

ユニタリー・フェルミ気体の一粒子スペクトル関数に対する和則の構築

Philipp Gubler^{a,1}, 西田祐介^b, 山本直希^{c,d}, 初田哲男^a

^a 理化学研究所、仁科センター, ^b 東京工業大学,

^c 京都大学、基研物理学研究所, ^d University of Maryland

ユニタリー・フェルミ気体における一粒子自己エネルギーの虚部に対する和則を演算子積展開の結果から導出し、最大エントロピー法を用いて解析する。その結果から得られる一粒子スペクトル関数の運動量に対する変化を調べ、超流動ギャップなどのユニタリー・フェルミ気体の基本的な性質を引き出すことができる。本稿では、この手法の基本的な考え方について説明し、これまでに得られた結果を簡単に紹介する。

1 導入

ユニタリー・フェルミ気体は2成分を持つ非相対論的なフェルミ粒子からなる気体であり、その異なる成分の間の相互作用の強さの指標となる散乱長 a が無限大になる強結合な量子多体系である。一般的な量子多体系を考えるとときに、 $k_F a$ (k_F :フェルミ運動量)が展開パラメータとしてよく使われるが、ユニタリー・フェルミ気体の場合にはこのような摂動論は破綻するはずなので、非摂動論的な手法が必要となる。

そこで、ユニタリー・フェルミ気体の様々な性質を摂動論的な方法に頼らずに理解するためには演算子積展開法 (Operator Product Expansion, OPE) が近年注目されてきている [1, 2]。特に、[3] では一粒子グリーン関数に対して演算子積展開が行われ、一粒子スペクトル関数の k_F より大きい高運動量領域において、演算子積展開法の結果が量子モンテ・カルロ法の数値シミュレーションから得られる振舞いとよく一致していることが分かった。この結果を低運動量領域に拡張し、超流動ギャップなどの物理量を評価することが本稿で紹介する研究の主な目的である。

そのためには、QCDの研究において以前から使われているQCD和則 [4, 5]の方法に倣い、一粒子自己エネルギー $\Sigma(\omega)$ のエネルギー ω の関数としての解析性に基づいて、 $\text{Im}\Sigma(\omega)$ についてのある種の和則を構築する。この和則を最大エントロピー法 (Maximum Entropy Method, MEM) を用いて解析し、 $\text{Im}\Sigma(\omega)$ の最も確からしい形を抽出することで、最終的には一粒子スペクトル関数を引き出すことができる。

本稿では、和則の導出を説明した後、MEMの解析によって得られた一粒子自己エネルギー (の虚部) を示し、その結果から得られる一粒子スペクトル関数の中に現れるピークが運動量の関数としてどのように動くかについて考察する。最後にこれまでに得られた結果をまとめ、今後の展望について述べる。

2 和則の導出

$\text{Im}\Sigma(\omega)$ に関する和則を導くためには、まず $|\omega| \rightarrow \infty$ の極限において有用な $\Sigma(\omega)$ に対する何らかの展開式を用意する必要がある。このような展開式は演算子積展開法を用いれば実際に導出することができ [3]、以下の形で表せる：

$$\Sigma^{\text{OPE}}(\omega + i0^+, y) = -\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \frac{1}{\sqrt{-\omega - i0^+}} + \frac{0.207498}{3\pi^2} \zeta \frac{1}{\omega + i0^+} - \frac{\sqrt{2}}{15\pi} (3\xi - 5y^2) \frac{1}{(\sqrt{-\omega - i0^+})^3}. \quad (1)$$

¹e-mail address: pgubler@riken.jp

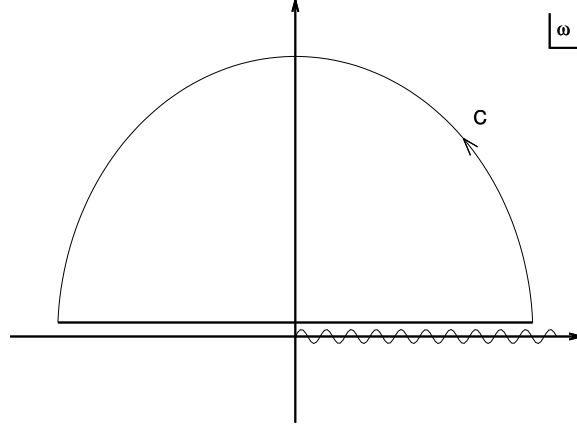


図 1: 和則を導くための ω の複素平面上の経路 C。実軸上の波線は $\Sigma(\omega)$ のカットを表している。

この展開が意味を持つためには $\omega \gg \epsilon_k \gg \epsilon_F$ の条件が成り立つ必要がある。上の式を簡単にするために Σ と ω をフェルミエネルギー ϵ_F を単位として表しており、 y は運動量を表すパラメータである ($y = k/k_F$)。また、 ξ と ζ はそれぞれはエネルギー密度 \mathcal{E} とコンタクト密度 C を無次元化した形で表したパラメータである：

$$\mathcal{E} = \xi \frac{k_F^5}{10\pi^2 m}, \quad C = \zeta \frac{k_F^4}{3\pi^2}. \quad (2)$$

この二つのパラメータの具体的な値としては量子モンテ・カルロ法の数値シミュレーションから得られた $\xi = 0.372(5)$ [6] と $\zeta = 3.40(1)$ [7] を用いる。なお、この値は両方ともゼロ温度のものである。式 (1) は演算子積展開の結果を y^2/ω について展開し、1 次の項まで残した結果を示しているが、 y^2/ω についての展開を行わない定式化も可能である。ただし、本稿では議論を簡潔にするためにその具体的な式などを省略する。

さて、式 (1) から和則を導くためには図 1 に示してあるような ω の複素平面上の経路 C を考える。 $\Sigma(\omega)$ は実軸上以外の ω の複素平面上で解析的であるとすると、図 1 にある経路 C に沿った積分は 0 になるはずである。同様に、 $\Sigma^{\text{OPE}}(\omega)$ も実軸上以外の ω の複素平面上で解析的であるため、C に沿った積分は 0 になるはずである。しかも、これらの関数に任意の解析的な関数 $K(\omega)$ をかけても、同じように経路 C に沿った積分は 0 になる。さらに、 $\Sigma^{\text{OPE}}(\omega)$ は $|\omega| \rightarrow \infty$ の半円上の経路では本当の $\Sigma(\omega)$ の良い近似になるはずなので、 $K(\omega)\Sigma^{\text{OPE}}(\omega)$ の半円上の経路に沿った積分は $K(\omega)\Sigma(\omega)$ の同じ積分と (今使っている近似の範囲内で) 等しくなる。従って、 $K(\omega)$ は実軸上では実になることを要請し、最後に虚部をとれば、以下のような和則を導けることが分かる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega K(\omega) \text{Im}\Sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega K(\omega) \text{Im}\Sigma^{\text{OPE}}(\omega). \quad (3)$$

上の式の右辺は、 $K(\omega)$ の具体的な形を指定すれば、式 (1) を使って解析的または数値的に計算できるはずである。 $K(\omega)$ の選び方としては色々な形が考えられるが、QCD 和則の経験から指数関数的に減数する Borel Kernel

$$K_n(\omega, M) = \omega^n e^{-\omega^2/M^2}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

がその後の和則の解析をよりやりやすくすることが知られているため、本研究でもこの Borel Kernel を用いる。ここに現れるパラメータ M は Borel mass と呼ばれている。

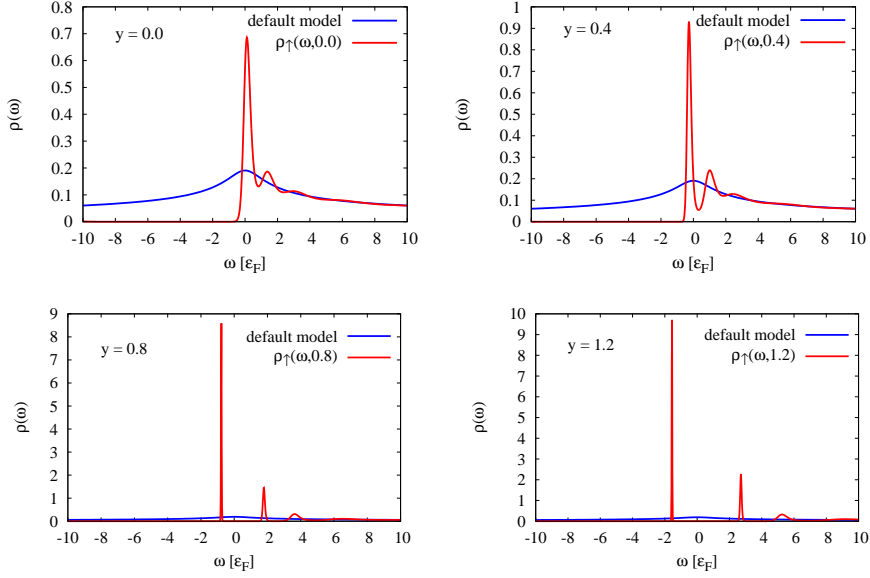


図 2: MEM 解析により得られた一粒子自己エネルギーの虚部: $\rho(\omega) \equiv -\frac{1}{\pi}\text{Im}\Sigma(\omega)$ 。

3 和則の最大エントロピー法による解析

前の section で導出した和則から物理量を引き出すためには式 (4) から $\text{Im}\Sigma(\omega)$ に関する情報を抽出する必要がある。このためには、ベイズの定理に基づき、与えられた情報から最も確からしい $\text{Im}\Sigma(\omega)$ を引き出すことができる最大エントロピー法 (MEM) という手法を用いる。MEM が近年 QCD 和則の解析に応用されるようになり [5]、様々なハドロンの性質を引き出すために使われてきた [8, 9, 10, 11]。その最大の利点は、抽出しようとする関数を持つ形に関して強い仮定をおく必要がないところにある。MEM を用いて和則を解析するときの具体的な計算法などは文献 [5, 12] に譲り、ここでは結果のみを紹介することにする。

まずは、 $\rho(\omega) \equiv -\frac{1}{\pi}\text{Im}\Sigma(\omega)$ についての結果を図 2 に示す。ここでは、OPE の結果を y^2/ω について展開しない式を使った。この結果を以下の Kramers-Kronig 関係式に代入し、数値的に積分すれば、自己エネルギー $\Sigma(\omega)$ の実部もただちに求まる。

$$\text{Re}\Sigma(\omega) = -P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\rho(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (5)$$

これまでに述べた計算法より自己エネルギーが完全に決まるので、その形を

$$A(\omega, y) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{\omega + i0^+ - y^2 - \Sigma(\omega, y)} \quad (6)$$

に代入することで、一粒子スペクトル関数 $A(\omega, y)$ も求まる。 $A(\omega, y)$ の中に現れるいくつかのピークの位置を運動量 k の関数として図 3 に示している。図の中では、原点に最も近い二つのピークを実線で示してあるが、その二つのピークが最も近づく運動量 ($k \sim 0.4k_F$) から超流動ギャップ Δ が読み取れる。その具体的な数値は $\Delta = 0.53\epsilon_F$ であり、量子モンテ・カルロ法の数値シミュレーション [13] や実験データの解析 [14] から得られた値と矛盾しない結果となっている。

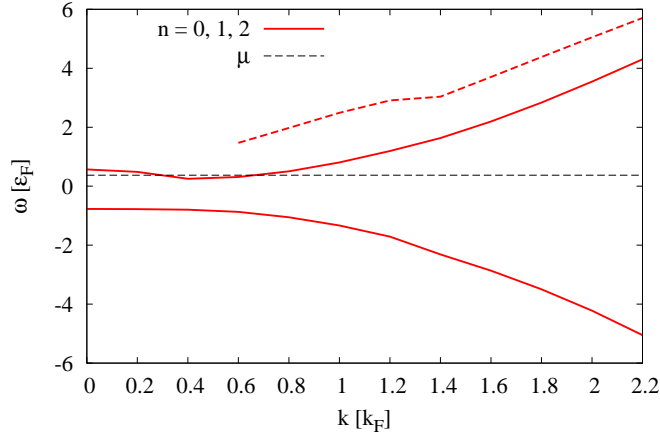


図 3: 一粒子スペクトル関数 $A(\omega, y)$ が持つピークの運動量 k による振る舞い。赤い実線は原点に最も近い二つのピークの位置を示し、赤い破線は $\omega > 0$ 領域にある二つ目のピークの位置を示す。黒い破線は化学ポテンシャル μ に対応している。

4 まとめ

本稿では、演算子積展開法と最大エントロピー法を用いてユニタリ・フェルミ気体の一粒子スペクトル関数を求める手法を議論した。まずは、一粒子自己エネルギー $\Sigma(\omega)$ に関する OPE が与えられたときに、その解析性から一般的な Kernel $K(\omega)$ を持つ和則をどのように導くかについて説明した。さらに、Kernel として式 (4) にあるような Borel Kernel を用いた和則を MEM により解析した結果を簡単に紹介し、一粒子スペクトル関数のピークは運動量の関数としてどのように振る舞うかを示した。

今後の展望としては、本稿で紹介した手法を有限温度を持つユニタリ・フェルミ気体に拡張し、擬ギャップなどの興味深い現象を調べることや、これまでその OPE がまだ詳しく調べられていない物理量に適用するなど、いくつかの方向性が考えられる。

参考文献

- [1] E. Braaten and L. Platter, Phys. Rev. Lett. **104**, 223004 (2010).
- [2] D.T. Son and E.G. Thompson, Phys. Rev. A **81**, 063634 (2010).
- [3] Y. Nishida, Phys. Rev. A **85**, 053643 (2012).
- [4] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147**, 385 (1979); **147**, 448 (1979).
- [5] P. Gubler, M. Oka, Prog. Theor. Phys. **124**, 995 (2010).
- [6] J. Carlson, S. Gandolfi, K.E. Schmidt and S. Zhang, Phys. Rev. A **84**, 061602(R) (2011).
- [7] S. Gandolfi, K.E. Schmidt and J. Carlson, Phys. Rev. A **83**, 041601(R) (2011).
- [8] P. Gubler, K. Morita and M. Oka, Phys. Rev. Lett. **107**, 092003 (2011).

- [9] K. Ohtani, P. Gubler and M. Oka, *Eur. Phys. J. A* **47**, 114 (2011).
- [10] K. Ohtani, P. Gubler and M. Oka, *Phys. Rev. D* **87**, 034027 (2013).
- [11] K. Suzuki, P. Gubler, K. Morita and M. Oka, *Nucl. Phys.* **A897**, 28 (2013).
- [12] P. Gubler, “A Bayesian Analysis of QCD Sum Rules”, Springer Theses, Springer Japan (2013).
- [13] J. Carlson and S. Reddy, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 060401 (2005).
- [14] J. Carlson and S. Reddy, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 150403 (2008).