

格子上の細谷機構

Hosotani Mechanism on the Lattice

韓国高等研究院 (KIAS) 幡中 久樹

概要

素粒子物理における電弱ゲージ・Higgs 統合模型で電弱対称性の破れを担う機構として細谷機構がある。我々は格子ゲージ理論での計算と、摂動論で計算した有効ポテンシャルに基づく相構造を調査し、両者の対応関係を明らかにした。(この講演は共同研究 [1] に基づく。)

イントロダクション

素粒子物理のゲージ・ヒッグス統合模型 [2, 3, 4, 5] において電弱対称性の破れを担うのは余剰次元方向のゲージ場成分がつくるウィルソンラインの真空期待値であり、その破れの機構を細谷機構 [6, 7] と呼ぶ。ここでは d 次元時空で 1 次元が半径 R の円 (S^1) にコンパクト化した場合を考え、ここでの $SU(3)$ ゲージ理論で $N_{\text{fd}}(N_{\text{ad}})$ 個の基本表現 (随伴表現) フェルミオンが結合した模型を考える。この場合コンパクト化した次元方向のゲージ場は非零の真空期待値 $\langle A_z \rangle = \text{diag}[\theta_1, \theta_2, \theta_3]/(2\pi eR)$, $\sum_i \theta_i = 0$ を持つことが許され、とくに S^1 に沿った方向に線積分したウィルソンライン $W = \mathcal{P} \exp i \oint dz g A_z$ は物理自由度として残る。連続理論での 1 ループ有効ポテンシャルは以下の形をとる:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= V_{\text{eff}}^{\text{g+gh}} + N_{\text{fd}} V_{\text{eff}}^{\text{fd}} + N_{\text{ad}} V_{\text{eff}}^{\text{ad}}, \quad V_{\text{eff}}^{\text{g+gh}} = (d-2) \sum_{j,k=1}^3 V(\theta_j - \theta_k, 0), \\ V_{\text{eff}}^{\text{ad}} &= -2^{\lfloor d/2 \rfloor} \sum_{j,k=1}^3 V(\theta_j - \theta_k + \alpha_{\text{ad}}, m_{\text{ad}}), \quad V_{\text{eff}}^{\text{fd}} = 2^{\lfloor d/2 \rfloor} \sum_{j=1}^3 V(\theta_j + \alpha_{\text{fd}}, m_{\text{fd}}), \\ V(\theta, m) &= -\frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{d/2} (2\pi R)^{d-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta) - 1}{n^d} B_{d/2}(mR), \quad B_{d/2}(x) = \frac{x^{d/2} K_{d/2}(x)}{2^{\frac{d}{2}-1} \Gamma(d/2)}, \quad (1) \end{aligned}$$

ここで $m_{\text{fd,ad}}$ はフェルミオンの質量、 $\alpha_{\text{fd,ad}}$ は境界条件 $\psi_{\text{fd,ad}}(z + 2\pi R) = e^{i\alpha_{\text{fd,ad}}} \psi_{\text{fd,ad}}(z)$ である。

この表式は物質場の表現や質量、境界条件に依存する一方で、ゲージ結合 g を陽に含まず、また次元 d への依存性も小さい。紫外発散は抑制され、 θ_i に依存する部分では現れない。これらの性質はゲージ対称性や群の性質、時空の幾何学構造からくるものが大きく、ゲージ理論が $d(> 4)$ 次元で摂動論的に繰り込み不可能であるにも関わらず、(5次元やより高次元で構成された) ゲージヒッグス統合模型での対称性の動的な破れを摂動論的手法で扱う根拠となっていると言える。

上記の考察から細谷機構が格子ゲージ理論の計算でも起きていてもおかしくはない。以下では、 $3+1$ 次元において連続理論での計算と、格子ゲージ理論で弱結合 $\beta \equiv 6/g_0^2 \gg 1$ での振る舞いが少なくとも定性的に一致することをしめす。以下の解析では、 $16^3 \times 4$ 格子 (格子数の少ない方向がコンパクト化した次元と見なす) に基づき、格子フェルミオンにはスタッガードフェルミオンを使った。(そのため $N_{\text{fd}} = 0, 4, 8, \dots$, $N_{\text{ad}} = 0, 2, 4, \dots$ が許される)

ゲージ場+随伴表現フェルミオン

ここでは $(N_{\text{ad}}, N_{\text{fd}}) = (2, 0)$ で、 $\alpha_{\text{ad}} = 0$ の場合を扱う。この場合、連続理論では $SU(3)$ 対称性の破れが見られる。図 1 ではフェルミオン質量 m_{ad} によって有効ポテンシャルの形が変わる様を表した。

ポテンシャルの最低点 (白いところ) での配位と対称性, そして基本表現ポリャコフループ $P_3 = \frac{1}{3}(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + e^{i\theta_3})$ の値は

- $SU(3)$: $A_{1,2,3} : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 0, 0), (\pm \frac{2}{3}\pi, \pm \frac{2}{3}\pi, \pm \frac{2}{3}\pi), \quad \text{Tr}P_3 = 1, e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3},$
- $SU(2) \times U(1)$: $B_{1,2,3} : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, \pi, \pi), (\pm \frac{2}{3}\pi, \mp \frac{1}{3}\pi, \mp \frac{1}{3}\pi), \quad \text{Tr}P_3 = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}e^{\mp \pi i/3}$
- $U(1)^2$: $C : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, \frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi) \quad \text{Tr}P_3 = 0,$

と表される。またこれらのポリャコフープで特徴付けられる相をそれぞれ A,B,C 相とする。質量が大きくなるにつれて $C \rightarrow B \rightarrow A$ と相が転移することがわかる。

図 2 では、格子ゲージ理論でのポリャコフープの分布を示した。(各ポリャコフープは余剰次元方向と直交する 3 次元面の各点から余剰次元方向に沿ってとった。) まず β が小さいところでは、強結合のため confinement が起きている相 X(confined 相)

$$X : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 0, 0)?, \quad \text{Tr}P_3 = 0? \quad (2)$$

が現れる。図 1 と図 2 を比べると、C 相では連続理論でのポテンシャル最低点と格子での分布の最大となるところは一致しているが、それ以外の相では $\text{Tr}P_3$ の分布は似ているものの、 θ_i の分布では図 2 の色の濃い部分と図 1 の白い部分では様子が大きく異なる。(格子ゲージ理論での計算は [9] によってポリャコフープ $\text{Tr}P_3$ の分布が調べられていたが、 θ_i の分布は調べられていなかった。) また X 相と C 相は $\text{Tr}P_3$ の分布も原点に集中しており、その本質的な違いがわからない(そのため C 相は reconfined 相等とも呼ばれている)

連続理論での結果と、格子の結果を分けるものには、確率分布への Haar 測度による因子

$$\prod_{i>j} \sin^2 \frac{\theta_i - \theta_j}{2} \quad (3)$$

がある。これは上記有効ポテンシャルの計算では取り込まれなかった(取り込んだ場合は θ_i 間の“斥力”ポテンシャルとなる)が、格子計算では必然的に入ってくる要素である。図 3 では、Haar 測度の寄与(図最左)の寄与を用いて、ポリャコフープの分布を計算し直したものである。まず、X(confined) 相においては、Haar 測度で割ることによって非一様な分布が打ち消され一様な分布になる。これは confined 相においては量子ゆらぎが大きくなりポリャコフープの分布がランダムになるという予想と一致する。これにより X 相と C 相の違いが鮮明になった。また A 相、B 相に於いても、分布が最大となるところは連続理論でのポテンシャルの最低点と一致する。これによって連続理論と格子でのポリャコフープの挙動が対応することが明確に示された。我々はまた、基本表現と随伴表現のポリャコフープ $|\text{Tr}P_3|, P_8$ の値と感受率をもちいて図 4 で示されるように、[9] よりも広いパラメータ (β とフェルミオン質量 ma) 領域での相構造を決定した。我々は主に固定された ma の値で β を変えて解析したが、 β を固定しても ma が大きくなるにつれて $C \rightarrow B \rightarrow A$ と相が変化することが確認された。これは連続理論での予想と一致する。

ゲージ場+基本表現フェルミオン

随伴表現の代わりに基本表現フェルミオンを用いた場合を調べた。ここでは $N_{\text{fd}} = 4$ とする。図 5 では、連続理論での有効ポテンシャルをプロットした。図からわかるように、 α_{fd} が増えるに従い、ポテンシャルの最低点は $A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_2$ と移る。また最低点は常にこの 3 つのいずれかであり、 $\alpha_{\text{fd}} = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ で非連続的に入れ替わる。また、この状況はフェルミオンの質量 m_{fd} に依らない。

図 6 では、格子理論でのポリャコフープ $\text{Tr}P_3$ の分布をプロットした。ここでも β が小さいところでは、分布は原点付近で α_{fd} について連続的に変化するが、 β が大きくなるに従って離散的に変化するようになり、連続理論での振る舞いと同じになる。我々は随伴表現のときと同じようにポリャコフープの期待値と感受率を用いて、相構造を決定した(図 7)。 $\beta > 5.20$ での相の振る舞いは連続理論での振る舞いを再現している。これらの結果はまた、有限温度 QCD でクォークが虚数化学ポテンシャルを持った場合の結果 [10, 11] と整合する。よってユークリッド化された場の理論での細谷機構と虚数化学ポテンシャルを持つ有限温度系の対応が直接示された。

展望

今回は $3 + 1$ 次元での連続理論と格子ゲージ理論で、コンパクト化した空間における細谷機構による対称性の破れを調べた。特に今回は基本表現ポリアコフループのトレースだけでなく固有値の分布も見ることで、有効ポテンシャルのパラメータ $\{\theta_i\}$ との関係もより明確になり、二つの理論の対応関係を詳しく調べることが出来た。

細谷機構が格子ゲージ理論でも起きていることは明らかとなったが、まだ理解すべきことは多い。例えば、連続理論での理論パラメータ（ゲージ結合定数、コンパクト化の半径、フェルミオンの質量）と格子ゲージ理論でのパラメータ（ β, ma と格子サイズの大きさ、余剰次元とそれ以外の方向の格子サイズの比）との関連はまだ詳しくわかっていない。これは格子の連続極限の問題と関係があり今後解決しなくてはならない。

最終的な目標である、余剰次元をもつ現象論模型への応用に向けても、まだまだ課題は多い。まず 5 次元以上の空間での格子ゲージ理論計算というまだ未解決な問題があり、また現象論的にリアリスティックなものにするには余剰次元のオービフォールド化や歪んだ余剰次元（Randall-Sundrum 時空など）の実現も必要となろう。これらの問題解決については、また諸氏の助言と協力を仰ぎたい。

謝辞

We thank E. Itou for the great contribution in all phases of this work. We would like to thank J. E. Hetrick for his enlightening comment which prompted us to explore the Hosotani mechanism on the lattice. We also thank M. D'Elia and Y. Shimizu for providing helpful information, H. Matsufuru for his help in developing the simulation code, and K. J. Juge for careful reading of the draft. Numerical simulation was carried out on Hitachi SR16000 at YITP, Kyoto University, and Hitachi SR16000 and IBM System Blue Gene Solution at KEK under its Large-Scale Simulation Program (No. T12-09 and 12/13-23). This work was supported in part by scientific grants from the Ministry of Education and Science, Grants No. 20244028, No. 23104009 and No. 21244036. G. C, E. I and J. N are supported in part by Strategic Programs for Innovative Research (SPIRE) Field 5. H. H is partly supported by NRF Research Grant 2012R1A2A1A01006053 (HH) of the Republic of Korea.

参考文献

- [1] G. Cossu, H. Hatanaka, Y. Hosotani and J. -I. Noaki, arXiv:1309.4198 [hep-lat].
- [2] N. S. Manton, Nucl. Phys. B **158**, 141 (1979).
- [3] H. Hatanaka, T. Inami and C. S. Lim, Mod. Phys. Lett. A **13**, 2601 (1998) [arXiv:hep-th/9805067].
- [4] Y. Hosotani, K. Oda, T. Ohnuma and Y. Sakamura, Phys. Rev. D **78**, 096002 (2008) [Erratum-ibid. D **79**, 079902 (2009)] [arXiv:0806.0480 [hep-ph]].
- [5] S. Funatsu, H. Hatanaka, Y. Hosotani, Y. Orikasa and T. Shimotani, Phys. Lett. B **722**, 94 (2013) [arXiv:1301.1744 [hep-ph]].
- [6] Y. Hosotani, Phys. Lett. B **126**, 309 (1983).
- [7] Y. Hosotani, Annals Phys. **190**, 233 (1989).
- [8] M. Fukugita, M. Okawa and A. Ukawa, Phys. Rev. Lett. **63**, 1768 (1989).
- [9] G. Cossu and M. D'Elia, JHEP **0907**, 048 (2009) [arXiv:0904.1353 [hep-lat]].
- [10] A. Roberge and N. Weiss, Nucl. Phys. B **275**, 734 (1986).
- [11] M. D'Elia and M. -P. Lombardo, Phys. Rev. D **67**, 014505 (2003) [hep-lat/0209146].

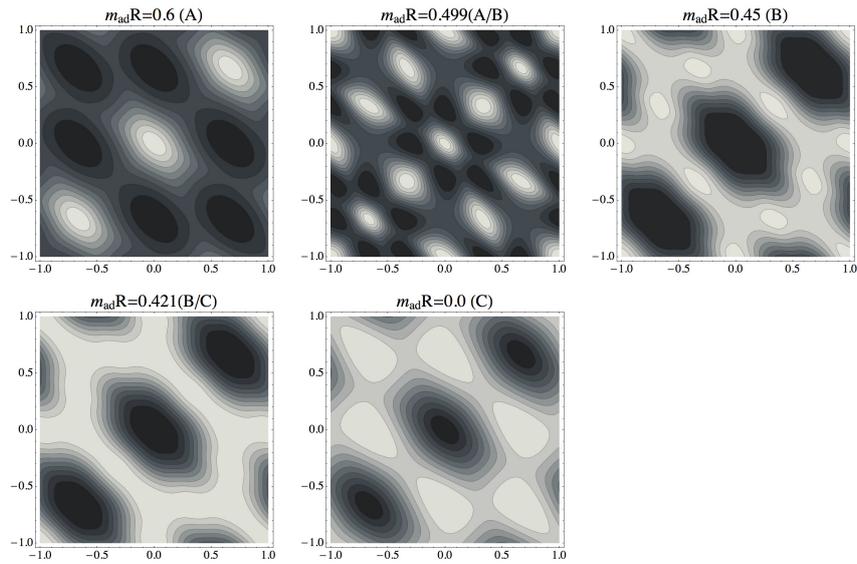


図 1: $N_{\text{ad}} = 4$ の場合の連続理論での、 $m_{\text{ad}}R$ の値ごとの有効ポテンシャル。 $(\theta_1/\pi, \theta_2/\pi)$ 平面で表した。明るい色がポテンシャルの低い方である。

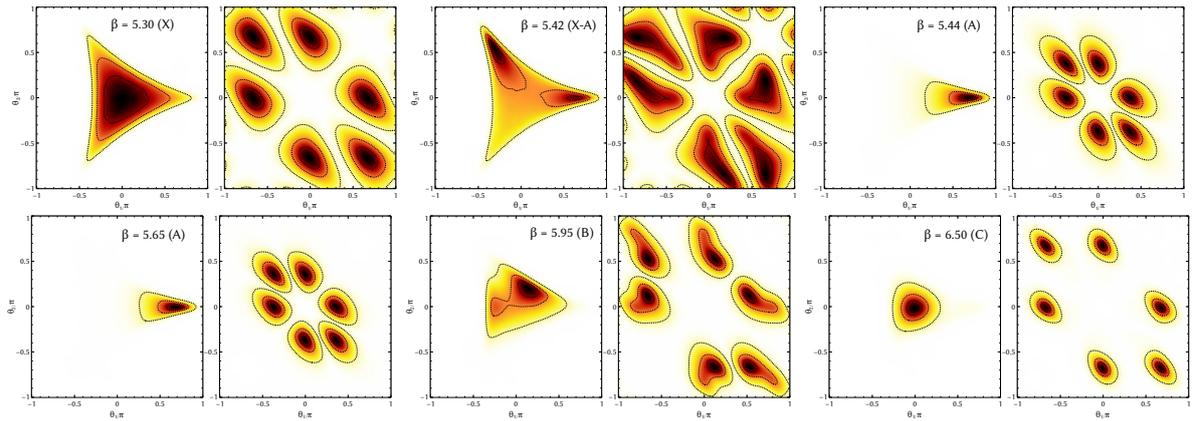


図 2: $16^3 \times 4$ 格子における各 β での、Polyakov ライン固有値分布。それぞれ左側が $\text{Tr}P_3$ を、右側は $(\theta_1/\pi, \theta_2/\pi)$ 平面での分布を表す。暗い色が分布が濃い方を表す。 β の値とともに対応する相 (X,A,B,C) も記した。

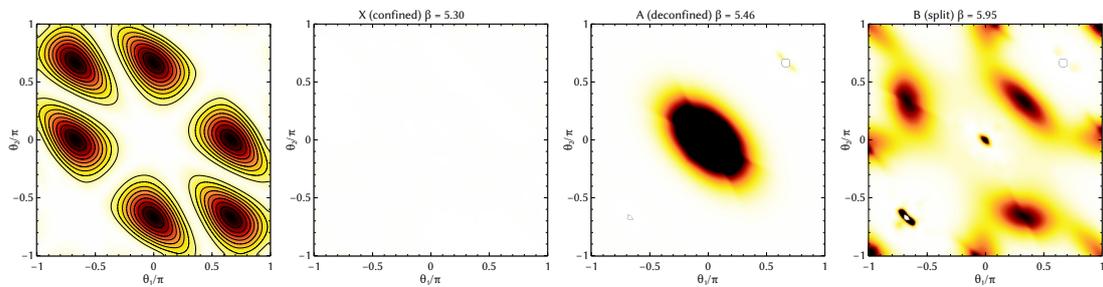


図 3: Haar 測度の効果。一番左の図は Haar 測度の寄与を表し。右側の三つの図は、各相での分布を Haar 測度の寄与で割ったもの。

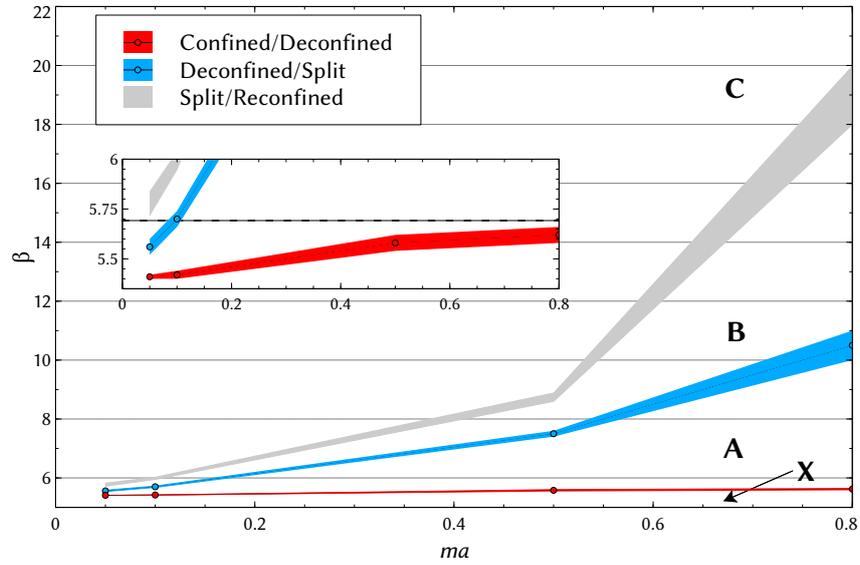


図 4: $N_{\text{ad}} = 2$ での格子ゲージ理論の相図。灰色、青、赤の帯はそれぞれ C-B, B-A, A-X 相転移点を表す。また ma, β の小さい領域の拡大図も示した。点線は Pure gauge の値 [8]。

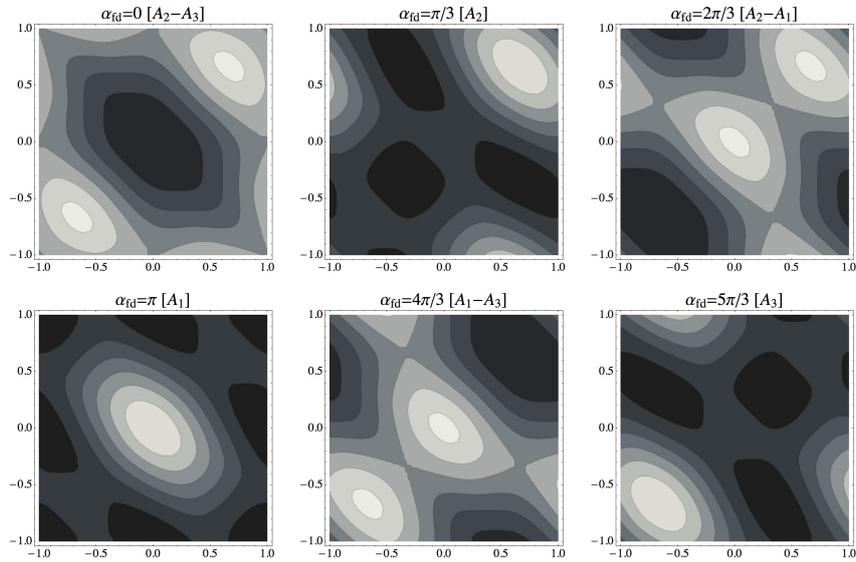


図 5: $N_{\text{fd}} = 4$ での連続理論での有効ポテンシャルを $(\theta_1/\pi, \theta_2/\pi)$ 平面でプロットしたもの。明るい色がポテンシャルの低い部分を示す。

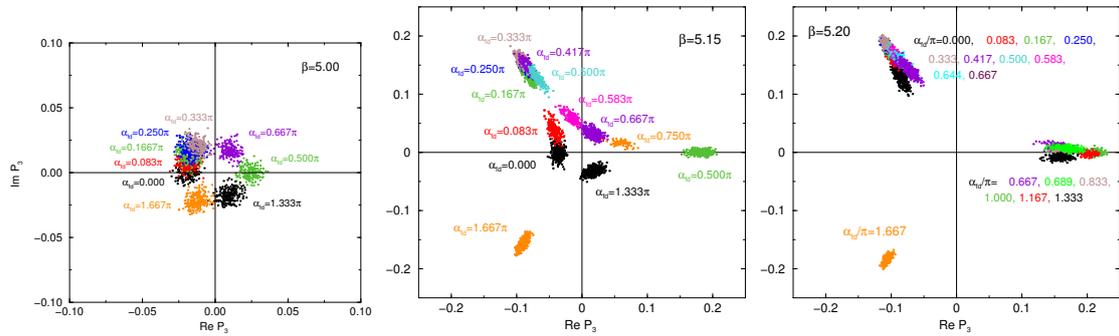


図 6: $N_{\text{fd}} = 4$ での、 β と α_{fd} を変化させたときのポリャコフループ $\text{Tr} P_3$ の分布。 $\beta = 5.00$ では分布は原点の近くにあり、 α_{fd} の値によってその分布の中心が連続的に変化する。 β が大きくなると分布は $A_{1,2,3}$ に対応する点の周りに集まるようになり、 $\beta \geq 5.20$ ではほぼ α_{fd} に対して離散的に分布が変化する。

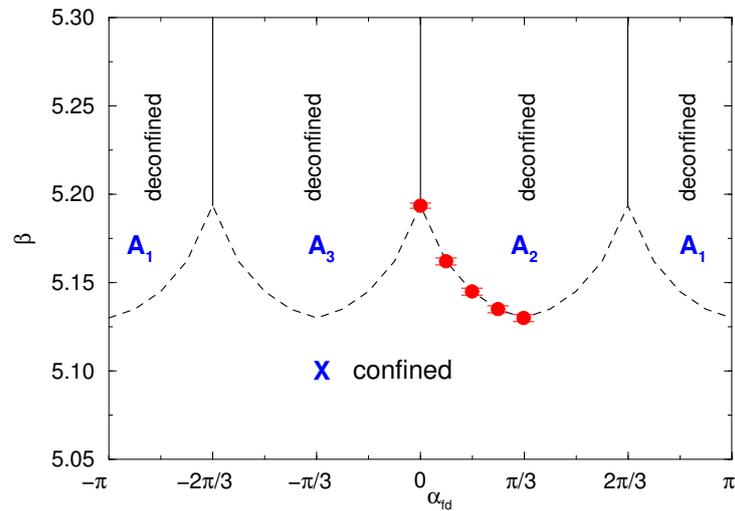


図 7: $N_{\text{fd}} = 4$ での相図。赤いバーが今回測定された相転移点