

# 原子気体のボース凝縮系における最近の進展： 人工ゲージ場の効果を中心として

笠松健一<sup>1</sup>

近畿大学理工学部 理学科物理学コース

講演では冷却原子気体におけるボース・アインシュタイン凝縮体 (BEC) における超流動現象 (量子流体力学) に関連した最近の研究を紹介し、レーザー光と原子の相互作用によって生み出される「人工」ゲージ場<sup>2</sup>とそれがもたらす豊富な物理現象を原子気体 BEC の研究の新たな展開として紹介した。この報告書では、講演であまり時間のとれなかった人工ゲージ場に関するトピックス、およびスピン軌道相互作用をもつ BEC の性質について述べる。

## 1 中性原子に対するゲージ場

物性物理学における主役は電子である。電子系における多くの興味深い現象は、系に電場や磁場、さらに強いスピン軌道相互作用がある時に発現する。近年、物性物理学で精力的に調べられている強相関係等の多体問題の物理を模倣する系を冷却原子系で作成し、その動力学を原子系でシミュレーションするという研究が注目されており、「量子シミュレーション」と呼ばれている [1, 2]。しなしながら、冷却原子系は粒子が中性である (電荷をもたない) ために粒子とゲージ場との結合はなく、スピン軌道相互作用もない。一方で、原子と光の相互作用を制御することにより、静的な外場として原子に作用する可換および非可換なゲージポテンシャルが生じる事が提案された [3, 4]。また、この研究の重要な応用として、縮退原子気体に対して実効的な「スピン軌道相互作用」を作り出すことがあった [5]。電子系におけるスピン軌道相互作用の効果は物性では活発に議論されており、有名な例の一つとして最近発見されたトポロジカル絶縁体がある [6]。縮退原子気体におけるスピン軌道相互作用は、この系の独特の性質を相まって、これまでに考えられた事のない新しい物理をもたらすと期待できる。2009 年から NIST の Spielman の実験グループによりこの提案が実行され、人工的な一様なゲージポテンシャル [7]、一様な磁場 [8]、一様な電場 [9]、およびスピン軌道相互作用 [10] が生成された。

この報告では、NIST で行われた実験的研究およびスピン軌道相互作用をもつボソン系の研究の発展に関して簡単に総説する。スピン軌道相互作用をもつボソン系というのはこれまで物理では全く調べられていない新しい系である。同様に冷却原子のフェルミオン系に対してもスピン軌道相互作用を生成することに成功しており [11, 12]、電子系との対応が注目されている。

## 2 NIST の実験

2009 年、NIST の Spielman らの実験グループは  $^{87}\text{Rb}$  原子の BEC を用いて初めて一様なベクトルポテンシャルを実現した [7]。実験の概略図を図 1 (a) に示す。 $^{87}\text{Rb}$  原子はスピン  $^3F = 1$  をもち、その 3 つの超微細状態  $|F, m_F\rangle = |1, -1, 0, +1\rangle$  は外部から (本物の) 磁場をかける事でゼーマン分裂し

<sup>1</sup>e-mail address: kenichi@phys.kindai.ac.jp

<sup>2</sup>初期の研究では “artificial gauge fields” と呼ばれる事が多かったが、文献 [8] で “synthetic magnetic field” というタイトルがつけられて以来、synthetic gauge field と呼ばれる事が多くなっている。日本語では「人工ゲージ場」か「合成ゲージ場」と呼べると思われるが、この報告書では前者を用いる。

<sup>3</sup>アルカリ原子のスピンは電子の持つスピン  $\mathbf{S}$  と原子核のスピン  $\mathbf{I}$  から合成される。BEC が起こる極低温では  $\mathbf{S}$  と  $\mathbf{I}$  を結合させる超微細結合の相互作用エネルギーの大きさが温度に比べて十分大きく、その合成スピン  $\mathbf{F} = \mathbf{S} + \mathbf{I}$  が原子のスピンを記述する。

ている。 $x$  方向を向く二つの対向伝搬するレーザービームを BEC に照射し、原子の微細準位  $|1, -1\rangle$  と  $|1, 0\rangle$ 、および  $|1, 0\rangle$  と  $|1, 1\rangle$  間にラマン遷移を誘起する。準位間がラマン結合した原子のハミルトニアンは

$$H = \begin{pmatrix} \frac{k_x^2}{2m} + \epsilon_1 & \frac{\Omega}{2} e^{2ik_0x} & 0 \\ \frac{\Omega}{2} e^{-2ik_0x} & \frac{k_x^2}{2m} & \frac{\Omega}{2} e^{2ik_0x} \\ 0 & \frac{\Omega}{2} e^{-2ik_0x} & \frac{k_x^2}{2m} - \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

によって与えられる。ここで、 $k_0 = 2\pi/\lambda$  であり、 $\lambda$  は二つのラマンレーザーの波長、 $2k_0$  は 2 光子過程によって原子に移る運動量である。対角項に現れるパラメーターは  $\epsilon_1 = \Delta_1 + \delta\omega + \Delta_2$ 、 $\epsilon_2 = \Delta_1 + \delta\omega - \Delta_2$  と書け、 $\Delta_1$  は 1 次のゼーマンエネルギー、 $\delta\omega$  は 2 つのラマンレーザーの振動数差、 $\Delta_2$  は 2 次のゼーマンエネルギーを表す。非対角項に表れる  $\Omega$  はラマン過程におけるラビ振動数を与える。

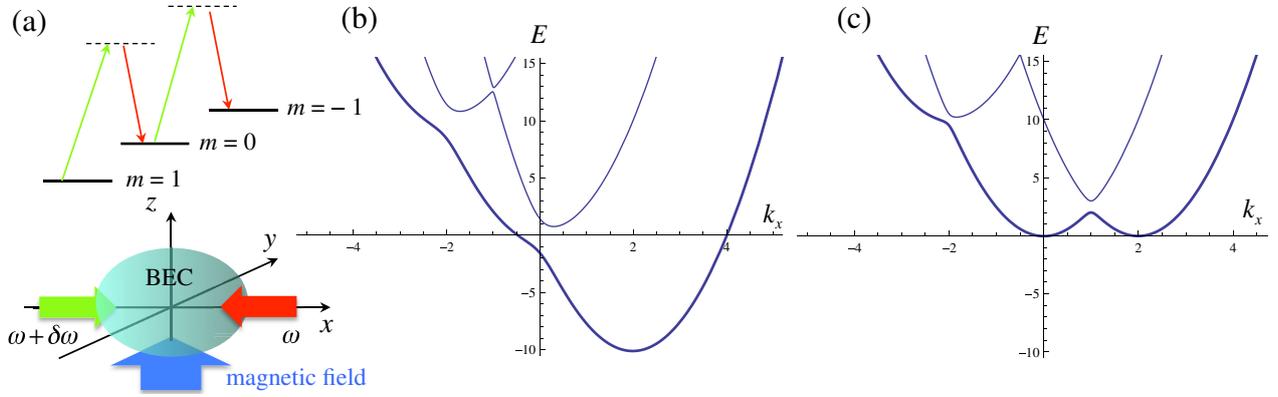


図 1: (a) NIST の実験の概略図。2 つの対向伝搬するラマンレーザーを BEC の気体に照射する。上の図は 3 つの  $F = 1$  の準位がどのようにラマン結合しているかを表す概略図である。(b) と (c) はそれぞれ一様な可換ベクトルポテンシャルおよび非可換なゲージ場を与える場合の式 (3) から得られる分散関係を表す。最低エネルギーのブランチを太線で示した。

ここで、ユニタリー変換

$$U = \begin{pmatrix} e^{-2ik_0x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2ik_0x} \end{pmatrix} \quad (2)$$

を波動関数に適応して見方を変える。このとき、ハミルトニアンは

$$H' = UHU^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{(k_x + 2k_0)^2}{2m} + \epsilon_1 & \frac{\Omega}{2} & 0 \\ \frac{\Omega}{2} & \frac{k_x^2}{2m} & \frac{\Omega}{2} \\ 0 & \frac{\Omega}{2} & \frac{(k_x - 2k_0)^2}{2m} - \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。ここで  $\epsilon_1$  と  $\epsilon_2$  の両方が比較的大きい場合を考えよう。 $H'$  を対角化して得られる 1 粒子エネルギー分散を図 1 (b) に示す。 $\Omega = 0$  のときは、極小がずれた 3 つの独立した放物型の分散が得られるが、 $\Omega \neq 0$  では準位交差が起こる所でエネルギーの分裂が起こる。 $\epsilon_1, \epsilon_2 \gg 1$  では最低ブランチで有限の波数の値にある極小が他のブランチと大きく分離することで、系の低エネルギーの振る舞いは有効ハミルトニアン  $H_{\text{eff}} = (k_x - A_x)^2/2m$  で与えられる。このときの固有状態は裸の原子の状態

$|F, m_F\rangle$  が光によって結合した「ドレスド状態」となっている。ここで、 $A_x$  は定数である。 $H_{\text{eff}}$  の形から、一様なベクトルポテンシャルが系に生じていると見なせる。

続く実験で、Spielman らのグループは系に  $y$  方向に沿った（本物の）磁場勾配を加えた [8]。この場合はゼーマンエネルギーが空間変化することで  $\epsilon_1$  および  $\epsilon_2$  が  $y$  依存性をもち、 $A_x$  は定数ではなく  $y$  の関数となる。この場合は有限の「人工」磁場  $B_z = -\partial_y A_x \neq 0$  が生み出される事が分かる。彼らは（本物の）磁場勾配の強さを変化させる事により、ある臨界「人工」磁場の強さ以上で BEC に複数の量子渦が生成することを観測した [8]。これは回転する超流動における量子渦形成に対する臨界回転振動数に相当するものである。別の実験では、 $A_x$  を時間依存させて有限の電場  $E_x = -\partial_t A_x \neq 0$  を作り出すことに成功した [9]。彼らは電場のパルス後に BEC の集団振動を観測した。

興味深い事に、彼らの実験のセットアップは保ったままでパラメータを調整する事のみにより、非可換ゲージ場が生み出される興味深い場合に議論が拡張される。非可換ゲージ場はスピン軌道相互作用と見なせ、2011 年に同じく Spielman らのグループにより「スピン軌道相互作用をもつ BEC」という新しいボース凝縮系が実現した [10]。

ゼーマンエネルギーとレーザーの振動数を調整することにより、 $\Delta_1 + \delta\omega \approx \Delta_2$  となる様にする。このとき、 $\epsilon_2 \approx 0$  であるが、 $\epsilon_1 \approx 2\Delta_2$  は大きな値のままである。この場合の式 (3) の分散を図 1(c) に示した。この場合の低エネルギーの振る舞いを決定する分散には二つのエネルギーの極小が含まれており、その極小それぞれは  $|1, -1\rangle$  と  $|1, 0\rangle$  状態に支配されている。従って、 $|1, -1\rangle$  と  $|1, 0\rangle$  の 2 つの状態のみを保持した低エネルギー有効ハミルトニアンを導く事ができる。2 つの状態を残したハミルトニアン

$$H = \begin{pmatrix} \frac{k_x^2}{2m} + \frac{\epsilon_2}{2} & \frac{\Omega}{2} e^{i2k_0x} \\ \frac{\Omega}{2} e^{-i2k_0x} & \frac{k_x^2}{2m} - \frac{\epsilon_2}{2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

を考える。ここで、エネルギーの基準を式 (1) のものから変えた。前と同様に、波動関数にユニタリー変換

$$U = \begin{pmatrix} e^{-ik_0x} & 0 \\ 0 & e^{ik_0x} \end{pmatrix} \quad (5)$$

を適応してハミルトニアンの表示を変えると、

$$H' = UH U^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{(k_x + k_0)^2}{2m} + \frac{\epsilon_2}{2} & \frac{\Omega}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & \frac{(k_x - k_0)^2}{2m} - \frac{\epsilon_2}{2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2m} (k_x + k_0 \sigma_z)^2 + \frac{\Omega}{2} \sigma_x + \frac{\epsilon_2}{2} \sigma_z. \quad (7)$$

を得る。実際、擬スピンの回転  $\sigma_x \rightarrow -\sigma_z$ 、 $\sigma_z \rightarrow \sigma_x$  により、上記のハミルトニアンは

$$H' \rightarrow H_{\text{SO}} = \frac{1}{2m} (k_x + k_0 \sigma_x)^2 - \frac{\Omega}{2} \sigma_z + \frac{\epsilon_2}{2} \sigma_x, \quad (8)$$

と同様である。これはスピン軌道相互作用を記述するハミルトニアンとなっている<sup>4</sup>。最初の項はラシュバ型 ( $k_x \sigma_x + k_y \sigma_y$ ) とドレッセルハウス型 ( $k_x \sigma_x - k_y \sigma_y$ ) スピン軌道相互作用の大きさが等しい場合と見なす事ができる。（多くの文献ではラシュバ型は  $k_x \sigma_y - k_y \sigma_x$ 、ドレッセルハウス型は  $k_x \sigma_y + k_y \sigma_x$  と記載されている場合があるが、これらはスピンの回転  $\sigma_x \rightarrow -\sigma_y$  と  $\sigma_y \rightarrow \sigma_x$  で同等となる。）実験

<sup>4</sup> 半導体中の伝導電子に働くスピン軌道相互作用では重要なものが 2 種類あり、ラシュバ項とドレッセルハウス項と呼ばれている。ラシュバ項は InGaAs/GaAs の構造で界面付近に形成される 2 次元電子系に垂直方向に電場がかかったときに発生し、ドレッセルハウス項は半導体の結晶構造の非対称性に由来する。

では、図 1 (c) に対応する 2 つの極小に対応するドレド状態の凝縮体のドメインが相分離する様子が観測された [10]。

式 (8) のハミルトニアンで  $k_0\sigma_x = -\hat{A}_x$  とおくと、この項は  $2 \times 2$  行列のベクトルポテンシャルと見なせるが、1 次元の  $x$  成分しかないので、可換なゲージポテンシャルである。一般的に他の方向の成分もあれば、 $\hat{A}$  の各成分は交換しないので、これは非可換なゲージポテンシャルと見なせる。ラシュバ型とドレセルハウス型を含む 2 次元以上のスピン軌道相互作用をどのように作り出すかに関しては様々な提案がなされており [3, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]、実験的実現が待ち望まれている。

### 3 スピン軌道相互作用をもつ BEC

人工ゲージ場とスピン軌道相互作用の効果は一粒子問題で理解できるが、それらが存在するときの多体問題が物性としてはさらに重要である。冷却原子系は光格子やフェシュバハ共鳴でその相互作用の強さを制御できるというユニークな特色をもつ系であり [23]、以上の効果を融合すれば、得られる現象の多彩さは非常に豊かなものとなる事が予想される。この節ではスピン軌道相互作用がある場合の弱く相互作用する（平均場近似が有効的と思われる）ボース粒子系に関する研究に関して簡単に総説する。ここで強調したい点は、ラシュバ型のような等方的なスピン軌道相互作用の場合、1 粒子エネルギー分散において無限の縮退が生まれ、粒子間の相互作用の効果が劇的に増大する事である。その結果、相互作用そのものの強さは弱い状況でもその効果が本質となる。粒子間相互作用によって系は多体基底状態を選択し、低エネルギーの揺らぎの性質が決定される。スピン軌道相互作用をもつ BEC に関するレビューは H. Zhai [24]、X. Zhou et al. [25] などがあるので詳細はそちらを参照されたい。

弱く相互作用するボース気体ではガスパラメーターが  $a^3\rho \ll 1$  ( $a$  は  $s$ -波散乱長で  $\rho$  は原子数密度) であり、2 体の散乱過程が重要である。原子間の相互作用は次の接触型ポテンシャル

$$V_{\text{int}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (9)$$

で近似的に記述される。BEC の凝縮体波動関数  $\Psi = \langle \hat{\Psi} \rangle$  のダイナミクスは平均場近似の枠内では次のグロスピタエフスキー方程式 [23]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (10)$$

によって記述される。これは非線形光学系で知られる非線形シュレディンガー方程式と同等の形をしている。 $V(\mathbf{r})$  は原子気体を閉じ込めるための外部ポテンシャルで、通常は調和振動子型で与えられる。非線形項は密度  $\rho = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$  に比例する。この非線形項によって記述される相互作用の効果は理想気体と比較してダイナミクスを劇的に変え、BEC 実現直後から続く超流動性に関する多くの研究（素励起や量子渦の形成など）からも明らかである [26, 27]。

スピン軌道相互作用は相互作用する縮退ボース気体にどのような効果を与えるであろうか？この問いに関してはすでに多くの著者らによって調べられている [15, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37]。ここではスピン軌道相互作用が基底状態に与える影響に関して述べる。一般的なハミルトニアンは

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger \left[ \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \hat{\mathbf{A}})^2 + V(\mathbf{r}) + \hat{G}(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger) \right] \hat{\Psi} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (11)$$

ここでスピン軌道相互作用はゲージポテンシャル  $\hat{\mathbf{A}}$  で記述されている。 $\hat{\Psi}$  は多成分の秩序変数、 $V(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$  は振動数  $\omega$  をもつ閉じ込めポテンシャルである。原子間相互作用の正確な形  $\hat{G}(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger)$

は問題の物理的セットアップの詳細に依存する [23, 28, 29]。前節で見たように典型的には場の演算子  $\hat{\Psi}$  はドレスド状態（裸の原子準位の重ね合わせ）と関連し、 $\hat{G}(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger)$  に入っている 2 体の散乱長は異なる裸の原子状態に依存する。例えば  $\hat{G}_{\mu\nu}(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger) = g_{\mu\nu} \hat{\Psi}_\mu \hat{\Psi}_\nu^\dagger$  ( $g_{\mu\nu} \neq \text{const}$ ) のように書く事ができ、これはゲージポテンシャル  $\hat{\mathbf{A}}$  に独立である [28, 29]。

ここでは「擬」スピン 1/2 をもつボース粒子系（2 成分ボース系）で等方的なラシュバスピ軌道相互作用がある系の基底状態の性質について述べる。 $\hat{\Psi} = (\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2)^T$ 、であり、 $\hat{\mathbf{A}}$  はパウリ行列を用いて  $\hat{\mathbf{A}} = \hbar\kappa(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y)$  と簡単に書ける。このとき、一様系 ( $V(\mathbf{r}) = 0$ ) の 1 粒子エネルギースペクトルは二つのエネルギー分枝  $E_\pm(\mathbf{k}) \propto (|\mathbf{k}| \pm \kappa)^2$  を持つ。この分散関係を図 2 に示した。ラシュバ型の相互作用  $\hat{\mathbf{A}}$  が系に与える主要な特徴として、自由粒子の場合に凝縮する波数  $k_{\min}(\hat{\mathbf{A}} = 0) = 0$  を有限の波数  $k_{\min}(\hat{\mathbf{A}} \neq 0) = \kappa$  に変え、さらにその極小が波数平面でリング上に連続的に分布することである。これらの縮退した一粒子基底状態は多体問題に大きく影響する。ラシュバ型スピン軌道相互作用の存在下では、BEC の基底状態は原子間相互作用と非相互作用のモデルでのパラメータ（トラップ振動数  $\omega$  やラシュバ結合の強さ  $\kappa$ ）との複雑な競合で決まり、原子間相互作用は弱いとしても主要な効果を与える [24, 25]。

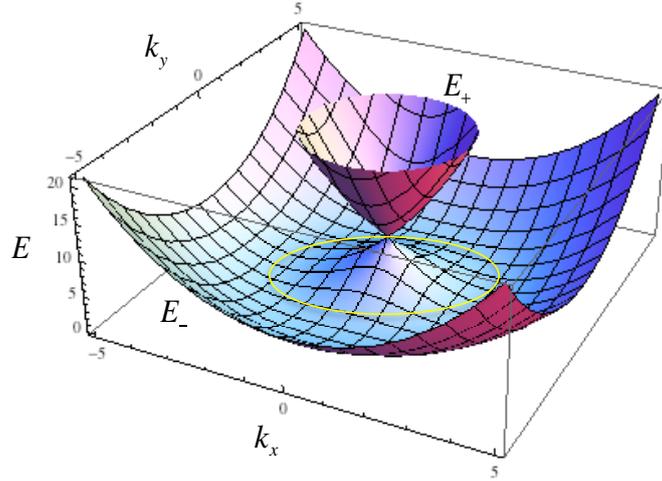


図 2: ラシュバ型スピン軌道相互作用をもつ期待の 1 粒子エネルギー分散。

### 3.1 一様系の場合

一様系  $V(\mathbf{r}) = 0$  におけるスピン軌道結合 BEC の基底状態の平均場の相図は簡単な相互作用項によって説明される [28]

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int d\mathbf{r} (g\hat{n}_1^2 + g\hat{n}_2^2 + g_{12}\hat{n}_1\hat{n}_2), \quad \text{i.e., } \hat{G}_{\mu\nu} = \left[ g\hat{1}_{\mu\nu} + \frac{g_{12}}{2}\hat{\sigma}_{\mu\nu}^{(x)} \right] \hat{\Psi}_\mu \hat{\Psi}_\nu^\dagger \quad (12)$$

ここでスピンに依存する原子間衝突を説明するモデルとして、2つの結合定数  $g$  と  $g_{12}$  を導入した。 $\hat{n}_\mu = \hat{\Psi}_\mu^\dagger \hat{\Psi}_\mu$  は密度演算子を表す。以下に述べる平均場の相図は Wang らによってハミルトニアン (11) と (12) 式から導出された 2 成分秩序変数  $\Psi(\mathbf{r}) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle$  に対するグロスピタエフスキー方程式を解く事によって得られた [28]。特徴としては以下の二つの場合に分けられる。(i)  $g_{12} < g$  のとき、二つのスピン成分に対する密度  $\rho_{1,2}(\mathbf{r}) = |\Psi_{1,2}|^2$  は空間的に一様であるが、凝縮体の位相  $\theta_{1,2} = \arg[\Psi_{1,2}(\mathbf{r})]$  はある一方向にそって周期的に変化する。この状態は自発的に回転対称性を破っている。この「平面

波相」を特徴づける波動関数は次の簡単な形

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}} e^{i\kappa x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

で書ける。ここで、一般性を失う事なしに、平面の方向を  $x$  方向にとった。(ii)  $g_{12} > g$  のとき、凝縮体はこの二つの平面波の重ね合わせで記述される。

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sqrt{\rho_1 + \rho_2} \left[ e^{i\kappa x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-i\kappa x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \sqrt{\rho_1 + \rho_2} \begin{pmatrix} \cos(\kappa x) \\ i \sin(\kappa x) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

この場合スピン密度は  $\rho_s(\mathbf{r}) = |\Psi_1(\mathbf{r})|^2 - |\Psi_2(\mathbf{r})|^2 = (\rho_1 + \rho_2) \cos(2\kappa x)$  と書かれ、周期的な空間変調を生み出す。この相は「ストライプ超流動」または「定常波相」と呼ばれる [28]。グロスピタエフスキー方程式から得られた一様系の平均場相図はスピン軌道相互作用  $\hat{\mathbf{A}}$  の (円筒対称性を失わない) 変形や追加で加わる場 (ゼーマン項など) の存在下でも一般的に成立する [24]。

### 3.2 トラップ系の場合

冷却原子気体系に一般的に存在する調和型の閉じ込め  $V(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$  によって基底状態の相図はより豊かになり、新しい相が出現する。ここでは Sinha 達による研究を紹介する [29]。まず、すべての原子間相互作用の項はスピンに依存しない形  $\hat{G}_{\mu\nu} = g_{\text{eff}} \hat{\Psi}_\mu^\dagger \hat{\Psi}_\nu$  をもつと仮定する。ここで  $g_{\text{eff}}$  はすべての衝突を記述する有効的な散乱長である [29]。この問題の簡略化により、スピン軌道結合 BEC においてトラップポテンシャルによって引き起こされる効果が浮き出る。調和トラップにより、更なるエネルギースケール  $\hbar\omega$  が上記で議論した一様系の問題に導入される。Sinha 等は無次元パラメータ  $\mathcal{G} = g_{\text{eff}} m/\hbar^2$  と  $\mathcal{K} = \kappa l_0$  ( $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ ) をスキャンして、トラップされた 2次元スピン軌道結合 BEC の相図を解明した。

スピン軌道相互作用が支配的な原子間相互作用のない場合では ( $\mathcal{G} = 0, \mathcal{K} \gg 1$ ), 上側の分枝  $E_+(\mathbf{k})$  は無視でき、1粒子波動関数  $\Psi(\mathbf{k}) = \psi(\mathbf{k}) \mathbf{u}_-(\mathbf{k})$  を得る。ここで、

$$\mathbf{u}_-(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ (k_x + ik_y)/k \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (15)$$

は低エネルギー分枝  $E_-(\mathbf{k})$  における一様系の固有状態である。 $\varphi$  は  $\mathbf{k}$  の方位角を表す。1粒子ハミルトニアンに閉じ込めポテンシャルを加え、 $H(\mathbf{k}) \propto (\hbar\mathbf{k} - \hat{\mathbf{A}})^2 - \nabla_{\mathbf{k}}^2$  とし、相当するシュレディンガー方程式を次のアンザッツ  $\psi(\mathbf{k}) = \sum_l k^{-1/2} f_l(\mathbf{k}) e^{il\varphi}$ , を用いて解くと、固有エネルギー

$$E_{nl} = \frac{(l+1/2)^2}{2\mathcal{K}^2} + n + \frac{1}{2}, \quad (16)$$

を得る。ここで  $n$  はメキシカンハットポテンシャルの極小  $k \approx \kappa$  の周りの動径方向の励起のラベルであり、 $l \in \mathbf{Z}$  である。エネルギー固有値より、量子数  $n = 0$  と  $l = \{0, -1\}$  の状態は縮退しており、その基底状態の波動関数は

$$\Psi_{l=\{0,-1\}}(k) \propto e^{-(k-\kappa)^2 l_0^2/2 + il\varphi} \mathbf{u}_-(\varphi) \quad (17)$$

となる。実空間では、極座標  $(r, \theta)$  を使うと二つの縮退した基底状態が

$$\Psi_0(r, \theta) \propto \begin{pmatrix} J_0(\mathcal{K}r) \\ e^{i\theta} J_1(\mathcal{K}r) \end{pmatrix}, \quad \Psi_{-1}(r, \theta) \propto \begin{pmatrix} e^{-i\theta} J_1(\mathcal{K}r) \\ J_0(\mathcal{K}r) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

と書ける [15, 29, 28, 24, 25]。これらは半整数渦状態として知られ、様々な物理系（トポロジカル量子コンピューティング [38]、超流動  $^3\text{He}$  [39]、スピントリプレット超伝導など）に現れる。式 (18) における縮退状態とそれらの任意の線形結合は回転対称な密度分布を生み出す。文献 [29] で指摘されているように、この半整数渦の相はある有限の相互作用の強さ  $\mathcal{G} < \mathcal{G}_1$  まで生き残る。ここで  $\mathcal{G}_1 \sim \kappa^{-2}$  は基底状態 ( $|l+1/2| = 1/2$ ) と高エネルギー ( $|l+1/2| = 3/2$ ) 状態間のエネルギーの差を表す。実際、スピン軌道相互作用が大きい  $\kappa^2 \gg 1$  の場合、逐次的な角度方向の励起間のエネルギー差 [式 (16)] は動径方向の励起に比べて非常に小さい。従って、高い角運動量を持つ状態 ( $l \geq 1$ ) のポピュレーションは  $\kappa$  が大きくなるにつれて増える傾向にある。相互作用が大きくなると、 $|l+1/2| = 3/2$  を満たす高い角運動量状態をもつ凝縮相が現れ、相互作用パラメータのある範囲  $\mathcal{G}_1 < \mathcal{G} < \mathcal{G}_2$  で起こる。

もっと強い相互作用  $\mathcal{G} > \mathcal{G}_2$  の場合、気体は渦の格子相に入り、密度は六角形型格子の形に変化する。興味深い事に回転対称性が破れ、格子の周期が相互作用の強さ  $\mathcal{G}$  に依存しない。実際、格子の最小間の距離はスピン軌道結合の強さ  $\kappa$  で与えられる。結果として生じる運動量分布は6つのピークをもつ頑固なリング型構造をもつ。

上記で議論した3つの相はすべて共通してその密度分布は回転又は離散的な回転対称性を保っている。より大きな相互作用の場合 ( $\mathcal{G} \gg \mathcal{G}_2$ ) ではこの事は成り立たない。この大きな相互作用の領域では、スピン軌道相互作用により BEC の状態はストライプ相へと入り、密度はある方向へと周期的に変調する。この非等方状態はスピンに依存する相互作用  $g_{12} > g$  をもつ一様系でみられたストライプ相と類似性をもっている。

## 4 まとめ

この報告書では人工ゲージ場に関する実験とスピン軌道相互作用をもつ BEC の基底状態に関して簡単にレビューした。スピン軌道結合 BEC の理論に関して、その動的な振る舞いを扱った研究は少なく、今後活発に議論されていくと思われる。また、本講演では扱っていないが、光格子がある場合にはより粒子間の相関が強まり、多彩な量子相が実現する事が予言されている [3, 4]。こちらの方も今後の急速な研究の展開が期待される。

## 参考文献

- [1] M. Lewenstein, A. Sanpera, and V. Ahufinger, *Ultracold Atoms in Optical Lattices: Simulating Quantum Many-body Systems* (Oxford University Press, 2012).
- [2] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbene, *Nat. Phys.* **8**, 267 (2012).
- [3] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas, and P. Öhberg, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1523 (2011).
- [4] N. Goldman, G. Juzeliūnas, P. Öhberg, and I. B. Spielman, arXiv:1308.6533.
- [5] V. Galitski and I. B. Spielman, *Nature (London)* **494**, 49 (2013).
- [6] M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010); X. L. Qi and S. C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).
- [7] Y. J. Lin, R. L. Compton, A. R. Perry, W. D. Phillips, J. V. Porto, and I. B. Spielman, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 130401 (2009).

- [8] Y. J. Lin, R. L. Compton, K. Jiménez-García, J. V. Porto, and I. B. Spielman, *Nature (London)* **462**, 628 (2009).
- [9] Y. J. Lin, R. L. Compton, K. Jiménez-García, W. D. Phillips, J. V. Porto, and I. B. Spielman, *Nat. Phys.* **7**, 531, (2011).
- [10] Y. J. Lin, K. Jiménez-García, and I. B. Spielman, *Nature (London)* **471**, 83 (2011).
- [11] P. Wang, Z.-Q. Yu, Z. Fu, J. Miao, L. Huang, S. Chai, H. Zhai, and J. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 095301 (2012).
- [12] L. W. Cheuk, A.T. Sommer, Z. Hadzibabic, T. Yefsah, W. S. Bakr, and M. W. Zwierlein, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 095302 (2012).
- [13] J. Ruseckas, G. Juzeliūnas, P. Öhberg and M. Fleischhauer, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 010404 (2005).
- [14] G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, M. Lindberg, L. Santos and P. Öhberg, *Phys. Rev. A* **77**, 011802(R) (2008).
- [15] T. D. Stanescu, B. Anderson, and V. Galitski, *Phys. Rev. A* **78**, 023616 (2008).
- [16] J. Y. Vaishnav and C. W. Clark, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 153002 (2008).
- [17] G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, and J. Dalibard, *Phys. Rev. A* **81**, 053403 (2010).
- [18] D. L. Campbell, G. Juzeliūnas and I. B. Spielman *Phys. Rev. A* **84**, 025602 (2011).
- [19] Z. F. Xu and L. You, *Phys. Rev. A* **85**, 043605 (2012).
- [20] B. M. Anderson, I. B. Spielman, and G. Juzeliūnas, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 125301 (2013).
- [21] Z. F. Xu, L. You and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **87**, 063634 (2013).
- [22] B. M. Anderson, G. Juzeliūnas, V. M. Galitski, and I. B. Spielman, *Phys. Lett. Lett.* **108**, 235301 (2012).
- [23] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [24] H. Zhai, *Int. J. Mod. Phys. B* **26**, 1230001 (2012).
- [25] X. Zhou, Y. Li, Z. Cai, and C. Wu, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **46**, 134001 (2013)
- [26] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [27] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [28] C. Wang, C. Gao, C. M. Jian, and H. Zhai, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 160403 (2010).
- [29] S. Sinha, R. Nath and L. Santos, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 270401 (2011).
- [30] X.-Q. Xu and J. H. Han, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 200401 (2011).

- [31] H. Hu, B. Ramachandhran, H. Pu, and X.-J. Liu, Phys. Rev. Lett. **108**, 010402 (2012).
- [32] Y. Zhang, L. Mao and C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **108**, 035302 (2012).
- [33] T. Ozawa and G. Baym, Phys. Rev. A **85**, 013612 (2012).
- [34] X. Cui and Q. Zhou, Phys. Rev. A **87**, 031604 (2013).
- [35] P. S. He, R. Liao, and W. M. Liu, Phys. Rev. A **86**, 043632 (2012).
- [36] R. Liao, Z. G. Huang, X. M. Lin, and W. M. Liu, Phys. Rev. A **87**, 043605 (2013).
- [37] Q. Zhou and X. Cui, Phys. Rev. Lett. **110**, 140407 (2013).
- [38] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, Rev. Mod. Phys. **80**,1083 (2008).
- [39] G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet* (Clarendon Press, Oxford, UK, 2003).