b r^e} \mathcal{E}_{n^a r^e} + \sum_{r,p,q=1}^{N_D} \sum_{e,c,d=\pm} (m^b r^e | p^c q^d \rangle \left( \mathcal{E}_{n^a r^e} \mathcal{E}_{p^c q^d} - \mathcal{E}_{n^a q^d} \mathcal{E}_{p^c r^e} \right) \\
& - \frac{1}{\sqrt{2\pi^2\hbar c}} \sum_{r=1}^{N_D} \sum_{e=\pm} \sum_{k=1}^3 \sum_{\sigma=\pm 1} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2p^0}} \left[ \mathcal{F}_{m^b r^e \vec{p}\sigma}(t) \langle \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \rangle \mathcal{E}_{n^a r^e} + \mathcal{F}_{r^e m^b \vec{p}\sigma}^*(t) \langle \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \rangle^* \mathcal{E}_{n^a r^e} \right] \quad (2)
\end{aligned}$$

と表される。ここで  $\mathcal{F}_{n^a m^b \vec{p}\sigma}(t) \equiv \sum_{k=1}^3 F_{n^a m^b}^k(\vec{p}) e^k(\vec{p}, \sigma) e^{-icp^0 t/\hbar}$  を定義した。もう一つの近似では、上の因子分解を行わずに、 $\mathcal{E}_{n^a \vec{p}\sigma m^b} \equiv \langle \Phi | \hat{e}_{n^a}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \hat{e}_{m^b} | \Phi \rangle$  の時間発展を密度行列のものと連立させて解くということを行う。この場合は、

$$\begin{aligned}
i\hbar \mathcal{O}_{n^a m^b} & = \sum_{r=1}^{N_D} \sum_{e=\pm} h_{m^b r^e} \mathcal{E}_{n^a r^e} + \sum_{r,p,q=1}^{N_D} \sum_{e,c,d=\pm} (m^b r^e | p^c q^d \rangle \left( \mathcal{E}_{n^a r^e} \mathcal{E}_{p^c q^d} - \mathcal{E}_{n^a q^d} \mathcal{E}_{p^c r^e} \right) \\
& - \frac{1}{\sqrt{2\pi^2\hbar c}} \sum_{r=1}^{N_D} \sum_{e=\pm} \sum_{k=1}^3 \sum_{\sigma=\pm 1} \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{2p^0}} \left[ \mathcal{F}_{m^b r^e \vec{p}\sigma}(t) \mathcal{E}_{n^a \vec{p}\sigma r^e} + \mathcal{F}_{r^e m^b \vec{p}\sigma}^*(t) \mathcal{E}_{r^e \vec{p}\sigma n^a} \right], \quad (3)
\end{aligned}$$

を用いることとなり、これと  $\frac{\partial \mathcal{E}_{n^a \vec{p}_\sigma m^b}}{\partial t} = Q_{m^b \vec{p}_\sigma n^a}^* + \mathcal{P}_{n^a \vec{p}_\sigma m^b}$  と連立させて解くことになる。ここで、

$$i\hbar \mathcal{P}_{n^a \vec{p}_\sigma m^b} = \sum_{r=1}^{N_D} \sum_{e=\pm} h_{m^b r^e} \mathcal{E}_{n^a \vec{p}_\sigma r^e} - \frac{1}{\sqrt{2\pi^2 \hbar c}} \sum_{r=1}^{N_D} \sum_{e=\pm} \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \mathcal{F}_{r^e m^b \vec{p}_\sigma}^*(t) (n_{\vec{p}_\sigma} + 1) \mathcal{E}_{n^a r^e}, \quad (4)$$

$$i\hbar Q_{n^a \vec{p}_\sigma m^b} = \sum_{r=1}^{N_D} \sum_{e=\pm} h_{m^b r^e} \mathcal{E}_{r^e \vec{p}_\sigma n^a}^* - \frac{1}{\sqrt{2\pi^2 \hbar c}} \sum_{r=1}^{N_D} \sum_{e=\pm} \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \mathcal{F}_{m^b r^e \vec{p}_\sigma}(t) n_{\vec{p}_\sigma} \mathcal{E}_{n^a r^e}, \quad (5)$$

で、 $n_{\vec{p}_\sigma}$  はモード  $(\vec{p}, \sigma)$  の光子の占有数である。これを導くのに  $\langle \hat{e}_{n^a}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_\sigma} \hat{a}_{\vec{q}_r} \hat{e}_{r^e} \rangle \approx \langle \hat{a}_{\vec{p}_\sigma} \hat{a}_{\vec{q}_r} \rangle \langle \hat{e}_{n^a}^\dagger \hat{e}_{r^e} \rangle$  や  $\langle \hat{e}_{n^a}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_\sigma} \hat{a}_{\vec{q}_r}^\dagger \hat{e}_{r^e} \rangle \approx \langle \hat{a}_{\vec{p}_\sigma} \hat{a}_{\vec{q}_r}^\dagger \rangle \langle \hat{e}_{n^a}^\dagger \hat{e}_{r^e} \rangle$  のような因子分解を行った。二番目の方法では電子が光子を放出して再吸収するプロセスを考慮していることになり、電子の自己エネルギーの寄与が取り込まれると考えられる。

### 3 結果と展望

上では二つの近似方法を提案したが、それらに従って水素原子と水素分子について電子電荷密度の時間変化を数値計算した。電子場の展開関数は DIRAC コード [6] により DHF 法で基底関数 STO-3G を用いて計算したものを使用している。単位は原子単位系 ( $m_e = e = \hbar = 1$  で  $c = 137.035999679$ ) を使用している。初期状態は DHF 法で得られた基底状態としている。水素原子の原子核の位置は原点とし、水素分子の原子核の位置は  $(x, y, z) = (0, 0, \pm 0.7)$  とした。

図1の左図に一番目の近似方法の結果を示す。水素原子の  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$  における電子電荷密度の時間発展を計算したものである。上パネルは初期状態に光子が無い場合で、周期が  $2\pi/(2m_e c^2) = 1.67 \times 10^{-4}$  の高速の振動が見られ、これを電子陽電子振動と呼ぶことにする [2]。この振動は、仮想電子陽電子の対生成対消滅に起因すると考えられるものである。中と下パネルでは初期光子状態をコヒーレント状態にとった。ここではコヒーレント状態  $|\{\alpha\}\rangle$  の固有値を  $\hat{a}_{\vec{p}_\sigma} |\{\alpha\}\rangle = \alpha(\vec{p}, \sigma) |\{\alpha\}\rangle$  のように書いた時、 $\alpha(\vec{p}, \sigma) = \alpha_j \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_j) \delta_{\sigma, \sigma_j}$  のようにある単一モード  $(\vec{p}_j, \sigma_j)$  のまわりでデルタ関数的になっていることを仮定した。ここでは  $\vec{p}_j$  は  $x$  軸正方向で、 $\sigma_j = +$  にとり、中パネルは  $p^0 = 10$ 、下パネルは  $p^0 = 20$  としたものである。このようなコヒーレント状態は、古典的な振動電磁場に対応していて、その周期が  $p^0$  で  $2\pi/(p^0 c)$  のように決まる。 $p^0 = 10, 20$  は  $4.59 \times 10^{-3}, 2.29 \times 10^{-3}$  に対応し、そのような周期の振動で電子陽電子振動が変調されていることが図に現れている。

図1の右図に二番目の近似方法の結果が示されている。水素原子（上パネル）と水素分子（下パネル）の  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$  における電子電荷密度の時間発展を計算したもので、赤実線は自己エネルギープロセスを考慮しない場合で、緑破線が考慮した場合である。初期状態には光子が無い場合を考えるため、すべてのモードで  $n_{\vec{p}_\sigma} = 0$  である。水素原子・分子いずれの場合も自己エネルギープロセスを考慮すると電子陽電子振動の周期が短くなっていることが見られる。この周期は電子質量の逆数で決まることを考えると、自己エネルギーによって質量が増加したように見え、自己エネルギーの効果として妥当な解釈ができる結果となった。なお、この効果が有限であることは、電子場の展開を有限個の離散スペクトルに限っているためであると考えられる。

今後の課題としては、ベクトルポテンシャルの中の遅延ポテンシャルの寄与を取り入れることがあるが、これは少なくとも二次元の数値積分が時間ステップごとに必要となるため、効率的な近似方法を考案する必要がある。また、自己エネルギーのプロセスを入れた場合のくりこみを行う必要があるが、われわれの設定でどのように行うべきかは未解決の問題である。

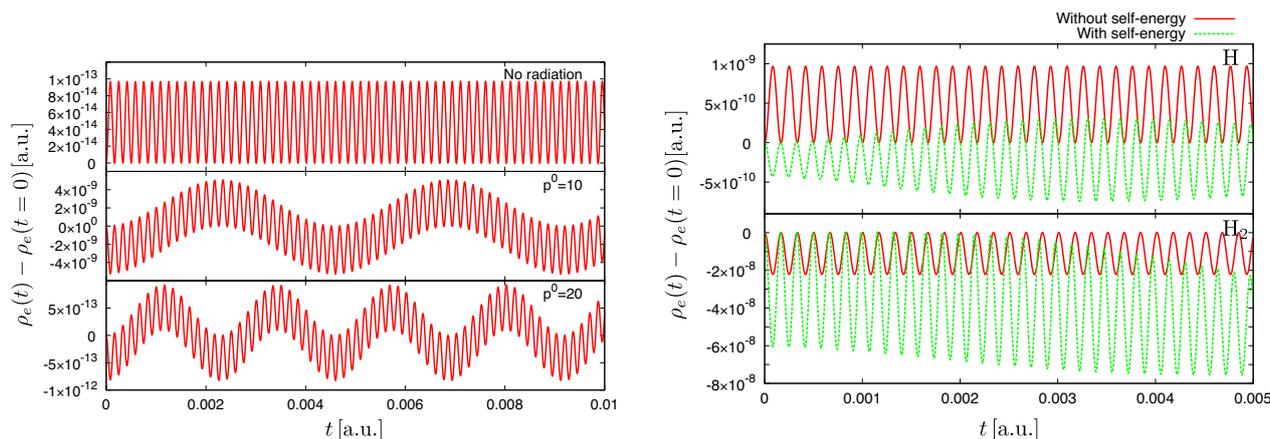


図 1: 左図は水素原子の  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$  における電子電荷密度の時間発展。上パネルは初期状態に光子が無い場合、中(下)パネルは初期光子状態を  $p^0 = 10$  (20) で  $x$  軸正の方向のモードのコヒーレント状態にとった場合を示す。右図は水素原子(上パネル)と水素分子(下パネル)の  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$  における電子電荷密度の時間発展を、自己エネルギープロセスを考慮しない場合(赤実線)と考慮する場合(緑破線)で比較したもの。見易さのため、考慮しない場合の値は、水素原子の場合と水素分子の場合でそれぞれ  $10^4$  倍と  $10^2$  倍されている。

## 参考文献

- [1] A. Tachibana, Field Energy Density In Chemical Reaction Systems. In *Fundamental World of Quantum Chemistry, A Tribute to the Memory of Per-Olov Löwdin*, E. J. Brändas and E. S. Kryachko Eds., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2003), Vol. II, pp 211-239.
- [2] K. Ichikawa, M. Fukuda and A. Tachibana, *Int. J. Quant. Chem.* **113**, 190 (2013)
- [3] W. H. Furry, *Phys. Rev.* **81**, 115 (1951).
- [4] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Relativistic Quantum Theory Part 2*, Pergamon Press, Oxford, 1974.
- [5] C. N. Yang and D. Feldman, *Phys. Rev.* **79**, 972 (1950).
- [6] DIRAC, a relativistic ab initio electronic structure program, Release DIRAC12 (2012), written by H. J. Aa. Jensen, R. Bast, T. Saue, and L. Visscher, with contributions from V. Bakken, K. G. Dyall, S. Dubillard, U. Ekström, E. Eliav, T. Enevoldsen, T. Fleig, O. Fossgaard, A. S. P. Gomes, T. Helgaker, J. K. Lærdahl, Y. S. Lee, J. Henriksson, M. Iliaš, Ch. R. Jacob, S. Knecht, S. Komorovský, O. Kullie, C. V. Larsen, H. S. Nataraj, P. Norman, G. Olejniczak, J. Olsen, Y. C. Park, J. K. Pedersen, M. Pernpointner, K. Ruud, P. Salek, B. Schimmelpfennig, J. Sikkema, A. J. Thorvaldsen, J. Thyssen, J. van Stralen, S. Villaume, O. Visser, T. Winther, and S. Yamamoto (see <http://www.diracprogram.org>)

# 熱的状況下の自由度二重化

山中 由也<sup>1</sup>、中村 祐介<sup>2</sup>、桑原 幸朗<sup>3</sup>  
早稲田大学基幹理工学部

## 1 はじめに

本発表では、非平衡 TFD (Thermo Field Dynamics) [1, 2, 3] の理論構造や妥当性をより深いレベルから理解することを目指して、二つの話題を紹介する。一つは密度行列の立場から、それを超演算子形式にしてどのような物理的条件下で非平衡 TFD に至るかという内容で [3]、もう一つは最近 Galley によって提唱された自由度を二重化する古典力学の定式化 [4] を場の量子論に拡張することによって非平衡 TFD が導かれること [5] である。

熱的状況下の実時間形式場の量子論としては、CTP (Closed Time Path あるいは Keldysh-Schwinger method と呼ばれる) [6] と TFD が知られている。どちらも”自由度を倍加”して  $2 \times 2$ -行列プロパゲーターが用いられることから、同等な理論と受け取られがちであるが、決してそうではない。時間依存演算子の量子論期待値は、相互作用描像で通常の T-積の期待値とならないが、CTP では時間の往路→復路である Keldysh 経路上で順に並べる  $T_c$ -積導入することによって  $T_c$ -積の期待値としている  $\langle \psi_H(t) \rangle = \langle S^{-1} T [\psi(t) S] \rangle = \langle T_c [\psi(t) S_c] \rangle$  ( $S$  は通常の、また  $S_c$  は Keldysh 経路上の S-行列演算子である)。往路上の演算子  $\psi_1$ 、復路上の演算子  $\psi_2$  と表すとき、 $[\psi_1(t), \psi_2^\dagger(t)]_{\mp} \neq 0$  のように一般にお互い (反) 交換しない。つまり、CPT は時間軸の二重化であって、本質的な自由度の二重化ではない。

非平衡 TFD の重要な要素は次の 4 つである：(ア) 自由度の二重化 ( $a \rightarrow a, \tilde{a}$  のようにチルド演算子を導入)、(イ) 物理量は時間依存しない熱的真空の期待値、(ウ) 未定の時間依存個数分布  $n(t)$  の導入、(エ) 相互作用描像で  $2 \times 2$ -行列プロパゲーターに基づく Feynman diagram method で計算された因果グリーン関数に対する繰り込み条件から  $n(t)$  に対する量子輸送方程式の導出。(ア) の自由度二重化の理由は、幾何分布の混合状態期待値 ( $\rho_0 = (1 \mp f) \sum_m f^m |m\rangle$ )、平衡系なら  $f = e^{-\beta\omega}$ ) を熱的真空 ( $\langle 0_{\text{th}} | = \sum_m \langle m, \tilde{m} |$ ,  $|0_{\text{th}}\rangle = (1 \mp f) \sum_m f^m |m, \tilde{m}\rangle$ ) による純粋状態期待値で表すことができると、これまで説明されてきた。

$$\langle F(a, a^\dagger) \rangle = \text{Tr} [\rho_0 F(a, a^\dagger)] = \langle 0_{\text{th}} | F(a, a^\dagger) | 0_{\text{th}} \rangle.$$

倍加された演算子は同時刻で (反) 交換する ( $[a(t), \tilde{a}(t)]_{\mp} = \dots = 0$ ) するので、明らかに自由度の二重化である。

## 2 超演算子形式から非平衡 TFD へ

上の議論で幾何分布という制限は重要である。それなら非平衡 TFD でなぜその分布に限られるのか。また、非平衡 TFD で  $n(t)$  の導入は時間依存 Bogoliubov 変換で実現されるが、Bogoliubov 変換には非自明なパラメーターが存在し、 $n(t)$  以外の 2 つのパラメーターがなぜ固定されて現れないのか。こうした点は、本質的には密度演算子形式である超演算子形式から非平衡 TFD を導くことによって明らかになる。

その導出の詳細は参考文献 [3] に譲る。位相変換対称性を有しかつ自発的にも破れていない系の超演算子形式に対して、次の三つの要請だけで非平衡 TFD が導出される。(r1) 各時刻に準粒子描像が成り

<sup>1</sup>e-mail address: yamanaka@waseda.jp

<sup>2</sup>e-mail address: nakamura@aoni.waseda.jp

<sup>3</sup>e-mail address: a.kuwahara1224@asagi.waseda.jp

立ち、時間と共に変化する非摂動  $\rho_0(t)$  が存在する。(r2) (thermal causality) 因果グリーン関数において巨視的量である  $n(t)$  は未来 (過去) の微視的運動に影響する (しない)。(r3) 長時間経過後、系は熱平衡に緩和する。

(r1) は、非摂動表現が時間と共に変更されるという相互作用描像の新たな定式化である。また、 $\rho_0(t)$  の存在を前提に、次のように TFD の熱的真空に対応させる。

$$\rho_0(t) = \sum_m p_m(t) |m\rangle \langle m| \rightarrow |0_{\text{th}}\rangle, \quad \sum_m |m\rangle \langle m| \rightarrow \langle 0_{\text{th}}|$$

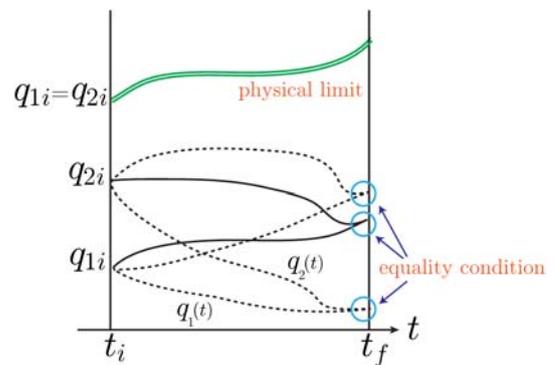
これは Bogolibov 変換に現れる一つのパラメータ  $\alpha(t)$  を  $\alpha(t) = 1$  と固定することにあたる [1]。また、この固定によって Feynman diagram method の使用が可能となる。(r2) によって、残り一つのパラメータが定められ、結局非摂動ハミルトニアン  $\hat{H}$  の虚部は  $\dot{n}$  に比例する項だけになる。最後に (r3) は  $t = \infty$  で成り立つ  $p_{m+1}(\infty)/p_m(\infty) = f(\infty)$  ( $m$  に依存しない) という関係を意味するが、それを使うと任意の時刻で  $p_{m+1}(t)/p_m(t) = f(t)$  成り立つこと、即ち幾何分布となることが証明される [3]。

この超演算子形式の議論から、非平衡 TFD の定式化が導かれることを示した。それは時間とともに変化する幾何分布を持つ密度行列  $\rho_0(t)$  を非摂動状態に採用した理論となっている。

### 3 Galley の古典力学から非平衡 TFD へ

最近非保存 (散逸) 系に対する古典解析力学として、自由度を二重化した Hamilton 原理が Galley によって提唱された [4]。彼の主張は次のようなものである：通常の Hamilton 原理は作用  $S[q]$  に対して、初期時刻  $t_i$  と終期時刻  $t_f$  における仮想変位  $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$  という境界値条件として与えられるが、その原理から導かれる運動方程式は初期値問題として解かれる。しかし、対象系と環境系からなる全体系を考え、環境系を消去して対象系のみ有効理論を導く際、全体系の Hamilton 原理から出発し、初期条件の下で運動方程式を解いて環境系変数を消去して得られる対象系有効理論 (非保存系) ではもはや Hamilton 原理は成立しない。この問題の根源は、Hamilton 原理が終期時刻の座標も用いて定式化されていることにある。

彼は初期時刻の座標だけを用いる次の Hamilton 原理を提案した。(c1) (時間経路二重化) 経路を  $t_i \rightarrow t_f \rightarrow t_i$  とする。 $(t_i \rightarrow t_f$  の座標  $q_1(t)$ 、 $t_f \rightarrow t_i$  の座標を  $q_2(t)$  と表す。)(c2) (初期条件)  $t = t_i$  で条件を課す： $q_1(t_i) = q_{1i}$ 、 $q_2(t_i) = q_{2i}$  (一般に  $q_{1i} \neq q_{2i}$  である)。(c3) (equality condition)  $t = t_f$  では固定しないが、すべての仮想経路で  $q_1(t_f) = q_2(t_f)$ 、 $\dot{q}_1(t_f) = \dot{q}_2(t_f)$  とする。(c4) (physical limit) 導かれる運動方程式の解の中で  $q_1^{\text{sol}}(t) = q_2^{\text{sol}}(t)$  だけが物理的解である。



Galley の Hamilton 原理の重要な点は、初期条件だけが固定されていることと自由度が二重化されていることである。(c1) から CTP 同様の時間軸の二重化と結論するのは間違いである。実際ラグランジアン  $\hat{L} = L(q_1, \dot{q}_1) - L(q_2, \dot{q}_2)$ 、一般化運動量  $p_\mu = \varepsilon_\mu \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_\mu}$  ( $\mu = 1, 2$ ) とから得られるハミルトン形式で次のようにポアソン括弧  $\{A, B\} = \sum_\mu \varepsilon_\mu \left( \frac{\partial A}{\partial q_\mu} \frac{\partial B}{\partial p_\mu} - \frac{\partial A}{\partial p_\mu} \frac{\partial B}{\partial q_\mu} \right)$  ( $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$ ) を定義すると、 $\{q_\mu, p_{\mu'}\} = \varepsilon_\mu \delta_{\mu\mu'}$ 、 $\{q_\mu, q_{\mu'}\} = \{p_\mu, p_{\mu'}\} = 0$  となる。この結論には条件 (C) が本質的であり、結果は  $q_1$  と  $q_2$  が独立な自由度で、自由度二重化になっている。

この新しい Hamilton 原理を場の量子論系に拡張する。これまで CTP や TFD で”自由度を倍加”は量子期待値計算が起源であったのに反し、ここでは既に古典レベルで自由度が二重化されている。場の量子論系への拡張では、equality condition (c3) と physical limit (c4) をどのように実現するかがポイントである。我々は次の 5 つの要請を置くと、得られる理論が非平衡 TFD に他ならないことを示した [5] : (R1)

物理量  $A_H$  (添え字の  $H$  は Heisenberg 描像演算子を示す) は独立な  $\langle \Psi_b |$  と  $|\Psi_k\rangle$  の行列要素  $\langle \Psi_b | A | \Psi_k \rangle$  で与えられる。(R2)  $q_{1H}(t) \leftrightarrow q_{2H}(t)$  と入れ替える操作を記号  $\sim$  で表すことにする。physical limit を、次のように因果グリーン関数が  $\sim$  の下で不変であることに対応させる。

$$(\langle \Psi_b | T[q_{1H}(t_1)p_{1H}(t_2)\cdots] | \Psi_k \rangle)^\sim = \langle \Psi_b | T[q_{2H}(t_1)p_{2H}(t_2)\cdots] | \Psi_k \rangle$$

(R3) equality condition は、次のような  $\langle \Psi_b |$  に対する終期時刻演算子による状態条件で実現することとする。

$$\langle \Psi_b | \left\{ \begin{array}{c} q_{1H}(t_f) \\ p_{1H}(t_f) \end{array} \right\} = \langle \Psi_b | \left\{ \begin{array}{c} q_{2H}(t_f) \\ p_{2H}(t_f) \end{array} \right\}$$

(R4) 前節 (r2) と同じ thermal causality を要請する。(R5) 前節 (r3) と同じ、熱平衡への緩和を要請する。

(R1)~(R3) の要請で前節の (r1)、即ち各時刻に準粒子描像が成り立ち、時間と共に変化する非摂動密度行列が存在する定式化と等価な理論を導くことが出来る。さらに、(R4) と (R5) を追加して非平衡 TFD を導く議論は、前節で (r2) と (r3) を要請したものと同一である。

## 4 まとめ

本論文の議論で、密度演算子形式に対応させるならば、非平衡 TFD は各時刻最適な粒子描像に対応するように時間と共に変化する非摂動表現を取る形式ということが明らかになった。さらに推し進めて、自由度二重化の古典力学の場の理論への拡張という視点に立つなら、非平衡 TFD には密度行列が存在する前提も不要となる。マクロ変化のミクロダイナミクスへの影響の制限である thermal causality と熱力学法則である熱平衡への緩和という二つの物理的要請が、非平衡 TFD 成立について決定的役割を担っている。

## 参考文献

- [1] H. Umezawa, *Advanced Field Theory — Micro, Macro, and Thermal Physics*, (AIP, New York, 1993).
- [2] Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* 326 (2011) 1070.
- [3] Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* 331 (2013) 51.
- [4] C. R. Galley, *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013) 174301.
- [5] Y. Kuwahara, Y. Nakamura and Y. Yamanaka, “From Classical Mechanics with Doubled Degrees of Freedom to Quantum Field Theory for Nonconservative Systems”, to be published in *Phys. Lett. A* (arXiv:1307.1235 [quant-ph]).
- [6] J. Schwinger, *J. Math. Phys.* 2 (1961) 407; L. V. Keldysh, *Sov. Phys. JETP* 20 (1965) 1018; L. P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, (Benjamin, New York, 1962); P. Danielewicz, *Ann. Phys. (N.Y.)* 152 (1984) 239; K. Chou, Z. Su, B. Hao and L. Yu, *Phys. Reports* 118 (1985) 1; T. Kita, *物性研究* 90 (2008) 1; *Prog. Theor. Phys.* 123 (2010) 581-658.

# 高温高密度多フレーバー QCD における一次相転移の終点

江尻信司<sup>1</sup>

新潟大学大学院 自然科学研究科

多フレーバー QCD によるテクニカラー模型が実現した場合、その模型の電弱相転移が強い一次相転移になり、電弱バリオン生成シナリオが実現可能かどうか興味深い。本研究では2つの軽いフェルミオンと  $N_f$  個の重いフェルミオンが存在する系で、有限温度相転移の次数がその質量の関数としてどのように変化するかを議論する。その結果、 $N_f$  が大きくなるにつれて、さらに、化学ポテンシャルが大きくなるにつれて、一次相転移の領域が広がることが分かった。

## 1 多フレーバー QCD によるテクニカラー模型

ヒッグス粒子が複合粒子であるかどうか関心がもたれている。その複合ヒッグス模型の代表例であるテクニカラー模型が、多フレーバー QCD によって構築できるかどうかを調べるために、現在、いくつかの研究グループによって格子 QCD の数値シミュレーションが行われている。そこで、もしそのテクニカラー模型が実現した場合、次の段階として、その模型の電弱相転移が強い一次相転移になり、宇宙初期での電弱バリオン生成のシナリオが描けるかどうか興味深い [2]。素粒子標準模型での電弱相転移の次数については、一次相転移にならないことが分かっている [3]。

ゲージボゾンに吸われる3種類を除き、実験で検証可能なエネルギー領域にテクニ・南部・ゴールドストーン (NG)・ボゾンはないので、ゲージボゾンに吸収される NG ボゾンを作る質量ゼロの2フレーバーが質量ゼロで、そのほかのテクニ・フェルミオンの質量は実験にかからによる重さでなければならぬ。また、QCD 相転移の知識から、3フレーバー以上の QCD の有限温度相転移は、カイラル極限で一次相転移なので、すべての質量が軽い領域で一次相転移になるはずである。2種類だけ質量ゼロの場合は二次相転移、さらに、どの質量も軽くない場合はクロスオーバーになることが推測される。その場合、どの質量までが一次相転移で、電弱バリオン生成を引き起こすことができるかを数値シミュレーションで調べることが重要である。

## 2 ヒストグラム法による一次相転移の終点の測定

本研究では、質量  $m_l$ 、化学ポテンシャル  $\mu$  の2つの軽いフェルミオンと、質量  $m_h$ 、化学ポテンシャル  $\mu_h$  の  $N_f$  個の重いフェルミオンが存在する系で、有限温度相転移の次数がその質量の関数としてどのように変化するかを議論する。2フレーバーのシミュレーションを行い、残りの  $N_f$  個のフェルミオンの動的効果は reweighting 法によって取り入れる。 $N_f$  が十分大きい場合に、プラケット変数  $P$  のヒストグラムを計算して、その形から相転移の次数を判定する。一次相転移の場合は、相転移点で2つの相が等確率で実現するので、確率分布関数は2つの異なる  $P$  でピークを持つはずである [4, 5, 6]。

以下のように定義された  $P$  についての確率分布関数 (ヒストグラム) を考える。

$$\begin{aligned} w(P; \beta, m_l, \mu, m_h, \mu_h) &= \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \delta(P - \hat{P}) e^{-S_q - S_g} \\ &= \int \mathcal{D}U \delta(P - \hat{P}) e^{6\beta N_{\text{site}} \hat{P}} (\det M(m_l, \mu))^2 (\det M(m_h, \mu_h))^{N_f} \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup>e-mail address: ejiri@muse.sc.niigata-u.ac.jp,  
この報告は KEK の山田憲和氏との共同研究 [1] に基づいています。

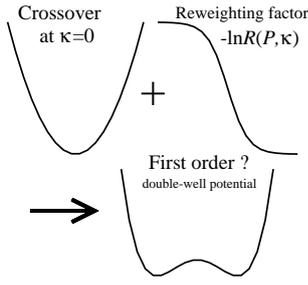


図 1: reweighting 法による有効ポテンシャルの変化。

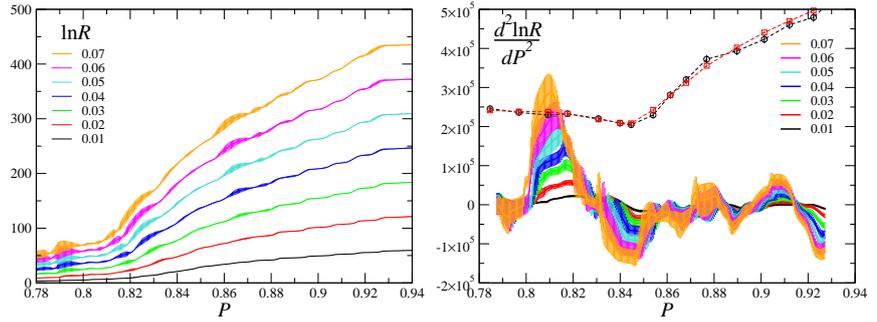


図 2: 左: プラケットの関数とした  $\ln R(P; h, 0)$ 。右: 実線は  $\ln R(P; h, 0)$  の曲率。印と印付破線は  $d^2 V_0 / dP^2(P)$ 。

ここで、 $S_g$ 、 $S_q$  はゲージ場とクォーク場の作用で、 $M$  はクォーク行列、 $N_{\text{site}} \equiv N_s^3 \times N_t$  は格子数、 $\beta = 6/g_0^2$  はシミュレーションパラメータである。 $\delta(P - \hat{P})$  は演算子  $\hat{P}$  を値  $P$  に拘束するという意味である。 $\hat{P}$  は一般化されたプラケットで、改良されたゲージ場の作用にも適用できるように、 $\hat{P} = -S_g / (6N_{\text{site}}\beta)$  と定義する。標準作用の場合は  $1 \times 1$  Wilson loop である。さらに、有効ポテンシャルを  $V_{\text{eff}}(P; \beta, m, \mu) = -\ln w(P; \beta, m, \mu)$  と定義する。

2 フレーバー QCD ( $m_h = \infty$ ) から reweighting 法で有効ポテンシャルを求めるとすると、

$$V_{\text{eff}}(P; \beta, m, \mu) = V_0(P; \beta_0) - \ln R(P; \beta, m, \mu; \beta_0) \quad (2)$$

で得られる。ここで、 $V_0(P; \beta)$  は  $\mu = 0$  での 2 フレーバー QCD の有効ポテンシャルで、 $R$  は

$$\ln R(P; \beta, m, \mu; \beta_0) = 6(\beta - \beta_0)N_{\text{site}}P + \ln \left\langle \left( \frac{\det M(m_l, \mu)}{\det M(m_l, 0)} \right)^2 \left( \frac{\det M(m_h, \mu_h)}{\det M(\infty, 0)} \right)^{N_f} \right\rangle_{P:\text{fixed}} \quad (3)$$

である。 $\langle \dots \rangle_{P:\text{fixed}} \equiv \langle \delta(P - \hat{P}) \dots \rangle_{\beta_0} / \langle \delta(P - \hat{P}) \rangle_{\beta_0}$  は  $P$  を固定した期待値で、 $\langle \dots \rangle_{\beta_0}$  は  $\mu = 0$  の 2 フレーバー・シミュレーションを  $\beta_0$ 、 $m_l$  で実行したときの期待値である。 $\beta_0$  はシミュレーション点で  $\beta$  と違ってよい。図 1 に一次相転移が現れるときの予想を図示した。2 フレーバーで質量がゼロでないときはクロスオーバーなので常に有効ポテンシャルは  $P$  について 2 次関数 (分布関数はガウス分布) で、 $\ln R$  が大きな曲率をもった関数なら、有限質量で W 型 (分布関数が 2 山) になり得る。 $\kappa$  はホッピングパラメータで、質量の逆数に比例するものである。式 (3) から、 $M$  があらわに  $\beta$  に依らない場合、 $\beta$  の依存性は  $P$  の 1 次項にしか現れない。2 階微分  $d^2 V_{\text{eff}} / dP^2$  に注目すれば、 $\beta$  の依存性がなくなり、 $V_{\text{eff}}$  の形を議論する際に  $\beta$  を相転移点に調節する必要がなくなる [4]。 $V_{\text{eff}}(P)$  の最小点は  $\beta$  の選び方でどこにでもできるので、 $d^2 V_{\text{eff}} / dP^2$  の曲率が負になる  $P$  の領域があれば、W 型ポテンシャル、一次相転移という意味である。さらに、2 フレーバーの  $d^2 V_0 / dP^2$  の計算は、ガウス分布になることを仮定すれば、ヒストグラムを描いて求める必要もなく、 $d^2 V_0 / dP^2 = 6N_{\text{site}} / \chi_P$  から簡単に得られる。 $\chi_P$  は  $P$  の感受率、 $\chi_P \equiv 6N_{\text{site}} \langle (P - \langle P \rangle)^2 \rangle$  である。

ここで、 $N_f$  フレーバーは重いと仮定する。式 (3) の 2 番目の行列式は、標準 Wilson フェルミオンの場合、質量の逆数  $\kappa_h$  の展開の初項で、

$$\ln \left[ \frac{\det M(\kappa_h)}{\det M(0)} \right] = 288N_{\text{site}}\kappa_h^4 \hat{P} + 12N_s^3 (2\kappa_h)^{N_t} \left[ \cosh(\mu_h/T) \hat{\Omega}_R + i \sinh(\mu_h/T) \hat{\Omega}_I \right] + \dots \quad (4)$$

と近似できる。ここで、 $\hat{\Omega}_R$ 、 $\hat{\Omega}_I$  は Polyakov loop の実部と虚部である。その近似を用いて、図 2 は、[7] で得られた配位で計算したゼロ密度の  $\ln R(P)$  (左図)、 $d^2 V_0 / dP^2(P)$  (右図の赤と黒の破線) と

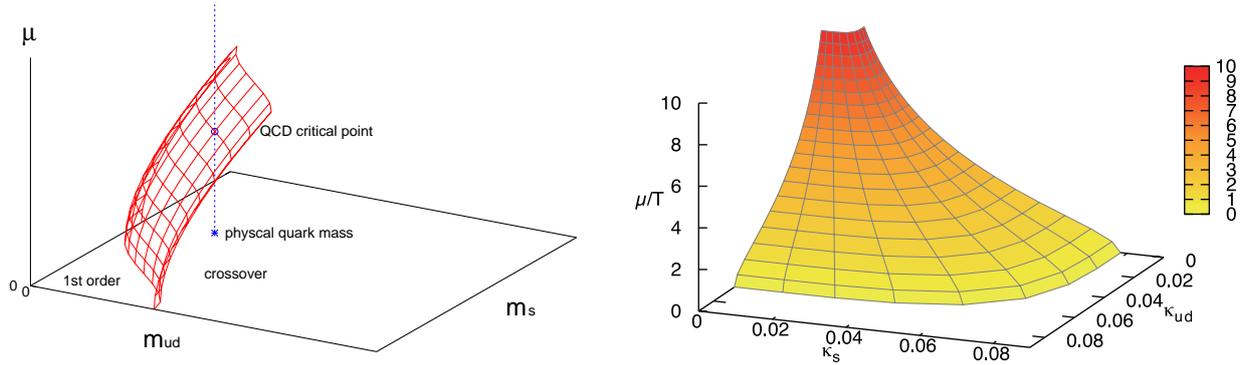


図 3:  $m_{ud}$ ,  $m_s$ ,  $\mu$  の関数とした相転移温度での相転移の次数の変化。左がクォーク質量が軽い領域の臨界面の予想図で、右が [8] で計算されたクォークが重い領域の臨界面。

ゼロ密度の  $d^2 \ln R/dP^2(P)$  (右図の誤差棒付の実線) の結果である。(p4-improved staggered action、擬スカラー・ベクトル・メソン質量比  $m_{PS}/m_V \approx 0.7$ 、格子数  $16 \times 4$  で配位を生成した。)  $h$  は重いフェルミオンの質量を表すパラメータで、グラフの色で  $h$  を表し、値を図の脇に書いた。Wilson フェルミオンの場合、 $h = 2N_f(2\kappa_h)^{N_t}$  が定義である。 $h$  が 0.06 を超えると、 $P \approx 0.81$  あたりで  $d^2 V_{\text{eff}}/dP^2 = d^2 V_0/dP^2 - d^2 \ln R/dP^2$  が負になることが分かる。これは有効ポテンシャルがW型になることを意味している。ちょうど  $P$  の一点だけで  $V_{\text{eff}}(P)$  曲率ゼロになる  $h$  の臨界点を見積もると、臨界点は、 $h_c = 0.0614(69)$  であることが分かった。

フェルミオンが重いという近似では、 $\kappa_h$  は  $h$  の中にしか現れず、臨界点での  $\kappa_h^{\text{crit}}$  の  $N_f$  依存性は、

$$\kappa_h^{\text{crit}} = \frac{1}{2} \left( \frac{h_c}{2N_f} \right)^{1/N_t} \quad (5)$$

となる。このことから、 $N_f$  が大きくなるにつれて、 $\kappa_h^{\text{crit}}$  が小さくなることが分かる。ここで用いた  $\kappa_h$  が小さいという近似も、 $N_f$  がある程度以上大きければ正当化される。得られた結果をまとめると、質量を無限大から減少させたところ、かなり重い質量でクロスオーバーから一次相転移になった。その一次相転移になる質量は  $N_f$  が増加するにつれて大きくなることが分かった [1]。

### 3 QCD 相転移の理解へのフィードバック

$N_f$  がある程度大きければ、2 フレーバーの配位 ( $\kappa_h = 0$ ) からの reweighting で簡単に臨界質量の計算ができることが分かった。この性質を用いて、現実の QCD 相転移に近いアップ・ダウン・ストレンジの動的クォークを含む 2+1 フレーバー QCD の相転移の理解へ、フィードバックを考える。

低密度でクロスオーバーであった QCD の相転移が、ある密度で二次相転移になり、さらに高密度で一次相転移になることが予想されていて、その相転移の次数が変わる臨界点を見つけることが、現在、理論・実験どちらからも注目されている。格子 QCD のシミュレーションで素朴に化学ポテンシャルを大きくすると、符号問題が起きて数値計算ができなくなるので、温度、密度だけでなく、クォーク質量もパラメータとして、密度ゼロから徐々に臨界点の質量依存性を調べることによって、現実世界の臨界点を議論することは有効な手段である。図 3(左) は、QCD 相転移に關与する、アップ・ダウンクォークの質量 ( $m_{ud}$ ) とストレンジクォークの質量 ( $m_s$ ) と化学ポテンシャル ( $\mu$ ) の関数とした、相

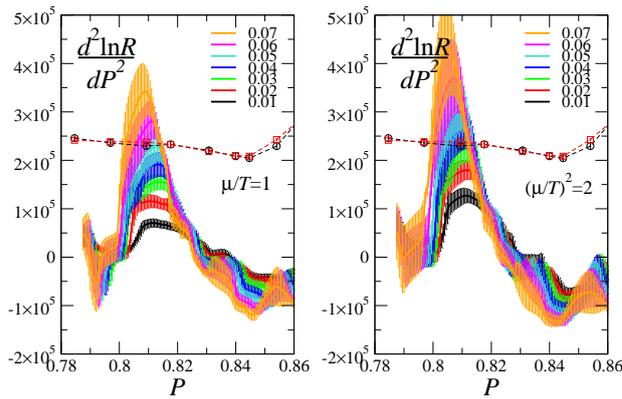


図 4:  $\mu/T = 1.0, \mu_h = 0$ (左)、 $\mu/T = \sqrt{2}, \mu_h = 0$ (右)での  $\ln R(P; h, \mu)$  の曲率

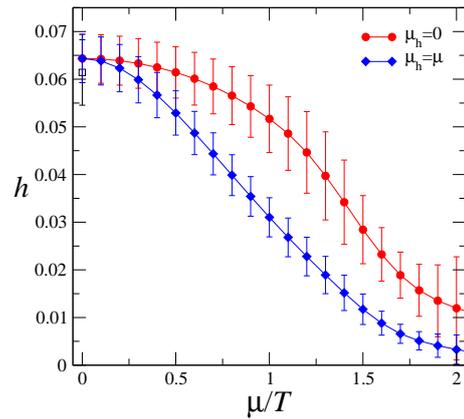


図 5: 右:  $(h, \mu)$  面での臨界線。印が  $\mu_h = 0$  で、印が  $\mu_h = \mu$  の結果。

転移温度での相転移の性質の変化の予想を図示したものである。赤い網で描いた面がクロスオーバー(右側)と一次相転移(左側)の領域を分ける二次相転移の面である。\*印から上に伸びた青い破線が現実のクォーク質量で、この線が臨界面を超える点が臨界点(印)である。このような臨界面を  $\mu$  が小さいところから調べ上げることができれば、低密度でのクロスオーバーが高密度で一次相転移に変わる  $\mu$  が分かる。すべてのクォークが十分重いときも一次相転移で、臨界面があり、[8]ではその臨界面を任意の  $\mu$  で調べ上げることができた。結果は図 3(右)である。クォークが十分重いとして、式(4)の近似式を用いることによって、すべての  $\mu$  で臨界面を計算した。しかし、物理として重要なクォークが軽い領域の臨界面は、クォーク質量が非常に軽い領域にあり、その研究を行うためには大変な計算コストがかかることが予想され、その臨界面が物理的質量点の線と交わる方向に傾いていくのかも確認されていない。

本研究では、 $2 + N_f$  フレーバー QCD で、その臨界点が化学ポテンシャルと共にどのように変化するかを議論する。[4]では[7]で得られた p4-improved staggered action で生成した配位を用いて、2 フレーバー QCD の有限密度での臨界点を探索した。その計算に重い  $N_f$  フレーバーを加えて計算を行い、臨界点での重いフェルミオンの質量が  $\mu$  と共にどのように変化するかを調べる。有効ポテンシャルの曲率の結果は図 4 で、左図が  $\mu/T = 1.0$ 、右図が  $\mu/T = \sqrt{2}$  の ( $\mu_h = 0$  とした) 結果である。  $\mu$  が増えるに従って、 $d^2 \ln R/dP^2$  の最大値が大きくなるのが分かる。つまり、 $\mu$  が増加すると、より小さな  $h$  でも有効ポテンシャルの曲率が負になることを意味している。その負の曲率が現れる臨界点をプロットした結果が図 5 である。赤の印が  $\mu_h = 0$  の結果で、青の印が  $\mu_h = \mu$  の結果である。臨界線より上が一次相転移の領域である。密度が高くなるに従い、 $h$  の臨界点が小さくなっている。 $h = 2N_f(2\kappa_h)^{N_t}$  なので、 $\mu$  が大きくなると、一次相転移になる  $\kappa_h$  が小さくなるのが分かった。本研究も [4] 同様、 $\mu$  が小さい領域だけで正しい近似を使っていて、高密度領域で正しい保証はないが、少なくとも低密度で  $O(\mu^2)$  までは厳密である。仮に  $N_f$  を小さくしていても同じような結果が得られるとすれば、 $2+1$  フレーバー QCD の一次相転移の領域は密度が高くなると大きくなり、物理的質量の点では、臨界点でクロスオーバーが一次相転移に変わることを示唆している。

この解析は  $N_f$  が大きい場合にだけ妥当であるが、例えば、2 フレーバーの質量がゼロのところにあると予想される三重臨界点付近でのスケーリング則は  $N_f$  によらずユニバーサルであると言われている。 $N_f$  が大きい場合から研究し、徐々に  $2+1$  フレーバー QCD に近付けるようなアプローチも有効であると考えられる [6]。

## 4 まとめ

多フレーバー QCD によるテクニカラー模型が実現した場合、その模型の電弱相転移が強い一次相転移になり、宇宙初期での電弱バリオン生成のシナリオが描けるかどうかという問題が動機で、2つの軽いフェルミオンと  $N_f$  個の質量のあるフェルミオンが存在する系の有限温度相転移を調べた。2フレーバーのシミュレーションを行い、残りの  $N_f$  個のフェルミオンの動的効果は reweighting 法によって取り入れた。 $N_f$  が十分大きい場合に、ブラケットのヒストグラムを計算して、その形から相転移の次数を判定した。質量を無限大から減少させたところ、かなり重い質量でクロスオーバーから一次相転移になり、その一次相転移の領域は  $N_f$  が増加するにつれ広くなることが分かった。さらに、フェルミオンに化学ポテンシャル  $\mu$  を課し、有限密度の効果を調べた。 $\mu$  が大きくなるにつれて一次相転移の領域が広がることが分かった。この研究は、一次相転移の領域が狭いために研究が難しい 2+1 フレーバー QCD の相構造の解明に向けた、重要な 1 ステップになることが期待される。

## 参考文献

- [1] S. Ejiri and N. Yamada, Phys. Rev. Lett. **110**, 172001 (2013).
- [2] Y. Kikukawa, M. Kohda and J. Yasuda, Phys. Rev. D **77**, 015014 (2008).
- [3] Z. Fodor, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **83**, 121 (2000).
- [4] S. Ejiri, Phys. Rev. D **77**, 014508 (2008).
- [5] H. Saito, S. Ejiri, S. Aoki, T. Hatsuda, K. Kanaya, Y. Maezawa, H. Ohno, and T. Umeda (WHOT-QCD Collaboration), Phys. Rev. D **84**, 054502 (2011).
- [6] S. Ejiri, Euro. Phys. J. A **49**, 86 (2013).
- [7] C. R. Allton, M. Döring, S. Ejiri, S.J. Hands, O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann and K. Redlich, Phys. Rev. D **71**, 054508 (2005).
- [8] H. Saito, S. Ejiri, S. Aoki, K. Kanaya, Y. Nakagawa, H. Ohno, K. Okuno, T. Umeda (WHOT-QCD Collaboration), arXiv:1309.2445.

## カイラル相転移臨界点におけるクォークスペクトル

根本幸雄 (聖マリアンナ医大)<sup>1</sup>, 北沢正清 (阪大), 国広悌二 (京大)

有限温度、有限密度で起こると考えられているカイラル相転移において、以前我々はカイラル凝縮の揺らぎがクォーク間の強結合性によって臨界点付近で非常に大きくなるという指摘 [1] に注目し、それがクォークスペクトルに与える影響についての研究を行った [2, 3]。そのときの研究ではクォークの質量をゼロとしていたため、カイラル相転移は低密度側で二次相転移をなし、相転移線上では常にソフト化するモードが存在している。そしてクォークスペクトルはこのソフトモードとの結合によってそのピーク構造が大きく変化することを指摘した。本研究ではカレントクォーク質量を有限におき、クォーク質量効果として特にカイラル相転移点付近に着目し、スカラー、擬スカラー密度揺らぎとクォークとの結合からクォークスペクトルがどのように変化するかを、Nambu-Jona-Lasinio(NJL) 模型を用いて調べた。なお結果の一部はすでに 2007 年の熱場の量子論とその応用で発表済みであるが [4]、この度あらためて再計算を行い、以前の発表で不完全であったところも含めて考察を深めた。

$u, d$  クォークがカレント質量を持つ場合、カイラル対称性があらわに破れ、カイラル相転移は低密度側でクロスオーバーになり、ある温度、密度で一次相転移が終わる臨界点が現れる<sup>2</sup>。二次相転移になるのはこの点のみであるが、対応するソフトモードはカイラル極限の場合とは異なり、シグマ中間子モードではない。これは臨界点においてもカイラル対称性があらわに破れているため、NJL 模型ではスカラー密度揺らぎの space-like 領域にソフトモードが現れることが知られている [5]。シグマ中間子モードは time-like 領域にあるが、その質量は  $\sim 2m$  であり ( $m$  は構成クォーク質量)、臨界点においてもゼロにはならない。本研究ではクォーク伝播関数に、これらの寄与を含むスカラー密度揺らぎと、パイオンモードを含む擬スカラー密度揺らぎを 1 ループレベルで取り入れた自己エネルギーを考慮し、臨界点付近のクォークスペクトルのふるまいを調べた。

初めにクロスオーバー領域となる低密度側を調べるため、近似的にカイラル対称性の相が移り変わる温度として擬臨界温度 ( $T_{PC}$ ) を定義し、 $T_{PC}$  まわりのクォークスペクトルを調べることとした。 $T_{PC}$  は一意に定義することができないが、例えば臨界点のソフトモードに起因するスカラー密度揺らぎのスペクトルのピークが、ある密度で温度を変えていったときに最大になる温度をもってそれを定義することができる (臨界点では発散する)。また、このときパイオンの結合エネルギーがゼロになる温度 ( $T_{ZB}$ ) も同時に求めてみると、すべてのクロスオーバー領域の密度において  $T_{PC}$  よりも高いことがわかる。すなわち  $T_{PC}$  と  $T_{ZB}$  の間の温度ではクォークと結合状態のパイオンが共存することになり、すぐ後で示すように、このパイオンがクォークスペクトルに大きな影響を及ぼす。

図 1 の上段にゼロ密度における  $T = 206\text{MeV}$  でのゼロ運動量のクォークスペクトル  $\rho_+(p_0)$  を示す (反クォーク部のスペクトルは射影して落としている)。この温度はカイラル動的感受率が最大になる温度である。またゼロ密度では  $T_{ZB} = 216\text{MeV}$  である。この図から  $p_0 \simeq 25\text{MeV}$  に準粒子ピークがあることがわかる。平均場近似によって得られる構成クォーク質量  $m$  は  $118\text{MeV}$  であるから、これは揺らぎとの結合によってクォークの質量が約  $100\text{MeV}$  ほど下がったことを意味する。このような大きな質量シフトの要因は、図 1 下段に示されたクォークの自己エネルギー ( $\Sigma^+(p_0)$ ) から知ることができる。自己エネルギーの虚部に注目すると、 $p_0 \simeq \pm 50\text{MeV}$  で (負側に) 大きな値を持っていることがわかるが、実際にはこれらは発散している。自己エネルギーの虚部はクォークが揺らぎのモードと結合することで生ずる (結合) 状態密度を表しているため、この発散は状態密度の発散をあらわしている。クォークと個々の揺らぎのモードとの結合を調べてみると、この発散は結合状態のパイオンが

<sup>1</sup>e-mail address: nemoto@marianna-u.ac.jp

<sup>2</sup>カラー超伝導などの効果や多様な相互作用を考慮すると臨界点の消失や複数個の臨界点が現れる可能性があるが、ここではカイラル対称性のみを考慮したシンプルな 2 フレーバ型 NJL 模型を用いているため、現れる臨界点は一つである。

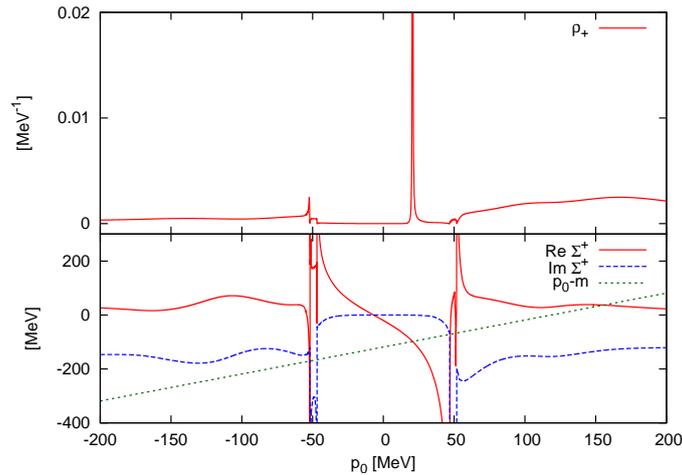


図 1:  $T = 206\text{MeV}$ 、ゼロ密度におけるクォークスペクトル関数と、対応するクォーク自己エネルギー。

クォークと結合することによって生ずることがわかる。パイオンの分散関係を  $\omega_\pi(q)$  と書くと、結合状態密度には  $\int d^3q \delta(p_0 + E_q - \omega(q))$  という形をもつものがある。  $E_q = \sqrt{q^2 + m^2}$  はクォークの分散関係である。この項はパイオンとクォークの群速度が等しいところで発散をもたらすことを表している。このような状態密度の発散は van Hove 特異点と呼ばれ、たとえば半導体中において傾きの等しい2つのバンド間で電子が遷移する際にも同じ現象が起こる。ここで注意しておきたいことは、  $\omega_\pi(q)$  が  $\sqrt{q^2 + m_\pi^2}$  という関数形であった場合には有限の運動量  $q$  で  $E_q$  と同じ傾きになることはない、ということである。ここではパイオンをクォークと反クォークの結合状態として記述していることと、有限温度においてローレンツ不変性が破れていることによってパイオンの分散関係は  $\sqrt{q^2 + m_\pi^2}$  からずれている。すなわち媒質中でのみ起こる相互作用によって van Hove 特異点が現れたわけである。自己エネルギーの虚部のこうした発散によって、実部は大きく関数形が歪められ、図1に示されるように大きな変化をもたらす。この解析において準粒子ピークが生ずる必要条件は実部と直線  $p_0 - m$  (図1の緑線) が交差することであり、実部が大きく変化することによって交差点の一つは  $p_0 \approx 25\text{MeV}$  にきていることがわかる。この  $p_0$  での虚部は十分小さく、したがって準粒子ピークが形成される。他の交差点、  $p_0 \approx -50\text{MeV}$  や  $150\text{MeV}$  では虚部が比較的大きく、そのためはっきりしたピークは見えていない<sup>3</sup>。こうして擬臨界点付近においてクォークがスカラー、擬スカラー型揺らぎと結合すると、特に結合状態のパイオンと結合することによってクォーク質量が大きく変わり得ることがわかった。

この結果をカイラル極限におけるクォークスペクトル [2, 3] と比較する。カイラル極限ではゼロ密度で二次相転移となり、スカラー揺らぎのシグマモード、擬スカラー揺らぎのパイオンがともにソフト化する。これらのモードとクォークとの結合により、クォークスペクトルは低運動量部で3ピーク構造になった。3ピーク形成はクォークと、結合するボソンモードとの質量の比が小さいことが必要である [6]。図1の温度の場合、  $m/\omega_\pi(0) \approx 0.8$  であり、これは3ピーク構造となる条件よりもずっと大きい値である。すなわちカイラル対称性のあらわな破れのためにこの温度でもクォークは大きな構成クォーク質量を持ち、その結果3ピークにはならない。 [6] による湯川模型を用いた解析では、上記の質量比の場合のクォークスペクトルは continuum 成分の寄与が支配的になり1ピークも形成されなくなる。今回の結果で鋭いピークが一つ存在するのは、パイオンとの結合による van Hove 特異点の形成が本質的である。これがカイラル極限におけるクォークスペクトルと大きく異なる結果を得た要

<sup>3</sup>2007年の発表ではこれらの交差点でもピークが現れていることを示したが、それは擬スカラー揺らぎの寄与を過小評価していたためであった。

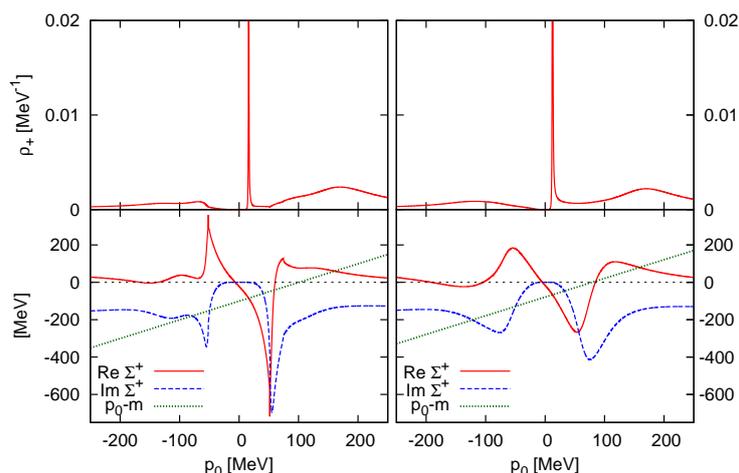


図 2:  $T = 211\text{MeV}$  (左)、 $220\text{MeV}$ (右) におけるクォークスペクトル関数と対応するクォーク自己エネルギー。いずれもゼロ密度の場合。

困である。ところで前述したとおり、図 1 は動的カイラル感受率が最大になる温度であるが、ソフトモードに由来するスカラー揺らぎの効果は非常に小さく、クォークスペクトルへの影響は無視できるほど小さい。

図 2 にはやや高い温度でのクォークスペクトル関数と自己エネルギーを図示した。図 2 の左側は静的カイラル感受率がほぼ最大になる温度での結果である。この場合でも  $T_{\text{ZB}}$  より小さいためパイオンは結合状態を保っているが、結合状態密度はもはや発散せず、したがって自己エネルギー虚部は有限である。しかし虚部のピークの存在によって、実部やクォークスペクトル関数は定性的に図 1 とふるまいが類似している。図 2 の右側は  $T_{\text{ZB}}$  よりもやや上の温度で、パイオンが continuum 領域にある場合である。この場合もはや特定の  $p_0$  でパイオンと強く結合することがなくなるため、自己エネルギーはより滑らかなふるまいになり、結果としてクォークスペクトルのピークは平均場近似で与えられる構成クォーク質量の値に近くなる。

以上、ゼロ密度の場合のクォークスペクトルについて述べたが、有限密度、特に臨界点付近ではここで述べたパイオンとの結合による van Hove 特異点が現れるほか、ソフトモードとの結合もクォークスペクトルに大きな寄与を与える。詳細は発表予定の論文を参照されたい。

## 参考文献

- [1] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Lett. B **145**, 7(1984); Phys. Rev. Lett. **55**, 158 (1985).
- [2] M. Kitazawa, T. Kunihiro and Y. Nemoto, Phys. Lett. B **633**, 269 (2006).
- [3] M. Kitazawa, T. Kunihiro and Y. Nemoto, Prog. Theor. Phys. **117**, 103 (2007).
- [4] 根本幸雄, 北沢正清, 国広悌二, 三ツ谷和也, 素粒子論研究 **116**, B137 (2008).
- [5] H. Fujii, Phys. Rev. D **67**, 094018 (2003); H. Fujii and M. Ohtani, Phys. Rev. D **70**, 014016 (2004).
- [6] M. Kitazawa, T. Kunihiro, K. Mitsutani, and Y. Nemoto, Phys. Rev. D **77**, 045034 (2008).

# 散逸二重井戸系における相転移の解析

青木健一<sup>1</sup> 金沢大学 自然科学研究科  
小林玉青<sup>2</sup> 米子工業高等専門学校 教養教育科

通常の量子力学の二重井戸ポテンシャル系では、トンネル効果があり、対称性の保たれた量子的状態である。ところが摩擦に代表されるエネルギー散逸の効果を取り入れると、トンネル効果が抑制され、状態は局在化した古典的状态となり、系の対称性は破れる。この局在化相転移を引き起こす臨界結合定数を散逸のある二重井戸ポテンシャル系で定量的に得ることが目的である。

## 1 Caldeira-Leggett 模型

ミクロの作用において、ターゲット自由度  $q$  から、無限個の調和振動子で構成される環境自由度へのエネルギー散逸を記述する Caldeira-Leggett 模型 (1) を用いる。[1]

$$S[q, \{x_\alpha\}] = \int dt \left\{ \frac{1}{2} M \dot{q}^2 - V_0(q) + \sum_\alpha \left[ \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_\alpha^2 - \frac{1}{2} m_\alpha \omega_\alpha^2 x_\alpha^2 - q C_\alpha x_\alpha \right] \right\}. \quad (1)$$

環境自由度の経路積分を行うと、ユークリッド経路積分において、虚時間方向の非局所有効相互作用 (2) が現れる。  $\eta$  がエネルギー散逸の大きさを表し、  $\eta_c$  が求めたい局在化相転移の臨界結合である。

$$\Delta S_{\text{NL}} = \frac{\eta}{4\pi} \int ds d\tau \frac{(q(s) - q(\tau))^2}{|s - \tau|^p}. \quad (2)$$

この相互作用を虚時間方向に離散化し、1次元統計系としてみると、離れたサイト間の長距離相互作用 (3) に帰着する。パラメタ  $p$  は長距離相互作用の距離に伴うダンピング指数である。

$$\frac{\eta}{2\pi} \epsilon^{2-p} \sum_n \frac{(x_i - x_{i+n})^2}{n^p}. \quad (3)$$

## 2 Block Renormalization Group (BDRG)

ミクロの自由度を積分する Decimation くりこみ群 (DRG) の手法を用いて系の分配関数を計算する [2] が、長距離相互作用 (3) がある場合には、通常の DRG は有効ではない。そこで、図 1 の左側のように、相互作用の最大距離を  $n$  と限り、レンジ  $n$  に対応するサイト数  $n$  個を含むブロックに系を分割し、くりこみ変換を行う Block Decimation Renormalization Group (BDRG) を定義する。

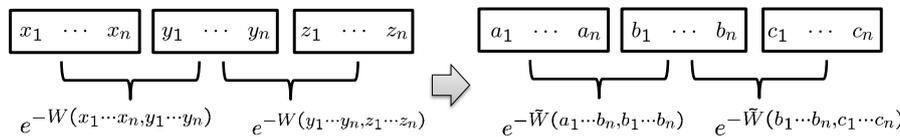


図 1: 量子力学系における BDRG

系はブロック間最近接相互作用模型となり、ブロック間の相互作用である bi-local potential  $W(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)$  で表される  $T$  行列 (4) の積  $T^{(k+1)} = T^{(k)} T^{(k)}$  として、 $k$  回目のくりこみ変換が定義できる。

$$T = e^{-W(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)} = \langle x_1 x_2 \cdots x_n | \hat{U} | y_1 y_2 \cdots y_n \rangle. \quad (4)$$

<sup>1</sup>e-mail address: aoki@hep.s.kanazawa-u.ac.jp

<sup>2</sup>e-mail address: kobayasi@yonago-k.ac.jp

しかし、量子力学において各サイトの自由度は無限大であり、適切な状態に限って計算することになる。経路積分における実際の操作としては、完全系をはさみ、(5)のように変更した基底を制限することにより実現される。(5)はくりこみ変換における  $T$  行列の初期値であるが、多重積分を含む。

$$\begin{aligned} T &= \int dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_n \langle a_1 \cdots a_n | x_1 \cdots x_n \rangle \langle x_1 \cdots x_n | \hat{U} | y_1 \cdots y_n \rangle \langle y_1 \cdots y_n | b_1 \cdots b_n \rangle \\ &= \int dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_n \psi_{a_1}^*(x_1) \cdots \psi_{a_n}^*(x_n) e^{-W(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)} \psi_{b_1}(y_1) \cdots \psi_{b_n}(y_n). \end{aligned} \quad (5)$$

BDRG によって、有限レンジでの分配関数から外場感受率を計算した後、我々は、Finite Range Scaling (FRS) の手法を用いて、無限レンジでの情報を得て、臨界結合  $\eta_c$  を評価する。FRS では、Finite Range exponent  $\beta(6)$  を仮定する。すると無限レンジ極限における対数外場感受率は、長距離イジング模型では、実軸上の zeta 関数を用いて得られる。すなわち、 $\beta(n = \infty, p, \eta_c) = 1$  となる時が、外場感受率  $\chi$  が発散する局在化相転移点である。

$$\log \chi(n) - \log \chi(n-1) \equiv \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta(n,p,\eta)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log \chi(n) = \zeta(\beta(\infty, p, \eta)) \simeq \frac{1}{\beta-1}. \quad (6)$$

これまで BDRG と FRS を用いた解析では、摩擦のない二重井戸ポテンシャルの基底状態と第一励起状態の 2 状態を採用する近似の場合に、 $\eta_c$  を定量的に求めることに成功している [3]。得られた結果は、インスタントン計算 [4] とモンテカルロシミュレーションによる結果 [5] のパラメタ領域を補完する。次に、くりこみ群の初期値となる  $T$  行列を Monte Carlo サンプルとして直接生成し、系の状態を近似せずに解析する Full-BDRG によって、臨界結合定数を求める事を考えたい。

$n \geq 2$  の場合、 $T$  行列はエルミート行列ではないが、任意の正方行列は適当な  $n$  次正則行列  $S$  を用いて  $STS^{-1} = T_J$  とすることにより、ジョルダン標準形 (7) には出来る。

$$T_J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \lambda_2 & 1 & \cdots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \emptyset & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \int d\mathbf{y} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) = \lambda \phi(\mathbf{x}). \quad (7)$$

ジョルダン固有値  $\lambda_i$  は (7) の固有値方程式から得られる。 $k$  回のくりこみ変換後には、

$$T^{(k)} = \begin{pmatrix} \lambda_0^{2^k} & & & \\ & \lambda_1^{2^k} & & \\ \emptyset & & \ddots & \end{pmatrix} = \lambda_0^{2^k} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{2^k} & & \\ \emptyset & & \ddots & \end{pmatrix}, \quad (8)$$

となって、非対角成分は残るが、くりこみ回数  $k \rightarrow \infty$  では、分配関数  $Z = \text{Tr} T^{(k)}$  から得られる物理量に関しては、最大固有値  $\lambda_0$  が支配的である。

実際に、外場感受率  $\chi$  や自由エネルギー  $F$  を求めるためには、サイト変数に対して 1 次の外場  $h$  を導入し、統計系のサイズを  $N = 2^k$  として、

$$\chi = -\left. \frac{\partial^2 F(h)}{\partial h^2} \right|_{h=0}, \quad F(h) = -\frac{1}{N} \log Z(h). \quad (9)$$

摂動論ではエネルギー固有値に対して  $h$  が 1 次の変化はないから、(9) より、

$$\lambda_0(h) = \lambda_0(0) + \frac{\lambda_0(0)}{2} \chi h^2, \quad (10)$$

となり,  $h = 0$  及び,  $h$  を導入した  $T$  行列の最大固有値の比が分かれば, 外場感受率  $\chi$  が計算される.

この固有値を利用する方法は, 2 状態近似 BDRG[3] において行った  $T$  行列の初期値 (5) を得るために, 多重積分を実行する労力を軽減する可能性がある. これは計算量が増大する Full-BDRG を行う際に有益であろう. よって今回は結合定数  $\eta$  の値を変えながら, 外場  $h$  も導入し,  $T$  行列のジョルダン固有値及び対応する固有状態の構造を調べる.

(3) においてサイトの自由度を 2 点, つまり状態を二重井戸の底に完全に局在化するガウス関数で近似すると, 系は長距離相互作用  $K_n^{[p]}$  を持つイジングスピン模型と同等になる.

$$K_n^{[p]} \equiv \frac{\eta}{n^p}, \quad H = \sum_{n, i; n \geq i} K_n \sigma_i \sigma_{i+n} + \sum_i h \sigma_i. \quad (11)$$

まずはこの長距離相関をもつイジングスピン模型の  $T$  行列について調べる.

なお, 我々は行列積を計算する BDRG と FRS を用いて, 長距離相関があるイジングスピン模型の場合に,  $\eta_c$  を定量的に得ることに成功している [6]. 少ない計算リソース・計算時間で, モンテカルロシミュレーションの結果と同等であり [7], 1960 年代にイジング模型に関して数多くの仕事がなされた数理物理学関係の結果とも一致する [8]. よって, 今回, 固有値の方法で得られる結果は, 行列積を用いた従来の BDRG による結果と比較可能である.

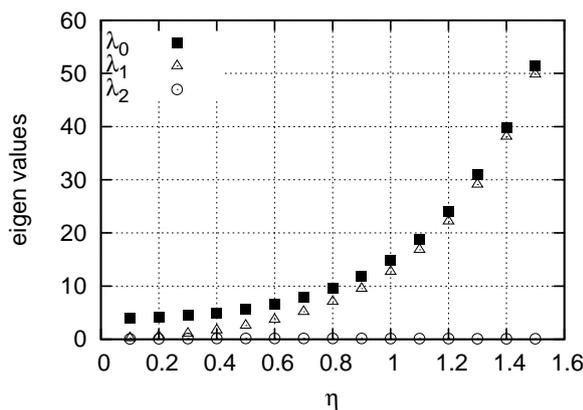


図 2: Eigen values at  $n = 2$ ,  $p = 1.7$

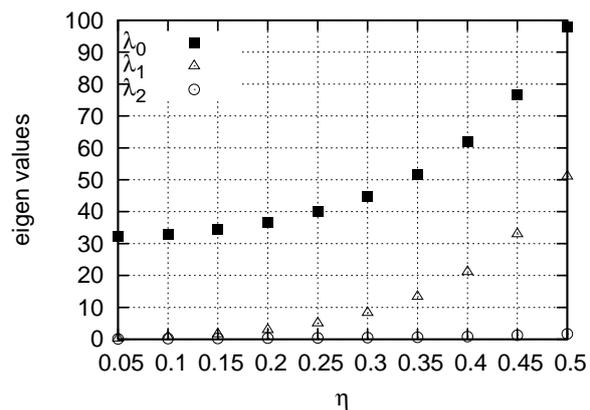


図 3: Eigen values at  $n = 5$ ,  $p = 1.7$

それでは長距離相互作用のあるイジングスピン系の  $T$  行列を見てみる. イジング系では自由度は 2 つしかないため, BDRG において, 相互作用の最大距離  $n$  のブロック内の状態数は  $2^n$  だから, 状態間の相互作用を記述する  $T$  行列は  $2^n \times 2^n$  次元である. 例えば,  $n = 2$  の場合, 相互作用は (11) の  $K_1, K_2$  のみであり,  $T$  行列は実際に (12) となる.

$$T^{(n=2)} = \begin{array}{c} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{array} \begin{pmatrix} e^{2K_1+2K_2} & e^{K_1} & e^{-K_1} & e^{-2K_2} \\ e^{-K_1} & e^{-2K_1+2K_2} & e^{-2K_2} & e^{K_1} \\ e^{K_1} & e^{-2K_2} & e^{-2K_1+2K_2} & e^{-K_1} \\ e^{-K_2} & e^{-K_1} & e^{K_1} & e^{2K_1+2K_2} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

ジョルダン固有値 ( $h = 0$ ) の結果を  $n = 2$  (図 2) の場合と  $n = 5$  (図 3) の場合について, 横軸  $\eta$  に対して示す.  $\lambda_0$  が最大固有値で, 以下, 絶対値が大きい順に  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  としている.  $n = 2$  (図 2) の場合,  $\eta$  が大きい強結合領域では  $\lambda_0$  と  $\lambda_1$  に対応する固有状態がそれぞれ  $|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle$  と  $|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle$  となっており, スピンの揃った状態が支配的であることがわかる. スピンの揃っていない  $|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$ ,  $|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$  の固有値はほぼ 0 になっている. 一方,  $\eta$  が小さい弱結合領域における固有状態は, 強結合領域のよ

うに分離されておらず、飛び抜けて大きい最大固有値の状態は4状態すべてを等しく含む.  $n = 5$  (図3)の場合も事情は同様であり,  $\lambda_3$  以下の固有値はほとんど0になっているためグラフでは省略した.

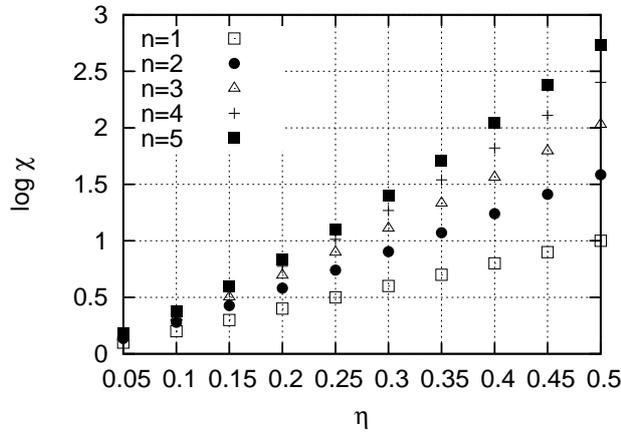


図 4:  $\log \chi$  at  $n = 1 \sim 5$ ,  $p = 1.7$

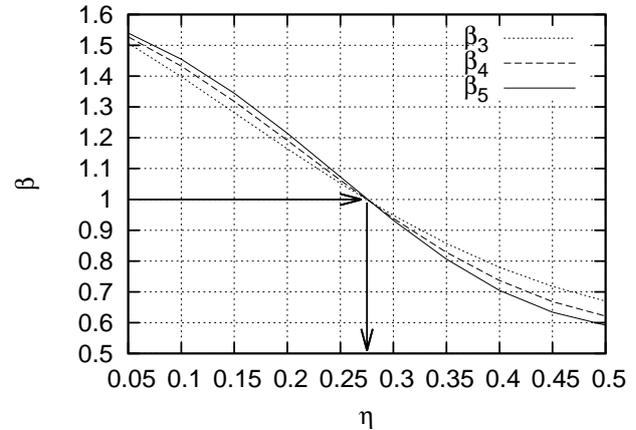


図 5:  $\eta_c$  at  $n = 5$ ,  $p = 1.7$

この最大固有値を用いて, (10) のように, 対数外場感受率  $\log \chi(n)$  を相互作用の最大距離  $n = 1 \sim 5$  について計算したグラフが図4である.  $n \rightarrow \infty$  において  $\log \chi$  が発散する  $\eta_c$  があるはずだが,  $\log \chi$  の発散の度合いが変化するポイントは (10) から判別できない. そこで FRS の手法 (6) を用いて,  $n \rightarrow \infty$  の相転移点を図5のグラフとして得る. 図5では縦軸は FRS 指数  $\beta$  であり,  $n = 1 \sim 5$  の外場感受率の値を使っている.  $\beta = 1$  に相当する  $\eta$  が臨界結合  $\eta_c = 0.28$  である. この結果は, 行列積を用いた BDRG と FRS の結果に一致している [6].

今回,  $T$  行列の最大固有値を求めて FRS を行う手法も従来の  $T$  行列積を計算していく方向と同等に有効であることが分かった. したがって今後は2つの方法を長距離相互作用にある量子力学系に適用することを並行して試み, 精度向上と計算の省力化を考えていきたい.

## 参考文献

- [1] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **46**, 211(1981); Ann. of Phys. **149**, 374(1983).
- [2] K. G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 773(1975).
- [3] K-I. Aoki, T. Kobayashi, Mod. Phys. Lett. B, **26**, 1250202(2012).
- [4] S. Chakravarty, Phys. Rev. Lett. **49**, 681(1982). A. J. Bray, M. A. Moore, Phys. Rev. Lett. **49**, 1545(1982).
- [5] T. Matsuo, Y. Natsume and T. Kato, J. Phys. Soc. Jpn. **75**, 103002(2006); Phys. Rev. B **77**, 184304(2008).
- [6] K-I. Aoki, T. Kobayashi and H. Tomita, Prog. Theor. Phys. **119**, 509(2008).
- [7] E. Luijten, HWJ Blöte, Phys. Rev. B, **56**, 8945(1997); E. Luijten and H. Meßingfeld, Phys. Rev. Lett. **86**, 5305(2001).
- [8] F. J. Dyson, Commun. Math. Phys. **12**, 91(1969); R. B. Griffiths, Commun. Math. Phys., **6**, 121(1967).

# Lee-Yang のクラスター展開法による BCS 理論の導出

作道直幸<sup>1</sup> 理化学研究所、日本学術振興会特別研究員 (PD)

本研究は、西田祐介氏 (東京工業大学)、上田正仁氏 (東京大学) との共同研究である。原著論文は文献 [1]。

## 1 イントロダクション：BCS-BEC クロスオーバー

レーザー冷却等によって極低温に冷却された原子気体は、Feshbach 共鳴を用いて原子間の相互作用を自由に変調できる。この性質を用いて極低温の二成分 (つまりスピン 1/2) フェルミ原子気体の原子間引力を連続的に変化させることで、「フェルミ面近くの粒子のクーパ対が起こす BCS 状態」から「二つのフェルミ粒子が強く束縛した二原子分子のボース-アインシュタイン凝縮 (Bose-Einstein condensation, BEC) 状態」までの連続的な変化が実験的に実現された [2]。この現象は BCS-BEC クロスオーバーと呼ばれ、フェルミ系とボース系の量子凝縮現象を構成粒子の詳細やスケールに依らず統一的に理解するモデルとして古くから考えられてきた [3]。

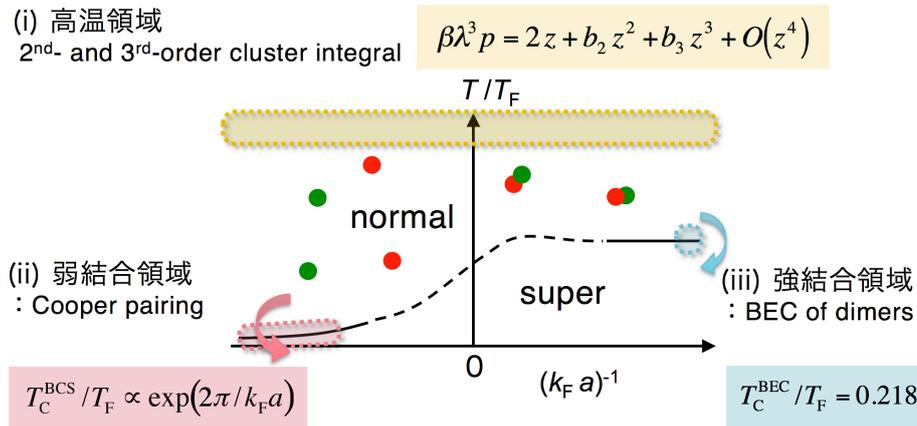


図 1: BCS-BEC クロスオーバーにおける相図の概略図。パラメーターは、無次元に規格化した  $s$  波散乱長の逆数  $(k_F a)^{-1}$  と温度  $T/T_F$ 。高温では通常の気体 (normal gas) だが、低温で超流動体 (superfluid) に相転移する。先行研究では、Lee-Yang のクラスター展開の方法を用いて、(i) 任意の  $s$  波散乱長における高温領域の熱力学 [8, 11]、(iii) 強結合領域における相転移温度  $T_c^{\text{BEC}}$  [11]、が正しく計算された。本研究では (ii) 弱結合領域における相転移温度  $T_c^{\text{BCS}}$  を正しく計算する理論を提案する。

冷却原子気体のような希薄で極低温の気体は、粒子間引力の到達距離  $r_0$  が、平均粒子間距離 (これは、Fermi 波数の逆数  $k_F^{-1}$  のオーダーである)、 $s$  波散乱長  $a$ 、熱的ド・ブロイ長  $\lambda = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2}$  よりも十分小さい。このとき、系のハミルトニアンは単純な接触相互作用で表すことができる：

$$\hat{H} = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} + g \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \hat{c}_{\mathbf{k}_1\uparrow}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}_2\downarrow}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}_3\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3\uparrow}. \quad (1)$$

ここで、 $m$  は粒子の質量、 $T$  は温度であり、 $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / (2m)$  とおいた。相互作用の強さ  $g (< 0)$  は、くりこみによって  $s$  波散乱長  $a$  と結びつく：

$$\frac{m}{4\pi\hbar^2 a} = \frac{1}{g} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (2)$$

<sup>1</sup>e-mail address: sakumichi@gmail.com

ここで、 $V$  は系の体積。ハミルトニアン (1) で記述される系は、系の状態方程式が  $a, k_F, \lambda$  だけで決まるため、系の相図は無次元化された温度  $T/T_F$  と  $s$  波散乱長の逆数  $(k_F a)^{-1}$  だけで決まる。ここで、 $T_F$  はフェルミ温度。図 1 に示した相図のように、この系は高温では通常の気体であり、低温で超流動相に相転移する。この系の BCS-BEC クロスオーバーの相転移温度はファインマンダイアグラムによる展開法 [4] や量子モンテカルロ法 [5] を始めとする様々な方法で研究されてきたが、本研究ではそれらと異なるクラスター展開法に基づく研究を行った。

## 2 手法：Lee-Yang のクラスター展開法

一般に、系の熱力学的性質は大分配関数  $\Xi_V = \text{Tr} \exp[\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})]$  から求まる熱力学関数  $\beta p = \lim_{V \rightarrow \infty} V^{-1} \ln \Xi_V$  で決まる。ここで、 $\beta = (k_B T)^{-1}$  は逆温度、 $\mu$  は化学ポテンシャル、 $p$  は圧力。クラスター展開とは、系の熱力学関数のフガシティー  $z = \exp(\mu/k_B T)$  による展開である [6]：

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\lambda^3}{V} \ln \Xi_V = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \dots \quad (3)$$

各  $b_n$  は  $n$  体のクラスター積分と呼ばれる無次元量で、ハミルトニアン (1) で記述される二成分フェルミ気体では、次元解析から  $\lambda/a$  のみに依存することがわかる。 $z$  が小さい極限は、位相空間密度  $\rho \lambda^3$  が小さい極限 ( $\rho = N/V$  は粒子数密度) と一致するため、クラスター展開は低密度からの展開になっており、稀薄な冷却原子気体で特に有用である。低次のクラスター積分  $b_1, b_2, b_3$  は任意の  $\lambda/a$  で計算されており [7, 8]、ユニタリー気体における実験 [9] と高い精度で一致する。

さて、このクラスター展開を用いて BCS-BEC クロスオーバーの相転移温度を計算できるか、という問題を考える。 $z$  による展開を有限次で打ち切ると熱力学関数が多項式になるため、相転移 (熱力学関数の解析性の喪失) が扱えない。従って、相転移を扱うには  $z$  の高次の項を含む無限和を取り込む必要がある。我々は、クラスター展開を用いて相転移を扱うために、 $z$  の高次の項を系統的に計算する手法である Lee-Yang のクラスター展開法 [10] を用いた。この方法を用いれば、図 2 に示すよう、系の大分配関数がグラフ展開の方法で計算できる。図 2 において、 $n$  本 ( $n = 1, 2, \dots$ ) の入る線と出る線を持つバーテックスは、 $n$  体のクラスター関数  $U_n$  と呼ばれる関数を表し、(全ての粒子を区別する) ボルツマン粒子からなる量子力学の  $n$  体問題の解から計算できる [10]。例えば、 $H_1$  と  $H_2$  をそれぞれ一体と二体のハミルトニアンとすると、一体と二体のクラスター関数は、それぞれ  $U_1 = \exp(-\beta H_1)$  と  $U_2 = \exp(-\beta H_2) - \exp(-\beta H_1) \otimes \exp(-\beta H_1)$  となる。

$$\begin{aligned} \ln \Xi_V &= \sum (\text{全ての相異なる Lee-Yang の基本グラフ}) \\ &= \underbrace{\text{●} \rightarrow \text{●}}_{z^1 \text{ の項}} + \underbrace{\text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●}}_{z^2 \text{ の項}} + \underbrace{\text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●}}_{z^3 \text{ の項}} + \underbrace{\text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●}}_{z^3 \text{ の項}} + \underbrace{\text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●}}_{z^3 \text{ の項}} + \underbrace{\text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●} \rightarrow \text{●}}_{O(z^4)} + \dots \end{aligned}$$

図 2: 大分配関数は、外線を持たない、全ての相異なる Lee-Yang の基本グラフの和から計算される。Lee-Yang の基本グラフは、入る線と出る線の数が等しいバーテックスと、2つのバーテックスをつなぐ線からなる有向グラフである。 $n$  本の入る線と出る線を持つバーテックスは、 $n$  体のクラスター関数  $U_n$  を表し、量子力学の  $n$  体問題の解から計算できる。各グラフにおいて方向付きの線の本数の合計が、そのグラフが表す項の  $z$  の次数を表す。

Lee-Yang のクラスター展開法を用いて正しく計算できることがわかっているのは、図 1 に示すように、任意の  $s$  波散乱長における高温領域の熱力学と、強結合領域における相転移温度 (自由な二原子分子ボソンの BEC 転移の温度)  $T_c^{\text{BEC}}/T_F \simeq 0.218$  [11] である (図 1 の (i) と (iii) に対応)。弱結合領域では BCS 理論によると相転移温度が  $T_c^{\text{BCS}}/T_F \simeq 0.61 \exp[2\pi/(k_F a)]$  となるが、この方法を用いて  $T_c^{\text{BCS}}$  が導出できるかどうかは明らかではないため、本研究ではこの問題を解決する。この方法を用いて  $T_c^{\text{BCS}}$  を導出する方法がわかれば、ユニタリー領域を含む BCS-BEC クロスオーバーの相転移温度を計算する新しい理論を確立するための足がかりになると期待される。

### 3 結果

Lee-Yang のクラスター展開法において、全てのグラフの和を計算するためには任意の  $n$  体問題の解が必要があり、それは非常に困難である。そこで本研究では、図 3 に示した梯子形グラフの無限和  $\mathcal{P}_{\text{pair}}$  を考えて、このグラフまで取り込む近似

$$\ln \Xi_V \simeq \ln \Xi_{\text{ideal},V} + \mathcal{P}_{\text{pair}} \quad (4)$$

を用いた。ここで、 $\ln \Xi_{V,\text{ideal}} = 2 \sum_{\mathbf{k}} \ln [1 + z e^{-\beta \hbar^2 k^2 / (2m)}]$  は自由フェルミ気体の大分配関数。 $\mathcal{P}_{\text{pair}}$  には、BCS 理論の導出に必要な、フェルミ面の形成とそれに伴うクーパーペアの形成、クーパーペアがボソンであることによる量子統計性の効果が含まれるため (詳しい考察は、本研究の原著論文 [1] を参照。)、 $\mathcal{P}_{\text{pair}}$  の発散を調べれば相転移温度  $T_c^{\text{BCS}}$  が導出できるのではないかと期待される。

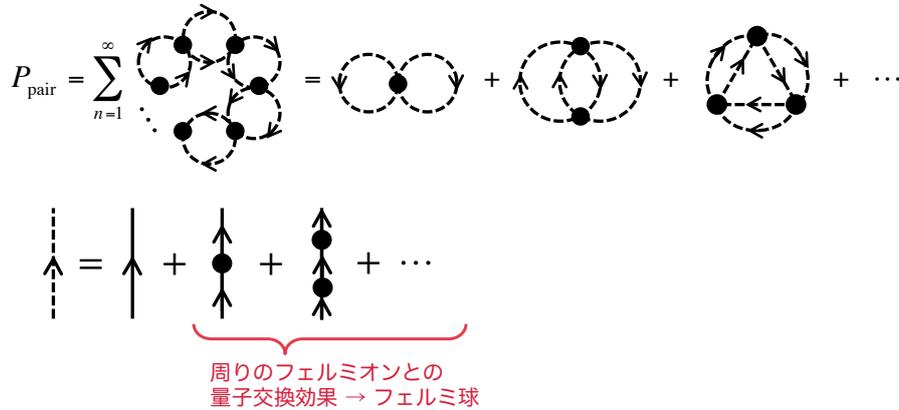


図 3: 本研究では、全ての相異なる Lee-Yang の基本グラフの中で、 $\mathcal{P}_{\text{pair}}$  と書かれるものを考える。点線は、周りのフェルミオンとの量子交換効果を取り込むために、一体のクラスター関数からなる無限和を取り込んだものになる。

本研究で扱うのは弱結合領域なので、二体のクラスター関数  $U_2$  を相互作用の強さ  $g$  の一次までで近似する。 $g$  の一次まで取った  $U_2$  を式 (4) に代入して式変形を行うと、

$$\mathcal{P}_{\text{pair}} = - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{K}} \ln \left\{ \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \left[ \frac{1 - n_F(\mathbf{k}_1) - n_F(\mathbf{k}_2)}{i\Omega_l - (\epsilon_{\mathbf{k}_1} + \epsilon_{\mathbf{k}_2} - 2\mu)} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{p}}} \right] - \frac{m}{4\pi \hbar^2 a} \right\} + \text{constant}. \quad (5)$$

を得る。ここで、 $n_F(\mathbf{k})$  は Fermi 分布関数。式 (5) において、 $l = 0, \mathbf{K} = 0$  の成分に注目して無限和の発散を調べれば、Thouless criterion [12] が導出される。弱結合領域では、低温で  $\mu \simeq \epsilon_{\mathbf{k}}$  と近似できることから、Thouless criterion と合わせることで、 $T_c^{\text{BCS}}$  が導出できる [1]。これが本研究の主結果である。

最後に注意点と今後の展望を述べる。式 (4) と (5) を合わせれば、Nozières - Schmitt-Rink (NSR) の BCS-BEC クロスオーバー理論で用いられる粒子数方程式 [4] が導出できる [1]。従って、弱結合領域で得られた結果を強結合領域まで外挿すれば NSR の BCS-BEC クロスオーバー理論 [4] を再現する。このことから、一見、Lee-Yang のクラスター展開法を用いて BCS-BEC クロスオーバーの全領域で相転移温度が計算できるように見える。しかし、式 (5) は二体のクラスター関数  $U_2$  を相互作用の強さ  $g$  の一次で近似して得られたものであるため、本研究の場合にそのような外挿の正当性は定かではない。他方で、強結合領域において  $U_2$  を  $g$  の一次で近似せずに非摂動的に取り扱って  $\mathcal{P}_{\text{pair}}$  を計算すれば、強結合領域の正しい相転移温度  $T_c^{\text{BEC}}/T_F \simeq 0.218$  を得る [1, 11]。従って、本研究で行った Lee-Yang のクラスター展開法による BCS-BEC クロスオーバーの解析は、少なくとも高温領域、弱結合領域、強結合領域を正しく取り扱っている (図 1)。今後、ユニタリー領域を含む BCS-BEC クロスオーバーの全領域の相転移温度を Lee-Yang のクラスター展開を用いて計算するために、今回よりも一般的な形式 [13, 14] を用いた解析を行う。

## 参考文献

- [1] N. Sakumichi, Y. Nishida, and M. Ueda, arXiv:1310.4665 [cond-mat.quant-gas].
- [2] *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, edited by W. Zwerger (Springer, Berlin, 2012), and references therein.
- [3] D. M. Eagles, Phys. Rev. **186**, 456 (1969); A. J. Leggett, in *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter* (Springer-Verlag, Berlin, 1980), pp. 13-27.
- [4] P. Nozières and S. Schmitt-Rink, J. Low Temp. Phys. **59**, 195 (1985); C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria and J. R. Engelbrecht, Phys. Rev. Lett. **71**, 3202 (1993).
- [5] A. Bulgac, *et al.*, Phys. Rev. A **78**, 023625 (2008); E. Burovski, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **101**, 090402 (2008).
- [6] K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1987), 2nd ed., Sec. 10.2.
- [7] T.-L. Ho and E. J. Mueller, Phys. Rev. Lett. **92**, 160404 (2004); X.-J. Liu, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 160401 (2009); Phys. Rev. A **82**, 023619 (2010); D. B. Kaplan and S. Sun, Phys. Rev. Lett. **107**, 030601 (2011); X.-J. Liu, Phys. Rep. **524**, 37. (2013).
- [8] X. Leyronas, Phys. Rev. A **84**, 053633 (2011).
- [9] M. Horikoshi, *et al.*, Science **327**, 442 (2010); S. Nascimbène, *et al.*, Nature (London) **463**, 1057 (2010); M. J. H. Ku, *et al.*, Science **335**, 563 (2012).
- [10] T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **113**, 1165 (1958); **117**, 22 (1960).
- [11] T. Ohkuma and M. Ueda, Phys. Rev. A **73**, 063608 (2006).
- [12] D. J. Thouless, Ann. Phys. **10**, 553 (1960).
- [13] N. Sakumichi, N. Kawakami and M. Ueda, Phys. Rev. A **85**, 043601 (2012).
- [14] N. Sakumichi, N. Kawakami and M. Ueda, arXiv:1202.6532 [cond-mat.quant-gas].

# Analysis of the Dynamical Chiral Symmetry Breaking in QCD at Finite Temperature and Density using the Non-Perturbative Renormalization Group

Ken-Ichi Aoki, Daisuke Sato and Masatoshi Yamada  
*Institute for Theoretical Physics, Kanazawa University*

We analyze the Nambu–Jona-Lasinio model which is a chiral effective model of QCD by using the non-perturbative renormalization group at finite temperature and finite density. We discuss the chiral phase diagram in the model. We include the large- $N$  non-leading contribution in the beta function and discuss its effects for the phase boundary.

## 1 Introduction

Understanding the non-perturbative Quantum Chromodynamics (QCD) is one of the important subjects in elementary particle physics. The phase diagram of QCD at finite temperature and finite density has been studied intensively. There are various non-perturbative approaches to QCD, such as the lattice QCD, the mean-field approximation (MFA) and the Schwinger-Dyson equations (SDEs). However, these methods have serious problems respectively. The lattice QCD is a powerful method because of the first-principle calculation. However, it is difficult to maintain the chiral symmetry on the lattice field. At finite density, the QCD action has a complex phase due to the quark chemical potential. Owing to this problem, called the sign problem, the statistical errors of simulation cannot be controlled easily. The MFA or the SDEs with the ladder approximation have been used in various types of models. However, these methods have difficulties in the further improvement of the approximation without which the strong gauge dependences cannot be cured.

We study the non-perturbative properties using the non-perturbative renormalization group (NPRG). The NPRG method gives us not only the equivalent results to MFA and SDEs in the lowest order approximation [3], but also the systematic method for improving approximation. We don't confront the sign problem at finite density. However, the NPRG breaks gauge symmetry due to inclusion of the momentum cutoff and also it has the gauge dependences as MFA and SDEs. These problems can be treated by systematic improvement of approximation. It reported that the gauge dependence has almost been wiped away by including the non-ladder diagrams to the beta functions [4].

We apply the NPRG to the Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model [9] at finite temperature and finite density. The NJL model is the effective theory with four-fermi interactions and describes the  $S\chi$ SB of QCD. We compare the results improved by the NPRG method with the mean field approximation.

## 2 Non-perturbative Renormalization Group

We briefly explain the basic idea of NPRG [2] in quantum field theory. We divide the degrees of freedom of quantum field  $\phi(p)$  into the higher modes with  $|p| > \Lambda$  and the lower modes with  $|p| < \Lambda$  in the Euclidean space. Then we define the effective action  $S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda]$ , called the Wilsonian effective action, by integrating out only the higher modes in the path integral

$$Z = \int^{\Lambda_0} \mathcal{D}\phi e^{-S_0} = \int^{\Lambda} \mathcal{D}\phi_{<} \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_0[\phi_{<} + \phi_{>}]} = \int^{\Lambda} \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S_{\text{eff}}[\phi_{<}; \Lambda]}, \quad (1)$$

where  $S_0$  is the initial (bare) action at the initial cutoff  $\Lambda_0$ . The NPRG equation describes the dependence of the Wilsonian effective action on the cutoff  $\Lambda$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda] = \beta[S_{\text{eff}}; \Lambda]. \quad (2)$$

The right hand side of this equation is called the beta function. It is evaluated as the infinitesimal change of the Wilsonian effective action by infinitesimally lowering the cutoff  $\Lambda$ .

There are various formulations of NPRG equation [5, 6, 7]. In this paper, we adopt the Wetterich flow equation [7] which is a differential equation for the Legendre effective action with IR cutoff,

$$\partial_\Lambda \Gamma_\Lambda[\Phi] = \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \left[ \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi} \Gamma_\Lambda[\Phi] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi} + R_\Lambda \right]^{-1} \cdot (\partial_\Lambda R_\Lambda) \right\}, \quad (3)$$

where  $R_\Lambda$  is the cutoff profile function which divides the higher and the lower modes of quantum field. This equation is exact. It describes the development of the effective action starting from the bare action  $S_0$  to the Legendre effective action  $\Gamma_{\Lambda=0}$ .

The equation (3) is a functional differential equation and we cannot solve it exactly. We have to make some approximation. First, the effective action is expanded into power series of derivative of fields,

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = \int d^4x \left[ V_\Lambda(\phi) + \frac{1}{2} Z_\Lambda(\phi) (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} Y_\Lambda(\phi) (\partial^2 \phi)^2 + \dots \right], \quad (4)$$

where  $V_\Lambda$  is the effective potential generated and  $Z_\Lambda$  and  $Y_\Lambda$  are the field renormalization factors. This method is called the derivative expansion. Next, we ignore all the connections to terms with derivatives. Then the effective action is represented by the effective potential  $V_\Lambda$ . This approximation, called the local potential approximation (LPA) [8], allows us to evaluate the effective action only with the zero momentum mode of fields. We reduce Eq. (3) to be a partial differential equation for the effective potential  $V_\Lambda$ . Furthermore if the effective potential is spanned by the polynomials of fields, we get infinitely coupled ordinary differential equations for the expansion coefficients (the coupling constants).

### 3 Nambu–Jona-Lasinio model

The Lagrangian of the NJL model [9] with one flavor and one color is given by

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{G_0}{2} \{ (\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2 \}. \quad (5)$$

This Lagrangian is invariant under the chiral  $U(1)$  transformation:  $\psi \rightarrow e^{i\gamma_5 \theta} \psi$ . The four-fermi coupling constant  $G$  corresponds to the fluctuation of the chiral order parameter:  $\langle (\bar{\psi} \psi)^2 \rangle$ , therefore, we may conclude the  $S_\chi\text{SB}$  by divergence of the four-fermi coupling constant at a finite energy scale.

The NJL model at finite temperature and finite density is defined by the following Euclidean bare action,

$$S_0 = \int_0^{1/T} d\tau \int d^3x \left[ \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \mu \bar{\psi} \gamma_0 \psi - \frac{G_0}{2} \{ (\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2 \} \right]. \quad (6)$$

The four-fermi interaction  $G_0$  generates the effective four-fermi coupling constant  $G_\Lambda$  by quantum corrections, that is, by driving the infrared cutoff scale to the low energy. The effective action in LPA is denoted by

$$\Gamma_\Lambda = \int_0^{1/T} d\tau \int d^3x \left[ \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \mu \bar{\psi} \gamma_0 \psi - \frac{G_\Lambda}{2} \{ (\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2 \} \right]. \quad (7)$$

We calculate the generated four-fermi interactions through the diagrams in Fig. 1. The first diagram in the dashed box in Fig. 1 is the so-called large- $N$  leading term. If we adopt only this term in the beta function of the four-fermi coupling constant, we get the equivalent results to the MFA or the ladder SDEs. Note that we can add the large- $N$  non-leading terms without any difficulty.

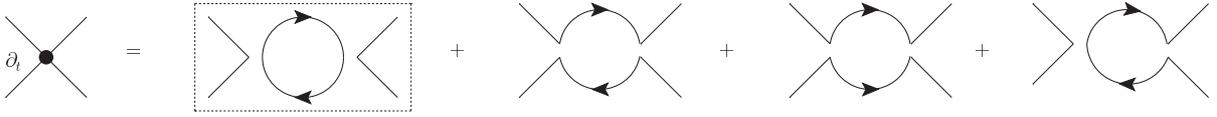


Figure 1: Feynman diagrams contributing to the beta function for the four-fermi interactions.

In this study, we use the 3- $d$  optimized cutoff function [10] in Eq. (3),

$$R_\Lambda(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \left( \frac{\Lambda}{|\mathbf{p}|} - 1 \right) \theta(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2}) = \mathbf{p} r(\mathbf{p}/\Lambda).$$

At finite temperature, the time direction momentum is discretized and the integration of it changes to the Matsubara summation, therefore, the 3- $d$  cutoff function is appropriate to write down the renormalization group equations in a simple form.

## 4 Results

The RGEs we solve are the following three simultaneous differential equations,

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{g} &= 2\tilde{g} - \frac{1}{3}(4I_0 - I_1), \\ \partial_t \tilde{T} &= \tilde{T}, \\ \partial_t \tilde{\mu} &= \tilde{\mu}, \end{aligned} \quad (8)$$

where  $\partial_t = -\Lambda \partial_\Lambda$ ,  $1/\tilde{g} = g = G_\Lambda \Lambda^2 / 4\pi^2$ ,  $\tilde{T} = T/\Lambda$  and  $\tilde{\mu} = \mu/\Lambda$ . The threshold functions  $I_0(\tilde{T}, \tilde{\mu})$  and  $I_1(\tilde{T}, \tilde{\mu})$  are given by the large- $N$  leading diagram and the non-leading diagrams respectively in Fig. 1, and are expressed as

$$I_0 = \left[ \left( \frac{1}{2} - n_+ \right) + \left( \frac{1}{2} - n_- \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} (n_+ + n_-) \right] \Big|_{\omega \rightarrow 1}, \quad (9)$$

$$I_1 = \left[ \frac{1}{(1 + \tilde{\mu})^2} \left( \frac{1}{2} - n_+ \right) + \frac{1}{(1 - \tilde{\mu})^2} \left( \frac{1}{2} - n_- \right) + \frac{1}{1 + \tilde{\mu}} \frac{\partial}{\partial \omega} n_+ + \frac{1}{1 - \tilde{\mu}} \frac{\partial}{\partial \omega} n_- \right] \Big|_{\omega \rightarrow 1}, \quad (10)$$

where  $n_\pm$  are the Fermi-Dirac distribution functions,  $n_\pm = (e^{(\omega \pm \tilde{\mu})/\tilde{T}} + 1)^{-1}$ . The large- $N$  non-leading effect  $I_1$  contributes towards the restoration of chiral symmetry. Especially, this effect is large at low temperature and high density. If temperature vanishes, the threshold function  $I_1$

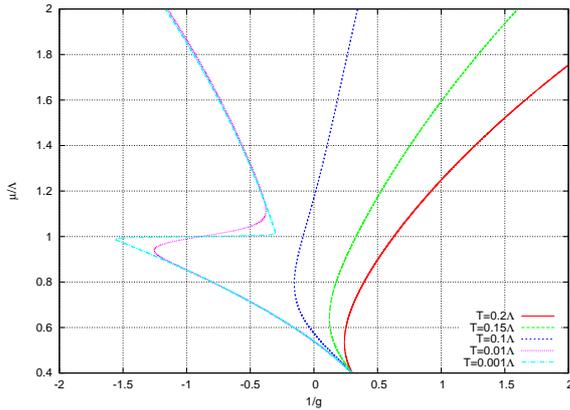


Figure 2: The RG flows of  $\tilde{g}$  of the large- $N$  leading on the  $\tilde{g} - \tilde{\mu}$  plane at  $\mu/\Lambda_0 = 0.3$  and various temperatures. We set the initial inverse four-fermi coupling to 0.3.

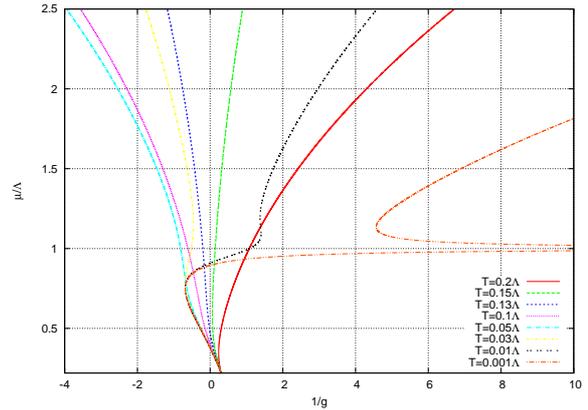


Figure 3: The RG flows of  $\tilde{g}$  of the large- $N$  non-leading on the  $\tilde{g} - \tilde{\mu}$  plane at  $\mu/\Lambda_0 = 0.22$  and various temperatures. We set the initial inverse four-fermi coupling to 0.3.

diverges at  $\tilde{\mu} = 1$  ( $\mu = \Lambda$ ) when the cutoff reaches the fermi surface.

We numerically solve the RGEs (8). We may conclude the  $S\chi$ SB when  $\tilde{g}$  passes the origin. We show the RG flows of  $\tilde{g}$  of the large- $N$  leading and the non-leading in Fig. 2 and 3 respectively. We draw RG flows after  $\tilde{g}$  passes the origin. This is justified by the "Weak solution" method [11] in case of the large- $N$  leading. Infact, the inverse four-fermi coupling constant  $\tilde{g}$  corresponds to the mass squared of meson fields introduced as the auxiliary fields. In other words,  $\tilde{g}$  corresponds to the curvature of the effective potential of meson field at the origin, and thus, the negative of  $\tilde{g}$  means that the curvature of the effective potential at the origin becomes negative. In this case, the effective potential has a global minimum at non-zero expectation value of meson field, then the  $S\chi$ SB occurs. If we directly solve the RGE for the four-fermi coupling constant, the RG flows stop on the way because the four-fermi coupling constant diverges at finite  $t$ . However, as shown in Fig. 2, some flows go to the negative region, and then comes back to the positive region afterwards. We may regard such turn-over flows as symmetric phase in case of the large- $N$  leading. In case of the large- $N$  non-leading, it is difficult to justify of this interpretation. However, we adopt the some criterion here.

The phase diagrams of the large- $N$  leading and the non-leading calculation are shown in Fig. 4. We can see the drastic difference of behavior of phase boundaries due to the large- $N$  non-leading effects at low temperature and high density.

## 5 Summary and Discussion

We study the Nambu–Jona-Lasinio model by using the non-perturbative renormalization group at finite temperature and finite density. We discuss the difference of the RG flows and phase boundaries between the mean field approximation results and those including the large- $N$  non-leading effects. We find that the large- $N$  non-leading effects become large and contribute to the restoration of chiral symmetry at low temperture and high density.

However, this analysis tells us only second-order phase transition because we evaluate only the RG flow of the four-fermi coupling constant. In other words, we see the behavior of the curvature of the mesonic effective potential at the origin only, and therefore, we overlook the possibility of the first-order transitions. We should bosonize the four-fermi interactions [3, 12, 13]

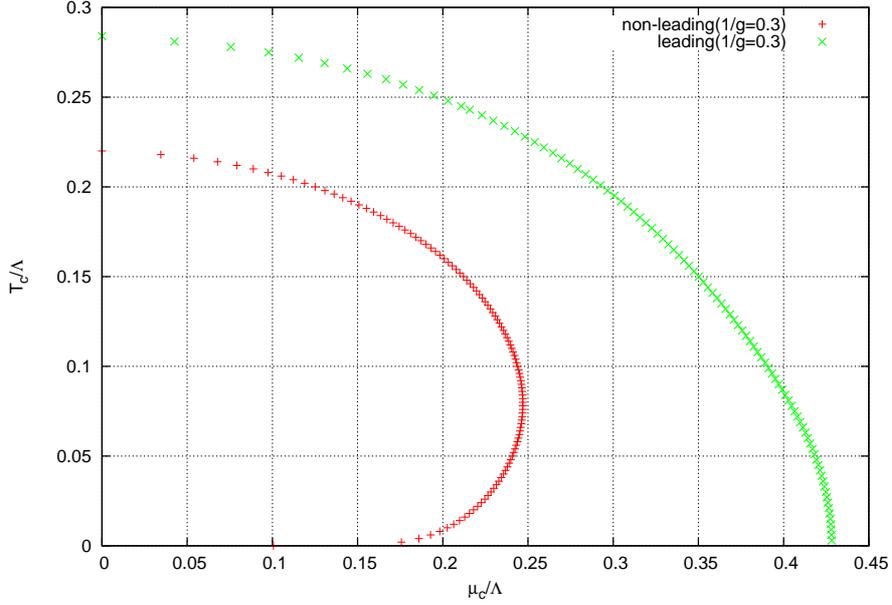


Figure 4: The chiral phase diagram in the large- $N$  leading and non-leading calculation

or treat total mass function [11] in order to evaluate the order of phase transition.

## References

- [1] K-I. Aoki, *Int. J. Mod. Phys. B* **14**, 1249 (2000).
- [2] K. G. Wilson and I. G. Kogut, *Phys. Rep.* **12** 75 (1974)
- [3] K-I Aoki, K. Morikawa, J-I. Sumi, H. Terao and M. Tomoyose, *Phys. Rev. D* **61**, 045008 (2000).
- [4] K-I. Aoki and D. Sato, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2013**, 043B04 (2013).
- [5] F. J. Wegner and A. Houghton, *Phys. Rev. A* **8**, 401 (1973).
- [6] J. Polchinski, *Nucl. Phys. B* **301**, 90 (1984).
- [7] C. Wetterich, *Phys Lett. B* **301**, 90 (1993).
- [8] A. Hazenfratz and P. Hazenfratz, *Nucl. Phys. B* **270**, 269 (1986).
- [9] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys Rev.* **122**, 345 (1961).
- [10] D. F. Litim, *Phys. Rev. D* **64**, 105007 (2001)
- [11] K-I. Aoki, S-I. Kumamoto, D. Sato, arXiv:1304.3289.
- [12] H. Gies and C. Wetterich, *Phys. Rev. D* **65**, 065001 (2002).
- [13] H. Gies and C. Wetterich, *Phys. Rev. D* **69**, 025001 (2004).

# カイラル非一様相における有限質量効果

柄沢真太郎<sup>1</sup> 巽敏隆  
京都大学理学研究科

カイラル非一様凝縮相における有限クォーク質量効果を議論する。

## 1 はじめに

近年、カイラル対称性の自発的破れに関する非一様構造に関する研究が脚光を浴びている。通常、自発的対称性の破れに伴う秩序変数は通常定数であり、その値が0であるか否かによって相構造の変化を議論する。ところで、秩序変数は定数である必然性はなく、空間的異方性を持つ関数であると考えるのがより一般性のある視点であると言えるだろう。このような精神に基づいて、秩序変数に空間変数依存性を与えたものを非一様構造という。

非一様構造の概念は、物性物理学の分野では FFLO 超伝導 [1]・スピン密度波 [2] などの様々な理論体系に対して用いられている。このアイデアを QCD におけるカイラル対称性の自発的破れに対して適用したものが、カイラル非一様構造である。実際、理想化された状況の下では、有限温度・密度平面上での QCD 相図においてカイラル非一様構造が熱力学的に優位になる相 (カイラル非一様相) が出現することが知られている。

本研究の主眼は、これまで理想化された状況下でのみ議論されてきたカイラル非一様構造の研究を、より現実的な系へ近づけていくことにある。具体的には、カイラル極限・外場無し・アイソスピン対称といった制限を外していく。特に有限クォーク質量系への拡張は重要であるので、これを本研究で議論する。その理由を以下に述べる。

カイラル対称性の自発的破れは有効ポテンシャルがワインボトル型になることで起こるが、カイラル極限の場合このポテンシャルの底 (カイラル球面) は等しい値であり、これが縮退した真空を表している。ところがクォークが有限な裸の質量を持つことによりカイラル対称性は陽に破れてしまい、結果カイラル球面上の各点はもはや等価ではなくなってしまう。このことはカイラル非一様構造に対しても大きな影響を与える。カイラル極限で知られていた構造の関数形が、高々数 MeV の質量を考慮するだけで大きく変化してしまうのである。カイラル極限で知られている非一様構造の代表的な関数形の 1 つとして、Dual Chiral Density Wave(DCDW)[3] があり、これは次のような構造である：

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}\psi\rangle &= \Delta \cos(qz) \\ \langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau_3\psi\rangle &= \Delta \sin(qz)\end{aligned}$$

ここで  $\Delta$  は凝縮の大きさであり、 $q$  は波数である。式を見れば分かるように、DCDW とはカイラル円周上に「等価に」巻き付いたような構造である。クォーク質量がスイッチすることによって等価性はもはや失われてしまい、DCDW はカイラル円周上の一点に「局在した」構造に変質してしまう。定量的な議論としては、NJL 模型を用いて変分法的にこれを導出する。実際、クォーク質量の最低次まで考慮した場合 sine-Gordon 方程式によって非一様構造が決定されることを示し、その熱力学的について議論する。

<sup>1</sup>e-mail address: karasawa@ruby.scphys.kyoto-u.ac.jp

## 2 フレームワーク

本章では、非一様構造に対する変分的取扱いを議論する。本研究では  $N_f = 2, N_c = 3$  の NJL モデルを用いて議論する。ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}(i\partial - m_c)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2]. \quad (1)$$

と与えられる。ここで  $m_c$  は裸のクォーク質量である。本研究では DCDW からの有限質量効果による変形に興味があるので、非一様構造の関数形を以下のように変分関数  $\theta(z)$  を用いて定義する [4] :

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \Delta \cos \theta(z) \quad , \quad \langle \bar{\psi}i\gamma_5\tau_3\psi \rangle = \Delta \sin \theta(z). \quad (2)$$

DCDW の関数形と比較すれば明らかのように、(2) は DCDW の一般化に対応していることが分かる。 $\Delta$  は空間一様な凝縮の大きさを表している。一方  $\theta(z)$  は空間非一様なカイラル角を表しており、これを変分関数として取り扱うことで有限質量効果による DCDW の変形を議論する。(2) を (1) に代入し、平均場近似を行うことで、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{MF}} = \bar{\psi}[i\partial - M - U(\theta(z))]\psi - G\Delta^2, \quad (3)$$

と書ける。ここで  $M = m_c - 2G\Delta$  は構成子クォーク質量であり、 $U(\theta(z)) = -2G\Delta \exp(i\gamma_5\tau_3\theta(z)) - M + m_c$  である。(3) はクォーク場に関する双二次形式であるのでこれは積分可能である。最終的に虚時間法を用いて有限温度の理論とし、さらに化学ポテンシャルを導入することで、熱力学関数の表式が以下のように得られる。

$$\Omega_{\text{MF}} = -T\text{Tr} \log[i\partial - M + \mu\gamma_0 - U(\theta(z))] + G\Delta^2 V, \quad (4)$$

ここで  $\text{Tr}$  はフレーバー、カラー、松原振動数に関する和と運動量空間に関する積分を表している。また、 $V$  は系の体積である。

## 3 非一様構造の関数形と熱力学ポテンシャルの表式

以上の準備の下で  $\theta(z)$  の関数形を決定する。まずはじめに系の Dirac 作用素及び Dirac-Hartree-Fock 方程式は次のように与えられる :

$$H_{\text{D}} = -i\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + \gamma_0 M + \gamma_0 U(\theta(z)), \quad (5)$$

$$H_{\text{D}}\psi_\alpha = E_\alpha(\theta)\psi_\alpha, \quad (6)$$

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle + i\langle \bar{\psi}i\gamma_5\tau_3\psi \rangle = \Delta e^{i\theta(z)}. \quad (7)$$

(6) 及び (7) を同時に解くことができれば、 $\theta(z)$  の関数形は完全に決定されたことになるが、残念ながら一般解は未だ発見されていない。そこで、本研究では  $\theta(z)$  の満たすべき運動方程式を  $\Omega_{\text{MF}}$  を微分展開することで求める [5, 6]。

具体的に微分の 2 次まで求めた結果は

$$\Omega_{\text{MF}}^{\text{der}} = \frac{1}{2}f_\pi^{*2} (\partial_z \theta(z))^2 - m_c \Delta \cos \theta(z). \quad (8)$$

となる。ここで  $f_\pi^*$  はパイオンの崩壊定数である。(8) から  $\theta(z)$  の運動方程式を得る :

$$\frac{d^2\theta(z)}{dz^2} - m_\pi^{*2} \sin \theta(z) = 0, \quad (9)$$

(9) は sin-Gordon 方程式である。この方程式の一般解は知られており、 $\theta(z) = \pi + 2\text{am}\left(\frac{m_c^* z}{k}, k\right)$  である。ここで  $0 < k < 1$  はモジュラスパラメータと呼ばれており、 $k$  は 1 に近づくほど kink 的な構造を示すことが分かる。 $\theta(z)$  の関数形が求まったので、これを熱力学ポテンシャルに代入し、 $\mathcal{O}(m_c)$  まで求める。結果は

$$\Omega_{\text{MF}} \simeq \Omega_{\text{DCDW}} + \Omega_{\text{SB}} + G\Delta^2 V, \quad (10)$$

$$\Omega_{\text{DCDW}} = -T\text{Tr} \log[S_{\text{ref}}^{-1} + \mu\gamma_0], \quad (11)$$

$$\Omega_{\text{SB}} = -T\text{Tr}[(S_{\text{ref}}^{-1} + \mu\gamma_0)^{-1} F(m_c; \theta(z))]. \quad (12)$$

である。

## 4 数値計算結果

前章で熱力学ポテンシャルの表式が求まったので、各  $T, \mu$  ごとに  $\Delta, k$  に関して最小化する。その上で、一様構造に限定した場合の熱力学ポテンシャルと比較すればよい。

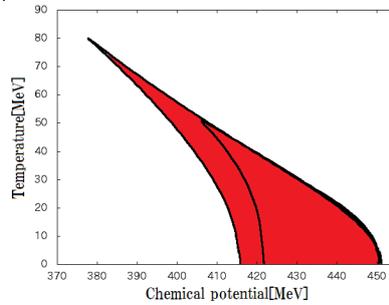


図 1:  $m_c = 0, 5\text{MeV}$  での温度・化学ポテンシャル平面上での QCD 相図。赤で塗りつぶされた領域が非一様構造が熱力学的に優位になるよう領域。 $m_c$  の上昇と共に非一様相が減少していく。

図 1 は温度・化学ポテンシャル平面上での QCD 相図である。赤で塗りつぶされた部分が非一様構造が熱力学的に優位になる領域であり、 $m_c$  が  $0\text{MeV}, 5\text{MeV}$  のいずれの場合にも非一様相が出現していることが分かる。

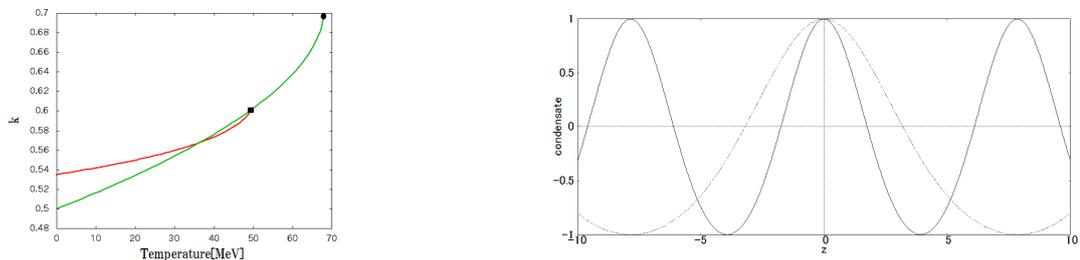


図 2: Left: 温度の上昇に伴う相境界上の  $k$  の値の変化。緑 (赤) 線は左 (右) 側の相境界での  $k$  の値の推移を表している。黒点 (黒四角) はそれぞれ臨界点 (リフシツツ点) を表す。Right:  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  の関数形の変化。実線は低温領域での非一様構造の関数形であり、点線は臨界点近傍での関数形である。

図 2 は温度の変化に伴う  $k$  の値の変化及び非一様構造の関数形の変化を表している。温度の上昇に伴い、 $k$  は 1 に近づいていくことが分かる。即ち、低温領域では DCDW 的な関数形である一方、臨界点近傍では非一様構造は kink 的な関数形が現れることが理解できる。

## 参考文献

- [1] P. Fulde and R.A.Ferrell, Phys. Rev. A135 (1964) 550.  
A.I.Larkin and Y.N.Ovchinnikov, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 47 (1964) 1136.
- [2] A.W.Overhauser, Phys. Rev. Lett. 4 (1960) 462; Phys. Rev. 128 (1962) 1437.  
G.Gruner, Rev. Mod. Phys. 66 (1994) 1.
- [3] E.Nakano and T.Tatsumi, Phys. Rev. D71 (2004) 114006.
- [4] S.Karasawa and T.Tatsumi, arXiv:1307.6448
- [5] K.Kikkawa, Prog.Theor.Phys. **56** (1976) 947.
- [6] T.Eguchi, H.Sugawara, Phys.Rev. **D10** (1974) 4257.

# 有限密度領域におけるカラー遮蔽ポテンシャル

高橋純一<sup>a</sup>, 永田桂太郎<sup>b</sup>, 斎藤卓也<sup>c</sup>, 中村純<sup>d</sup>, 佐々木崇宏<sup>a</sup>, 河野宏明<sup>e</sup>, 八尋正信<sup>a</sup>  
 九大院理<sup>a</sup>, KEK<sup>b</sup>, 高知大<sup>c</sup>, 広大情報<sup>d</sup>, 佐賀大院工<sup>e</sup>

## 1 はじめに

近年、RHIC や LHC といった高エネルギー大型加速器実験施設において、重イオン衝突実験が行われている。この実験の目的の一つとして、クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) の性質を解明することが挙げられる。この QGP の性質は理論的にも長年研究されており、特に有限温度 ( $T$ )・ゼロ化学ポテンシャル ( $\mu = 0$ ) では量子色力学 (QCD) の第一原理計算である格子 QCD 計算によっていくつかの重要な結果をもたらされてきた。しかしながら、有限  $\mu$  の格子 QCD 計算は符号問題により実行が困難である。最近ではこの符号問題を回避するために様々な方法が提案されている。その中でも我々は虚数化学ポテンシャル ( $\mu_I$ ) に注目した。 $i\mu = \mu_I$  と化学ポテンシャルを純虚数とすることで格子 QCD 計算を可能にし、 $\mu_I$  領域で計算した後に解析接続によって実数  $\mu$  領域の予言をする。

$\mu_I$  領域における QCD の相構造には特有のものがある。 $\mu_I$  領域では QCD の分配関数が  $\mu_I/T$  について周期  $2\pi/3$  の周期性を持つ [1]。これを Roberge-Weiss (RW) 周期性と呼ぶ。また、 $2\pi/3$  毎に分配関数が不連続になる RW 相転移線が存在する。こういった性質を用いて我々は  $\mu_I$  領域における格子 QCD 計算を行った (図 1)。

これらを踏まえて本研究では、2 フレーバーの格子 QCD を用いて、 $\mu_I$  領域におけるカラー SU(3) のカラー遮蔽ポテンシャルを測定した。これを実数  $\mu$  領域に解析接続することで、カラー遮蔽ポテンシャルの  $(\mu/T)^2$  依存性を調べた。さらにこのポテンシャルからカラーデバイ遮蔽質量を求め、その  $(\mu/T)^2$  依存性を調べた。これは、QGP 内での  $J/\Psi$  や  $\Upsilon$  といった重クォーク束縛状態の性質を研究するうえで有用である。

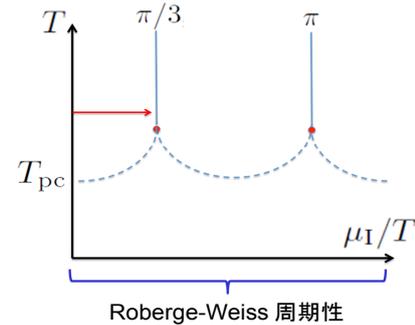


図 1: 虚数化学ポテンシャル領域の QCD 相図。点線より上为非閉じ込め相に、下が閉じ込め相に対応する。

## 2 格子 QCD のセットアップ

本研究で用いた格子作用は、ゲージ場の作用が繰り込み群改良型岩崎ゲージ作用、クォーク場の作用が 2 フレーバーのクローバー改良型ウィルソフェルミオン作用である。格子サイズは  $N_s^3 \times N_\tau = 16^3 \times 4$ 、擬スカラー中間子とベクター中間子の比が  $m_{PS}/m_V = 0.80$  の line of constant physics であり、温度は  $T/T_{pc} \sim 1.20$  ( $T_{pc}$  は  $\mu = 0$  での閉じ込め-非閉じ込め相転移温度)、虚数化学ポテンシャルは  $\mu_I/T = 0.0 \sim 1.0$  の範囲でシミュレーションを行った (図 1 の矢印部分)。統計数は 150 個を 100 trajectory 毎に採ってきた。ちなみに、格子間隔は  $a \sim 0.2[\text{fm}]$  である。その他、詳細は [2] を参照してほしい。

### 3 結果

#### 3.1 カラー遮蔽ポテンシャルとその解析接続

カラー遮蔽ポテンシャルは Polyakov loop の相関関数 (2),(3) を用いて定義される。

$$L(\mathbf{x}) = \prod_{\tau=1}^{N_\tau} U_4(\tau, \mathbf{x}) \quad (1)$$

$$e^{-V_{q\bar{q}}(r)/T} = \langle \text{tr}L(\mathbf{x})\text{tr}L^\dagger(\mathbf{y}) \rangle \quad (2)$$

$$e^{-V_{q\bar{q}}(r)/T} = \langle \text{tr}L(\mathbf{x})\text{tr}L(\mathbf{y}) \rangle \quad (3)$$

ここでトレースはカラーについてとっている。適切なゲージ固定の後、クォーク・反クォーク間ポテンシャルはカラー一重項チャンネル (1), カラー八重項チャンネル (8) に、クォーク・クォーク間ポテンシャルはカラー六重項チャンネル (6), カラー反三重項チャンネル (3\*) に分けられる [3, 4]。本研究では、クローンゲージ固定を適用した。

$\mu_1$  領域から実数  $\mu$  領域への解析接続は次のように行う。まず  $\mu_1$  領域で測定したカラー遮蔽ポテンシャルを

$$\frac{V_M(r, T, \mu_1)}{T} = v_0(r) + v_1(r) \left( \frac{i\mu_1}{T} \right) + v_2(r) \left( \frac{i\mu_1}{T} \right)^2 + v_3(r) \left( \frac{i\mu_1}{T} \right)^3 + v_4(r) \left( \frac{i\mu_1}{T} \right)^4 + \dots \quad (4)$$

と  $i\mu_1/T$  で展開する ( $M = 1, 3^*, 6, 8$ )。ここから  $i\mu_1/T \rightarrow \mu_R/T$  ( $\mu_R \equiv \mu$ ) と置き換えることで、実数  $\mu$  領域のカラー遮蔽ポテンシャル

$$\frac{V_M(r, T, \mu_R)}{T} = v_0(r) + v_1(r) \left( \frac{\mu_R}{T} \right) + v_2(r) \left( \frac{\mu_R}{T} \right)^2 + v_3(r) \left( \frac{\mu_R}{T} \right)^3 + v_4(r) \left( \frac{\mu_R}{T} \right)^4 + \dots \quad (5)$$

が求められる。先行研究 [5] においては reweighting 法とテイラー展開を用いて展開係数の2次まで求めていた。本研究では4次までの展開係数を求めてカラー遮蔽ポテンシャルを実数  $\mu$  領域へ外挿した。

図2の左はカラー一重項ポテンシャルの  $v_2(r)$  (赤) と  $v_4(r)$  (青) である。これを見ると2次に比べて4次は無視できない大きさを持つことが分かる。

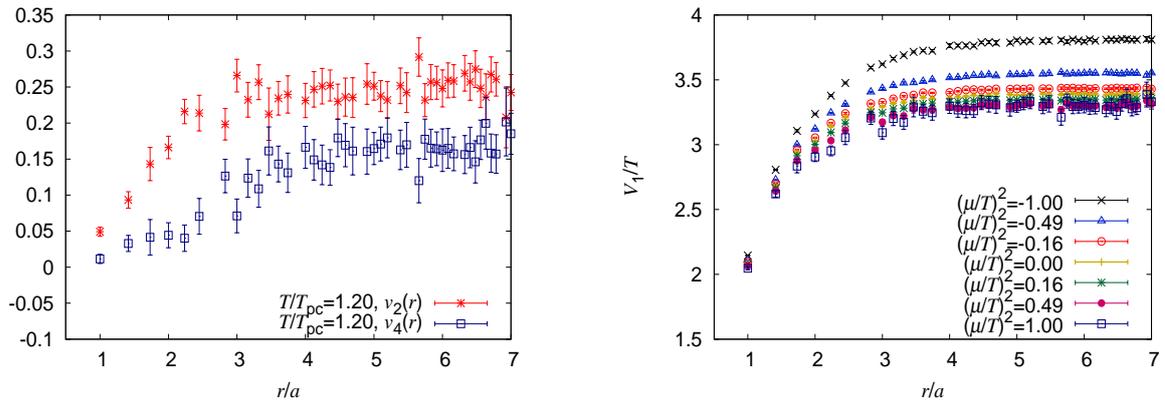


図2: (左) カラー一重項ポテンシャルの展開係数の2次 (赤) と4次 (青)。 (右) カラー一重項ポテンシャルの  $(\mu/T)^2$  依存性。どちらの図も横軸はクォーク・反クォーク間の距離。

図2の右はカラー一重項ポテンシャルの  $(\mu/T)^2$  依存性である。 $(\mu/T)^2 \leq 0$  が  $\mu_1$  領域に対応し実際に格子 QCD 計算をした結果で、 $(\mu/T)^2 \geq 0$  が実数  $\mu$  領域に対応し解析接続により外挿をした結果で

ある。これを見ると、 $\mu_I$  領域の化学ポテンシャル依存性に比べて実数  $\mu$  領域の化学ポテンシャル依存性の方が弱いことが分かる。これは  $\mu/T$  の 4 次の効果である。もし 4 次を考えていなかったら、ポテンシャルの遠方での高さは  $\mu = 0$  を境に対称になるはずである。 $i\mu_I/T \rightarrow \mu_R/T$  の解析接続の際に 4 次の展開係数は符号が変わらずに、実数  $\mu$  領域での  $(\mu/T)^2$  依存性を弱める働きをする。そのため実数  $\mu$  領域の化学ポテンシャル依存性が  $\mu_I$  領域のそれに比べて弱いのである。

図 3 は遠方で  $V_M \rightarrow 0$  となるように規格化したカラー遮蔽ポテンシャルである。規格化は Polyakov loop から求まるクォークの自由エネルギーを用いて行っている。カラー一重項チャンネルとカラー反三重項チャンネルは引力、カラー八重項チャンネルと六重項チャンネルは斥力であった。また  $\mu_I$  を大きくしていくと、全てのチャンネルで相互作用が強くなっていくことが分かった。これは温度一定のまま  $\mu_I$  を大きくしていくと相対的に閉じ込め相転移線に近づいていくこととなり、より閉じ込めの性質が強くなっていくと解釈できる。

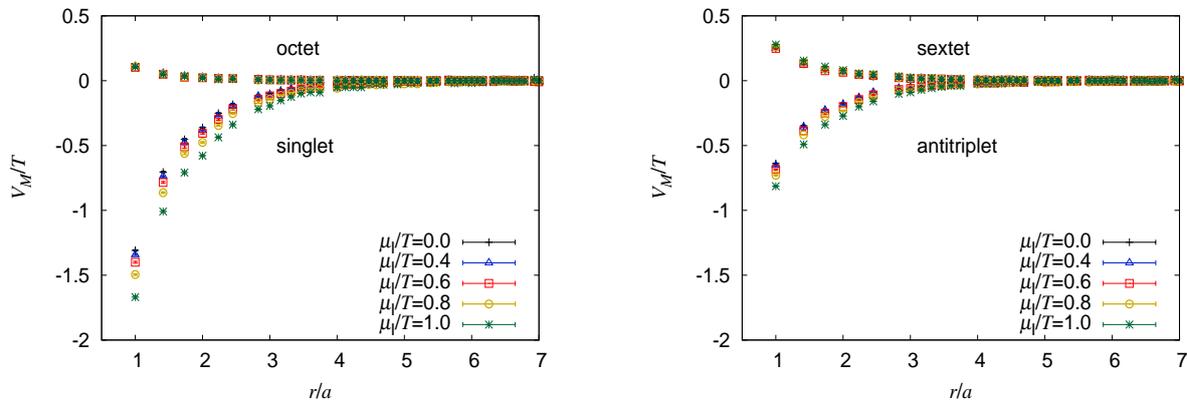


図 3: (左) クォーク・反クォーク間のカラー遮蔽ポテンシャル。(右) クォーク・クォーク間のカラー遮蔽ポテンシャル。

### 3.2 カラーデバイ遮蔽質量

カラーデバイ遮蔽質量については遠距離で規格化されたカラー遮蔽ポテンシャルを湯川型のポテンシャル

$$V_M(r; T, \mu) = C_M \frac{\alpha_{\text{eff}}(T, \mu)}{r} e^{-m_D(T, \mu)r} \quad (6)$$

でフィッティングすることで求める。 $\alpha_{\text{eff}}(T, \mu)$  は effective running coupling、 $m_D(T, \mu)$  はカラーデバイ遮蔽質量、 $C_M = \langle \sum_{a=1}^8 t_1^a \cdot t_2^a \rangle_M$  はカシミア因子である。今回は物理的なチャンネルであるカラー一重項チャンネルについての結果を見せる。ちなみに、カラー一重項チャンネルの場合は  $C_1 = -4/3$  である。

図 4 はカラーデバイ遮蔽質量の  $(\mu/T)^2$  依存性である。青の誤差付きの点が我々の計算結果、赤の誤差付きの点が先行研究 [6] の結果、黒の実線が hard thermal loop 近似を用いた leading order の摂

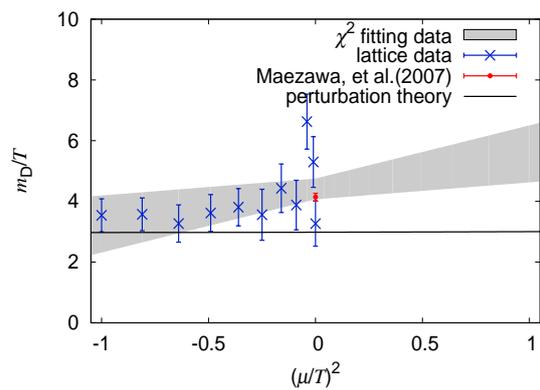


図 4: カラーデバイ遮蔽質量の  $(\mu/T)^2$  依存性。カラー一重項チャンネルに対してフィッティングをした結果である。

動計算結果 [7, 5]、灰色の部分が我々の結果を  $\mu/T$  の 2 次の関数  $m_D/T = a_0(T) + a_1(T)(\mu/T)^2$  を用いて  $\chi^2$  フィッティングして実数  $\mu$  領域まで外挿した結果である。結果を見ると、格子 QCD による結果、実数  $\mu$  に外挿した結果ともに化学ポテンシャル依存性が摂動論よりも強いものとなった。

## 4 まとめ

本研究では、2 フレーバーの格子 QCD を用いて虚数化学ポテンシャル領域におけるカラー遮蔽ポテンシャルとカラーデバイ遮蔽質量を測定した。カラー一重項チャンネルについて  $i\mu_I/T$  で展開した時の 4 次の係数は 2 次に比べて無視できないほどの大きさを持っていた。また、4 次の効果は実数  $\mu$  領域におけるポテンシャルの  $\mu$  依存性を弱める働きをしていた。さらに、カラー一重項、反三重項チャンネルが引力、カラー八重項、六重項チャンネルが斥力であり、 $\mu_I$  を大きくしていくにつれて相互作用が強くなる傾向であった。カラーデバイ遮蔽質量に関しては、我々が  $\mu_I$  領域で求めたもの、及び実数  $\mu$  領域まで外挿した結果が摂動論より強い  $(\mu/T)^2$  依存性を見せた。

## 参考文献

- [1] A. Roberge and N. Weiss, Nucl. Phys. B 275, 734 (1986)
- [2] J. Takahashi, *et al.*, arXiv:1308.2489 [hep-lat].
- [3] S. Nadkarni, Phys. Rev. D 33, 3738 (1986).
- [4] S. Nadkarni, Phys. Rev. D 34, 3904 (1986).
- [5] S. Ejiri, *et al.* (WHOT-QCD Collaboration), Phys. Rev. D 82, 014508 (2010).
- [6] Y. Maezawa, *et al.* (WHOT-QCD Collaboration), Phys. Rev. D 75, 074501 (2007).
- [7] Le Bellac, Cambridge Monographs on Mathematical Physics ; Thermal Field Theory (1996).

# QCD 相転移における核生成ダイナミクス

栗田竜一 平野哲文<sup>1</sup>

東京大学大学院理学系研究科 理化学研究所仁科加速器センター 上智大学理工<sup>1</sup>

QCD 相図におけるバリオン化学ポテンシャルが大きい領域では、QGP 相からハドロンの相への相転移が 1 次相転移であることが示唆されている。本稿では、相転移が 1 次相転移である場合に普遍的な現象である核生成に注目し、重イオン衝突反応でのダイナミクスを記述するモデルを構築する。

## 1 はじめに

物質の最小単位とされるクォークやグルーオンは非可換ゲージ理論である量子色力学 (QCD) で記述される。QCD が漸近的自由性を持つことから、温度の低い側ではクォークやグルーオンが閉じ込められたハドロンの存在し、温度を上げるとクォークやグルーオンが自由に運動するクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) が実現すると予想される。ところで、高エネルギー重イオン衝突実験において生成された QGP は、粘性が非常に小さく完全流体としての振る舞いがよいことが示されている [1]。近年では、楕円フローの実験値を説明するために粘性流体の枠組みが用いられ、QGP 物性の理論的な解析が進んでいる。

QGP からハドロンの物質の間の転移は、バリオン化学ポテンシャルがゼロの場合、格子 QCD の計算によりクロスオーバーであることが示されている [2]。有限バリオン化学ポテンシャルでは格子 QCD 計算が困難であるが、有効モデルに基づいた解析から臨界点の存在が示唆されている。ところが臨界点の存在の有無、及びその位置はモデルに依存して様々であり、一致した結論は得られていないのが現状である。臨界点より大きなバリオン化学ポテンシャル側では、QGP とハドロンの相の移り変わりが 1 次相転移となる。重イオン衝突反応実験において、衝突エネルギーを下げる事でバリオンストップピングの効果によりバリオン化学ポテンシャルの高い状態となる。本稿では、臨界点の存在を実験結果から引き出すことを大きな目標として、重イオン衝突反応における QGP からハドロンの相の転移の回数に応じたダイナミクスの違いに注目し、1 次相転移のダイナミクスを記述するモデルを構築する。

1 次相転移に特有なダイナミクスとして核生成がある。先行研究 [3] では、過冷却下にある QGP 中にハドロンの泡が生成し、生成された泡の膨張を考慮して 1 次相転移のダイナミクスを記述していた。ところが、ハドロンの泡同士が合体する過程がダイナミクスに含まれていない。本稿ではハドロンの泡の生成・膨張に加え、泡同士の合体も含めた総括的なダイナミクスを記述するモデルを構築する。

## 2 流体 + 核生成モデル

核生成とは、2 つの異なる相が 1 次相転移で移り変わる場合に、過冷却あるいは過熱下においてエネルギー的により安定な相の泡が生成する現象を表す。今回の QGP の場合では、重イオン衝突反応によって作られた QGP が急速な冷却により過冷却に至り、QGP 中にハドロンの泡が生じる現象を表す。QGP の時間発展は流体的な記述がよいため、状態方程式と合わせて相対論的流体力学の枠組みを用いる。ここで核生成は非平衡現象であり、混合相中の QGP の割合を表す  $q$  という物理量が新たな変数となるため、状態方程式に加えてこの量の時間発展を記述することが必要である。以下ではそれについて論じる。

さて、QGP 中に半径  $R$  のハドロンの泡が生じた時の自由エネルギーの変化分は

$$\Delta F_{QGP} = 4\pi R^2 \alpha - \frac{4\pi}{3} R^3 (P_h - P_q) \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $\alpha$  は表面張力、 $P_h$ 、 $P_q$  はそれぞれハドロン相、QGP 相の圧力である。表面を作るためにはエネルギーが必要であるため表面項が正で効き、過冷却状態から来るエネルギーの利得による項が体積項として負で効く。

式 (1) はイジングモデルにおけるドメイン形成を思い起こさせる。始めにある方向 ( $z$  軸正) に磁場をかけておきスピンをすべて磁場の方向に揃える。続いて磁場を逆向きにする事を考えると、全てのスピンの向きが  $z$  軸正の向きを向いている中で、磁場だけ  $z$  軸負の向きを向いていることになる。これは上の例では、QGP が過冷却中に置かれている事に対応している。ここで、 $z$  軸正の向きを向いているスピンの中で、磁場の方向である  $z$  軸負の向きを向いた  $l$  個のスピンから成るドメインが生じたことによる自由エネルギーの変化分は

$$\Delta F_{Ising} = \frac{1}{2} c J l^{2/3} - h l \quad (2)$$

と書ける。ここで、 $c$  は体積と表面積の比から来る無次元量の定数で、 $J$  はスピン間相互作用、 $h$  はエネルギーの次元を持った実効的な磁場である。

動的臨界現象におけるダイナミクスは自由エネルギーによって支配されることに注目する。そこで、 $\Delta F_{QGP}$  と  $\Delta F_{Ising}$  の形の類似性をもとに QGP 側の物理量である  $\alpha$ 、 $P_h - P_q$  とイジング側の物理量である  $J$ 、 $h$  を対応付け、イジングモデルの時間発展を基に QGP 側の動的ダイナミクスの情報を得ることを考える。QGP とハドロンの混合相中の QGP の割合  $q$  をイジング側の物理量  $n_l$ 、すなわち  $l$  個の  $z$  軸負の向きを向くスピンから成るドメインの個数、と対応づける事ができる。つまり

$$1 - q = \sum_{l=1}^N \frac{l n_l}{N}. \quad (3)$$

ここで、 $N$  は格子のサイズである。この  $n_l$  の時間発展は現象論的に書き下されている [4]。

$$\begin{aligned} \frac{d\langle n_l \rangle}{dt} &= \sum_{l'} \langle n_{l+l'+1} S_{l+l'+1, l'} \rangle - \frac{1}{2} \sum_{l'} \langle n_l S_{l, l'} \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l'} \langle n_{l-l'-1} n_{l'} C_{l-l'-1, l'} \rangle - \sum_{l'} \langle n_l n_{l'} C_{l, l'} \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle$  はスピンの配位に対する状態和である。また  $S_{l+l'+1, l'}$  は  $l+l'+1$  個のスピンからなるドメインが  $l$  個と  $l'$  個のスピンからなるドメインに分離する単位時間当りの確率を、 $C_{l, l'}$  は  $l$  個のスピンからなるドメインと  $l'$  のスピンからなるドメインの合体する単位時間当りの確率を表す。 $C_{l, l'}$  は先行研究 [3] を基に構成し、 $S_{l+l'+1, l'}$  は詳細釣り合いから  $C_{l, l'}$  で書き下す事ができる。つまり、

$$C_{0,0} = \frac{16}{3\pi} \left( \frac{\alpha}{3T} \right)^{2/3} \frac{\alpha \eta_q R_*}{\xi_q^4 (\Delta w)^2} e^{-\beta \Delta F_{QGP}(R_*)}, \quad (5)$$

$$C_{l,0} = \frac{1}{\tau_s(l, 0)}, \quad (6)$$

$$C_{l, l'} = \frac{1}{\tau_s(l, l')} \frac{c l^{2/3}}{N - l}, \quad (7)$$

$$n_{l+l'+1}^f S_{l+l'+1, l'} = n_l^f n_{l'}^f C_{l, l'}. \quad (8)$$

$$(9)$$

ここで、 $\eta_q$ 、 $\xi_q$  はそれぞれ QGP 相のズレ粘性係数、相関長であり、 $\Delta w$  は QGP 相とハドロン相のエンタルピー密度の差である。 $R_*$  は  $\Delta F_{QGP}$  の極値を与える臨界半径であり、反応のタイムスケールを与える  $\tau_s(l, l')$  は、

$$\frac{4\pi}{3} (R_l + \tau_s(l, l')v(T))^3 + \frac{4\pi}{3} (R_{l'} + \tau_s(l, l')v(T))^3 - \frac{4\pi}{3} R_l^3 - \frac{4\pi}{3} R_{l'}^3 = \frac{4\pi}{3} R_*^3 \quad (10)$$

により定まる。ここで  $v(T)$  は泡の半径の膨張速度であり [3] と同様に  $v(T) = v_0 [1 - T/T_c]^{3/2}$  と取る。今、イジングモデル側の無次元体積  $l$  は  $\frac{4\pi}{3} R_*^3$  を単位に取っている。また、 $n_l^f$  は  $n_l$  の終状態の分布であり、 $n_l^f \propto e^{-\beta_I \Delta F_{Ising}}$  として一粒子分布で書けることを仮定し、格子サイズの条件から規格化は  $n_0^f + \sum_{l=1}^N l n_l^f = N$  で定める。

式 (4) において、 $l' = 0$  が生成・膨張に対応し、 $l'$  が非ゼロの部分が合体の反応を表す。和の取り方を  $l' = 0$  のみと、和を全体で取ることの比較を行う事で泡同士の合体の反応の効果を検証する事ができる。上の対応から今度は逆にイジング側の時間発展をもとに QGP 側の  $q$  の時間発展を追い、方程式系が閉じて 1 次相転移のダイナミクスを記述できる。

以上のモデルの構築についてまとめると

- 相対論的流体力学 + 状態方程式 (QGP の時間発展を記述)
- 3 次元イジングモデルとの対応 (QGP 相の割合である  $q$ 、自由エネルギーの対応)
- イジングモデルの時間発展 ( $q$  の時間発展の情報を引き出す)

となる。

### 3 まとめ

QCD 相図の構造を実験結果から引き出す事を大きな目標として、相転移の回数に応じたダイナミクスの違いに注目し、本稿では QGP からハドロン物質への転移が 1 次相転移の場合のダイナミクスを記述した。3 次元イジングモデルと QGP 中にハドロンの泡が生じた状態における自由エネルギーの類似性に基づき、先行研究のハドロンの泡の生成・膨張に加えて泡同士の合体の反応も含めたモデルを構築した。このモデルに基づいた数値計算は、現在進行中である。

### 参考文献

- [1] T. Hirano, Phys. Rev. C 65, 011901 (2001)
- [2] S. Borsanyi, *et al.*, JHEP 11, 077 (2010)
- [3] L. P. Csernai and J. I. Kapusta, Phys. Rev. Lett. 69, 737 (1992)
- [4] K. Binder, D. Stauffer and H. M. Krumbhaar, Phys. Rev. B 12, 5261 (1975)

# 強結合格子 QCD における高運動量補助場成分の寄与

市原 輝一<sup>A,B</sup>, 中野 嵩士<sup>C</sup>, 大西 明<sup>B</sup>  
 京大理<sup>A</sup>, 京都大学基礎物理学研究所<sup>B</sup>, (株) 構造計画研究所<sup>C</sup>

## 概要

強結合格子 QCD に補助場のモンテカルロ法を適用する。発生する符号問題の起源を明らかにし、得られた結果を議論する。

## 1 はじめに

QCD の第一原理計算である格子 QCD は、QCD を研究する上で有用な手法である。しかし、有限化学ポテンシャルを含む格子 QCD のモンテカルロシミュレーションでは、符号問題が発生するため、その解析が非常に難しい。そこで、有限化学ポテンシャル領域を含む QCD 相図を研究する別の手法として、強結合格子 QCD (格子 QCD の強結合展開) がある。先行研究では、この強結合格子 QCD による相図研究の多くが、符号問題の影響がない平均場近似で行われている。平均場近似を超えた解析では符号問題の影響が現れる可能性がある。実際、近年行われたモノマー・ダイマー・ポリマー (MDP) 計算 [1] と補助場のモンテカルロ (AFMC) 法 [2] による研究の両方で、符号問題が発生する事が判明している。現在の AFMC 法での解析は格子サイズが小さく、大きな格子サイズへ適用する為には、符号問題による統計重みの打消しの起源を明瞭にする必要がある。そこで今回、強結合格子 QCD における補助場のモンテカルロ法を紹介し、その際に出現する符号問題の起源を同定する。

## 2 補助場のモンテカルロ (AFMC) 法と符号問題

補助場のモンテカルロ (AFMC) 法とは、導入された補助場に対し平均場近似を適用せず、モンテカルロ法を用いて数値的に積分する方法である。この方法により、補助場の揺らぎの効果が考慮される。また符号問題とは、統計重みが複素数となることで、重みの打ち消しあいが起こり、数値計算精度が低下する問題である。この節では、強結合格子 QCD における補助場のモンテカルロ法と符号問題との関係について紹介する。今回の定式化では、格子フェルミオンとして Unrooted staggered fermion を用いる。また、非等方因子  $\gamma$  は空間方向と時間方向の作用の比として導入する [3]。この時作用は、強結合極限と  $1/d$  展開 ( $d$  は空間次元数) の主要項のみを考慮すると

$$Z = \int \mathcal{D}[\chi, \bar{\chi}, U_0] e^{-S_{\text{SCL}}}, \quad (2.1)$$

$$S_{\text{SCL}} = \frac{1}{2} \sum_x [V_x^+(\mu) - V_x^-(\mu)] - \frac{1}{4N_c} \sum_{x,y} M_x V_{x,y} M_y + m_0 \sum_x M_x, \quad (2.2)$$

$$V_x^+(\mu) = e^{\mu/\gamma^2} \bar{\chi}_x U_0 \chi_{x+\hat{0}}, V_x^-(\mu) = -e^{-\mu/\gamma^2} \bar{\chi}_{x+\hat{0}} U_0^\dagger \chi_x, V_{x,y} = \frac{1}{2} \sum_j (\delta_{x+\hat{j},y} + \delta_{x-\hat{j},y}), \quad (2.3)$$

となる [3, 4, 5, 6]。ここで、裸の質量  $m_0$ 、化学ポテンシャル  $\mu$ 、(反)クォーク場  $(\bar{\chi})\chi$ 、リンク変数の第 0 成分  $U_0$ 、カラー  $N_c = 3$ 、メソン場  $M_x = \bar{\chi}_x \chi_x$  である。但し、格子間隔  $a$  は省略した。 $S_{\text{SCL}}$  の初項は時間方向の運動項、第 2 項はメソンホッピング項、第 3 項は質量項を表す。次に補助場を導入し、式 (2.2) のメソン 2 体場を 1 体場に帰着させる。各サイトで違う値をとるので、Extended Hubbard-Stratnovich(EHS) 変換 [2, 5] を採用する (

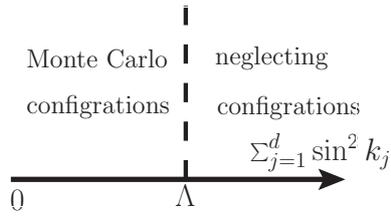


図 1 カットオフパラメータ  $\Lambda$  と Monte Carlo 配位との関係図。  $\Lambda$  より大きい運動量の配位は無視して計算する事で、高運動量補助場成分の秩序変数に与える影響を調べる。

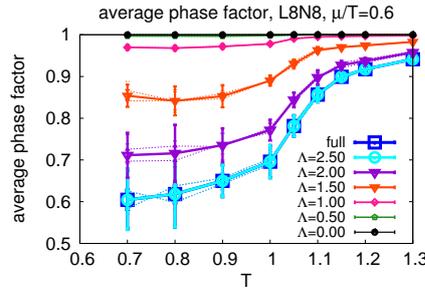


図 2 average phase factor の  $\Lambda$  依存性。  $\Lambda$  を 0 にする程、数値計算精度の低下が問題とならなくなる。

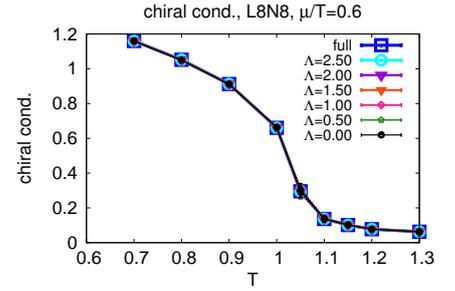


図 3 カイラル凝縮の  $\Lambda$  依存性。カイラル凝縮に  $\Lambda$  依存性はみられない。

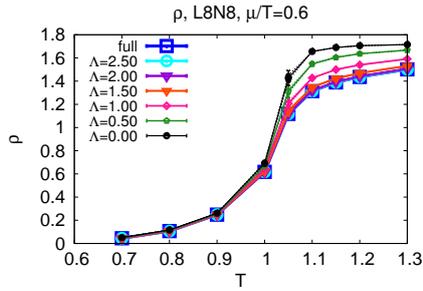
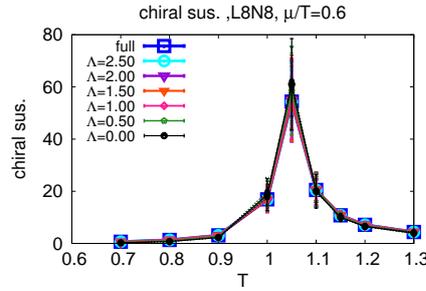
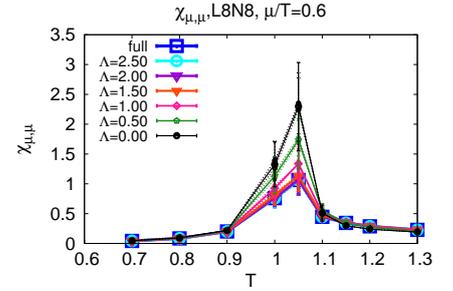
$\exp[\alpha AB] = \int \mathcal{D}[\phi, \varphi] \exp[-\alpha [\phi^2 + \varphi^2 + (A+B)\varphi - i(A-B)\phi]]$ . これは数学的な恒等式であり、符号問題の原因となる虚数が必然的に導入される。フーリエ変換の後、EHS 変換を用い、 $M_{-\mathbf{k}, \tau}, iM_{-\mathbf{k}+(\pi, \pi, \pi), \tau}$  に対する補助場として  $\sigma_{-\mathbf{k}, \tau}, \pi_{\mathbf{k}, \tau}$  を導入する [2]。この結果、フェルミオン行列の空間的対角項 (有効質量項) が以下のように変更される。

$$m_x = m_0 + \frac{1}{4N_c} \sum_j \left[ (\sigma + i\varepsilon\pi)_{x+\hat{j}} + (\sigma + i\varepsilon\pi)_{x-\hat{j}} \right]. \quad (2.4)$$

ここで、 $\varepsilon_x = (-1)^{\tau+x_1+\dots+x_d}$  であり、連続理論における  $\gamma_5$  と似た役割をする。式 (2.4) から、AFMC 法を用い数值的に補助場を積分する際に、この有効質量項から符号問題が現れる。そこで、どのような場合に統計重みの打ち消しが厳しくなるかを以下では考察する。まず、 $\pi$  場が空間的に一樣な場合を考える。この時、 $\pi$  場が  $\varepsilon_x$  と結合している為に隣接サイト同士で絶対値が等しい逆符号の値をとる。全空間で和をとるので、隣接サイト同士で  $\pi$  場が打ち消しあい、 $i\varepsilon\pi$  項の効果は 0 となる。よって、 $\pi$  場がほぼ一樣であるような低運動量モードが寄与する場合には、このような場同士のキャンセルが起こり、数値計算精度の低下が問題とならない。一方、場が大きく揺らぐような高運動量モードが効くような場合には、 $\varepsilon_x$  項による場の打ち消しあいが十分ではなくなり、数値計算精度の低下を招く可能性がある。次の節で、以上の議論を数的に確認する。

### 3 結果

強結合格子 QCD における AFMC 法では、高運動量モードにより統計重みの打ち消しが激しくなる可能性がある。そこで、高運動量モードをカットすることで、高運動量補助場成分の weight cancellation に対する寄与を数的に確認する。まず、高運動量モードを空間方向に対する補助場の運動量 ( $\sum_{j=1}^d \sin^2 k_j$ ) の内、カットオフパラメータ  $\Lambda$  より値が大きいモードとして定義する (図 1)。  $\Lambda$  のとる値は  $0 \leq \Lambda \leq d(=3)$  の範囲であり、今回の計算では  $\Lambda$  よりも大きい高運動量モードを無視する。なお、 $\Lambda$  が値  $d(=3)$  をとる時は、全てのモンテカルロ配位を考慮した計算となり、値 0 をとる時は一番低い運動量モードのみを取り入れた計算に対応する。今回の数値計算結果は全て、カイラル極限  $m_0 = 0$ 、格子サイズ  $8^4$ 、 $\mu/T = 0.6$  上での計算である。また、誤差は Jack knife 法で評価した。図 2 は統計重みの打ち消しの度合いを示す average phase factor の図である。average phase factor は統計重みの複素位相を  $\theta$  とすると、 $\langle e^{i\theta} \rangle$  と表現される。1 に近いほど統計重みの打ち消しが無い事を表し、数値計算精度の低下がない。逆に 0 に近い程、統計重みの打ち消しが激しくなり数値計算精度の低下が著しくなる。図 2 から、カットオフ  $\Lambda$  を  $d \rightarrow 0$  に動かすと 1 に近づき統計重みのキャンセルがなくなる。これは前章の考察と無矛盾であり、高運動量補助場成分が数値計算精度低下の起源となる事が確認された。次に、秩序変数の  $\Lambda$  依存性の結果を議論する。図 3 はカイラル凝縮のカットオフ依存性を表している。ここで、カイラル極限であるため、カイラルサークルの半径をカイラル凝縮としている。図 3 によると、カイラル凝縮は

図4 クォーク数密度の  $\Lambda$  依存性。図5 カイラル感受率の  $\Lambda$  依存性。図6 クォーク数感受率の  $\Lambda$  依存性。

カットオフ依存性がない。これはモンテカルロ法における積分変数が  $\sigma$ ,  $\pi$  である事と、スカラー・擬スカラーモードは最も低い補助場運動量成分に含まれることに起因する。図4、図5、図6はそれぞれクォーク数密度、カイラル感受率、およびクォーク数感受率のカットオフ依存性である。これらの結果から、カットオフパラメータ  $\Lambda$  が2.0以上であればクォーク数密度、カイラル感受率、クォーク数感受率の振る舞いがカットオフに依存しない。一方で、図2から average phase factor は全ての配位を取り入れた場合に比べて1に近くなっており、モンテカルロ法における重みのキャンセルが改善している。よって、average phase factor を改善しながらも、相転移現象に関する物理量の値が変化しないような臨界カットオフ  $\Lambda_c$  の存在が示唆される。

## 4 まとめと展望

本研究では、補助場のモンテカルロ法による符号問題の起源について議論した。補助場に対するモンテカルロ計算を行う際、高運動量補助場成分が数値計算精度の低下を招く事が定性的・数値的に確認された。さらに  $\Lambda_c$  を選ぶ事で、数値計算精度の低下がより問題となる、大きな格子サイズでの相転移研究が可能である事が示唆された。そこで、高運動量成分をカット、もしくは近似することで、より大きな格子サイズでQCD相転移を議論するという方向が考えられる。

## 参考文献

- [1] F. Karsch, K. H. Mutter, Nucl. Phys. B 313, 541 (1989);  
W. Unger and P. de Forcrand, J.Phys. G 38, 124190 (2011).
- [2] A. Ohnishi, T. Ichihara, and T. Z. Nakano, PoS LATTICE2012, 088 (2012).
- [3] N. Bilic, F. Karsch, and K. Redlich, Phys. Rev. D 45, 3228 (1992).
- [4] G. Faldt and B. Petersson, Nucl. Phys. B265, 197 (1986).
- [5] K. Miura, T. Z. Nakano, A. Ohnishi, and N. Kawamoto, Phys. Rev. D80, 074034(2009);  
T. Z. Nakano, K. Miura and A. Ohnishi, Prog. Theor. Phys. 123, 825 (2010).
- [6] Y. Nishida, Phys. Rev. D69, 094501 (2004);  
K. Fukushima, Prog. Theor. Phys. Supplement 153, 204 (2004).

# 重イオン衝突実験における高次ゆらぎの時間発展への有限体積効果

坂井田美樹、浅川正之、北沢正清  
阪大理

## 概要

重イオン衝突実験によって生成されたハドロン相における保存電荷ゆらぎの時間発展に対する全電荷が保存する効果 (有限体積効果) を、拡散マスター方程式を用いて評価する。その結果、現在の実験で観測可能な rapidity 領域において、ゆらぎは有限体積効果の影響を受けないことが示唆されるのを見る。

## 1 はじめに

量子色力学 (QCD) は有限温度・密度において、QCD 臨界点の存在等、多様な相構造を持つことが理論的に予想されており、これら QCD 相構造の実験的探索は重要な研究課題である。重イオン衝突実験における QCD 相構造の探索という目的に適すると考えられる物理量の一つに、保存電荷のゆらぎが挙げられる。ゆらぎが臨界点近傍で示す特異な振る舞い [1] が、QCD 臨界点のシグナルになると期待されるためである。このような理由から、RHIC の Beam Energy Scan 実験では陽子数分布のゆらぎの測定 [2] が行われてきたが、現状では、QCD 臨界点に関する決定的な実験的情報は得られていない。

その一方で最近、体積依存性を除去した電磁電荷の二次のゆらぎ  $\langle Q_{(\text{net})}^2 \rangle_c / \langle Q_{(\text{tot})} \rangle_c$  の、ハドロン相における平衡値からの抑制、及び rapidity 幅に対する強い依存性が LHC の ALICE 実験で観測された [3]。  $\langle Q_{(\text{net})}^2 \rangle_c / \langle Q_{(\text{tot})} \rangle_c$  の QGP 相における平衡値はハドロン相の  $1/3 \sim 1/2$  であることが理論的に予想されている [4]。そのためこれらの実験結果は、QGP 相で生成されたゆらぎが観測時まで生き残っており、ゆらぎが実験で生成された高温物質の時間発展の情報を反映する物理量 [4] であることを示唆している。

しかし、ゆらぎの平衡値からの抑制は、rapidity 幅を広く取った場合には全電荷が保存する効果 (有限体積効果) によっても起こりうる。それ故、平衡値からの抑制という実験結果が示す物理を正しく解釈するためには、有限体積効果を考慮した上で保存電荷のゆらぎの時間発展を解析し、有限体積効果の大きさを定量的に評価する必要がある。本研究では、無限体積の系で解析を行った先行研究 [5] と同様に拡散マスター方程式を採用し、ゆらぎの時間発展を衝突軸方向に有限な系で解くことにより、保存電荷のゆらぎの時間発展に対する有限体積効果の見積もりを行う。

## 2 手法 (一次元離散空間をブラウン粒子が拡散する模型)

重イオン衝突実験において Bjorken 描像を仮定すれば、実験で生成された高温物質の全系の時空 rapidity  $\eta$  空間における長さを  $\eta_{\text{total}}$  とすると、生成されたハドロン粒子は時空 rapidity 空間  $-\eta_{\text{total}}/2 \leq \eta \leq \eta_{\text{total}}/2$  の範囲を拡散するとみなせる。ハドロン化及び化学的凍結直後から運動学的凍結までの  $\eta$  方向のハドロン粒子の拡散を記述するために、一次元空間における多数のブラウン粒子の運動を考える。

まず、一次元空間を長さ  $a$  の離散的なセルに分割する。  $m$  番目のセルには  $n_m$  個の粒子が存在しており、全ブラウン粒子は単位時間あたり  $\gamma(\tau)$  の確率で隣のセルに移動する。時刻  $\tau$  に、各セルに粒子数  $\mathbf{n} = (\dots, n_{m-1}, n_m, n_{m+1}, \dots)$  が存在する確率分布を  $P(\mathbf{n}, \tau)$  とすると、  $P(\mathbf{n}, \tau)$  は拡散マスター方程式

$$\partial_t P(\mathbf{n}, \tau) = \gamma(\tau) \sum_m [(n_m + 1) \{P(\mathbf{n} + \mathbf{e}_m - \mathbf{e}_{m+1}, \tau) + P(\mathbf{n} + \mathbf{e}_m - \mathbf{e}_{m-1}, \tau)\} - 2n_m P(\mathbf{n}, \tau)] \quad (1)$$

に従う [5]。

拡散マスター方程式を採用した理由は、確率論的拡散方程式

$$\partial_\tau n(\eta, \tau) = D(\tau) \partial_\eta^2 n(\eta, \tau) + \partial_\eta \xi(\eta, \tau) \quad \text{但し、} \gamma(\tau) a^2 = D(\tau) : \text{拡散係数} \quad (2)$$

が保存電荷の二次のゆらぎまでしか記述できないのに対し、拡散マスター方程式は重イオン衝突実験で観測される高次のゆらぎも記述できるからである。なお、期待値と二次のゆらぎに関しては、これらの式は同等であり、それらの時間発展についての結果は一致する。

本研究では有限体積効果を取り込むため、 $\eta = \pm \eta_{\text{total}}/2$  に境界が存在し、境界において粒子の流入がないという境界条件を課す。この境界条件に加えて、ある初期条件の下で拡散マスター方程式を解いた後、空間を連続にする極限をとれば、rapidity 幅  $\Delta\eta$  で観測される保存電荷  $Q(\tau)$  のゆらぎの時間発展が得られる。今回は、ハドロン化及び化学的凍結直後を初期時刻  $\tau = 0$  とし<sup>1</sup>、電荷は期待値  $\langle Q(0) \rangle_c = M\Delta\eta$  で  $-\eta_{\text{total}}/2 \leq \eta \leq \eta_{\text{total}}/2$  に一様に分布しており、ゆらぎは存在しない、つまり  $\langle Q(0)^n \rangle_c = 0$  ( $n \geq 2$ ) という初期条件で解析を行った。

これらの条件の下で、保存電荷  $Q(\tau)$  の期待値は、

$$\langle Q(\tau) \rangle_c = \int_{-\Delta\eta/2}^{\Delta\eta/2} d\eta \langle n(\eta, \tau) \rangle_c = M\Delta\eta \quad (3)$$

という結果が得られ、時間発展しないことがわかる。二次のゆらぎに関しては、

$$\begin{aligned} \langle Q(\tau)^2 \rangle_c &= \int_{-\Delta\eta/2}^{\Delta\eta/2} d\eta_1 d\eta_2 \langle n(\eta_1, \tau) n(\eta_2, \tau) \rangle_c \\ &= M\Delta\eta \left\{ 1 - \frac{\Delta\eta}{\eta_{\text{total}}} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sin \left[ \frac{k\pi \Delta\eta}{2\eta_{\text{total}}} \right]}{\left[ \frac{k\pi \Delta\eta}{2\eta_{\text{total}}} \right]} \cos \left[ \frac{k\pi}{2} \right] \right)^2 \exp \left[ -2 \int_0^\tau d\tau' D(\tau') \left( \frac{k\pi}{\eta_{\text{total}}} \right)^2 \right] \right] \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

が得られる。前述のように、これらの結果は確率論的拡散方程式 (2) を用いて記述した結果と一致する。

### 3 結果と考察

図1は、保存電荷の二次のゆらぎ  $\langle Q_{(\text{net})}^2 \rangle_c / \langle Q_{(\text{tot})} \rangle_c$  を横軸  $\Delta\eta / (\int_0^\tau d\tau' D(\tau'))^{1/2}$  に対し、プロットしたものである。今回は、 $L = \eta_{\text{tot}} / (\int_0^\tau d\tau' D(\tau'))^{1/2}$  をパラメータとした。 $L \rightarrow \infty$  のプロットが先行研究の無限体積の系における解析結果に相当し、その他の  $L$  に対するプロットが本研究の有限体積の系における解析結果である。

図1からはまず、 $\Delta\eta = \eta_{\text{total}}$  のとき  $\langle Q_{(\text{net})}^2 \rangle_c / \langle Q_{(\text{tot})} \rangle_c = 0$  となることがわかる。これは生成された高温物質の全系を観測すると、全電荷は保存しており、ゆらがないためである。

次に、 $L \rightarrow 0 \Leftrightarrow \tau \rightarrow \infty$  の極限、つまり時間が十分経過し、熱平衡状態に近づくに従って、ゆらぎの  $\Delta\eta$  依存性が直線に近づくことがわかる。この結果は以下のように理解できる。 $\tau = 0$  では粒子は互いに相関している。しかし十分時間が経過すると、各粒子のランダムな運動によって粒子間の相関はもはや失われ、各粒子が空間のある地点に見出される確率は一樣になる。それ故、粒子が rapidity 幅  $\Delta\eta$  において観測される確率  $p$  は、等しく  $p = \Delta\eta / \eta_{\text{total}}$  になる。従って、 $\Delta\eta$  において、全粒子数  $n$  個のうち  $r$  個の粒子が観測される確率分布は、熱平衡化すると二項分布  ${}_n C_r p^r (1-p)^{n-r}$  になる。そ

<sup>1</sup>この定義は、衝突時刻を  $\tau = 0$  とする通常のものとは異なることに注意せよ。

れ故、本研究結果は  $L \rightarrow 0$  で、二項分布のゆらぎ  $\langle Q^2 \rangle_c / \langle Q \rangle_c = 1 - p = 1 - \Delta\eta / \eta_{\text{total}}$  に近付き、ゆらぎの  $\Delta\eta$  依存性は直線になる。

次に、 $L$  が有限のときの結果を無限体積のものと比較すると、パラメータの値に依らず、 $\Delta\eta \sim \eta_{\text{total}} - 2\sqrt{2}(\int_0^\tau d\tau' D(\tau'))^{1/2}$  から無限体積の結果とのずれが生じ始め、有限体積効果が現れることがわかる。この結果について考察するために、有限体積効果が現れ始める領域に関して、次のような変形を考える。

$$\Delta\eta = \eta_{\text{total}} - 2\sqrt{2}(\int_0^\tau d\tau' D(\tau'))^{1/2} \Leftrightarrow \frac{\eta_{\text{total}} - \Delta\eta}{2} = \sqrt{2} \left( \int_0^\tau d\tau' D(\tau') \right)^{1/2} \quad (5)$$

変形後の左辺は観測を行う rapidity 領域の端から境界までの距離、右辺はブラウン粒子の平均拡散距離  $\sqrt{\langle \eta^2 \rangle}$  に対応している。 $\tau = 0$  に境界  $\eta = \pm\eta_{\text{total}}/2$  に存在したブラウン粒子は、時刻  $\tau$  経過後、境界から中心 rapidity 領域に向かってブラウン粒子の平均移動距離  $\sqrt{\langle \eta^2 \rangle} = \sqrt{2}(\int_0^\tau d\tau' D(\tau'))^{1/2}$  程度まで拡散することが可能である。従って、境界の存在を認識しているこれらの粒子が観測にかかる時、つまり式 (5) が成り立つときに、境界が存在する効果が観測されるゆらぎに寄与し始めるはずである。 $\Delta\eta \geq \eta_{\text{total}} - 2\sqrt{2}(\int_0^\tau d\tau' D(\tau'))^{1/2}$  の領域に有限体積効果が現れるのはこのような理由による。

最後に、本研究の結果を用いて ALICE 実験で観測されたゆらぎ [3] に対する有限体積効果の寄与を考察する。現在の ALICE 実験において、 $\Delta\eta$  の最大値は  $\Delta\eta = 1.6$  である。一方、 $\eta_{\text{total}} \sim 14$  と見積もって、結果を比較すると、有限体積効果の寄与を受ける条件  $\Delta\eta \geq \eta_{\text{total}} - 2\sqrt{2}(\int_0^\tau d\tau' D(\tau'))^{1/2}$  は現状の実験では満たされていないことが示唆される。それ故、実験で観測されたゆらぎの平衡値からの抑制は、QGP 相の情報が生き残っていることが要因であると考えられる。

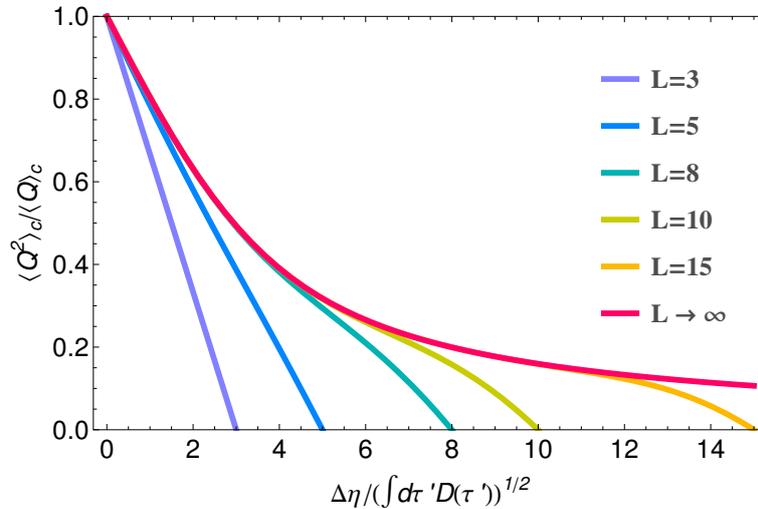


図 1: 保存電荷の二次のゆらぎの rapidity 幅依存性

## 4 まとめ

本研究では、保存電荷のゆらぎの時間発展を、拡散マスター方程式を用いて有限体積の系で記述し、実験で観測されるゆらぎに寄与する有限体積効果の大きさを評価した。その結果、ゆらぎの rapidity 幅依存性を見ると、有限体積効果の大きさを見積もることが可能であること及び、現在の ALICE 実験で観測可能な rapidity 領域において有限体積効果はほとんど寄与しないことが示唆されることがわかった。RHIC ではこれまでに保存電荷のゆらぎの rapidity 幅依存性は測定が行われていないが、実験で観測されるゆらぎに関する理解を深めるために、今後このような測定が行われることを期待したい。

## 参考文献

- [1] M. Asakawa, S. Ejiri, and M. Kitazawa, Phys. Rev. Lett.103, 262301 (2009).
- [2] B. L. Adamczyk *et al.* [STAR Collaboration], arXiv:1309.5681 [nucl-ex].
- [3] B. Abelev *et al.* [ALICE Collaboration], Phys. Rev. Lett.110, 152301 (2013).
- [4] M. Asakawa, U. W. Heinz, and B. Müller, Phys. Rev.Lett. 85, 2072 (2000);  
S. Jeon and V. Koch, Phys. Rev. Lett. 85, 2076 (2000).
- [5] M. Kitazawa, M. Asakawa, and H. Ono, to appear in Phys. Lett. [arXiv:1307.2978 [nucl-th]].

# クォーク・グルーオンプラズマにおけるプラズマ不安定性と粒子生成

筒井翔一朗、飯田英明、国広悌二、大西明<sup>A</sup>

京都大学、京大基研<sup>A</sup>

古典背景場が存在する状況下での粒子生成は、相対論的重イオン衝突における「早い熱平衡化」過程において重要な役割を果たす。2PI法はそのような問題を第一原理的に定式化できる有用な方法である。本研究では、2PI法にもとづいて導出される古典グルーオン場の運動方程式と Kadanoff-Baym-Cornwall-Jackiw-Tomboulis (KB-CJT) 方程式を摂動論的に解き、プラズマ不安定性を持つ系の定性的な性質を議論する。

## 1 はじめに

RHIC 及び、LHC における相対論的重イオン衝突実験では、衝突から 0.6-1.0fm/c 程度の極めて短い時間で系が熱平衡状態に至ることが知られている。この早い熱平衡化の物理を理論的に明らかにすることは、重イオン衝突の物理に残された難問の一つである。相対論的重イオン衝突における非平衡過程の本質は、古典的なグルーオン背景場が存在する下で粒子が生成・衝突するということにある。この問題を取り扱った従来の代表的な方法としては、Boltzmann 方程式を用いたいわゆる Bottom-up thermalization シナリオ [1] や、古典統計近似によるもの [2] が挙げられる。前者は、摂動論的に  $gg \leftrightarrow gg$ 、 $gg \leftrightarrow ggg$  衝突の断面積を計算し、Boltzmann 方程式を用いて熱緩和を議論する方法である。ところが、そこでの議論は背景場が崩壊した後のものであるため、 $g \leftrightarrow gg$  のような粒子生成をより早く起こすようなチャンネルは考慮されていない。後者は、適当なゆらぎを入れて（格子上の）古典 Yang-Mills 方程式を解く方法である。この手法には、非線形効果を近似無しに扱えるという利点があるが、平衡分布は Bose-Einstein 分布にならないという問題があり、あくまで量子ゆらぎをシミュレートするモデルの一つとして捉えるべきものである。2PI法はこれらの欠点を克服し、背景場と粒子のダイナミクスを自然に取り扱うことのできる手法である。以下では 2PI法について簡単に解説し、プラズマ不安定性があるような衝突直後の時間に適用した結果について述べる。

## 2 2PI 有効作用

2PI 有効作用は、次式で定義される汎関数である [4]。

$$\Gamma[A, G] = \underbrace{S[A]}_{\text{tree}} + \underbrace{\frac{i}{2} \text{Tr} \ln G^{-1} + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln G_0^{-1}(A)G}_{\text{1-loop}} + \underbrace{\Gamma_2[A, G]}_{\text{2,3,..loop}} \quad (1)$$

$A$  は古典グルーオン場、 $G$  は Keldysh の Green 関数である。 $\Gamma_2$  は 2 粒子既約なループグラフを表す。この停留条件から、解くべき運動方程式が得られる [3][4]。

$$\left. \frac{\delta \Gamma[A, G]}{\delta A} \right|_{J=R=0} = 0 \quad (2)$$

$$\left. \frac{\delta \Gamma[A, G]}{\delta G} \right|_{J=R=0} = 0 \quad (3)$$

このようにして、系の非平衡時間発展は古典グルーオン場の運動方程式と、KB-CJT 方程式を連立させて解く問題に帰着する。膨張系における具体形は、3-loop まで取る近似で八田・西山によって与えられている [5]。

### 3 プラズマ不安定性

以下では、簡単のためカラー SU(2) を考え、平坦な時空の場合について議論する。また、以下の表式は temporal ゲージ  $A_0 = 0$  をとったものである。得られた方程式 (2)(3) を、重イオン衝突直後に適用することを考える。そのような最初期においては、プラズマ不安定性が存在し、系の等方化を早める働きをすることが、古典統計近似に基づく計算などで示されており、早い熱平衡化のメカニズムを理解する上で重要である [6]。従って、2PI 法に基づく手法でプラズマ不安定性を議論することは有意義である。そこで、以下では系に  $z$  方向のカラー磁場が背景場として存在するような状況を考える [7][8]。結合定数に関する摂動展開

$$A = \frac{1}{g}A^{(0)} + A^{(1)} + \mathcal{O}(g) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}^{(0)} + g\mathcal{F}^{(1)} + \mathcal{O}(g^2)$$

を実行し ( $\mathcal{F}$  は Green 関数の実部)、背景場に対応するようなゲージ場の配位  $A_i^{a(0)} = \tilde{A}(t)(\delta^{a2}\delta_{ix} + \delta^{a1}\delta_{iy})$  を代入すると、グルーオン場の運動方程式の NLO は次のようになる。

$$\partial_t^2 A^{(1)} = -\Omega[A^{(0)}]A^{(1)} \quad (4)$$

$\Omega$  は時空とカラーの足を持ったベクトルに作用する  $9 \times 9$  行列であり、その一部の固有値が  $\omega_{\text{NO}}^2 \sim p^2 - \tilde{A}^2$  で与えられる。これは Nielsen-Olesen の不安定モードとして知られる固有モードに他ならない。これを、一次の不安定モードと呼ぶことにする。同様に KB-CJT 方程式の LO を書き下すと、

$$\partial_t^2 \mathcal{F}^{(0)} = -\Omega[A^{(0)}]\mathcal{F}^{(0)} \quad (5)$$

が得られる。 $\mathcal{F}(x^0 - y^0, \mathbf{p})$  は、平衡状態において  $\cos(x^0 - y^0)\omega_{\mathbf{p}}(n(\mathbf{p}) + \frac{1}{2})/\omega_{\mathbf{p}}$  のようになり、占有数  $n(\mathbf{p})$  を用いて書かれるような量であり、非平衡系においても有効的な粒子数の情報を含むものと考えられる。(5) から明らかに、 $\mathcal{F}$  も背景場と同じ不安定モードを持つので、背景場が不安定性を持つときには、同時に粒子生成も爆発的に起きることが分かる。

上述のような不安定モードが成長する典型的な時間スケール  $1/\sqrt{gB}$  が経過すると、 $A^{(1)} = \mathcal{O}(1/g)$  になり (4) を用いた議論は破綻する。そこで、次にグルーオン場の時間発展を支配する NNLO の運動方程式を考えてみる\*1。

$$\partial_t^2 A_i^{a(2)} = -\Omega A_i^{a(2)} + J_i^a[A^{(1)}, \mathcal{F}^{(0)}] \quad (6)$$

$$J_i^a = f^{abc} \left( D_{xi}^{bc} \tilde{\mathcal{F}}_{jj}^{ec}(x, y) + D_{xj}^{bc} \left( \tilde{\mathcal{F}}_{ji}^{ec}(x, y) - 2\tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{ec}(x, y) \right) \right)_{y=x} \quad (7)$$

ここに、 $f$  は構造定数、 $D$  は共変微分、 $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{ab}(x, y) = A_i^{a(1)}(x)A_j^{b(1)}(y) + \mathcal{F}_{ij}^{ab(0)}(x, y)$  である。このオーダーから、 $\mathcal{F}$  を通じて非自明な量子効果が背景場の時間発展に効いてくることになる。(7) は物理的には、(4) が有効な時間スケールにおいて生成された粒子が作る誘導電流を表しており、量子効果はその振幅に影響を与える。また、(7) のある成分は一次の不安定モード  $A_{\perp}^{(1)}\mathcal{F}_{\perp\perp}^{(0)}$  を用いて書き表すことができる。例えば、

$$J_z^a, J_{\perp}^3 \propto \tilde{\mathcal{F}}_{\perp\perp}[A_{\perp}^{(1)}, \mathcal{F}_{\perp\perp}^{(0)}]$$

\*1 正確には、不安定性によって  $\mathcal{F}$  が非自明なオーダーになるので、摂動展開の power counting をやり直す必要がある。

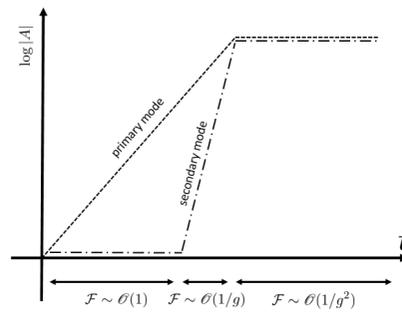


図1 背景場の時間発展の概略

である。従ってこれらの成分は一次の不安定モードの2倍の **growth rate** を持ち、背景場に新たな不安定性をもたらすことが分かる（二次の不安定モード）。同様の議論により、この系を時間発展させていくと、大きな **growth rate** を持った高次の不安定モードが次々と現れ、系が安定な状態に至るまで粒子生成が続くことになる。

最後に、二次的不安定性と初期条件との関係について述べる。2PI法では系の初期ゆらぎなどの情報は、微分方程式(2)(3)の初期条件に反映される。例えば、一次不安定モードの一般解は  $A_{\perp}^{(1)} \propto \partial_z f(z) \sin \omega_{\text{NO}} t$  という関数形で表されるが、 $z$  方向に関する初期の非一様性を与えれば  $f(z)$  が決まる。極端な例として、系に  $z$  方向の初期ゆらぎが全く無い場合を考える。この時、系は  $z$  方向に対して一様になるから、 $f$  は定数として良く  $A_{\perp}^{(1)} = 0$  となる。一方で、二次的不安定性を引き起こす誘導電流(7)は  $A_{\perp}^{(1)}$  の2次に比例していたから、( $\mathcal{F}$ の初期条件の与え方にも依るが)  $z$  方向の初期ゆらぎがない場合、二次的不安定性は生じないことが分かる。このような不安定性と初期ゆらぎとの関連性は、古典系におけるシミュレーションでも見られている[9]。

## 4 まとめ

重イオン衝突直後の非平衡過程に2PI法を適用し、Nielsen-Olesen不安定性が存在するときの古典グルーオン場の振る舞いについて主に議論した。ここでは詳しく触れなかったが、適当な初期条件から出発したときに、場の不安定性によって粒子分布が具体的にどう時間発展するかなども興味ある課題である。また、KB-CJT方程式は2-loopまでとる近似で  $g \leftrightarrow gg$  過程の衝突積分を含むので、これを解いてBottom-upシナリオとの比較を行うことも今後の課題である。

## 参考文献

- [1] R. Baier, A. H. Mueller, D. Schiff, and D. T. Son, Phys. Lett. **B502**, 51 (2001).
- [2] P. Romatschke and R. Venugopalan, Phys. Rev. Lett. **96**, 062302 (2006).
- [3] L. P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, Benjamin, New York (1962).
- [4] J. M. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis, Phys. Rev. D **10**, 2428 (1974).
- [5] Y. Hatta and A. Nishiyama, Nucl. Phys. **A873**, 47 (2012).
- [6] S. Mrowczynski, Phys. Lett. **B214**, 587 (1988).
- [7] H. Fujii and K. Itakura, Nucl. Phys. **A809**, 88 (2008).
- [8] J. Berges, S. Scheffler, S. Schlichting, and D. Sexty, Phys. Rev. D **85**, 034507 (2012).
- [9] H. Iida *et al.*, (2013), arXiv:1304.1807.

# カイラル磁気・分離効果を含む相対論的流体模型

本郷 優<sup>A,B,C</sup>, 広野 雄士<sup>A,B,C</sup>, 平野 哲文<sup>C</sup>

東京大学理学系研究科物理学専攻<sup>A</sup>, 理化学研究所仁科センター<sup>B</sup>, 上智大学理工学部<sup>C</sup>

電荷を持ったカイラルフェルミオンと電磁場が存在する系では、量子異常に起因してカイラル磁気効果 (Chiral Magnetic Effect, CME)・カイラル分離効果 (Chiral Separation Effect, CSE) などの散逸を伴わない輸送現象が現れる。相対論的重イオン衝突実験において生成されるクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) ではこれらの効果により磁場方向への電荷の輸送が生じていると考えられる。本研究では、CME/CSE の両効果を含んだ相対論的流体力学 (anomalous hydrodynamics) の数値シミュレーションを行い、重イオン衝突実験におけるこれらの輸送現象の寄与を評価する。とくに、CME/CSE の実験的シグナルとして近年提案された電荷依存した楕円フロー  $v_2^{\pm}$  について、電荷非対称性がないときの差がシグナルとなりうることを示す。

## 1 はじめに

近年になって量子異常の大局的な現れとして磁場と渦度に比例するカレントの存在 (カイラル磁気効果, カイラル分離効果, カイラル渦効果) が提案された [1]。また、カイラル磁気効果 (CME) とカイラル分離効果 (CSE) の両者が生じる系では磁場と同じ (逆の) 方向に沿って右 (左) 巻きの電荷が伝搬していくというカイラル磁気波 (Chiral Magnetic Wave, CMW) という励起の存在も予言された [2, 3]。

これらの量子異常に起因した輸送現象を記述する低エネルギーの有効理論 anomalous hydrodynamics がある [1]。Anomalous hydrodynamics の基礎方程式は以下の (非) 保存則,

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = eF^{\nu\lambda} j_{\lambda}, \quad \partial_{\mu} j^{\mu} = 0, \quad \partial j_5^{\mu} = -CE^{\mu} B_{\mu} \quad (1)$$

と、カレントの式

$$j^{\mu} = nu^{\mu} + \kappa_B B^{\mu} + \kappa_{\omega} \omega^{\mu}, \quad j_5^{\mu} = n_5 u^{\mu} + \xi_B B^{\mu} + \xi_{\omega} \omega^{\mu} \quad (2)$$

である。ここで、電磁場は外場として扱い、 $j^{\mu}$ ,  $j_5^{\mu}$  は電流, 軸性電流を、 $E^{\mu}$ ,  $B^{\mu}$ ,  $\omega^{\mu}$  は電磁場と渦度の 4 元ベクトルを表す。また、 $e$  は素電荷を表し、その他の記号は標準的な定義に従っている。それぞれ、磁場に比例する電流・軸性電流、つまり CME/CSE と渦度に比例するカイラル渦効果が現れている。磁気電流と渦電流の輸送係数は平衡状態の熱力学量

$$e\kappa_B = C\mu_5 \left(1 - \frac{\mu_5 n_5}{\epsilon + p}\right), \quad e^2 \kappa_{\omega} = 2C\mu\mu_5 \left(1 - \frac{\mu n}{\epsilon + p}\right), \quad (3)$$

$$e\xi_B = C\mu \left(1 - \frac{\mu n}{\epsilon + p}\right), \quad e^2 \xi_{\omega} = \mu^2 \left(1 - \frac{2\mu_5 n_5}{\epsilon + p}\right) \quad (4)$$

によって記述される。ここで、 $\mu$ ,  $\mu_5$  はそれぞれ電荷・軸性電荷に関する化学ポテンシャルを表す。

## 2 重イオン衝突に対する anomalous hydrodynamics の適用

高エネルギー重イオン衝突によって生成される QGP 中には、ほぼ光速に加速された陽子によって極めて強い電磁場が形成されると考えられている。そのため、実験で生成される QGP は CME/CSE のような量子異常に起因する輸送現象が実際に生じることが期待される物理系である。しかし、これらを記述する実験結果と比較可能な定量的計算がないため、現在ではまだこれらの特異な輸送現象の確証は得られていない。本研究では CME/CSE のみを考慮した anomalous hydrodynamics を用いて高エネルギー重イオン衝突実験で生成される QGP を記述し、その数値シミュレーションにより、膨張する QGP 中でのカイラル磁気波の伝搬の確認と、その実験的シグナルへの示唆が得られた [4]。

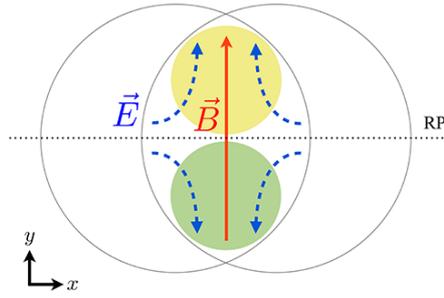


図 1: 非中心重イオン衝突における, ビーム軸に垂直な平面内の電磁場の典型的な配位. 2つの円が原子核, 実線の矢印が磁場, 破線の矢印が電場を表している. このとき, 反応平面 (RP) の上下で電磁場の内積  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  が正負になる.

### 膨張する QGP 中のカイラル磁気波の伝搬

非中心衝突での電磁場の典型的配位が図 1 に示してある. これを考慮して電磁場を外場として

$$eB_y(\vec{r}, t) = eB_0 \exp\left(-\frac{r_z^2}{2\sigma_{EB}^2} - \frac{t}{\tau_B}\right), \quad eE_y(\vec{r}, t) = eE_0 \times y \exp\left(-\frac{r_z^2}{2\sigma_{EB}^2} - \frac{t}{\tau_E}\right) \quad (5)$$

と与える. ここで電磁場の大きさは重イオン衝突で生じる典型的な大きさ  $eB_0 = 0.08 \text{ GeV}^2 \simeq (2m_\pi)^2$ ,  $eE_0 = 0.02 \text{ GeV}^2 \simeq m_\pi^2$  とし,  $r_z = \sqrt{x^2 + y^2 + (2z)^2}$ ,  $\sigma_{EB} = 4.0 \text{ fm}$  とした. また, 初期条件は非中心衝突のアーモンド型の分布を再現するよう次のように与えた.

$$T(\vec{r}, t=0) = T_0 \exp\left(-\frac{r_y^2}{2\sigma_T^2}\right), \quad \mu(\vec{r}, t=0) = \mu_0 \exp\left(-\frac{r_y^2}{2\sigma_\mu^2}\right) \quad (6)$$

ここで,  $\sigma_T = \sigma_\mu = 5.0 \text{ fm}$  とし, 温度は RHIC や LHC で実現されている  $T_0 = 0.3 \text{ GeV}$  とした. 化学ポテンシャルの大きさは, 初期の正味の電荷のゆらぎを表すパラメーターとして  $0.0 \text{ GeV}$  から  $0.01 \text{ GeV}$  の値に設定した. また, 状態方程式は理想気体のものを用いた.

上記の設定において, 初期に電荷がない場合 ( $\mu_0 = 0 \text{ GeV}$  とした場合) について  $t = 6.0 \text{ fm}$  まで時間発展させた後の電荷分布を図 2 に示す. 初期に電荷がないときであっても量子異常による軸性電荷のわき出しが原因となって CMW が誘起され, 軸性電荷は二重極の変形, 電荷分布は四重極的変形をすることがわかる.

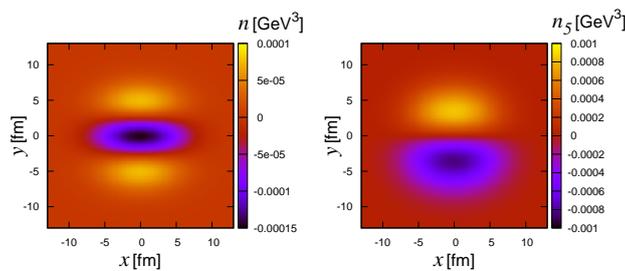


図 2: 時刻  $t = 6 \text{ fm}$  における電荷 (左図) と軸性電荷 (右図) の分布を磁場に平行な平面 ( $z = 0$  平面) でプロットしたもの. 量子異常による軸性電荷のわき出しと CMW の効果により, 初期に電荷がないときでも電荷 (軸性電荷) は四重極 (二重極) 的な変形をする.

## 実験的シグナルに対する示唆—電荷非対称な楕円フロー

上記の計算から得られた  $t = 6.0$  fm の温度、化学ポテンシャルの分布を用いて Cooper-Frye 公式を用いて粒子化を行った。その結果から電荷ごとの粒子の楕円フロー  $v_2^\pm$  を求め、それらの差  $\Delta v_2^\pm$  を正味の電荷の非対称性  $A_\pm = \frac{\bar{N}_+ - \bar{N}_-}{\bar{N}_+ + \bar{N}_-}$  についてプロットした結果が図 3 である。このとき、

$$\Delta v_2^\pm = 2r_e A_\pm + \Delta v_2^\pm(A_\pm = 0) \quad (7)$$

と  $A_\pm$  に対して  $\Delta v_2^\pm$  が比例していることがわかる。近年になってこの傾き  $r_e$  が CMW のシグナルとして提案されていたが [3],  $r_e$  は量子異常の寄与がない場合 (図の実線) と量子異常の寄与がある場合 (図の破線と点線) で変わらない。一方、その切片  $\Delta v_2^\pm(A_\pm = 0)$  は量子異常の有無、そして電磁場の持続時間によって異なることがわかる。以上より量子異常に起因する輸送現象 (CME/CSE) のシグナルとして切片  $\Delta v_2^\pm(A_\pm = 0)$  が有用であることがわかった。

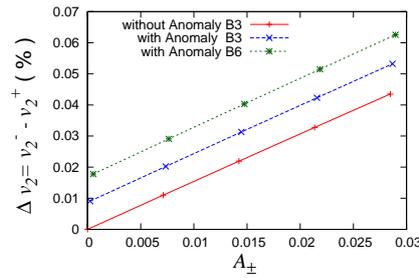


図 3: 楕円フローの電荷非対称性の  $\Delta v_2^\pm \equiv v_2^- - v_2^+$  電荷の非対称性  $A_\pm$  に対するプロット。実線は量子異常の寄与がないとき ( $C = 0$  のとき) の計算結果、破線と点線は量子異常の寄与があるときの計算結果で電磁場の持続時間をそれぞれ  $(\tau_B, \tau_E) = (3.0 \text{ fm}, 1.0 \text{ fm})$ ,  $(\tau_B, \tau_E) = (6.0 \text{ fm}, 1.0 \text{ fm})$  としたものの。それぞれのドットは初期の電荷の化学ポテンシャル  $\mu_0$  を  $0.0 \text{ GeV}$  to  $0.01 \text{ GeV}$  とした。どの計算結果も  $\Delta v_2^\pm$  は  $A_\pm$  に比例していて傾きはほとんど変わらないが、切片  $\Delta v_2^\pm(A_\pm = 0)$  の値は異なる。

## 3 まとめと今後の展望

本研究では量子異常に起因した輸送現象 (CME/CSE) を記述する相対論的流体力学 (anomalous hydrodynamics) の数値シミュレーションを行った。その結果から、膨張している QGP 中での CMW の伝搬を確認し、その実験的なシグナルに関する示唆を得た。今後の展望として、重イオン衝突の現実的なセットアップにあわせた数値計算を行い、CME/CSE の定量的な検証を行うことを考えている。

## 参考文献

- [1] D. T. Son and P. Surowka, Phys. Rev. Lett. **103**, 191601 (2009) [arXiv:0906.5044 [hep-th]].
- [2] D. E. Kharzeev and H. -U. Yee, Phys. Rev. D **83**, 085007 (2011) [arXiv:1012.6026 [hep-th]].
- [3] Y. Burnier, D. E. Kharzeev, J. Liao, and H. -U. Yee, Phys. Rev. Lett. **107**, 052303 (2011) [arXiv:1103.1307 [hep-ph]].
- [4] M. Hongo, Y. Hirono and T. Hirano, arXiv:1309.2823 [nucl-th].

# 格子 QCD による非閉じ込め相におけるチャームクォークの拡散係数と緩和時間の解析

池田惇郎, 浅川正之, 北沢正清  
大阪大学大学院理学研究科物理学専攻

## 1 はじめに

RHIC 及び LHC における重イオン衝突実験に対する流体模型の成功以降、クォークグルーオンプラズマ (QGP) の輸送係数は実験による測定の対象として、また散逸流体模型による数値計算の入力として、更には QGP を含めた、強結合多体系の輸送現象の一つとして興味を持たれている。

一般によく知られている流体方程式としては、Navier-Stokes(NS) 方程式が挙げられる。しかし、相対論的な NS 方程式は「因果律を破る」、「数値計算における不安定性」などの問題がある、このため重イオン衝突実験における QGP の時間発展を扱うには 2 次の散逸項を導入してこれらの問題を解決した Israel-Stewart 方程式などを用いることが望ましい。IS 方程式には 2 次の散逸項に対する輸送係数として緩和時間が現れる。輸送係数の一つとしてチャームクォークの拡散係数がある。緩和時間は 2 次の散逸項の輸送係数として、流体方程式に現れる。

本研究では輸送係数の一つであるチャームクォークの拡散係数とその緩和時間に注目し格子 QCD による解析を行う。2 次の流体方程式から得られる緩和時間近似を仮定するとスペクトル関数の低エネルギー構造を決めることができる。この関係を用いて格子 QCD から得られたベクターカレントの相関関数から、非閉じ込め相におけるチャームクォークの拡散係数と緩和時間を読み取ることを試みた。

## 2 緩和時間近似とスペクトル関数の低エネルギー構造

Israel-Stewart 方程式には緩和時間が定義されている。媒質の静止系においてカレント流  $n^\mu$  の従う流体方程式は、 $n^\mu = -nq^\mu/(\rho + P)$  として

$$\frac{d}{dt}q^\mu = -\frac{1}{\tau_D}(q^\mu + (\text{熱力学量の微分項})) \quad (1)$$

である [1]。 $q^\mu$  は熱流、 $n$  は粒子密度、 $\rho$  はエネルギー密度、 $P$  は運動量密度であり、 $\tau_D$  は緩和時間と呼ばれる。右辺第一項以外を無視すると、 $q^\mu$  の時間発展は

$$q^\mu(t) = q^\mu(0) \exp(-t/\tau_D) = q^\mu(0) \exp(-\Gamma t) \quad (2)$$

となる。ただし  $\Gamma \equiv 1/\tau_D$  とした。

緩和時間近似とスペクトル関数の関係を見るために、まずチャームクォーク  $c$  のカレント  $J_i(t, x) = \bar{c}i\gamma_i c$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の相関関数、 $\langle J_i(t)J_i^\dagger(0) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | J_i(t)J_i^\dagger(0) | n \rangle$  のフーリエ・ラプラス変換を考える。[2][3]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \langle J_i(t)J_i^\dagger(0) \rangle e^{i\omega t} &= 2\pi \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^\infty d\omega' e^{-i\omega' t} \rho^+(\omega') \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^\infty d\omega' \frac{i}{\omega - \omega' + i\eta} \rho^+(\omega') \\ &\xrightarrow{\text{Re}} 2\pi^2 \rho^+(\omega) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega - \omega' - i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega'} + i\pi\delta(\omega - \omega') \quad (4)$$

および  $\langle J_i(t)J_i^\dagger(0) \rangle$  のフーリエ変換

$$\rho^+(\omega) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle J_i(t)J_i^\dagger(0) \rangle e^{i\omega t} \quad (5)$$

を使った。

一方、式 (3) において、式 (2) から  $\langle J_i(t)J_i^\dagger(0) \rangle = \langle J_i(0)J_i^\dagger(0) \rangle \exp(-\Gamma t)$  を仮定して変形すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt \langle J_i(t)J_i^\dagger(0) \rangle e^{i\omega t} &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} e^{-\Gamma t} \langle J_i(0)J_i^\dagger(0) \rangle \\ &\propto \frac{i\omega + \Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} \\ &\xrightarrow{\text{Re}} \frac{\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。一方、スペクトル関数  $\rho(\omega)$  は  $\langle [J_i(t), J_i^\dagger(0)] \rangle$  のフーリエ変換であり、すぐ確かめられるように、 $\rho(\omega) = (1 - e^{-\beta\omega})\rho^+(\omega)$  を満たすので、式 (3) と式 (6) から  $\omega \rightarrow 0$  のとき

$$\rho(\omega) \sim A \frac{\omega\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} \quad (7)$$

が成り立つ。

これを用いて格子 QCD から得られた虚時間相関関数

$$D(\tau) = \int d^3x \langle J_i(\tau, x)J_i^\dagger(\tau, x) \rangle = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} K(\tau, \omega)\rho(\omega) \quad (8)$$

を解析する。ただし  $K(\tau, \omega) = \cosh(\omega(\tau - 1/2T)) / \sinh(\omega/2T)$  である。

ゼロ温度で  $\omega = 0$  におけるスペクトル関数の傾きは 0 だとわかっているので高エネルギー部分の寄与を消すために、スペクトル関数が熱効果を受けなかったと仮定した時の相関関数である Reconstructed 相関関数 [4]

$$G_{\text{rec}}(\omega, T; T') \equiv \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\omega, T') K(\omega, \tau, T) \quad (9)$$

を相関関数から引いた量

$$\Delta G(\tau, T; T') = G(\tau) - G_{\text{rec}}(\tau, T; T') \quad (10)$$

を考える。これに対応するスペクトルとして、最も単純なゼロ温度効果として、式 (8) の寄与に加え  $J/\psi$  のピークが消える効果を考慮し、

$$\Delta\rho = A \frac{\omega\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} - Z\delta(\omega - m_{J/\psi}) \quad (11)$$

という構造を仮定し、 $A, \Gamma, Z$  の 3 パラメーターを用いてフィットする。

Reconstructed correlator は  $T = 3T'$  のとき、恒等式

$$\frac{\cosh[\omega(\tau - N_\tau/2)]}{\sinh(\omega N_\tau/2)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\omega|\tau+n/T|} \quad (12)$$

により

$$G_{\text{rec}}(\tau, T; \frac{1}{3}T) = G(\tau, \frac{1}{3}T) + G(\tau + \frac{1}{T}, \frac{1}{3}T) + G(\tau + 2\frac{1}{T}, \frac{1}{3}T) \quad (13)$$

と構成することができる。

### 3 Lattice の設定

本稿では、クエンチ QCD で  $\beta = 7.0$ ,  $32^3 \times N_\tau$  の非等方格子で生成された相関関数 [5] を使った (表 1)。非等方度は  $\xi = a_\sigma/a_\tau = 4.0$ 、格子間隔は  $a_\tau = a_\sigma/4 = 9.75 \times 10^{-3}\text{fm}$  である。フェルミオンには Wilson fermion を使っている。

表 1: 虚時間の格子数、温度、ゲージ配位の数

$N_\tau$	32	96
$T/T_c$	2.33	0.78
$N_{gauge}$	141	194

### 4 結果

LatticeQCD から得られた相関関数と、 $\Delta\rho$  を使ったフィットを図 1 に示す。

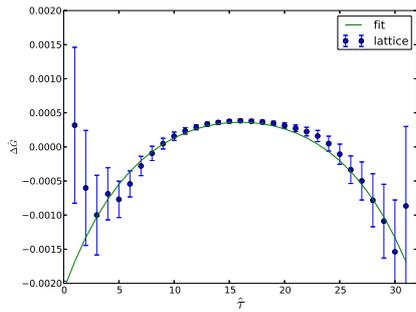


図 1: 相関関数とフィット

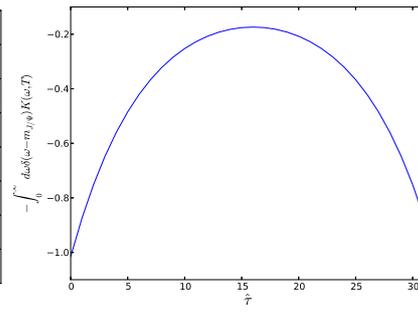


図 2:  $-Z\delta(\omega - m_{J/\Psi})$  の寄与

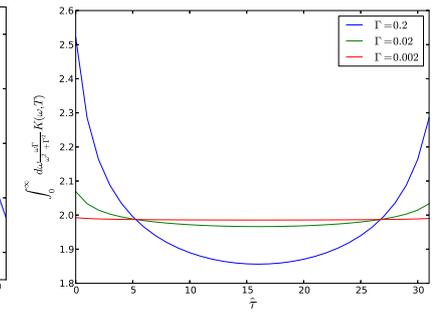


図 3:  $\Gamma$  の寄与

図 (1) と図 (2) から  $\Delta\hat{G}$  の形状は  $-Z\delta(\omega - m_{J/\Psi})$  で決まっていることが分かる。そして、 $\hat{\tau} = N_\tau/2$  周辺の平坦になっている領域が、 $A\frac{\omega\Gamma}{\omega^2+\Gamma^2}$  の寄与によるものであることが図 (3) から読み取れる。

しかし、 $A\frac{\omega\Gamma}{\omega^2+\Gamma^2}$  に比べて  $-Z\delta(\omega - m_{J/\Psi})$  の寄与が大きく、しかも  $\Gamma$  の変化に対して  $\int d\omega \Delta\rho(\omega)K(\tau, \omega)$  があまり敏感でないため、 $\Gamma$  をフィットによって決定することは  $A, Z$  に比べると難しいという事が分かった。

### 5 まとめ

流体方程式から得られる緩和時間近似によってスペクトル関数の低エネルギー領域の構造を仮定し、格子 QCD から得られた相関関数にフィットを行った。フィットにはスペクトル関数の高エネルギー部分の寄与を打ち消すために相関関数から Reconstructed 相関関数を引いたものを使用した。

緩和時間  $\tau$  と逆数の関係にある  $\Gamma$  は他のパラメータ  $A, Z$  に比べると相関関数の形状への影響が少なく、 $\Gamma$  をフィットから求めるには工夫が必要なことがわかった。

## 参考文献

- [1] W. Israel, *Annals of Physics* 100, 310 (1976).
- [2] L. P. Kadanoff and P. C. Martin, *Annals of Physics* 24, 419 (1963).
- [3] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (2006) 87 p.
- [4] H. B. Meyer, *J. High Energ. Phys.* 2010, 1 (2010).
- [5] M. Asakawa and T. Hatsuda, *Phys. Rev. Lett.* 92, 012001 (2004).

# 光学格子 上 2 成分 Bose 粒子系における低励起モードの研究 2 次元人工強磁場下における渦度分布, 相構造

名古屋工業大学大学院工学研究科 久野義人

## 1 概要

光学格子と呼ばれる人工格子系を用いて極低温原子系の実験が盛んに行われている [1]. この実験技術により巨視的量子多体现象が観測、そして、原子間相互作用も自在に制御可能である.

我々は 2 成分極低温 Bose 粒子系 (Rb 同位体系) に焦点を当て極低温の有効モデルである 2 成分 Bosonic t-J モデル (BtJ)[3] を出発点とする. 擬スピン表示を用いて表現されており、極低温下では超流動状態と擬スピン秩序が競合するモデルである. 先行研究ではこのモデルの有効モデルである拡張された量子 XY モデル (QXY) を導き、相構造が調べられた [4].

今回の報告は以下の 2 つの内容である.

(1) GL 理論をリスペクトして BtJ モデルの有効作用を導出した. この有効作用によって QXY の極低温相における Nambu-Goldstone Boson (NGB) の個数、Higgs モードについて調べた結果を報告する [5].

(2) 最近、光学格子 上での人工磁場の生成に成功したとの報告 [2] をもとに. 我々は、BtJ の有効モデルである量子 XY モデル (QXY) を用いて、人工一様強磁場下下における QXY の相構造を経路積分モンテカルロシミュレーション (MCS) によって計算し 2 次元化における量子位相の vortex 励起を調べた. 格子モデルにおける強磁場の影響により特定の磁場の値で連続理論とは異なる vortex lattice 状態が出現することを確認した. これは量子位相が秩序化されたある種の Bose-Einstein 凝縮 (BEC) である [4][6].

## 2 モデルの説明

2 成分の Bose-Hubbard モデルにおいて強い斥力により各サイトにおいての二重占有を禁止したモデルが 2 成分 BtJ モデルである.

$$H_{tJ} = - \sum_{\langle i,j \rangle} t(a_i^\dagger a_j + b_i^\dagger b_j) + \sum_{x,\mu} (J_{XY} \vec{S}_{x+\mu} \vec{S}_x + J_Z S_{x+\mu,3} S_{x,3}) + V_0 \sum_i (\delta \rho_a^2 + \delta \rho_b^2 + \delta \rho_c^2) \quad (1)$$

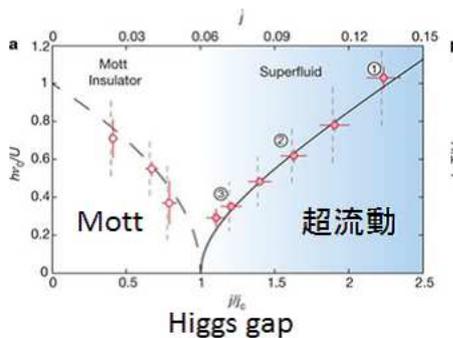
ここで、 $i, j$  は再隣接サイトの組、 $J_{XY}$ ,  $J_z$  は XY 方向、z 方向スピン相互作用の強さ、 $V_0$  は各粒子濃度を均一化するポテンシャルの強さ. 他は通常の t-J モデルと同じである. ここで特に、擬スピン表示として、 $S_x^1 = a^\dagger b + b^\dagger a$ ,  $S_x^2 = -i(a^\dagger b - b^\dagger a)$ ,  $S_x^3 = a^\dagger a - b^\dagger b$ ,  $S_x^3 = a^\dagger a - b^\dagger b$  を採用している. このモデルを *slave-particle* 表示に落とし込み  $J_z = 0$  を仮定する. さらに、a 粒子、b 粒子、hole の場の演算子を振幅場と位相場に置き換え、経路積分形式に乗せる. 振幅の平均密度からのゆらぎについては絶対零度を想定した場合積分実行可能であり、以下に作用として QXY が導かれる [4].

$$A_{QXY} = -\frac{1}{V_0} \sum_{x,\tau,i} \cos(\phi_{i,x+\tau} - \phi_{i,x}) + \sum_{x,\mu,\tau} \left[ C_1 \cos(\phi_{12,x} - \phi_{12,x+\mu}) \right. \\ \left. + C_2 \cos(\phi_{13,x} - \phi_{13,x+\mu}) + C_3 \cos(\phi_{23,x} - \phi_{23,x+\mu}) \right]$$

ここで、 $C_1$ 、 $C_3$  をフリーパラメーターとして考える． $\phi_{12,x} = \phi_{1,x} - \phi_{2,x}$ 、 $\phi_{13,x} = \phi_{1,x} - \phi_{3,x}$ 、 $\phi_{23,x} = \phi_{2,x} - \phi_{3,x}$  である．この変数の長距離相関を見ることにより、XY スピン強磁性 (FM)、a 粒子 BEC(aSF)、b 粒子 BEC(bSF) の出現を判断できる．

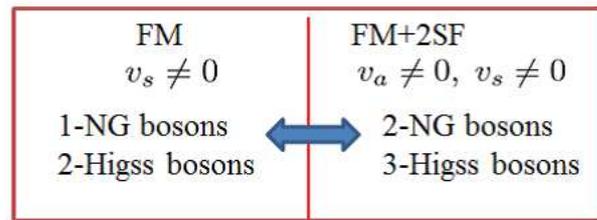
### 3 BtJ の有効理論と低エネルギー励起

我々は [5] において BtJ モデルから FM 相、aSF 相、bSF 相それぞれの秩序状態を表現する有効理論を構築した．3 つ状態を記述するために、補助場を Hubbard-Stratonovich 変換により導入し、それは Ginzburg-Landau 型の作用となる．この作用を用いて特に FM+aSF+bSF 共存相 (FM+2SF) における低励起スペクトルの計算を行った．この計算により、各位相励起に起因する NGB の出現数と振幅の揺らぎに起因する Higgs mode の振る舞いを調べた [5]．我々は、図 1 に示されるような結果を得た．3 つの位相励起モードは 1 つの gap mode で、残り 2 つは NGB となり BtJ モデルが  $U(1) \times U(1)$  の対称性を持っていることとコンシステントな結果を得た．また、FM+2SF 相と FM 相での相境界について実験 [7] と同じ機構が見れることを確認した．つまり、FM+2SF 相から FM 相に移行する際、1 つの NGB が消滅し、1 つの振幅励起モードが gapless になる．この gapless 励起モードはまぎれもなく Higgs mode であることがわかった．



(a) 実験での Higgs gap の観測例

M.Endres et al, Nature 487,454(2012)



Phase boundary で  
1つの NG-Boson (2SF) が消滅して  
1つの gap mode は潰れる  $\rightarrow$  Higgs mode

(b) FM+2SF 相と FM 相の相境界での解析の結果

図 1. 相境界での解析の結果

### 4 FM+2SF 下での人工強磁場による励起

2次元人工強磁場下における QXY モデルは以下のように拡張される [5]．

$$A_{QXY} = -\frac{1}{V_0} \sum_{x,\tau,i} \cos(\phi_{i,x+\tau} - \phi_{i,x}) + \sum_{x,\mu,\tau} \left[ C_1 \cos(\phi_{12,x} - \phi_{12,x+\mu} - A_{a,i,\mu} + A_{b,i,\mu}) \right. \\ \left. + C_2 \cos(\phi_{13,x} - \phi_{13,x+\mu} - A_{a,i,\mu}) + C_3 \cos(\phi_{23,x} - \phi_{23,x+\mu} - A_{b,i,\mu}) \right]$$

ここで、ベクトルポテンシャルは格子の回転あるいはラマンレーザーを照射する技術を用いて再現できる [2]．我々はこのモデルを用いて FM+2SF 相における人工磁場による励起状態を MCS を用いて調べた．ゲージ種類に依らず、1 プラケットあたりの磁場 flux の本数が各粒子の位相場に対して

$1/3, 1/3, 2/3$  のときのエネルギー的に得する状態が出現した. それらの状態相で位相 vortex は固体化 (vortex lattice) することがわかった. 図2にそれらの vortex 励起状態の snapshot を示す. さらに, これらの vortex lattice 状態には特定の Boson 相関 (もちろんゲージに依存する) が出現しある種の BEC と考えられる [6]. また, これら vortex lattice 状態は縮退状態であり, 磁場下の自由粒子の励起スペクトル, つまりは Hofstadter's butterfly [8] との対応を今後検討する必要があるのかもしれない.

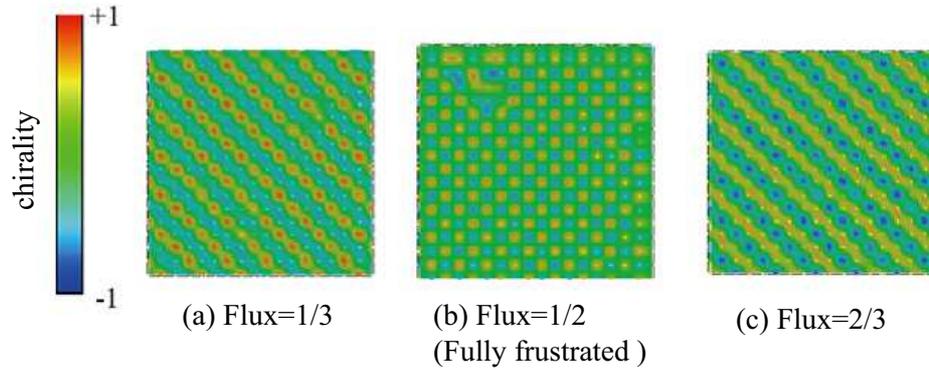


図 2. vortex lattice

## 参考文献

- [1] M.Greiner et al. ,Nature(London)415,39(2002).
- [2] M.Aidelsburger et al. ,Phys. Rev. Lett. 107, 255301 (2011).  
J.Struck et al. ,Nature Physics(2013) DOI:10.1038/nphys2750
- [3] Ehud Altman et al. ,New J. Phys. **5** 113  
K.Kataoka, Y.Kuno, and I.Ichinose , J.Phys.Soc.Jpn.81 124502 (2012) .
- [4] Y.Kuno, K.Kataoka, and I.Ichinose, Phys.Rev.B87, 014518 (2013).
- [5] Y.Kuno, K. Suzuki, and I.Ichinose arXiv:1306.2147v2 [cond-mat.quant-gas](投稿中)
- [6] T. Duric, D. K. K. Lee, Phys. Rev. B **81**, 014520 (2010)
- [7] M. Endres et al.,Nature **487**, 454-458 (2012)
- [8] D. R. Hofstadter, Phys. Rev. B **14** 2239 (1976) .

# Schwinger 効果のホログラフィーによる記述

佐藤芳紀<sup>1</sup>

京都大学大学院理学研究科

ポテンシャル解析の手法を用いて Coulomb 相と閉じ込め相における Schwinger 効果を議論する。この解析から得られる、真空崩壊が起こる臨界電場とこれまで分かっていた結果 [1] と無矛盾であることを確かめた。閉じ込め相の場合では、新たな臨界電場があることを示した。

なお、このポスター発表は吉田健太郎氏 (京大理) との共同研究である [2, 3] に基づく。

## 1 はじめに

外電場中の電子・陽電子の対生成を Schwinger という。もっと広く、外場中の粒子・反粒子の対生成のことも Schwinger 効果という。Schwinger 効果が起こるためには、電子・陽電子の対がその静止質量以上のエネルギーを外電場から得ればよいので、直観的には、 $V(x) = 2m - eEx - \alpha_s/x$  ( $\alpha_s$  は微細構造定数) というポテンシャル障壁 (図 1) のトンネル過程で記述できる。図 1 に示しているように、電場が十分小さいと ( $E < E_c$ )、ポテンシャル障壁があるが、電場を大きくしていくと、徐々にポテンシャル障壁は下がってくる。そして、ある電場  $E_c$  になるとポテンシャル障壁がなくなることが分かる。しかしながら、このポテンシャル障壁の消失は量子電磁気学では確かめられていない<sup>2</sup>。

本ポスターでは、AdS/CFT 対応 (ホログラフィー) を用いて、Schwinger 効果をポテンシャル障壁の観点から考察して得られた結果について述べる。具体的に考えたいモデルは、クォークと反クォーク間には  $SU(N)$  のゲージ場による力が働いており、外電場によってクォークと反クォークが逆方向に引っ張られているものである。

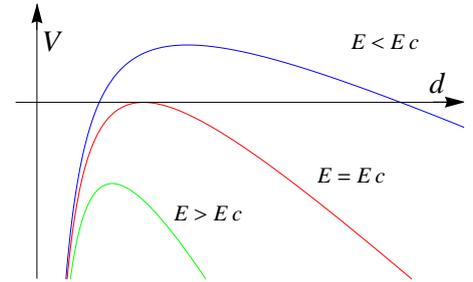


図 1: 量子電磁気学でのポテンシャル障壁。

## 2 ポテンシャル解析

### 2.1 Coulomb 相

Coulomb 相にある理論として、ラージ  $N$ 、ラージ  $\lambda := g_{\text{YM}}^2 N$  の  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論を考える。ゲージ群は Higgs 機構により  $SU(N+1)$  から  $SU(N) \times U(1)$  へと自発的に破れているとする。このとき、 $SU(N)$  の基本表現に属し、 $U(1)$  電荷  $g_{\text{YM}}$  を持つ基本粒子 (クォークと呼ぶ) が現れる。

AdS/CFT 対応を用いると、クォーク・反クォークポテンシャルと静止質量の和  $V$ 、及び仮想粒子間の距離  $x$  はそれぞれ

$$V = 2T_F r_c \int_1^{r_0/r_c} dy \frac{y^2}{\sqrt{y^4 - 1}}, \quad x = \frac{2L^2}{r_c} \int_1^{r_0/r_c} \frac{dy}{y^2 \sqrt{y^4 - 1}} \quad (1)$$

で与えられる。ここで、AdS 時空の動径方向を  $r$  とし、 $r_0$  はプローブの位置、 $r_c$  はプローブに端を持つ開弦の先端の位置である。積分は  $r$  から  $y = r/r_c$  へ変数変換している。

<sup>1</sup>e-mail address: yoshiki@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

<sup>2</sup>Schwinger などによる計算では、 $eE \ll m^2$  という弱電場という条件が必要であり、その範囲内ではポテンシャル障壁の消失はない。

## 2.2 閉じ込め相

クォークと反クォークの距離が十分に離れたときに、それらの間に線型型ポテンシャルが生じる理論を考えたい。そのような理論に双対なものとして AdS soliton 時空が知られている。具体的な計量は省略する。ここでは、2 + 1 次元の閉じ込め相におけるゲージ理論を記述するものに限って説明する。先ほどと同様にクォーク・反クォークポテンシャルと静止質量の和  $V$  及び距離  $x$  はそれぞれ

$$V = 2T_F r_0 a \int_1^{1/a} dy \frac{y^4}{\sqrt{(y^4 - 1)(y^4 - (b/a)^4)}}, \quad x = \frac{2L^2}{r_0 a} \int_1^{1/a} \frac{dy}{\sqrt{(y^4 - 1)(y^4 - (b/a)^4)}} \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 $b = r_t/r_0$  であり、 $r_t$  は物理的には理論の cutoff スケールを表している。

## 3 結果

### 3.1 Coulomb 相

(1) 式のポテンシャルに外電場からの寄与  $E x^3$  を加えた全ポテンシャル障壁を  $x$  の関数としてプロットすると、図 2 となる。ここで、 $\alpha = E/E_{\text{DBI}}$  として無次元量を導入した。 $E_{\text{DBI}}$  はプローブ D3-ブレーン<sup>4</sup>が well-defined であるような電場の上限であり、 $2\pi m^2/\sqrt{\lambda}$  で与えられる。

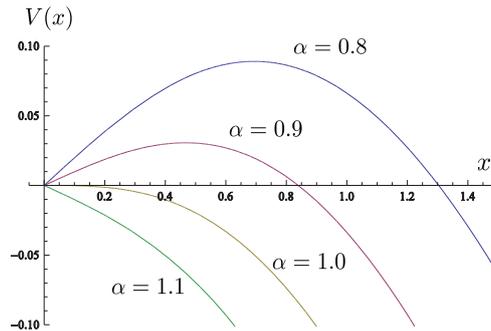


図 2: Coulomb 相のポテンシャル障壁。  $T_F r_0 = L^2/r_0 = 1$  としている。

この図を見ると、電場が  $2\pi m^2/\sqrt{\lambda}$  ( $\alpha = 1.0$ ) になると、ポテンシャル障壁が消失していることが分かる。この結果は、[1] の結果と consistent である。ここでは、数値的に  $\alpha = 1.0$  でポテンシャル障壁の消失を確認したが、解析的にも示すことができる。

### 3.2 閉じ込め相

Coulomb 相の場合と同様に、(2) 式に外電場の寄与を加えた全ポテンシャル障壁を  $x$  の関数としてプロットすると、図 3 が得られる。ただし、 $b = 0.5$  とした。

この図を見ると、図 2 と同様に、 $E = E_{\text{DBI}}$  でポテンシャル障壁がなくなっていることが分かる。つまり、 $E = E_{\text{DBI}}$  で真空崩壊が起きている。閉じ込め相の場合には、もう一つ臨界的な電場が現れる (図 3 の赤線)。この電場より小さい値では、ポテンシャル障壁の面積が無限大なので、Schwinger 効果は起きない。しかし、少しでもこの電場より大きい値であれば、トンネル過程になるので Schwinger 効果が起こる。

<sup>3</sup>弦理論では、NS-NS 2-form  $B_2$  に対応する

<sup>4</sup>D-ブレーンの低エネルギー有効理論は Dirac-Born-Infeld (DBI) 作用で与えられる。

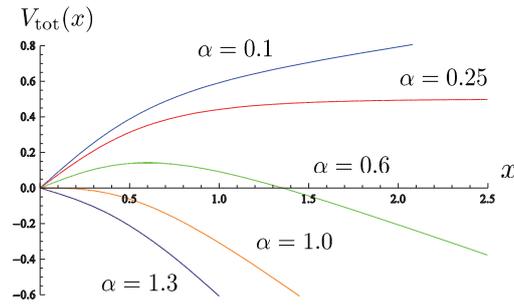


図 3: 閉じ込め相のポテンシャル障壁。  $T_{F}r_0 = L^2/r_0 = 1$  としている。

## 4 まとめと展望

本ポスター発表では、ポテンシャル解析から得られることとして、電場の上限があり、それは DBI 作用が well-defined であるような電場の上限に等しいことを述べた。さらに、理論が閉じ込め相にある場合は、Schwinger 効果が起こるか起きないかという臨界的な電場があることを述べた。

今後の展望として QCD への応用が挙げられる。RHIC の重イオン衝突実験では、重イオンの衝突により強電磁場が発生することが分かっている。そのため、これらのモデルをより QCD に近いモデルである D3/D7 系や酒井・杉本模型 [4, 5] に適用することで興味深い結果が得られると期待される。

## 参考文献

- [1] G. W. Semenoff and K. Zarembo, “Holographic Schwinger Effect,” Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 171601 [arXiv:1109.2920 [hep-th]].
- [2] Y. Sato and K. Yoshida, “Potential Analysis in Holographic Schwinger Effect,” JHEP **1308** 2013 002 [arXiv:1304.7917 [hep-th]].
- [3] Y. Sato and K. Yoshida, “Holographic Schwinger effect in confining phase,” arXiv:1306.5512 [hep-th].
- [4] T. Sakai and S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” Prog. Theor. Phys. **113** (2005) 843 [hep-th/0412141].
- [5] T. Sakai and S. Sugimoto, “More on a holographic dual of QCD,” Prog. Theor. Phys. **114** (2005) 1083 [hep-th/0507073].

# Parity doubling structure of nucleon at non-zero density in the holographic mean field theory

Bing-Ran He<sup>1</sup>

Department of Physics, Nagoya University, Nagoya 464-8602, Japan

## Abstract

We develop the holographic mean field approach in a bottom-up holographic QCD model including baryons and scalar mesons in addition to vector mesons and pions. We study the effect of parity doubling structure of baryons at non-zero density to the equation of state between the chemical potential and the baryon number density. The result shows that the effective mass decreases with increasing density, and that the rate of decreasing is more rapid for larger percentage of the mass from the chiral symmetry breaking.

## 1 Introduction

The spontaneous chiral symmetry breaking ( $\chi$ SB) is one of the most important features in low-energy QCD. This is considered to be the origin of several hadron masses, such as the lightest nucleon mass. However, there is a possibility that only a part of the lightest nucleon mass is generated by the spontaneous  $\chi$ SB and the remaining part is the chiral invariant mass. This structure is nicely expressed in so called parity doublet models.

It is an interesting question to ask how much amount of the nucleon mass is generated by the spontaneous  $\chi$ SB, or to investigate the origin of nucleon mass. Studying dense baryonic matter would give some clues to understand the origin of our mass, since a partial restoration of chiral symmetry will occur at high density region. We expect that the mass generated by the spontaneous  $\chi$ SB will become small near the chiral phase transition point.

## 2 Parity doubling structure of the model

### 2.1 model

The fields relevant to the present analysis are the scalar meson field  $X$  and two baryon fields  $N_1$  and  $N_2$ , as well as the 5-dimensional gauge fields  $R_A$  and  $L_A$ . The bulk action is given as

$$S = S_{N_1} + S_{N_2} + S_{\text{int}} + S_X, \quad (1)$$

where

$$S_{N_1} = \int d^5x \sqrt{g} \left\{ \frac{i}{2} \bar{N}_1 e_A^M \Gamma^A \nabla_M N_1 - \frac{i}{2} (\nabla_M^\dagger \bar{N}_1) e_A^M \Gamma^A N_1 - M_5 \bar{N}_1 N_1 \right\}, \quad (2)$$

$$S_{N_2} = \int d^5x \sqrt{g} \left\{ \frac{i}{2} \bar{N}_2 e_A^M \Gamma^A \nabla_M N_2 - \frac{i}{2} (\nabla_M^\dagger \bar{N}_2) e_A^M \Gamma^A N_2 + M_5 \bar{N}_2 N_2 \right\}, \quad (3)$$

$$S_{\text{int}} = - \int d^5x \sqrt{g} G \left\{ \bar{N}_2 X N_1 + \bar{N}_1 X^\dagger N_2 \right\}, \quad (4)$$

$$S_X = \int d^5x \sqrt{g} \text{Tr} \left\{ |DX|^2 - m_5^2 |X|^2 - \frac{1}{4g_5^2} (F_L^2 + F_R^2) \right\}, \quad (5)$$

with  $M_5 = 5/2$  and  $m_5^2 = -3$  being the bulk masses for baryons and mesons,  $G$  the scalar-baryon coupling constant,  $g_5$  the gauge coupling constant. The vielbein  $e_M^A$  appearing in Eqs. (2) and (3)

<sup>1</sup>e-mail address: [he@hken.phys.nagoya-u.ac.jp](mailto:he@hken.phys.nagoya-u.ac.jp)

satisfies  $g_{MN} = e_M^A e_N^B \eta_{AB} = \frac{1}{z^2} \text{diag}(+ - - -)$ , where  $M$  labels the general space-time coordinate and  $A$  labels the local Lorentz space-time, with  $A, M \in (0, 1, 2, 3, z)$ . By fixing the gauge for the Lorentz transformation, we take the vielbein as  $e_M^A = \frac{1}{z} \eta_M^A = \frac{1}{z} \text{diag}(+ - - -)$ . The Dirac matrices  $\Gamma^A$  are defined as  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$  and  $\Gamma^z = -i\gamma^5$  which satisfy the anti-commutation relation  $\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2\eta^{AB}$ . The covariant derivatives for baryon and scalar meson are defined as

$$\nabla_M N_1 = (\partial_M + \frac{i}{4} \omega_M^{AB} \Gamma_{AB} - i(A_L^a)_M t^a) N_1, \quad (6)$$

$$\nabla_M N_2 = (\partial_M + \frac{i}{4} \omega_M^{AB} \Gamma_{AB} - i(A_R^a)_M t^a) N_2, \quad (7)$$

$$D_M X = \partial_M X - iA_{LM} X + iX A_{RM}, \quad (8)$$

where  $\Gamma^{AB} = [\Gamma^A, \Gamma^B]/(2i)$ .  $\omega_M^{AB}$  is the spin connection given by  $\omega_M^{AB} = \frac{1}{z}(\eta^A_Z \eta^B_M - \eta^A_M \eta^B_Z) \eta^{ZZ}$ .

## 2.2 parity doubling structure

The solution for scalar field  $X$  is obtained as<sup>[4;5]</sup>  $X_0(z) = \frac{1}{2} M z + \frac{1}{2} \sigma z^3$ , where  $M$  is the current quark mass and  $\sigma$  is the quark condensate  $\langle \bar{q}q \rangle$ .

We decompose the bulk fields  $N_1$  and  $N_2$  as  $N_1 = N_{1L} + N_{1R}$ ,  $N_2 = N_{2L} + N_{2R}$ , where  $N_{1L} = i\Gamma^z N_{1L}$ ,  $N_{1R} = -i\Gamma^z N_{1R}$ ,  $N_{2L} = i\Gamma^z N_{2L}$ ,  $N_{2R} = -i\Gamma^z N_{2R}$ . The mode expansions of  $N_{1L,R}$  and  $N_{2L,R}$  are performed as

$$\begin{aligned} N_{1L,R}(x, z) &= \sum_n \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} f_{1L,R}^{(n)}(z) \psi_{L,R}^{(n)}(p), \\ N_{2L,R}(x, z) &= \sum_n \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} f_{2L,R}^{(n)}(z) \psi_{L,R}^{(n)}(p). \end{aligned} \quad (9)$$

It is convenient to introduce  $f_+^{(n)}$  as  $f_{+1}^{(n)} = f_{1L}^{(n)} + f_{2R}^{(n)}$ ,  $f_{+2}^{(n)} = f_{1R}^{(n)} - f_{2L}^{(n)}$ , which satisfy

$$\begin{aligned} \partial_z f_{+1}^{(n)} &= \frac{2 + M_5}{z} f_{+1}^{(n)} - \frac{1}{2} G \sigma z^2 f_{+2}^{(n)} - m_+^{(n)} f_{+2}^{(n)}, \\ \partial_z f_{+2}^{(n)} &= \frac{2 - M_5}{z} f_{+2}^{(n)} - \frac{1}{2} G \sigma z^2 f_{+1}^{(n)} + m_+^{(n)} f_{+1}^{(n)}, \end{aligned} \quad (10)$$

with  $m_\pm^{(n)}$  corresponding to mass eigenvalues.

For solving Eq. (10) we use the boundary conditions for  $f_{+1}^{(n)}$  and  $f_{+2}^{(n)}$  as Tab 1:

	UV	IR
$f_{+1}^{(n)}$	0	1
$f_{+2}^{(n)}$	0	$c_1$

Table 1: Boundary condition when using shooting method.

For a given value of  $c_1$ , we first adjust the coupling  $G$  to ensure that the lowest eigenvalue becomes the nucleon mass of 0.94 GeV. We show how the value of  $G$  changes depending on the value of  $c_1$  in Fig. 1.

We next calculate the masses of higher excited nucleons using the value of  $G$  determined above for fixed  $c_1$ . We show the  $c_1$ -dependence of several masses in Fig. 2. Here,  $N(+)$  denotes the states with positive parity while  $N(-)$  stands for negative parity. This figure shows that, for  $c_1 > c_1^* \approx 0.12$ , the first excited state carries the negative parity and the second the positive parity, and so on. For  $c_1 < c_1^*$ , on the other hand, the first excited state is the positive-parity excited nucleon, which seems consistent with the experimental data.

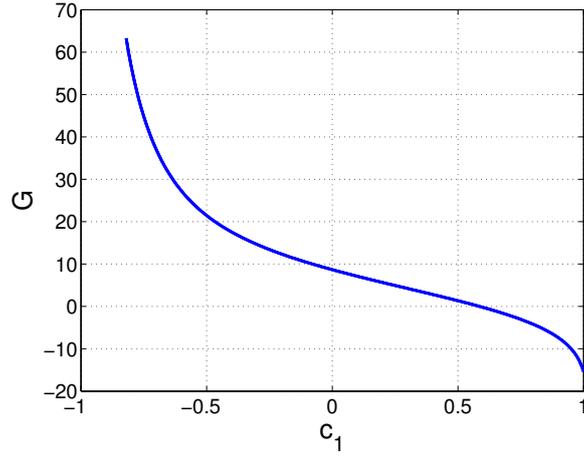


Figure 1: Value of  $G$  determined from  $c_1$  to make the lowest eigenvalue to be the nucleon mass of  $0.94 \text{ GeV}$ .

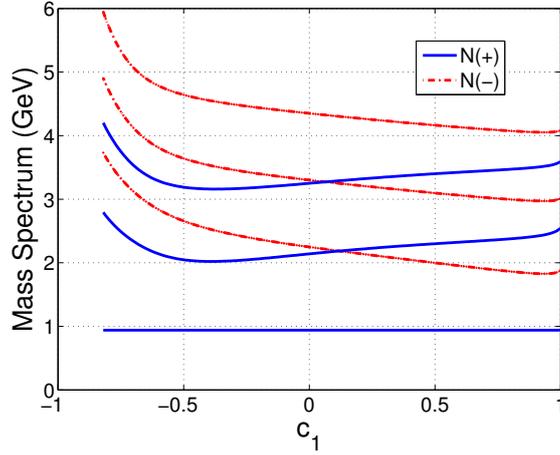


Figure 2:  $c_1$  dependence of excited nucleon masses.

For understanding the meaning of  $c_1$ , we investigate the effect of dynamical chiral symmetry breaking on the nucleon mass. For quantifying this effect, we take  $\sigma = 0$  and calculate the mass eigenvalue by solving

$$\begin{aligned}\partial_z f_{+1}^{(n)} &= \frac{2 + M_5}{z} f_{+1}^{(n)} - m_0^{(n)} f_{+2}^{(n)}, \\ \partial_z f_{+2}^{(n)} &= \frac{2 - M_5}{z} f_{+2}^{(n)} + m_0^{(n)} f_{+1}^{(n)},\end{aligned}\quad (11)$$

for several choices of  $c_1$ . We consider the lowest eigenvalue  $m_0^{(1)}$ , denoted as just  $m_0$ , as the chiral invariant mass of nucleon. In Fig. 3, we plot the  $c_1$  dependence of the value of  $1 - m_0/m_N \equiv \frac{m(\bar{q}q)}{m_N}$  which shows the percentage of the nucleon mass coming from the spontaneous chiral symmetry breaking. From Fig. 3 we conclude that, in the case of  $c_1 = 0$ , which is chosen in Ref.<sup>[3]</sup>, all the nucleon mass comes from the spontaneous chiral symmetry breaking. On the other hand, when  $c_1 > 0.25$ , more than half of the nucleon mass is the chiral invariant mass.

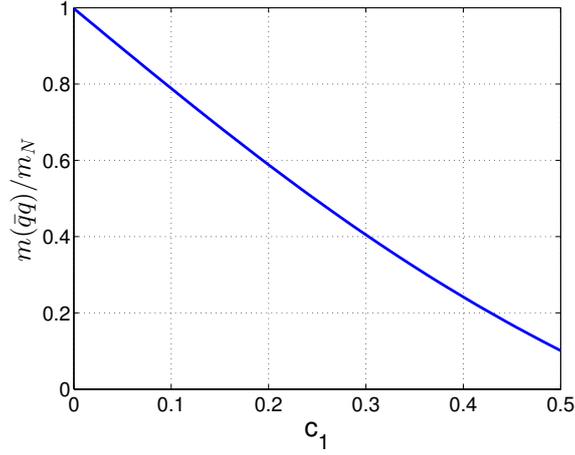


Figure 3:  $c_1$ -dependence of  $\frac{m(\bar{q}q)}{m_N}$ , which shows the percentage of the nucleon mass coming from the spontaneous chiral symmetry breaking.

### 3 Equation of state in the holographic mean field approach to the model

In the holographic mean field theory, all the 5D fields are decomposed into the mean fields which depend only on the 5th coordinate  $z$  and the fluctuation fields. In the present analysis, we consider the symmetric nuclear matter, so that the proton and the neutron have the same mean fields. Furthermore, we assume that the mean fields for the vector and axial-vector gauge fields except the  $U(1)_V$  gauge field and the traceless part of the scalar field are zero. The equations of motion for the mean fields can be simplified as<sup>[8]</sup>,

$$\begin{aligned}
\partial_z^2 X &= \frac{3}{z} \partial_z X + \frac{m_5^2}{z^2} X + \frac{G}{2z^2} (N_+^\dagger N_+ - N_-^\dagger N_-), \\
\partial_z^2 V_0 &= \frac{1}{z} \partial_z V_0 + \frac{g_5^2}{z^3} (N_+^\dagger N_+ + N_-^\dagger N_-), \\
\partial_z N_+ &= \frac{2 + M_5}{z} N_+ - \frac{1}{z} G X N_- - V_0 N_+, \\
\partial_z N_- &= \frac{2 - M_5}{z} N_- - \frac{1}{z} G X N_+ + V_0 N_+.
\end{aligned} \tag{12}$$

We change the IR values of  $N_+$  and  $N_-$  to control the baryon number density, which is written in terms of the baryon fields as

$$\rho_b = \int \frac{dz}{2z^4} (N_+^\dagger N_+ + N_-^\dagger N_-) = \int dz \rho(z). \tag{13}$$

The boundary conditions at finite density is shown in Table 2.

We first study the density dependence of the chiral condensate for checking the partial chiral restoration. Here we define the in-medium condensate through the holographic mean field  $X(z)$  as  $\sigma = \frac{2X(z)}{z^3} \Big|_{z=z_{UV}}$ . We plot the density dependence of the  $\sigma$  normalized by the vacuum value  $\sigma_0$  in Fig. 4. This shows that the quark condensate  $\sigma$  decreases with the increasing number density, which can be regarded as a sign of the partial chiral symmetry restoration. When the value of  $c_1$  is decreased, the corresponding value of  $G$  becomes larger (see Fig. 1) to reproduce the nucleon mass.

	UV	IR
$X$	0	$\sigma_0 z_m^3/2$
$V_0$	$\mu$	-
$\partial_z V_0$	-	0
$N_1$	0	$c_2$
$N_2$	0	$c_2 * c_1$

Table 2: Boundary condition at finite density. The mark “-” indicates that the value is not fixed.

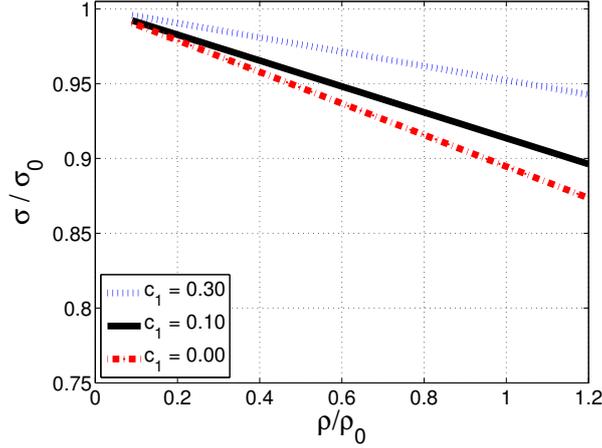


Figure 4: Density dependence of  $\sigma/\sigma_0$  for several choices of  $c_1$ .

Since the larger  $G$  implies the larger correction to the scalar from the nucleon matter, the smaller  $c_1$  we choose, the more rapidly the condensate  $\sigma$  decreases. The degreasing property of the chiral condensate is similar to the one obtained in Ref. [1].

We next show the resultant equation of state, a relation between the chemical potential and the baryon number density in Fig. 5. This figure shows that the chemical potential increases with the increasing baryon number density. This does not agree with the nature, in which the chemical potential decreases against the density in the low density region below the normal nuclear matter density. This decreasing property is achieved by the subtle cancellation between the repulsive and attractive forces. So this increasing property indicates that, in the present model, the repulsive force mediated by the U(1) gauge field is stronger than the attractive force mediated by the scalar degree included in X field.

For studying the attractive force mediated by the scalar fields, we extract the density dependence of the effective nucleon mass using the Walecka type model (see e.g. Refs. [6;7]), in which the chemical potential  $\mu$  is expressed as

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{\omega^{(n)}NN}^2}{m_{\omega^{(n)}}^2} \rho_b + \sqrt{k_F^2 + M^{*2}}, \quad (14)$$

where  $\rho_b$  is the baryon number density,  $g_{\omega^{(n)}NN}$  is the coupling for  $n$ th eigenstate of the omega mesons,  $m_{\omega^{(n)}}$  is its mass,  $k_F$  is the Fermi momentum, and  $M^*$  is the effective nucleon mass. Note that, in the free Fermi gas,  $k_F$  is related to  $\rho_b$  as  $\rho_b = \frac{2k_F^3}{3\pi^2}$ , which leads to  $k_F = \left(\frac{3\pi^2\rho_b}{2}\right)^{1/3}$ .

In the present hQCD model, the  $\omega^{(n)}NN$  coupling is calculated in vacuum as  $g_{\omega^{(n)}NN} = 15.5 \sim 15.8, 8.9 \sim 10.9 \dots$  depending on the value of  $c_1$ . Using these couplings together with the masses of  $m_{\omega^{(n)}} \sim 780, 1794 \dots$  MeV, we convert the density dependence of  $\mu$  obtained above into the one of

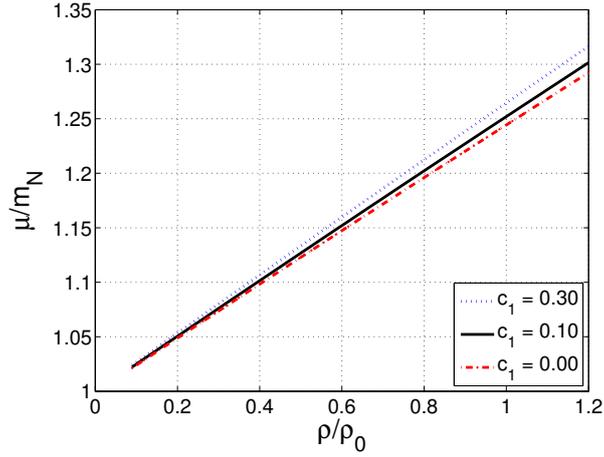


Figure 5: Equation of state. The horizontal axis shows the baryon number density normalized by the normal nuclear matter density of  $\rho_0 = 0.16 \text{ (fm)}^{-3}$ , and the vertical axis does the chemical potential by the nucleon mass of 0.94 GeV. The dashed line shows the EoS for  $c_1 = 0$ , the solid line for  $c_1 = 0.1$  and the dotted line for  $c_1 = 0.3$ .

the effective nucleon mass  $M^*$  through Eq. (14). We plot the density dependence of the effective mass  $M^*$  in Fig. 6. This shows that the effective mass decreases with increasing density. The decreasing

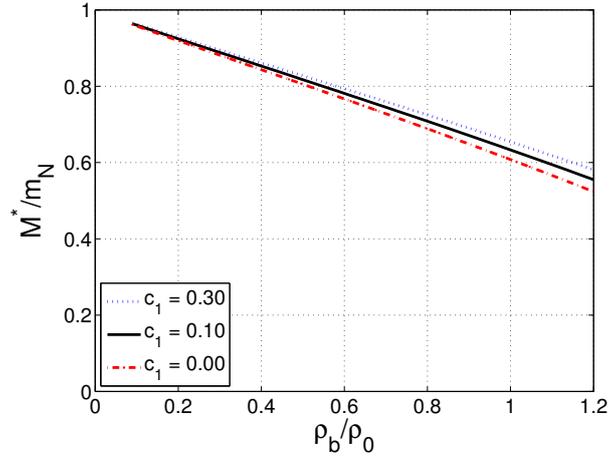


Figure 6: Density dependence of the effective nucleon mass  $M^*$ .

rate is larger than the one obtained in Ref. [1], which is the reflection of the iterative corrections included through the holographic mean field theory. It should be noted that the decreasing of  $M^*$  is more rapid for smaller value of  $c_1$ . In other word, the larger the percentage of the mass coming from the chiral symmetry breaking is, more rapidly the effective mass  $M^*$  decreases with density.

## 4 A summary and discussions

We develop the holographic mean field approach in a bottom-up holographic QCD model proposed in Ref. [3] which includes five-dimensional baryon field in the model proposed in Refs. [4;5].

In the present analysis, we made an analysis only at the mean field level. So a natural extension

is to consider the fluctuations on the top of the mean field obtained here. It is also interesting to study the relation between the isospin chemical potential and the isospin density based on the approach developed in this paper, since the relation has a relevance to the symmetry energy. We leave these works to the future project.

## References

- [1] Y. Kim, C. -H. Lee and H. -U. Yee, Phys. Rev. D **77**, 085030 (2008) [arXiv:0707.2637 [hep-ph]]; K.-I. Kim, S. H. Lee and Y. Kim, in *proceedings of Workshop on Hadron and Nuclear Physics, HNP09, Osaka, Japan, 2009* (World Scientific, Hackensack, 2010).
- [2] M. Harada, S. Nakamura and S. Takemoto, Phys. Rev. D **86**, 021901 (2012) [arXiv:1112.2114 [hep-th]].
- [3] D. K. Hong, T. Inami, and H.-U. Yee, Phys.Lett. **B646**,
- [4] J. Erlich, E. Katz, D. T. Son, and M. A. Stephanov, Phys.Rev.Lett. **95**,
- [5] L. Da Rold and A. Pomarol, Nucl.Phys. **B721**,
- [6] J. Walecka, Annals Phys. **83**, 491 (1974).
- [7] T. Matsui, Nucl.Phys. **A370**, 365 (1981).
- [8] B. R. He and M. Harada, [arXiv:1304.7866].