

# 量子渦生成にもなう超流動崩壊の前駆現象

國見昌哉<sup>1</sup>, 加藤雄介<sup>2</sup>

東京大学大学院総合文化研究科

Bose-Einstein 凝縮体中を一定速度で動くポテンシャルがあるときに、Gross-Pitaevskii 方程式と Bogoliubov 方程式を用いて臨界速度近傍の励起スペクトルとゆらぎを計算した。その結果、第 1 励起エネルギーのスケールリング則と局所的な低エネルギーの密度ゆらぎの増大を見いだした。これらは量子渦生成にもなう超流動崩壊の前駆現象とみなすことができる。詳細は [1] を参照されたい。

## 1 イントロダクション

超流動状態を特徴付ける性質の一つとして臨界速度の存在が挙げられる [2, 3]。すなわち、臨界速度以下の状態では散逸が生じないが、臨界速度を超えると散逸が生じる状態になる。臨界速度以上では量子渦ができることが多い。このことは冷却原子系の実験において実際に観測されている [4, 5, 6, 7]。

超流動の崩壊の研究では、その系の励起状態の性質を調べるのが重要な課題となる。しかしながら、量子渦生成が起きる系では、量子渦の多彩な非線形ダイナミクスが数多く報告されているものの [8, 9, 10, 11]、この系における励起状態、ゆらぎの解析は行われていなかった。

本論文では Bose 多体系に対する平均場理論である Gross-Pitaevskii (GP) 理論 [12] と、秩序変数の最低次のゆらぎを記述する Bogoliubov 理論 [13] を用いて解析を行った結果を報告する。

## 2 モデル

$N$  個の Bose 粒子が 2 次元のトーラス状の容器  $[-L/2, L/2) \times [-L/2, L/2)$  に閉じ込められている系を考える。また、速度  $-v(\mathbf{v} \equiv v\mathbf{e}_x, v > 0)$  とする。 $\mathbf{e}_x$  は  $x$  方向の単位ベクトル) で動くポテンシャル  $U(\mathbf{r} + \mathbf{v}t)$  があるとする。ここで、ポテンシャルとともに動く座標系では、Bose-Einstein 凝縮の秩序変数  $\Psi(\mathbf{r})$  (凝縮体波動関数と呼ばれている) は以下の GP 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r})|^2\Psi(\mathbf{r}) = \mu\Psi(\mathbf{r}), \quad (1)$$

に従う。ここで、 $\mu$  は化学ポテンシャルで粒子数  $N = \int d\mathbf{r}|\Psi(\mathbf{r})|^2$  を一定にするように決める。外部ポテンシャルはガウス型 ( $U(\mathbf{r}) \equiv U_0 \exp[-(\mathbf{r}/d)^2]$ ) を採用する。 $g(> 0)$  は斥力相互作用の大きさを表す。また、座標変換を行ったことにより、境界条件は周期境界条件ではなく、捻られた境界周期境界条件

$$\Psi(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_x) = e^{imvL/\hbar}\Psi(\mathbf{r}), \quad \Psi(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_y) = \Psi(\mathbf{r}), \quad (2)$$

となり、ここにポテンシャルの速度の情報が含まれる。ここで、 $\mathbf{e}_y$  は  $y$  方向の単位ベクトルである。この境界条件は変換  $v \rightarrow v + 2\pi\hbar n/(mL)$  ( $n$  は任意の整数) に対して不変である。以下では  $v$  を小さくしていったときに、 $|v| < \pi\hbar/mL$  の基底状態になるブランチに着目する。

Bose 凝縮体中の励起状態は以下の Bogoliubov 方程式

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} & -g[\Psi(\mathbf{r})]^2 \\ g[\Psi^*(\mathbf{r})]^2 & -\mathcal{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(\mathbf{r}) \\ v_i(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \epsilon_i \begin{bmatrix} u_i(\mathbf{r}) \\ v_i(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) - \mu + 2g|\Psi(\mathbf{r})|^2, \quad (4)$$

<sup>1</sup>e-mail address: kunimi@vortex.c.u-tokyo.ac.jp

<sup>2</sup>e-mail address: yusuke@phys.c.u-tokyo.ac.jp

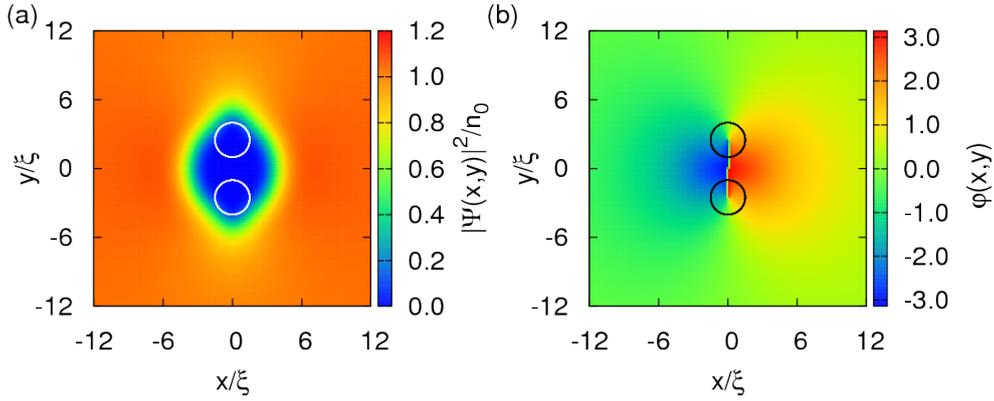


図 1: (a) 凝縮体密度の空間プロファイル (b) 凝縮体波動関数の位相の平面波成分  $e^{imvx/\hbar}$  を除いたものの空間プロファイル。パラメータは  $L = 48\xi$ ,  $U_0 = 5\epsilon_0$ ,  $d = 2.5\xi$ ,  $v = 0.426545v_s$  である。白丸または黒丸が GVP の位置を表す。

を対角化することで得られる。ここで、 $u_i(\mathbf{r})$  と  $v_i(\mathbf{r})$  は励起状態  $i$  の波動関数で、 $\epsilon_i$  が励起エネルギーを表す。励起状態の波動関数に対する境界条件はそれぞれ  $u_i(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_x) = e^{imvL/\hbar}u_i(\mathbf{r})$ ,  $u_i(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_y) = u_i(\mathbf{r})$ ,  $v_i(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_x) = e^{-imvL/\hbar}v_i(\mathbf{r})$ ,  $v_i(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_y) = v_i(\mathbf{r})$  である。

以下では長さ、速度、エネルギーをそれぞれ回復長  $\xi \equiv \hbar/\sqrt{mgn_0}$ 、音速  $v_s \equiv \sqrt{gn_0/m}$ 、 $\epsilon_0 \equiv \hbar^2/(m\xi^2) = gn_0$  で測ることにする。ここで、 $n_0 \equiv N/L^2$  は平均粒子数密度である。以下では  $1/\sqrt{n_0\xi^2} = 0.1$  の結果を示す。数値計算の詳細は [1] を参考にされたい。

### 3 結果

初めに、臨界速度近傍における GP 方程式の安定定常解を図 1 に示す。特徴的な振る舞いとして密度の小さい領域に量子渦が対で存在していることがわかる。このような量子渦対は幽霊渦 (Ghost vortex pair, GVP)[14, 11] と呼ばれている。GVP の存在はただちに超流動性が失われていることを意味しない。この状態には励起状態の異常性が見られないからである。

次に、第 1 励起状態のエネルギー (エネルギーギャップ) の速度依存性を図 2(a) に示す。図より、2 つの特徴的な振る舞いが見て取れる。1 つ目が速度が小さい領域における線形の振る舞いである。これはポテンシャルが無いときの一様系の性質が反映していると考えられる。なぜなら、一様系の第 1 励起状態のエネルギーは  $\Delta_{\text{umi}} = 2\pi gn_0/(L/\xi)[-v/v_s + \sqrt{\pi^2/(L/\xi)^2 + 1}]$  と書け、 $v$  について線形であるからである。2 つ目が臨界速度近傍におけるエネルギーギャップの急激な減少である。これを特徴付けるため、フィッティング関数を  $\Delta = \Delta_0 [(v_c - v)/v_c]^c$  と仮定し、臨界速度近傍の点を用い、フィッティングを行った。フィッティングパラメータは  $\Delta_0$ ,  $c$ ,  $v_c$  で、 $v_c$  は臨界速度を表す。結果を図 2(b) に示す。フィッティング結果より、我々は  $c = 1/4$  を得た。この指数の値は GP 方程式の定常解の分岐構造を反映していて、我々の結果は先行研究のもの [9] とコンシステントである。このスケーリング則の存在は、物理的には、臨界速度に近づくにつれて特徴的な時間スケールのべき的な発散があることを示している。

以上のように、我々は臨界速度近傍の励起スペクトルのスケーリング則を見い出したが、これだけでは量子渦の情報得られない。これを見るために、我々は密度ゆらぎに着目した。凝縮体波動関数と、励起状態の波動関数を用いて、密度ゆらぎは以下のように書けることが知られている：

$$\delta n_i(\mathbf{r}) \equiv \Psi^*(\mathbf{r})u_i(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r})v_i(\mathbf{r}). \quad (5)$$

この計算結果を図 3 に示す。ポテンシャルの速度が十分小さいときには、図 3(a) から見てとれるように、低エネルギー領域における密度ゆらぎはほとんど存在しない。ポテンシャル速度を大きくしてい

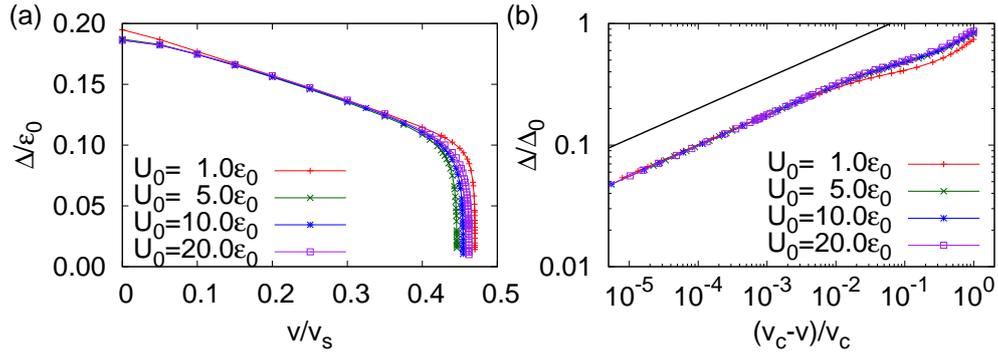


図 2: (a)  $L = 32\xi$ ,  $d = 2.5\xi$  のときの、エネルギーギャップの速度依存性。 (b)(a) をフィッティングした結果。黒線は  $[(v_c - v)/v_c]^{1/4}$  を表す。

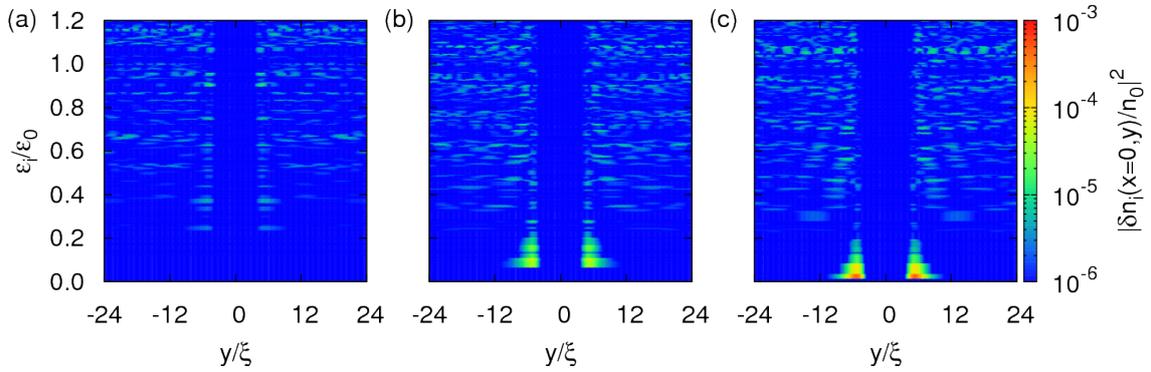


図 3:  $L = 48\xi$ ,  $U_0 = 10\epsilon_0$ ,  $d = 2.5\xi$ ,  $x = 0$  のときの局所的な密度ゆらぎの大きさを示したもの。 (a)、(b)、(c) はそれぞれ速度が  $v = 0.1v_s$ ,  $0.42v_s$ ,  $0.43033v_s$  の結果である。

くと図 3(b)、(c) のように、低エネルギー領域での密度ゆらぎの増大が見られる。この大きな密度ゆらぎにより、ポテンシャルにピン止めされていた GVP がピン止めから外れ、ポテンシャルの外の領域に出てくるものと考えられる。

## 4 まとめ

ポテンシャルが一定速度で動いているとき、Gross-Pitaevskii 方程式と Bogoliubov 方程式を数値的に解いた。臨界速度近傍では第 1 励起状態のエネルギーにスケーリング則  $\Delta \sim |v_c - v|^{1/4}$  が成立することと、局所的な密度ゆらぎの増大を見いだした。これらの振る舞いは量子渦生成における超流動の崩壊の前駆現象であると言える。

## 参考文献

- [1] M. Kunimi and Y. Kato, arXiv:1305.3995 (2013), M. Kunimi and Y. Kato (in preparation).
- [2] L. D. Landau, J. Phys. (USSR) **5**, 71 (1941).
- [3] R. P. Feynman, J. Low. Temp. Phys. **1**, 17 (1995).
- [4] C. Raman, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2502 (1999).
- [5] R. Onofrio, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 2228 (2000).
- [6] T. W. Neely, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 160401 (2010).
- [7] K. C. Wright, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **110**, 025302 (2013).
- [8] T. Frisch, Y. Pomeau, and S. Rica, Phys. Rev. Lett. **69**, 1644 (1992).
- [9] C. Huepe and M-E. Brachet, Physica D, **140**, 126 (2000).

- [10] K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. Lett. **104**, 150404 (2010).
- [11] K. Fujimoto and M. Tsubota, Phys. Rev. A, **83**, 053609 (2011).
- [12] E. P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961), L. P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961).
- [13] N. N. Bogoliubov, J. Phys. USSR **11**, 23 (1947).
- [14] K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. A, **67**, 033610 (2003).