時空対称性を含む南部-Goldstoneの定理の一般化

日高義将
理研仁科センター

1 はじめに

対称性は現代物理学の重要な概念のひとつである．連続対称性が自発的に破れた時，それにともなって基底状態が無限に縮退する．別の言い方をすると，連続対称性にともなうパラメータ π を空間的に一様に変化させても系は自由エネルギーを変化させない．もし，この π を空間的にゆるやかに変化させると，自由エネルギーは $(\nabla\pi)^2$ に比例して大きくなる．そのような変数は弾性変数と呼ばれる [1]．格子結晶中の変位ベクトルやハドロン物理におけるパイ中間子の自由度がそれにあたる．弾性変数は破れた対称性の電荷密度と正準共役の意味で結合し，いわゆる南部-Goldstone(NG) モードを形成する [2, 3, 4, 5]．自発的に破れた対称性の電荷が陽に座標によらない場合，その弾性変数の数 (N_{EV}) は，破れた対称性の数 (N_{BS}) に等しい．しかしながら，一般には NG モードの数 (N_{NG}) は必ずしも弾性変数の数に等しいとは限らない．弾性変数と NG モードの関係は，近年，渡辺-村山ら，独立に私自身によって次の公式で与えられることがわかった [6, 7]:

$$N_{\mathrm{NG}} = N_{\mathrm{BS}} - \frac{1}{2}\mathrm{rank}\langle[\hat{Q}_a, \hat{Q}_b]\rangle. \tag{1}$$

ここで， $\hat{Q}_a$ は破れた対称性の電荷演算子である．$\langle[\hat{Q}_a, \hat{Q}_b]\rangle \neq 0$ は，$\hat{Q}_a$ が電荷であるだけでなくその電荷密度が弾性変数であることも意味する．そのような電荷密度同士が正準ペアとして結合し同じ NG モードを形成する．したがって，そのようなペアの数だけ独立な NG モードの数は減るのである．式 (1) の右辺の第 2 項はそのペアの数を表している．

一方，電荷が陽に座標による場合は状況が異なる．この場合，式 (1) は必ずしも成り立たない．例えば，格子結晶中のフォノンは，並進と回転対称性が同時に破れている．回転対称性に対応した角運動量演算子は，陽に座標に依存した演算子である．この時，観測される NG モードは並進にともなうものだけで回転に対応したものはない [1]．この場合は，そもそも弾性変数の数が破れた対称性の数に一致しないのである．本稿では，この弾性変数に注目し，その数と破れた対称性の数の関係を明らかにする．

2 座標に陽に依存した対称性の自発的破れと弾性変数

2.1 並進共変な演算子と並進不変な電荷

ここではミクロな理論が並進対称性を持つ場合を考える．その時間及び空間並進の演算子をそれぞれ $\hat{H}$ と $\hat{P}^i$ とする．この時，並進共変な演算子を

$$\hat{\mathcal{O}}(t, \boldsymbol{x}) = e^{i\hat{H}t}\hat{T}_{\boldsymbol{x}}\hat{\mathcal{O}}(0, \boldsymbol{0})\hat{T}^\dagger_{\boldsymbol{x}}e^{-i\hat{H}t} \tag{2}$$

を満たす演算子として定義する．ハットは量子的な演算子であることを意味し古典量と区別する．ここで $\hat{T}_{\boldsymbol{x}} = e^{-i\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\boldsymbol{x}}$ は有限の並進演算子である．一般に電荷は，この並進演算子に対して

$$\hat{T}_{\boldsymbol{x}}\hat{Q}_a\hat{T}^\dagger_{\boldsymbol{x}} = c_a{}^b(\boldsymbol{x})\hat{Q}_b \tag{3}$$

と変化する．並進演算子の性質 $\hat{T}_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'} = \hat{T}_{\boldsymbol{x}}\hat{T}_{\boldsymbol{x}'}$ より，${c_a}^b(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = {c_a}^c(\boldsymbol{x}){c_c}^b(\boldsymbol{x}')$ が満たされる．Hermite な電荷 ($\hat{Q}_a^\dagger = \hat{Q}_a$) に対して， ${c_a}^b$ は実である．電荷が陽に座標によらない場合，電荷は $\hat{P}^i$ と可換で ${c_a}^b(\boldsymbol{x}) = {\delta_a}^b$ を満たす．このような電荷を並進不変な電荷と呼ぶ．逆に陽に座標に依存した電荷は並進不変でない．典型的な並進不変でない電荷の例は，回転演算子 (角運動量演算子) である．それは式 (3) の元で，$\hat{T}_{\boldsymbol{x}}\hat{L}_{ij}\hat{T}_{\boldsymbol{x}}^\dagger = \hat{L}_{ij} - x_i\hat{P}_j + x_i\hat{P}_j$ と変化する．

以下の議論で使うため，ある任意の演算子 $\hat{\mathcal{O}}$ の期待値を $\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle \equiv \operatorname{tr}\hat{\rho}_{\mathrm{eq}}\hat{\mathcal{O}}$ と定義する．ここで，我々は $\hat{\rho}_{\mathrm{eq}}$ を Gibbs 分布 [$\hat{\rho}_{\mathrm{eq}} \equiv \exp(-\beta\hat{H})/\operatorname{tr}\exp(-\beta\hat{H})$] に取る．化学ポテンシャルを導入する場合は，$\hat{H}$ を $\hat{H} - \mu\hat{N}$ に置き換えれば良い．また，ゼロ温度の理論は $\beta \to \infty$ によって得られる．

2.2 弾性変数

ここで，独立な弾性変数と対称性の破れの関係について議論しよう．このために我々は自由エネルギーを用いる．弾性変数は，自由エネルギーを変化させない変数として定義される．まず，熱力学ポテンシャルを

$$W[J] = -\frac{1}{\beta}\ln\operatorname{tr}\exp\left[-\beta\hat{H} + \beta\int d^dx\hat{\phi}_i(\boldsymbol{x})J^i(\boldsymbol{x})\right] \tag{4}$$

と定義する．ここで $\hat{\phi}_i(\boldsymbol{x})$ は線形表現に属する並進共変な Hermite 演算子の組とする．これは基本的な場でも複合場でもよい．ただし，$\hat{\phi}_i(\boldsymbol{x})$ は各破れた電荷に対して少なくとも１つは秩序変数を含むように選ぶ．自由エネルギー ($F[\phi]$) は，熱力学ポテンシャルの Legendre 変換で得られる:

$$F[\phi] = W[J] - \int d^dxJ^i(\boldsymbol{x})\frac{\delta W[J]}{\delta J^i(\boldsymbol{x})}. \tag{5}$$

２階微分は感受率の逆,

$$\chi^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left.\frac{\delta^2F[\phi]}{\delta\phi_i(\boldsymbol{x})\delta\phi_j(\boldsymbol{y})}\right|_{\phi=\langle\hat{\phi}\rangle_{J=0}} \tag{6}$$

になっており，感受率 $\chi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \lim_{J\to0}\delta\langle\phi_j(\boldsymbol{y})\rangle_J/\delta J^i(\boldsymbol{x})$ に対して，$\int d^dw\chi_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\chi^{kj}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}) = {\delta_i}^j\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ を満たす．ここで $\langle\cdots\rangle_J$ は外場 J の元での期待値を表す．もし，$\chi^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を演算子と見た場合,

$$\int d^dy\chi^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\psi_j(n,\boldsymbol{k},\boldsymbol{y}) = \lambda_n(\boldsymbol{k})\psi^i(n,\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

の固有値方程式を考えることができる．ここで， $\psi^i(n,\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) = \psi_i(n,\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})$ である．固有値 $\lambda_n(\boldsymbol{k})$ は自由エネルギーの凸性から非負である．また，並進は完全には破れておらず，少なくとも１方向には離散的でも良いので残っているとする．これは，モードを考える上で必要な条件である．その破れていない並進は，並進ベクトル $\boldsymbol{R}$ を用いて $\hat{T}_{\boldsymbol{R}}$ で表される．対応する運動量 ($\boldsymbol{k}$) は第一 Brillouin ゾーンを走る．固有関数は，並進との同時固有関数に取ることができ，この並進 ($\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}$) の元で $\psi_i(n,\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}\psi_i(n,\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})$ と変化する．$\chi^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ のゼロ固有値を持つ固有関数が弾性変数となる．

次に自由エネルギーの対称性を考えよう．ハミルトニアンと可換な電荷について，量子異常がなければ自由エネルギーは,

$$\int d^dy\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi_j(\boldsymbol{y})}\langle\hat{h}_{aj}(\boldsymbol{y})\rangle_J = 0 \tag{8}$$

を満たす．ここで $\hat{h}_{ai}(\boldsymbol{x}) = i[\hat{Q}_a, \hat{\phi}_i(\boldsymbol{x})] = [T_a]_j{}^i\hat{\phi}_i(\boldsymbol{x})$ である．ここで，弾性変数となる $\chi^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ のゼロ固有値の固有関数を探そう．これは，自由エネルギーを対称性変換することで求めることができる．自発的対称性の破れは，

$$i\langle[\hat{Q}_a, \hat{\phi}_i(\boldsymbol{x})]\rangle = \lim_{J\to 0}\langle\hat{h}_{ai}(\boldsymbol{x})\rangle_J \equiv h_{ai}(\boldsymbol{x}) \neq 0 \tag{9}$$

となる局所場 $\hat{\phi}_i(\boldsymbol{x})$ が存在することで定義され，$h_{ai}(\boldsymbol{x})$ は秩序変数と呼ばれる．$c^a h_{ai}(\boldsymbol{x}) = 0$ は $c^a = 0$ の時のみという意味で線形独立とし，a は 1 から N_{BS} を走ることとする．式 (8) を $\phi_i(\boldsymbol{x})$ で微分すると，

$$\int d^d y \frac{\delta^2 F[\phi]}{\delta\phi_i(\boldsymbol{x})\delta\phi_j(\boldsymbol{y})}\langle\hat{h}_{aj}(\boldsymbol{y})\rangle_J + \int d^d y \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi_j(\boldsymbol{y})}\frac{\delta\langle\hat{h}_{aj}(\boldsymbol{y})\rangle_J}{\delta\phi_i(\boldsymbol{x})} = 0 \tag{10}$$

を得る．$J = 0$ の時，停留点 $[\delta F[\phi]/\delta\phi_j(\boldsymbol{y}) = 0]$ で第 2 項は消え，

$$\sum_j \int d^d y \chi^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) h_{aj}(\boldsymbol{y}) = 0 \tag{11}$$

を得る．従って，秩序変数 $h_{aj}(\boldsymbol{y})$ はゼロ固有値の固有関数の候補となる．もし秩序変数が座標によっておらず，並進が破れていなければ， $h_{aj}(\boldsymbol{y})$ は固有関数でその数は，N_{BS} に等しい．しかしながら，一般の場合には $h_{aj}(\boldsymbol{y})$ は必ずしも固有関数にはなっていない．これを見るために，破れてない並進 $\hat{T}_{\boldsymbol{R}}$ を考えよう．もし，$h_{aj}(\boldsymbol{y})$ の線形結合が固有関数ならば，破れていない並進に対して同時固有関数になっているべきである．この並進の元で秩序変数は，

$$\begin{aligned} h_{ai}(\boldsymbol{x}) &= i\langle[T_{\boldsymbol{R}}\hat{Q}_a T^\dagger_{\boldsymbol{R}}, \hat{T}_{\boldsymbol{R}}\hat{\phi}_i(\boldsymbol{x})\hat{T}^\dagger_{\boldsymbol{R}}]\rangle \\ &= i c_a{}^b(\boldsymbol{R})\langle[\hat{Q}_b, \hat{\phi}_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R})]\rangle \\ &= c_a{}^b(\boldsymbol{R}) h_{bi}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}) \end{aligned} \tag{12}$$

と変換する．従って，線形結合から作られる固有関数 $f^a h_{ai}(\boldsymbol{x})$ は，$f^a h_{ai}(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}} f^a c_a{}^b(\boldsymbol{R}) h_{bi}(\boldsymbol{x})$ を満たさなければならない．自明でない f^a が弾性数を与え，この式を満たすためには，$\boldsymbol{k} = 0$ でなければならない．さらに $A_b{}^a(\boldsymbol{R}) \equiv (\delta_b{}^a - c_a{}^b(\boldsymbol{R}))$ として，任意の並進ベクトル $\boldsymbol{R}$ に対して $f^b A_b{}^a(\boldsymbol{R}) = 0$ を満たさなければならない．よって，独立な弾性変数の数は $A_b{}^a(\boldsymbol{R})$ の核の次元 ($\dim \ker A = N_{\mathrm{BS}} - \mathrm{rank}\, A$) に等しい:

$$N_{\mathrm{EV}} = N_{\mathrm{BS}} - \mathrm{rank}\, A. \tag{13}$$

これが本稿で示したかったことである．添字 a, b は，破れた電荷の足を走る事に注意．この条件は，並進不変でない電荷は固有関数を生成しないということを意味しない点に注意しよう．例えば，回転対称性が破れた場合，式 (2.1) より，

$$\langle[\hat{T}_{\boldsymbol{R}}\hat{L}_{ij}\hat{T}^\dagger_{\boldsymbol{R}}, \hat{\phi}_k(\boldsymbol{x})]\rangle = \langle[\hat{L}_{ij}, \hat{\phi}_k(\boldsymbol{x})]\rangle - R_i\langle[\hat{P}_j, \hat{\phi}_k(\boldsymbol{x})]\rangle + R_j\langle[\hat{P}_i, \hat{\phi}_k(\boldsymbol{x})]\rangle \tag{14}$$

となる．もし並進が破れていなければ，回転対称性の破れにともなう弾性変数が現れる．一方，もし回転と並進が同時に破れた場合は，並進のみが弾性変数になる．このような状況は，実際に液晶で起きる事が知られている．ネマティック相では，空間回転対称性が $O(3) \to O(2)$ に破れ，並進は破れない．この場合，独立な弾性変数の数は 2 つである．一方スメクティック A 相では，回転に加え，並進も破れる．この場合，回転は弾性変数にならない [1].

3　まとめ

本稿で，我々は弾性変数と破れた対称性の関係について議論した．弾性変数の数は，式 (13) で与えられる．これらの弾性変数は，電荷密度と結合し NG モードを作るだろう．並進不変でない電荷に対して自発的に破れた対称性と分散の関係に対しての一般論は今の所わかっていない[1]．特に有限温度の分散関係は複雑なものになると予想される．例えば，ネマティック相の NG モードについて，分散は，$\omega = a\boldsymbol{k}^2 + ib\boldsymbol{k}^2$ の形になる事が知られている [10]. 実部と虚部は k について同じ次数で, 温度によっては，$a = 0$ となり拡散モードとなってしまい，パラメータに依存した分散となる．また，液体の表面に現れる表面張力波の分散は $\omega \propto k^{3/2}$ となることが知られており，並進不変な電荷に対する Nielsen-Chadar の分類 [11] には現れない分散を持つ．これらのモードに対する一般論を構築することは今後の課題である．

参考文献

[1] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics.* Cambridge University Press, 2000.

[2] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1.,” *Phys. Rev.* **122** (1961) 345–358.

[3] J. Goldstone, “Field Theories with Superconductor Solutions,” *Nuovo Cim.* **19** (1961) 154–164.

[4] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, “Broken Symmetries,” *Phys. Rev.* **127** (1962) 965–970.

[5] Y. Nambu, “Spontaneous breaking of lie and current algebras,” *J. Stat. Phys.* **115** (2004) 7–17.

[6] H. Watanabe and H. Murayama, “Unified Description of Nambu-Goldstone Bosons without Lorentz Invariance,” *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 251602, `arXiv:1203.0609 [hep-th]`.

[7] Y. Hidaka, “Counting rule for Nambu-Goldstone modes in nonrelativistic systems,” *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 091601, `arXiv:1203.1494 [hep-th]`.

[8] I. Low and A. V. Manohar, “Spontaneously broken spacetime symmetries and Goldstone’s theorem,” *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 101602, `arXiv:hep-th/0110285`.

[9] H. Watanabe and H. Murayama, “Redundancies in Nambu-Goldstone Bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 181601, `arXiv:1302.4800 [cond-mat.other]`.

[10] M. Hosino and H. Nakano, “Molecular Theory of Hydrodynamic Equations for Nematic Liquid Crystals,” *Prog. Theor. Phys.* **68** (1982) 388–401.

[11] H. B. Nielsen and S. Chadha, “On How to Count Goldstone Bosons,” *Nucl. Phys.* **B105** (1976) 445.

[1] ゼロ温度の理論に関しては参考文献 [8] や [9] で議論されている．