Weak Solution of Non-Perturbative Renormalization Group Equation as Hamilton-Jacobi Equation

金沢大学　自然科学研究科　熊本真一郎
共同研究者:金沢大学　青木健一, 藤井康弘, 佐藤大輔

基研研究会　熱場の量子論とその応用
2013年8月28日　@京都大学 基礎物理学研究所

Contents

1. 導入
2. 非摂動くりこみ群方程式(偏微分方程式)
3. 特性曲線の方法(偏微分方程式→常微分方程式)
4. 弱解
5. まとめと課題

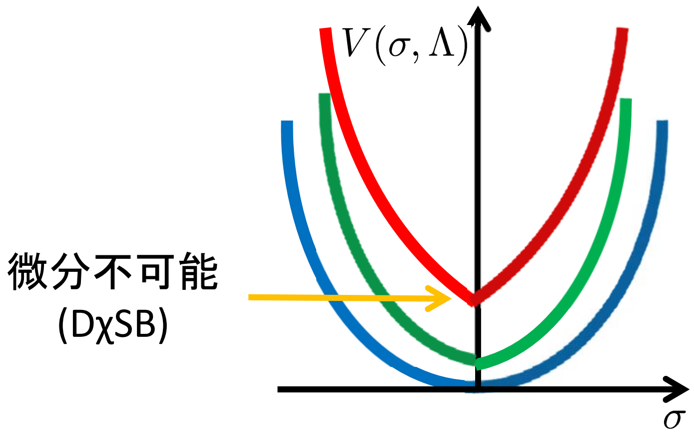
1. 導入

カイラル対称性の自発的破れの非摂動くりこみ群(NPRG)による解析

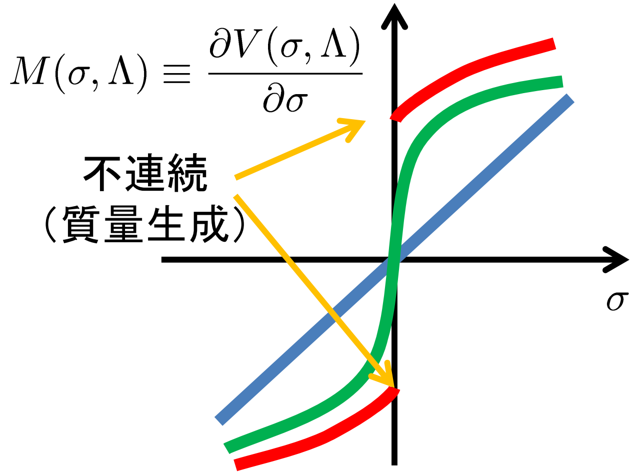
解析方法：非摂動くりこみ群方程式（偏微分方程式）
→ 解: Wilsonian effective potential $V(\sigma,\Lambda)$ $(\sigma \equiv \bar{\psi}\psi,\ \Lambda:\ \mathrm{cutoff})$
→ Legendre effective potential $V_{\mathrm{L}}(\langle\bar{\psi}\psi\rangle)$

カイラル対称性の自発的破れの例 (0密度NJL模型、cutoff Λ ：青 ＞ 緑 ＞ 赤)

Wilsonian effective potential



mass function



外場(bare mass)を入れて、その0極限を取って計算したV(σ,Λ), $M(\sigma,\Lambda)$ は微分不可能な点をもつので、非摂動くりこみ群方程式の「大域的古典解」という、すべての点で偏微分方程式を満たす解ではない。

V(σ,Λ), $M(\sigma,\Lambda)$を非摂動くりこみ群方程式の成立条件を緩めた「弱方程式」の解である「弱解」というものと解釈し、その弱解の構成法と物理的意味を説明する。

K-I. Aoki, S-I. Kumamoto and D. Sato arXiv:1304.3289

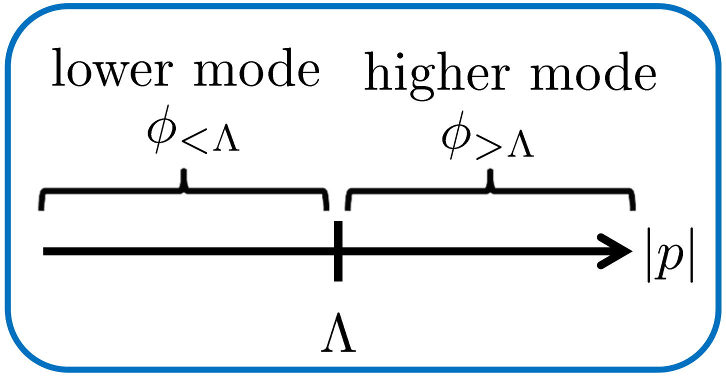
2. 非摂動くりこみ群方程式

Partition function

$$Z \equiv \int_{0\le|p|\le\Lambda_0} \mathcal{D}\phi \quad \exp(-S) \qquad (\ S\ ;\ \text{初期値})$$

$$= \int \mathcal{D}\phi_{<\Lambda}\ \mathcal{D}\phi_{>\Lambda}\ \exp(-S[\phi_{<\Lambda}, \phi_{>\Lambda}; \Lambda_0])$$

$$= \int \mathcal{D}\phi_{<\Lambda}\ \exp(-S_{\text{eff}}[\phi_{<\Lambda}; \Lambda])$$



$S_{\text{eff}}[\phi_{<\Lambda}; \Lambda]$; Wilsonian effective action

残った積分変数　　micro な情報 ($|p| > \Lambda$) が含まれている

$\Lambda \equiv \exp(-t)\Lambda_0$

Wegner-Houghton equation （非摂動くりこみ群方程式）

$$\frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial t} = -\frac{1}{2\delta t}\int_p' \left[-\mathrm{Tr}\ln\left(\frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta\phi_p \delta\phi_{-p}}\right) + \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta\phi_p}\left(\frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta\phi_p \delta\phi_{-p}}\right)^{-1}\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta\phi_{-p}}\right]$$

無限次元汎関数微分方程式は解けないので近似が必要

local potential approximation (fermion) ; $S_{\text{eff}} = \int d^4x \left[\bar{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi - V(\bar{\psi}\psi)\right]$

Wilsonian effective potential

非摂動くりこみ群方程式（有限密度）

Wilsonian effective potential

mass function

$$V_t(x,t) + f(M,t) = 0 \ , \qquad M_t(x,t) + [f(M,t)]_x = 0$$

$$x \equiv \bar{\psi}\psi, \quad \Lambda \equiv \exp(-t)\Lambda_0, \quad O_x \equiv \frac{\partial O}{\partial x}, \quad M(x,t) \equiv V_x(x,t)$$

$$f(M,t) = -\frac{e^{-3t}}{\pi^2}\left[\theta\left(e^{-2t} + M^2 - \mu^2\right)\sqrt{e^{-2t} + M^2} + \theta\left(-e^{-2t} - M^2 + \mu^2\right)\mu\right]$$

初期条件：NJL model $\quad V(x,0) = 2\pi^2 g x^2 \ , M(x,0) = 4\pi^2 g x,$

$$\mu = 0.7, \ \ g = 1.7 \times g_c$$

➡ 偏微分方程式を連立常微分方程式にして解く (特性曲線の方法)

3. 特性曲線の方法（Lagrange-Charpit method）

general 1st order PDE
(linear or nonlinear)

$$F(x,t,V,M,N)=0$$

$$V \equiv V(x,t), \quad M(x,t) \equiv V_x(x,t), \quad N(x,t) \equiv V_t(x,t)$$

常微分方程式化

特性曲線方程式（Charpit's equations）

$$\frac{dx}{d\tau} = F_M, \qquad \frac{dt}{d\tau} = F_N, \qquad \frac{dV}{d\tau} = MF_M + NF_N$$

$$\frac{dM}{d\tau} = -\left(F_x + MF_V\right), \qquad \frac{dN}{d\tau} = -\left(F_t + NF_V\right)$$

NPRGEの特性曲線方程式 ($\frac{\mathrm{dt}}{d\tau} = 1 \rightarrow (x,V,M,N)$の4連立常微分方程式)

非摂動くりこみ群方程式とHamilton-Jacobi方程式

NPRGE

$$V_t(x,t) + f\,(x, \underbrace{V_x}_{=M}, t) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial M} \\[2ex] \dfrac{dV}{dt} = M\dfrac{\partial f}{\partial M} + N \\[2ex] \dfrac{dM}{dt} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{dN}{dt} = -\dfrac{\partial f}{\partial t} \quad (N = -f) \end{cases}$$

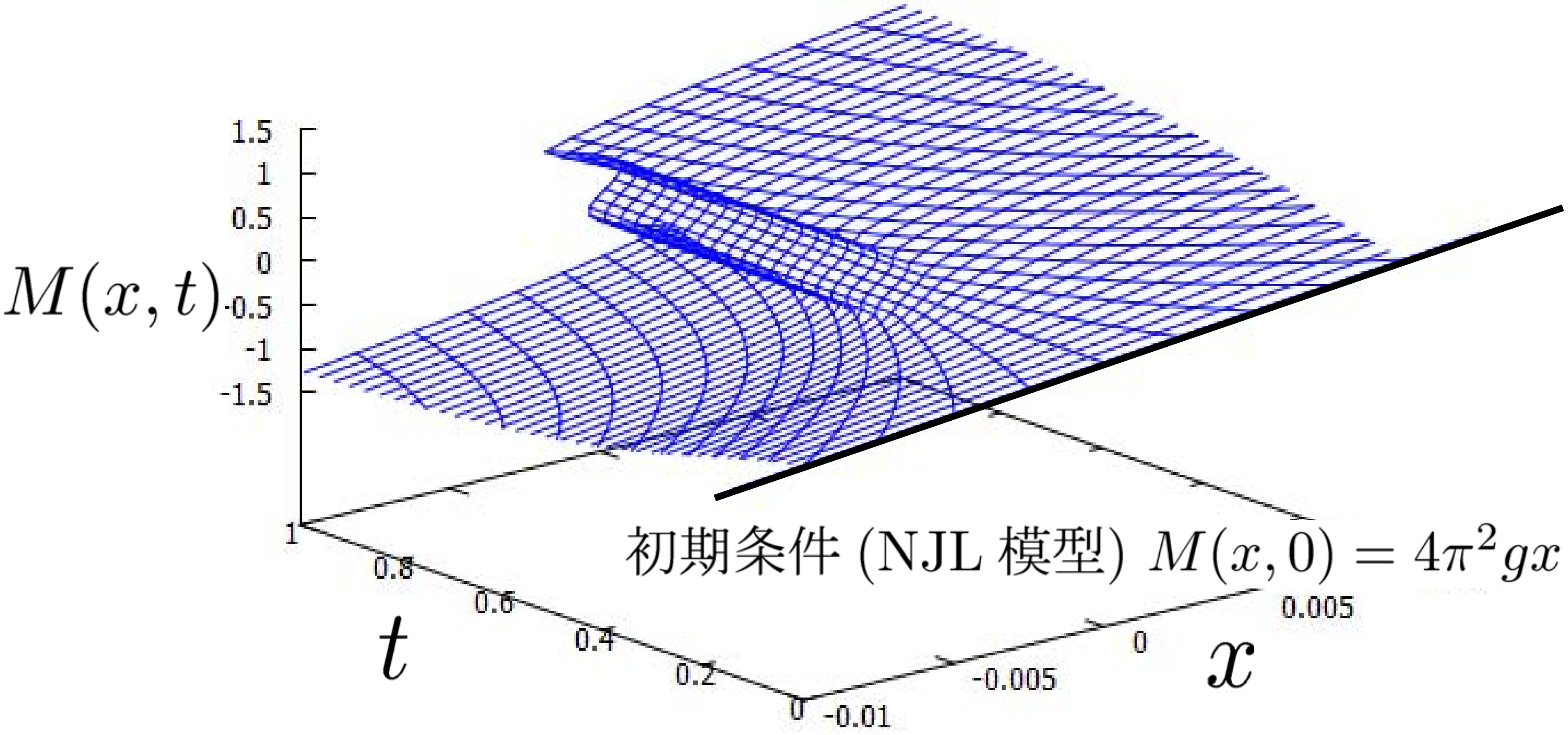
HJE

$$S_t(q,t) + H\,(q, \underbrace{S_q}_{=p}, t) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\[2ex] \dfrac{dS}{dt} = p\dfrac{\partial H}{\partial p} + N \; (= p\dot{q} - H) \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\[2ex] \dfrac{dN}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial t} \quad (N = -H) \end{cases}$$

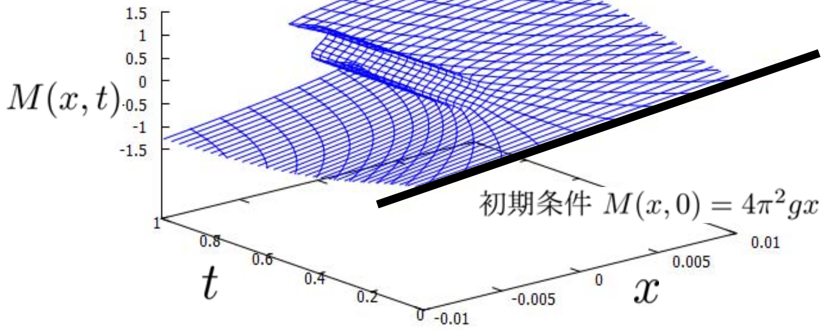
$$\boxed{(t, x, M, V, f) \Leftrightarrow (t, q, p, S, H),\ \text{特性曲線方程式} \Leftrightarrow \text{正準方程式}}$$

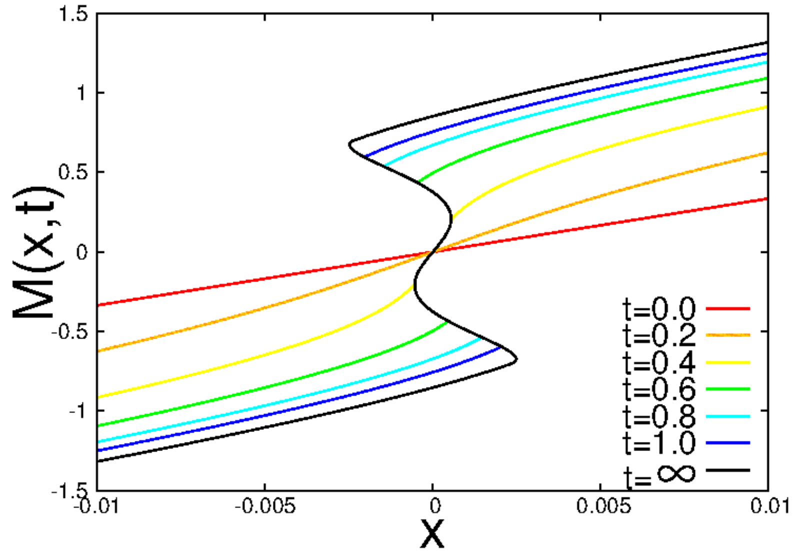
正準方程式：$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial M},\quad \dfrac{dM}{dt}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}$



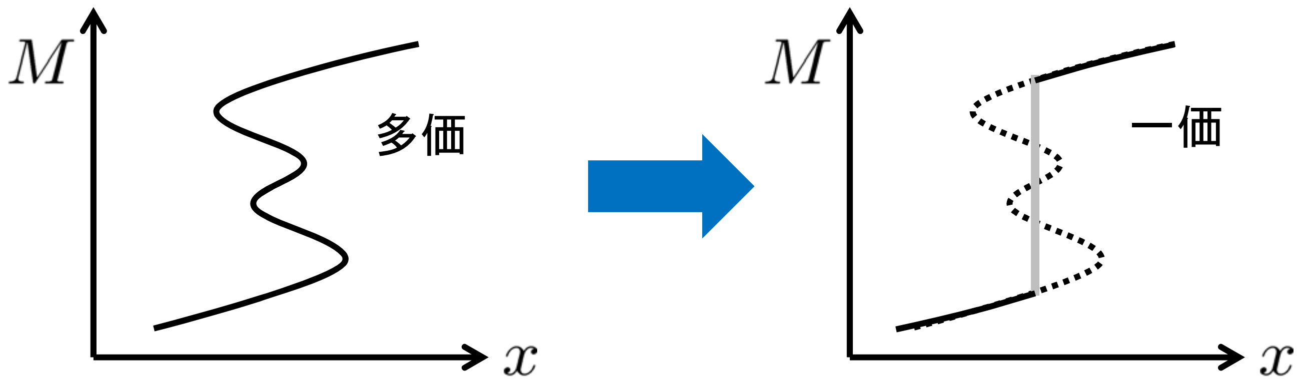
特性曲線方程式（正準方程式）を解くと多価関数$M(x,t)$を得る。

$t = 0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1.0,\ 10$の時の$M(x,t)$



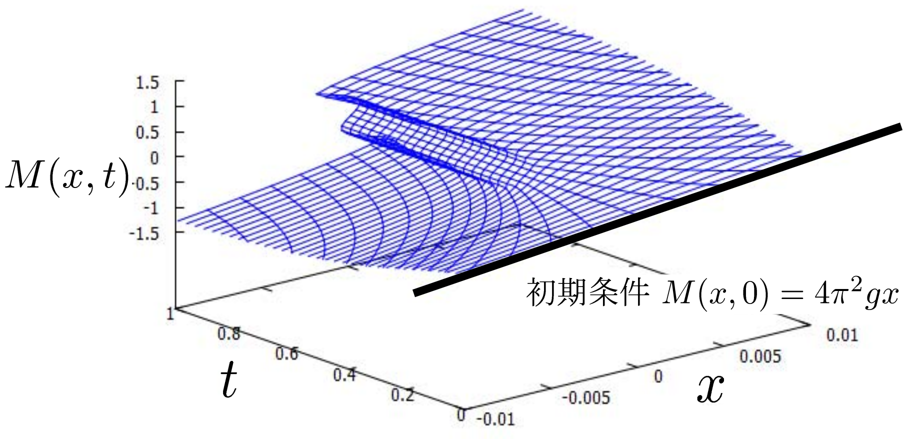


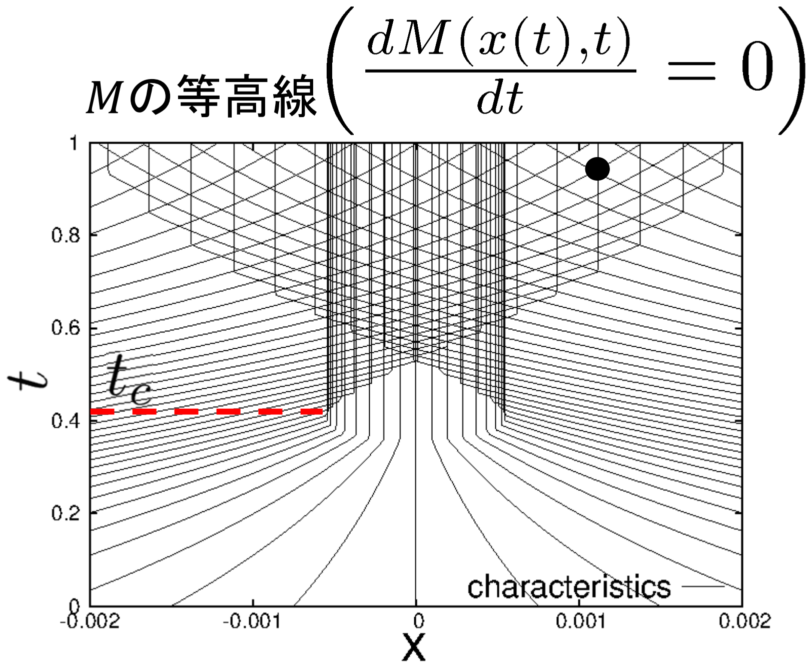
非摂動くりこみ群方程式は、有効作用を追いかけているので、解は本質的に一価の関数でなければならない

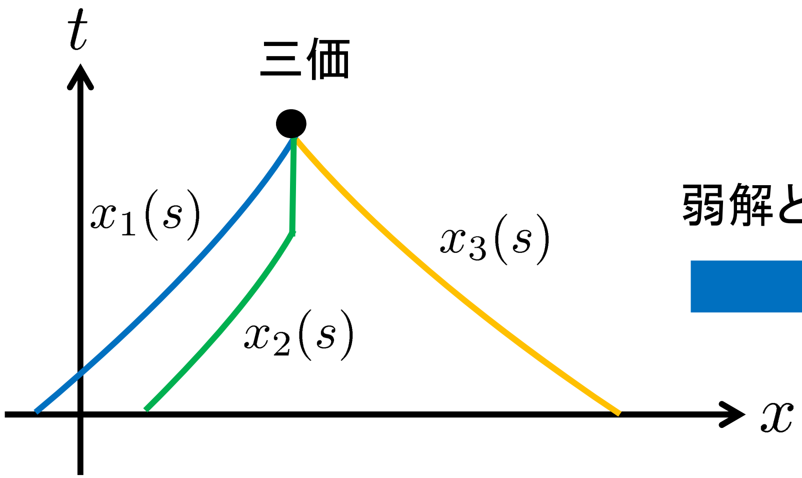


不連続点で偏微分方程式を満たさないので、方程式の成立条件を緩めて「弱解」という概念を導入する。

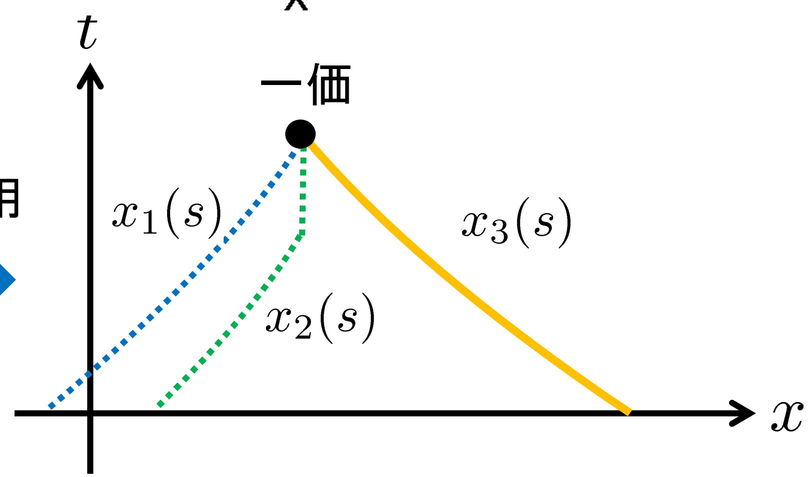
特性曲線の(x,t)平面への射影







弱解として$x_3(s)$採用



一価である弱解は採用する点の境界線与え、その境界線上で$M(x,t)$は不連続となる。

4. 弱解

強方程式 : $$\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \left[\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial f(M,t)}{\partial x} \right] \varphi(x,t) = 0$$

［1 階微分可能で (x,t) 平面の遠方で 0 となる任意のテスト関数 $\varphi(x,t)$］

部分積分
（φに偏微分をおしつける）

$\Downarrow$ ○　$\Uparrow$ ×

弱方程式 : $$\int_{-\infty}^\infty dx \left[(M\varphi)_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty dt\ M \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] + \int_0^\infty dt \left[(\varphi f(M,t))_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^\infty dx\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(M,t) \right] = 0$$

$$\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \left[M \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(M;t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \int_{-\infty}^\infty dx\ M(x,0)\varphi(x,0) = 0$$

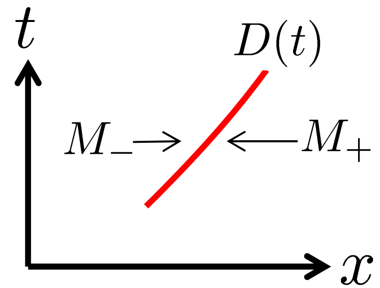
1 階微分可能で (x,t) 平面の遠方で 0 となるすべての $\varphi(x,t)$ について
この方程式を満たす $M(x,t)$ を偏微分方程式の（超関数的意味での）
「弱解」という。

J. Leray , Acta. Math. **63** (1934)

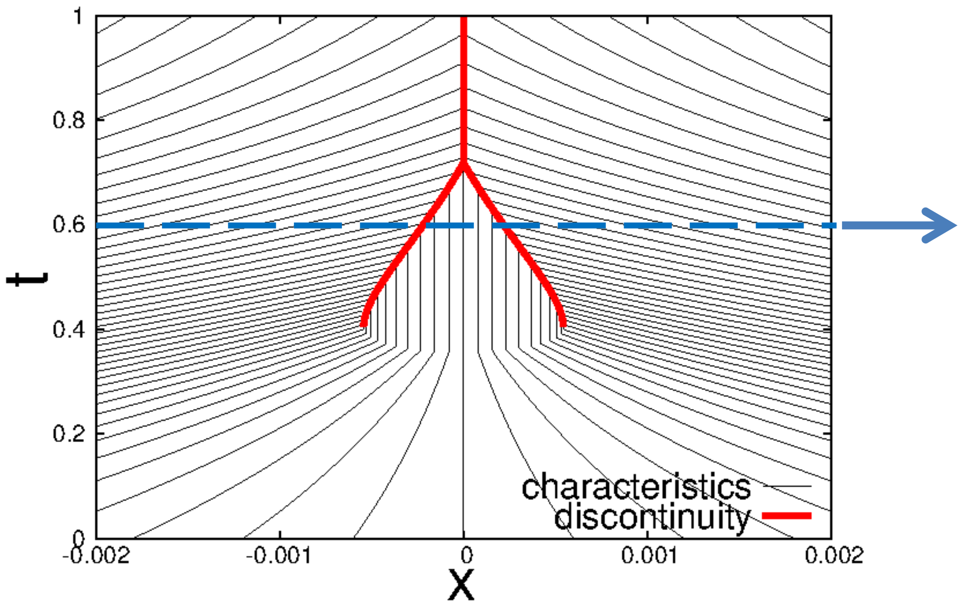
Rankine-Hugonio condition (境界線)

$$\frac{dD(t)}{dt}[M_+ - M_-] = f(M_+, t) - f(M_-, t)$$

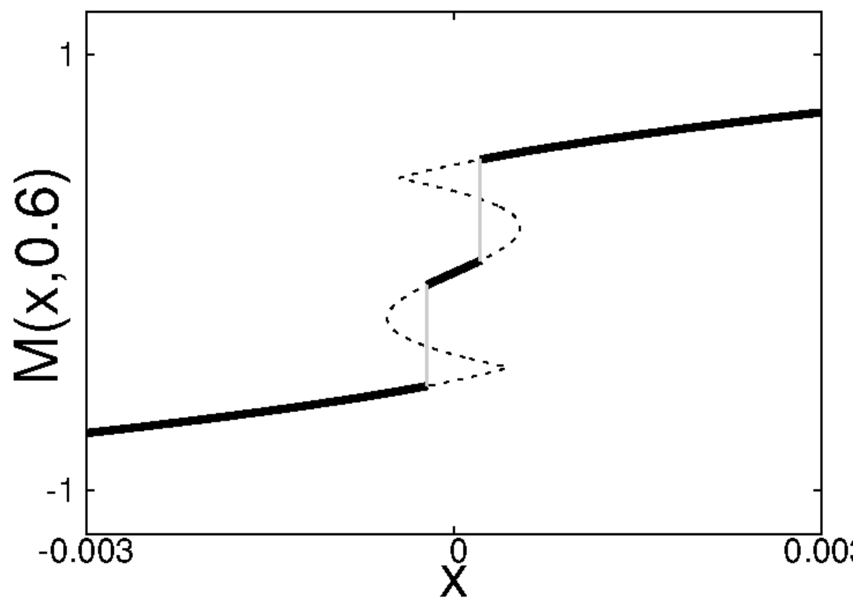
($D(t)$: shock（不連続点）　, $M_\pm \equiv M(D(t)_\pm, t)$)



特性曲線とshock



mass function $M(x, 0.6)$の弱解



交差する特性曲線から弱解としてどれが選ばれるかを決める境界線（赤線）を「shock」と呼び、そのshockの上で$M(x,t)$は不連続となる。

計算する物理量

1. mass function $M(x,t)$

2. Wilsonian effective potential $V(x,t)$

3. Legendre effective potential $V_{\rm L}(\varphi,t)$

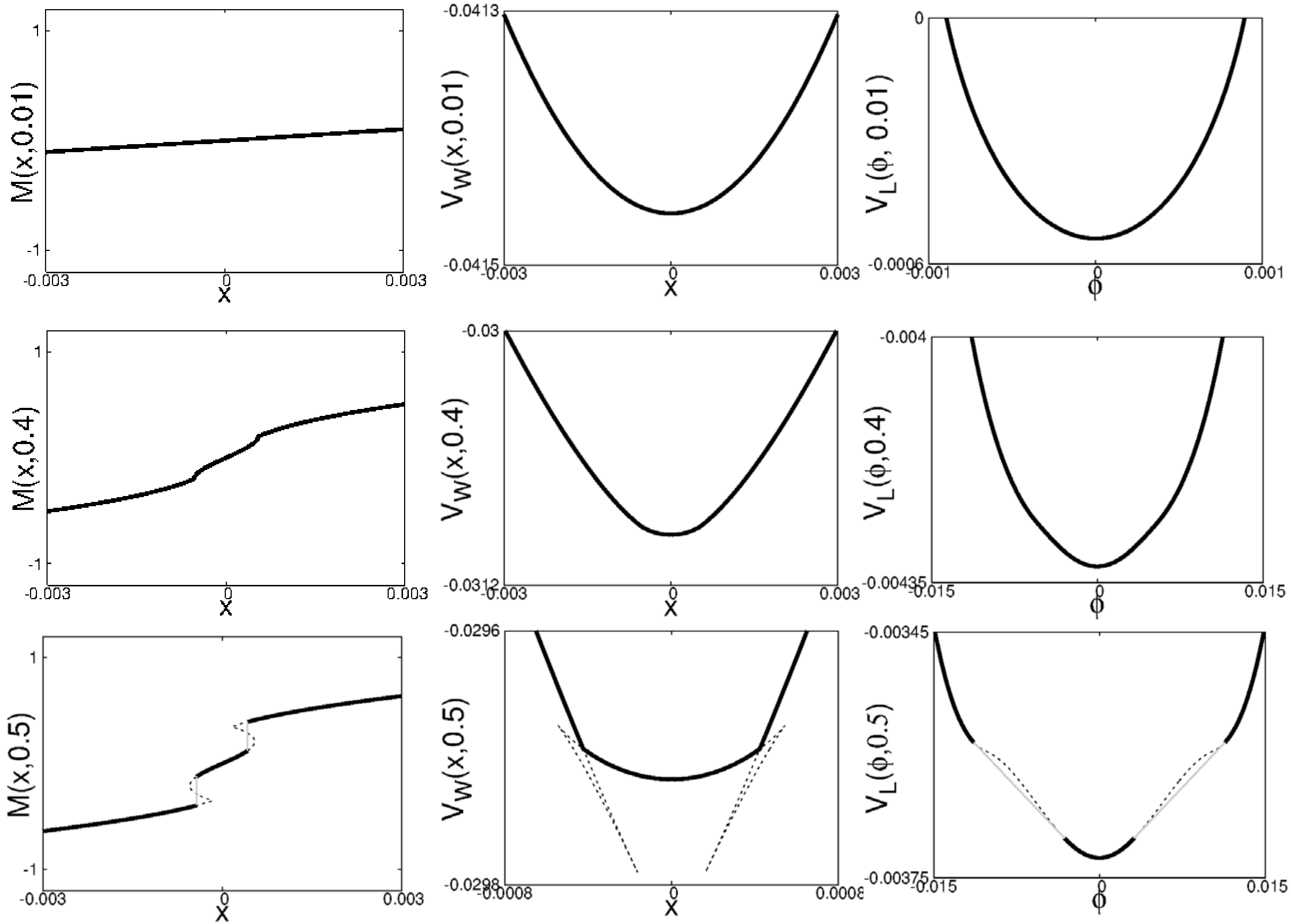
$$Z(m_0) \equiv \exp[-\int d^4x\ w(m_0)] \qquad (\ m_0\ :\ \text{bare mass})$$

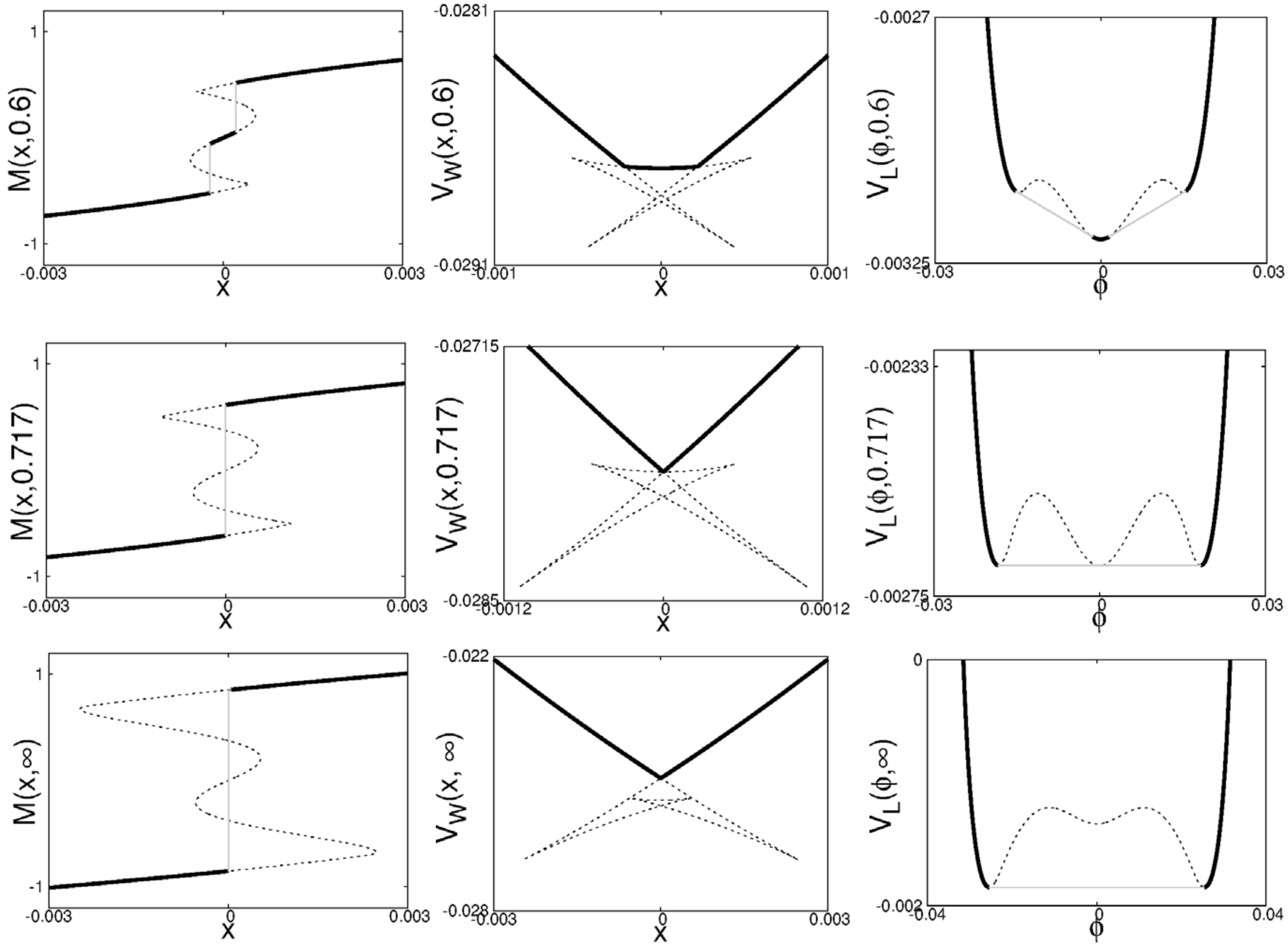
$$w(m_0) = V(0,\infty;m_0) \qquad (\ V(x,0;m_0) = 2\pi^2 g x^2 + m_0 x\ )$$

$$w(m_0,t) \equiv V(0,t;m_0) \qquad \left(\frac{\partial w(m_0,t)}{\partial m_0} \equiv \varphi\right)$$

$$V_{\rm L}(\varphi,t) \equiv -w(m_0,t) + m_0\varphi \qquad \left(\frac{\partial V_{\rm L}(\varphi,t)}{\partial \varphi} = m_0\right)$$

$$M(x,t),\ V(x,t),\ V_{\mathrm{L}}(\varphi,t)\quad (t=0.01,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.717,\ 10)$$



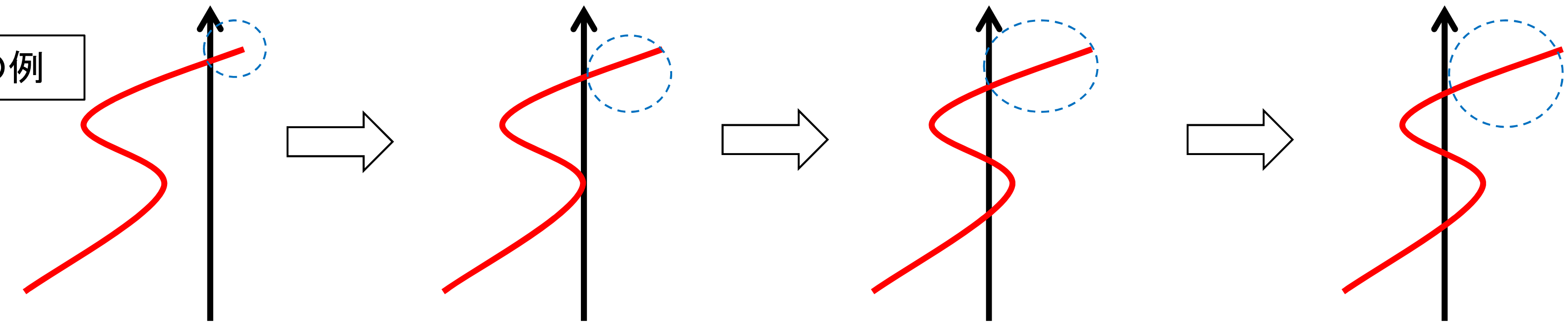


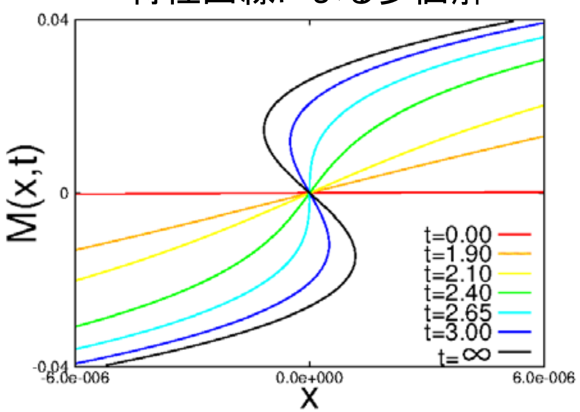
NPRGEの弱解から、凸化されたLegendre effective potentialが得られた。

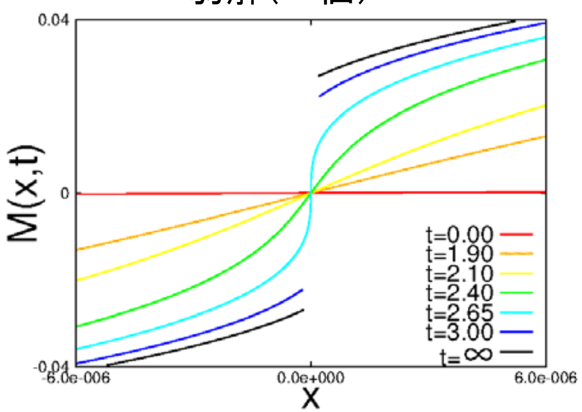
外場(bare mass)を入れて0極限を取る方法

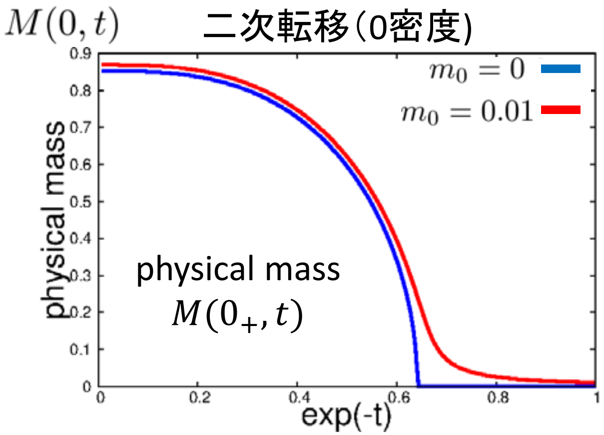
$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\rm NJL} \to \mathcal{L}_{\rm NJL} + m_0(\bar{\psi}\psi) \\ V(x,0) = 2\pi^2 g x^2 \to 2\pi^2 g x^2 + m_0 x \\ M(x,0) = 4\pi^2 g x \to 4\pi^2 g x + m_0 \end{cases} \Longrightarrow \quad m_0 \text{ の } 0 \text{ 極限を取る}$$

0密度の例



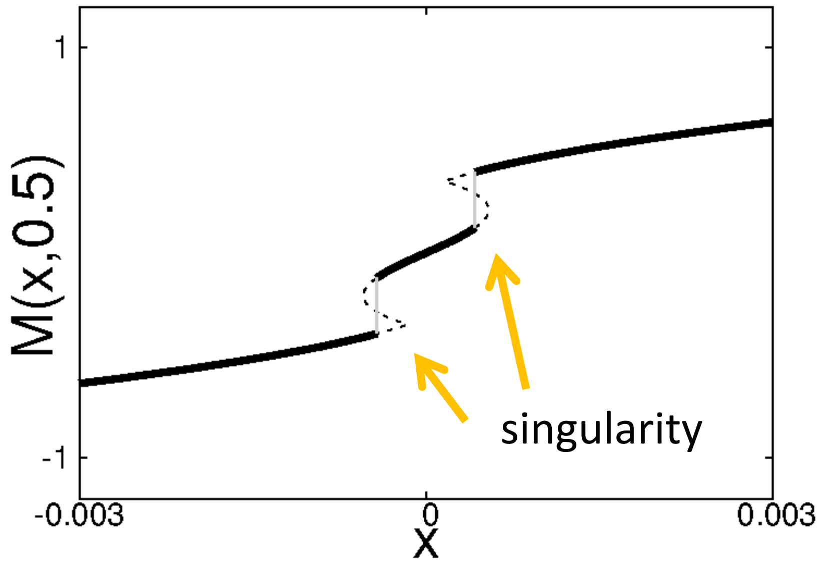


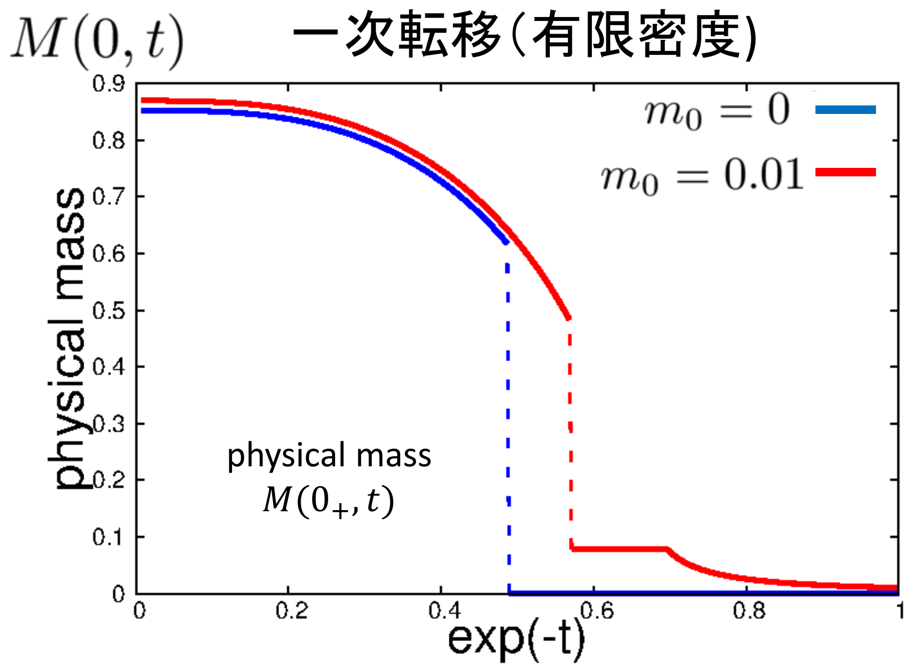




二次転移（0密度）の場合はmass functionのsingularityはbare massを入れることにより原点からずれるので、0極限を取れば、結果だけなら弱解と同じものを得られる。

有限密度(一次転移)の場合





一次転移(有限密度)の場合は、singularity が原点以外でも発生する。この場合、bare mass を入れてその0極限をとっても、不連続点を決めることができずに、非摂動くりこみ群方程式を弱方程式に拡張し、弱解を導入することが必要になる。

現在やっていることの簡単な紹介

非摂動くりこみ群方程式

$$V_t(x,t) + f(M,t) = 0 \quad (f(M,t)\text{: } M \text{ に関して上に凸})$$

$$f(M,t) = -\frac{e^{-3t}}{\pi^2}\left[\theta\left(e^{-2t}+M^2-\mu^2\right)\sqrt{e^{-2t}+M^2} + \theta\left(-e^{-2t}-M^2+\mu^2\right)\mu\right]$$

$$\begin{cases} S(x,t) \equiv -V(x,t) \\ p \equiv U_x = -V_x = -M \\ H(x,p,t) \equiv -f(M,t) \end{cases}$$

Hamilton-Jacobi方程式

$$S_t(x,t) + H(x,p,t) = 0 \quad (H(x,p,t)\text{: } p \text{ に関して下に凸})$$

Hamilton-Jacobi方程式はmass functionの方程式（ $M_t(x,t) + [f(M,t)]_x = 0$ ）のように発散型ではないので部分積分でテスト関数に偏微分を押し付けられない。

新たな弱解の概念である「粘性解」というものを導入。
M.G. Crandall and P.-L. Lions, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math* (1981)

粘性解 （最適制御問題の値関数）

最小作用： $$S(x,t) = \inf_x \left[\int_0^t ds\ L(x(s),\dot{x}(s),s) + S_0(x)\right]$$

5. まとめと課題

- mass function のスケール依存性を記述する非摂動くりこみ群方程式は、カイラル対称性が自発的に破れるスケールから下には大域解（すべての点でPDEを満たす解）を持つことができない。
- 非摂動くりこみ群方程式を弱方程式に拡張し、その弱解を特性曲線の方法とRH conditionにより構成した。
- 弱解は一意的に決まり、自動的に凸化されたLegendre有効ポテンシャルを与えることを示した。この事実から、弱解による自発的対称性の破れの記述はグローバルミニマムを自動的に選ぶことが保証され、一次相転移にも直接適用可能である。
- 非摂動くりこみ群方程式がHamilton-Jacobi方程式型であり、特性曲線方程式が正準方程式に対応することを説明した。
- Hamilton-Jacobi方程式の弱解（粘性解）を研究中。
- 有限温度・有限密度QCD、近似を上げた2階偏微分方程式に応用する。