モチベーション

昨今、多岐に渡る分野において、エンタングルメント・エントロピーが注目を集めている。

- **物性理論**: 量子オーダーパラメタ
- **量子情報理論**: 量子的なもつれを測定する量
- **統計力学**: 非平衡系の物理におけるエントロピー
- **弦理論**: 重力理論、AdS/CFT対応の深い理解

モチベーション

EEにも熱力学エントロピーの様に
従うべき基本法則はないのか？

モチベーション

EEにも熱力学エントロピーの様に
従うべき基本法則はないのか？

⬇

熱力学第一法則に似た関係式:

$$\boxed{\Delta E_A = T_{\mathrm{ent}} \cdot \Delta S_A .}$$

エンタングルメント・エントロピー(EE)の定義

・ 定義

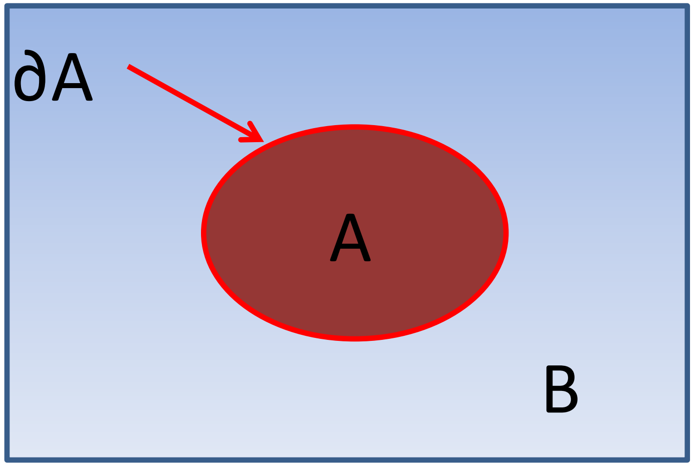
ある時刻において全ヒルベルト空間をA,Bに分割 : $H_{tot} = H_A \otimes H_B$
部分空間Bにおける自由度を無視。

Reduced density matrix: $\rho_A \equiv Tr_B \rho_{tot}$

この密度行列 ρ_A を用いて、エンタングルメント・エントロピー(EE) S_A は以下の様に定義される。

EEの定義

$$\boxed{S_A = -Tr_A \rho_A \log \rho_A}$$



on a certain time slice

例

直積状態: $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A) \otimes (|\downarrow\rangle_B + |\uparrow\rangle_B)$

⇒Reduced density matrix : $\rho_A = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A)(\langle\uparrow|_A + \langle\downarrow|_A)$

⇒EE: $S_A = 0$

エンタングルした状態: $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B)$

⇒Reduced density matrix : $\rho_A = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle_A \langle\uparrow|_A) + \frac{1}{2}(|\downarrow\rangle_A \langle\downarrow|_A)$

⇒EE: $S_A = \log 2$

状態が量子的にもつれていると***EE*** $\cancel{\fallingdotseq}$ ***0*** 。

S_A はA,Bの間にある**量子的なもつれ**を測定する量。

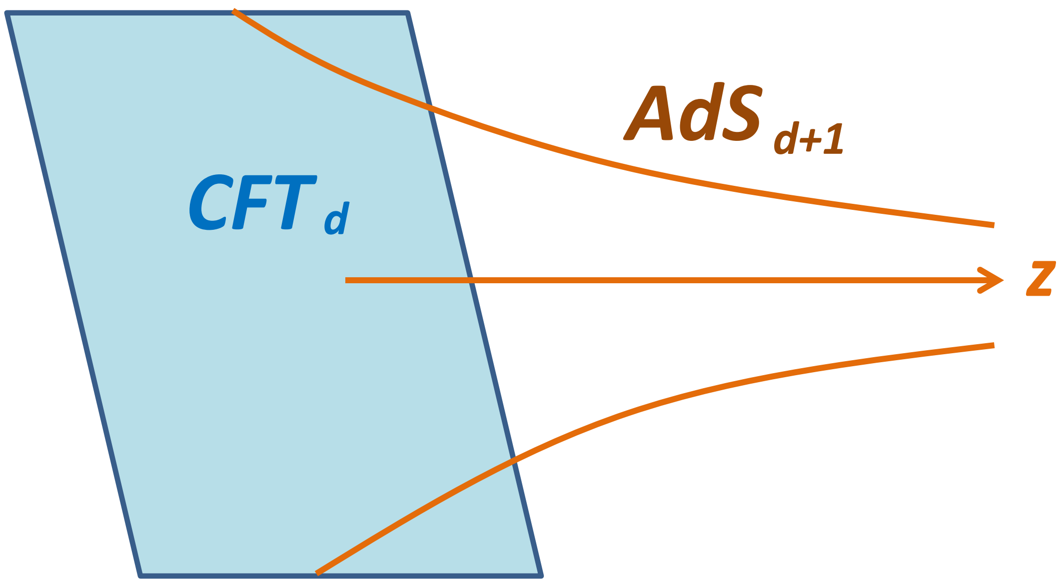
実際に場の理論において、

EEを計算することは技術的に困難。

AdS/CFT対応に基づいて解析を行った。

AdS/CFT対応

d次元の強結合で、Large Nのゲージ理論 ⇔ d＋1次元のAdS時空上の古典重力理論

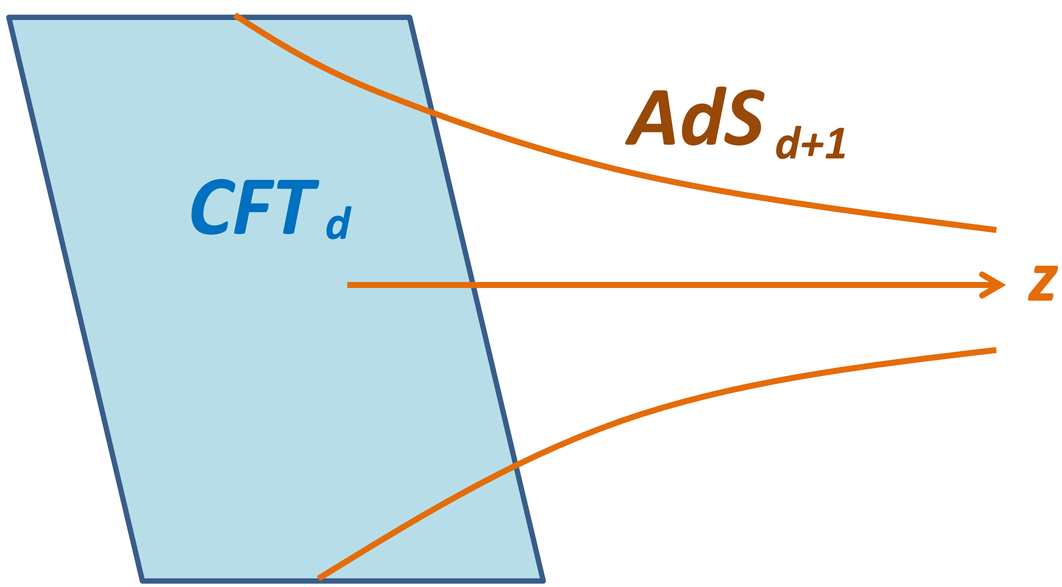


AdS/CFT対

AdSの境界上に存在

境界を持った時空

d次元の強結合で、 Large Nのゲージ理論 ⟺ d＋1次元のAdS時空上の古典重力理論



AdS/CFT対応

場の理論

重力理論

エンタングルメント
・エントロピー (EE)

ホログラフィック・
エンタングルメント
・エントロピー (HEE)

等価

ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー(HEE)

ある時刻において境界をA,Bに分割する。
ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー(HEE)
は次の様に定義される。

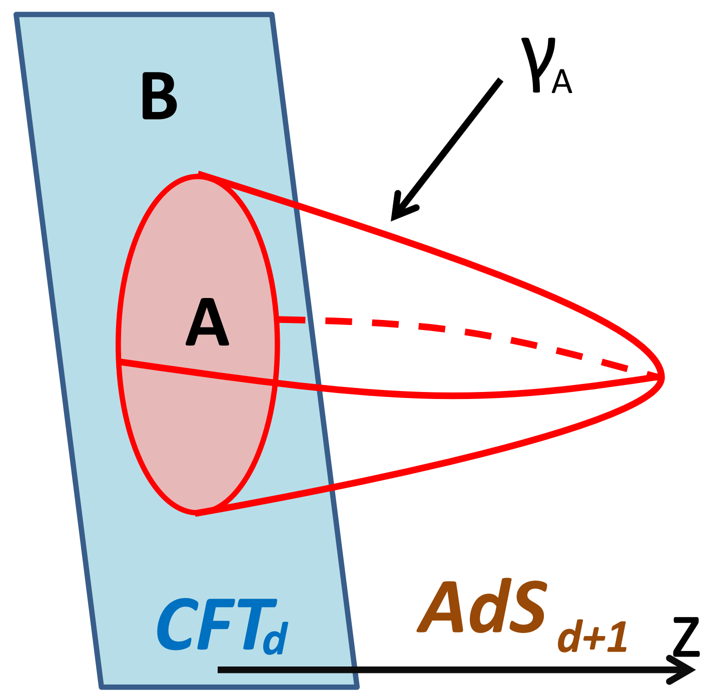
$$ds^2 = \frac{dz^2}{z^2} + \frac{1}{z^2}\left(-dt^2 + \sum_i dx^i dx^i\right).$$

HEEの定義

$$\boxed{S_A = \frac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{4G}.}$$

γ_A はd-1次元の広がりを持つ
最小曲面(面積が最小の曲面)

($\partial\gamma_A = \partial A$)



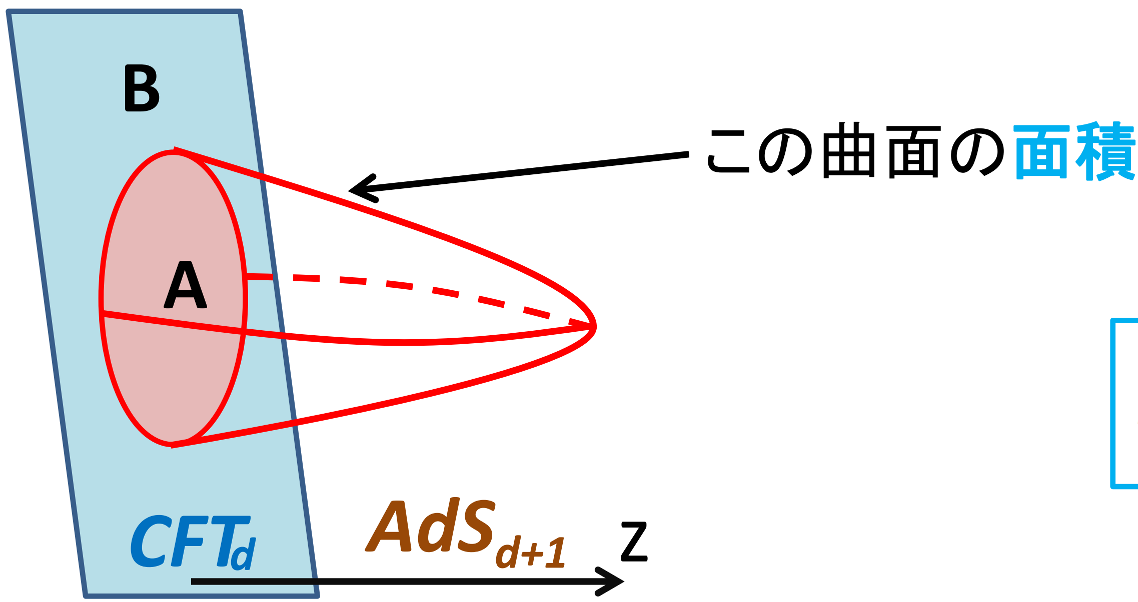
z>ε　ε：幾何学的なカットオフ

モチベーション再び

EEにも熱力学エントロピーの様に

従うべき基本法則はないのか？

重力理論で調べる量



z>ε　ε:Geometrical cutoff

$$S_A = \frac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{4G}.$$

セットアップ

- ***場の理論***:

  CFT_d において,系を何かの手段で少しだけ励起させる。
  (熱化や量子熱化などで)
  ⇒ 全系は一般的に**非平衡状態**へ

- ***重力理論***:

  AdS_{d+1} 時空上で境界から非常に遠いところを変形する。

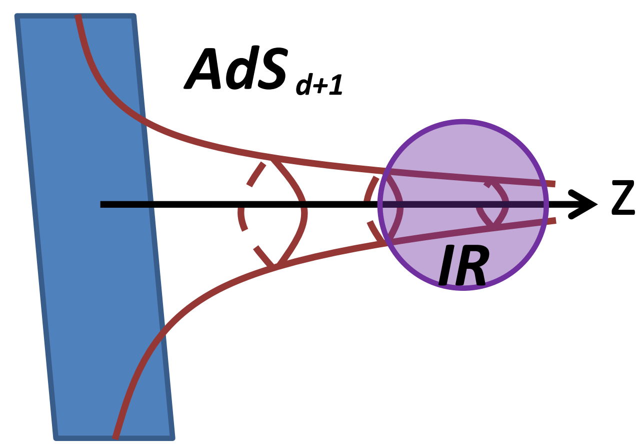
  (B.H.や star にする。)

  計量:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\left[-f(z)dt^2 + g(z)dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1}(dx_i)^2\right]$$

Z → 0

$$g(z) \simeq 1/f(z) \simeq 1 + mz^d$$



セットアップ

- ***場の理論***:

  CFT$_d$ において,系を何かの手段で少しだけ励起させる。
  (熱化や量子熱化などで)
  ⇒ 全系は一般的に**非平衡状態**へ

- ***重力理論***:

  AdS$_{d+1}$ 時空上で境界から非常に遠いところを変形する。

  (B.H.や star にする。)

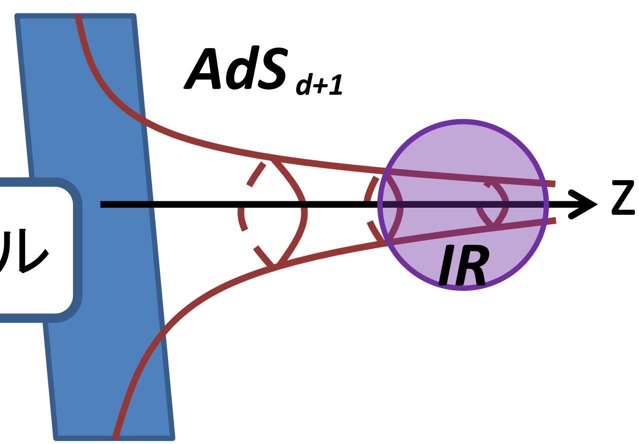
計量:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\left[-f(z)dt^2 + g(z)dz^2 + \sum^{d-1}(dx_i)^2\right]$$

$z \to 0$

$$g(z) \simeq 1/f(z) \simeq 1 + m z^d$$

励起したエネルギーのスケール



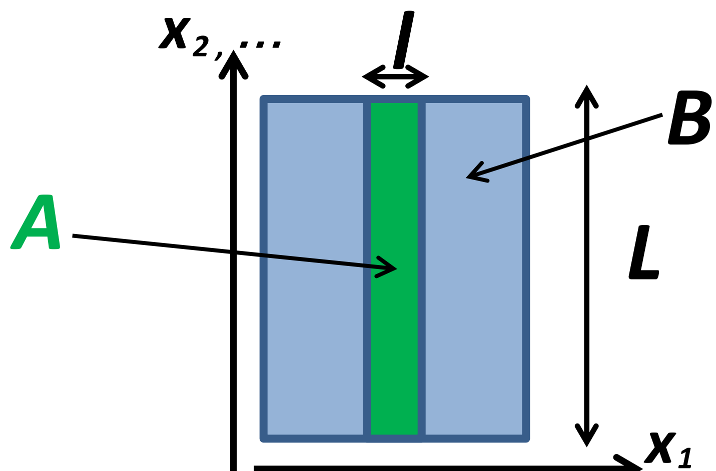
ストリップの場合

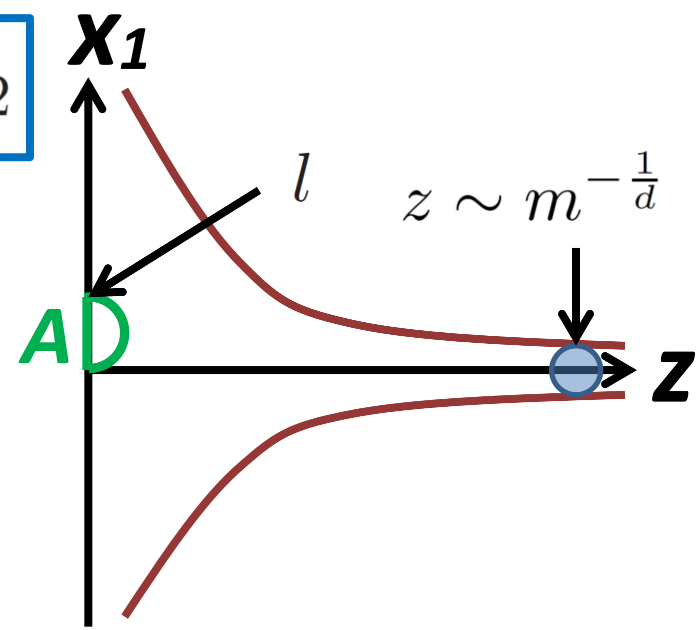
ある時刻で境界をA,Bに分割。部分系A：幅 l のストリップ。

仮定： 幅 l は励起エネルギーのスケールの逆数 $1/m$ に比べて非常に小さくとる：$\boxed{ml^d << 1}$

部分系 A

$$0 < x_1 < l,\ -L/2 < x_{2,3,\cdots,d-1} < L/2$$





ホログラフィック エネルギー・運動量テンソル

(***場の理論***のエネルギー密度):

$$\boxed{\Delta T_{tt} = \frac{(d-1)\,R^{d-1}m}{16\pi G_N}}$$

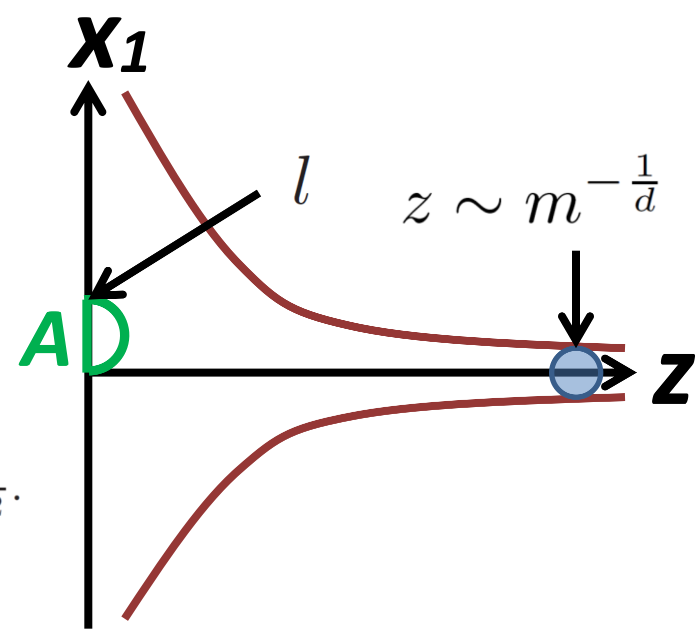
- ***ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー (HEE)*** :

  HEEをml^dに関して一次まで展開。

$$S_A = S_A^{(0)} + \Delta S_A,$$

$$S_A^{(0)} = \frac{R^{d-1}L^{d-2}}{2(d-2)G_N}\left[\frac{1}{\epsilon^{d-2}} - \frac{2^{d-2}\pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^{d-1}\cdot l^{d-2}}\right],$$

$$\Delta S_A = \frac{R^{d-1}mL^{d-2}l^2}{32(d+1)G_N}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2\Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d-1}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2}.$$



ホログラフィック エネルギー・運動量テンソル

(***場の理論***のエネルギー密度):

$$\boxed{\Delta T_{tt} = \frac{(d-1)\, R^{d-1} m}{16\pi G_N}}$$

- ***ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー (HEE)*** :

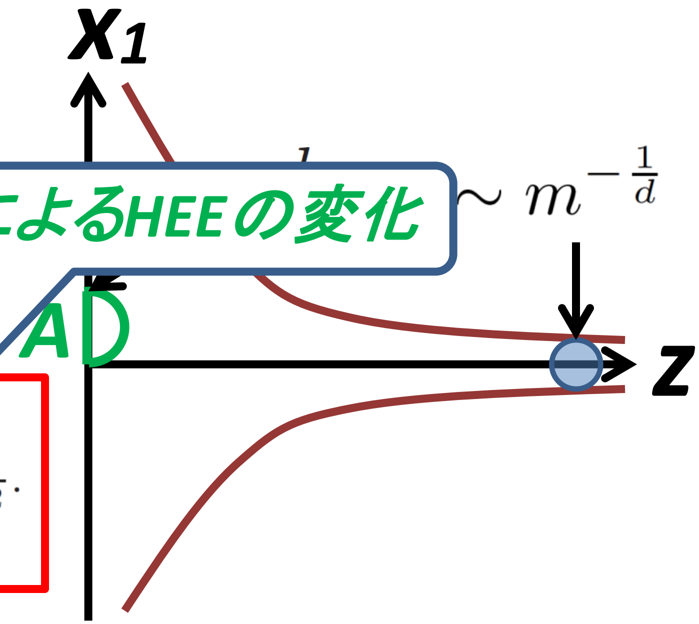
  HEEをml^dに関して一次まで展開。

$$S_A = S_A^{(0)} + \Delta S_A,$$

$$S_A^{(0)} = \frac{R^{d-1}L^{d-2}}{2(d-2)G_N}\left[\frac{1}{\epsilon^{d-2}} - \frac{2^{d-2}\pi^{\frac{d-1}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^{d-1}\cdot l^{d-2}}\right]$$

$$\boxed{\Delta S_A = \frac{R^{d-1}mL^{d-2}l^2}{32(d+1)G_N}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2\Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d-1}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2}.}$$

励起によるHEEの変化



有効温度

部分系Aに含まれるエネルギー:

$$\Delta T_{tt} = \frac{(d-1)\, R^{d-1} m}{16\pi G_N} \quad \Longrightarrow \quad \Delta E_A = \int dx^{d-1} \Delta T_{tt} = \frac{(d-1) m l L^{d-2} R^{d-1}}{16\pi G_N}.$$

ΔS_AとΔE_Aの間の関係

$$\Delta E_A = \left(\frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d-1}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1} \cdot \Delta S_A$$

有効温度

部分系Aに含まれるエネルギー:

$$\Delta T_{tt} = \frac{(d-1)\, R^{d-1} m}{16\pi G_N} \Rightarrow \Delta E_A = \int dx^{d-1} \Delta T_{tt} = \frac{(d-1) m l L^{d-2} R^{d-1}}{16\pi G_N}.$$

ΔS_AとΔE_Aの間の関係

$$\Delta E_A = \left(\frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d-1}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1} \cdot \Delta S_A \quad \sim \quad dU = TdS$$

似ている。

有効温度

部分系Aに含まれるエネルギー:

$$\Delta T_{tt} = \frac{(d-1)\,R^{d-1}m}{16\pi G_N} \Rightarrow \Delta E_A = \int dx^{d-1}\Delta T_{tt} = \frac{(d-1)mlL^{d-2}R^{d-1}}{16\pi G_N}.$$

ΔS_AとΔE_Aの間の関係

$$\Delta E_A = \left(\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d-1}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1} \cdot \Delta S_A \Rightarrow \boxed{\Delta E_A = T_{\text{ent}} \cdot \Delta S_A.}$$

有効温度

部分系Aに含まれるエネルギー:

$$\Delta T_{tt} = \frac{(d-1)\, R^{d-1} m}{16\pi G_N} \Rightarrow \Delta E_A = \int dx^{d-1} \Delta T_{tt} = \frac{(d-1) m l L^{d-2} R^{d-1}}{16\pi G_N}.$$

ΔS_AとΔE_Aの間の関係

$$\Delta E_A = \left(\frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d-1}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1} \cdot \Delta S_A \Rightarrow \boxed{\Delta E_A = T_{\text{ent}} \cdot \Delta S_A.}$$

有効温度T_{ent}の定義

$$\boxed{T_{ent} = \frac{\Delta E_A}{\Delta S_A}}$$

$$T_{\text{ent}} = \left(\frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d-1}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1}$$

有効温度

部分系Aに含まれるエネルギー:

$$\Delta T_{tt} = \frac{(d-1)\, R^{d-1} m}{16\pi G_N} \Rightarrow \Delta E_A = \int dx^{d-1} \Delta T_{tt} = \frac{(d-1) m l L^{d-2} R^{d-1}}{16\pi G_N}.$$

ΔS_AとΔE_Aの間の関係

$$\Delta E_A = \left(\frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d-1}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1} \cdot \Delta S_A \Rightarrow \boxed{\Delta E_A = T_{ent} \cdot \Delta S_A.}$$

重力定数やAdS半径等の**パラメタに依存しない**。

有効温度T_{ent}の定義

$$\boxed{T_{ent} = \frac{\Delta E_A}{\Delta S_A}}$$

$$T_{\text{ent}} = \left(\frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{2(d-1)}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{d-1}\right)}{2(d^2-1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d-1}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2(d-1)}\right)^2} \right)^{-1} \cdot l^{-1}$$

対応するゲージ理論(CFT)

重力理論のパラメタ
(AdS半径や重力定数)

⟺

ゲージ理論のパラメタ
(*N* 、*λ*)

対応するゲージ理論の
パラメタに依存しない。

$$T_{ent} = c \cdot l^{-1}$$

対応するゲージ理論(CFT)

重力理論のパラメタ
(AdS半径や重力定数)

ゲージ理論のパラメタ
(N 、λ)

対応するゲージ理論の
パラメタに依存しない。

$$T_{ent} = c \cdot l^{-1}$$

Large Nの強結合のゲージ理論では
EEに対して***熱力学第一法則の様な法則***が存在する。

$$\boxed{\Delta E_A = T_{\rm ent} \cdot \Delta S_A.}$$

まとめ

Large N の強結合のゲージ理論において見ているエネルギースケール(1/*l*)が系を励起させたエネルギースケール(m)に比べて非常に高い時***その理論の詳細に依らず***、EEに対して**熱力学第一法則に似た法則**が成立する。

$ml^d << 1$では

理論の詳細に依らない

(***Universal***)

$$\Delta E_A = T_{\rm ent} \cdot \Delta S_A .$$

展望

- EEに対する他の基本法則

- 有効温度 T_{ent} に対する物理的な理解

- 場の理論における導出