Thermodynamical Property of Entanglement Entropy for Excited States

野崎 雅弘 [1]、Jyotirmoy Bhattacharya[2]、高柳 匡 [3]、宇賀神 知紀 [4]

京都大学 基礎物理学研究所 [1,3,4]、Kavli IPMU[2,3,4]

概要

我々は本研究によって非常に部分系を小さく取った時、そのエンタングルメント・エントロピーは理論の詳細に依らないユニバーサルな有効温度 T_{ent} を通じて熱力学第一法則に似た関係式に従うことを見出した。

導入

昨今、多岐にわたる分野においてエンタングルメント・エントロピーが注目を集めている。例えば、物性理論においては零温度においても用いることができる量子的なオーダーパラメタとして注目を集め、素粒子理論においては AdS/CFT 対応や重力理論を深く理解するための道具として注目を集めている [1][2][3]。

我々はこの様に現代物理学において非常に重要な物理量であるエンタングルメント・エントロピーの統計力学的側面に注目して本研究を行った。エンタングルメント・エントロピーは、非平衡系においても定義可能な物理量であるため、統計力学の分野では非平衡系の物理におけるエントロピーとして用いようという試みがある。この様な試みにおいて、エンタングルメント・エントロピーの基本的な性質を明らかにしておくことは重要である。我々は熱力学エントロピーが従う熱力学法則に注目し、エンタングルメント・エントロピーにも類似した従うべき基本法則が存在するかどうか調べた。

その結果、Large N の非常に多くの場を含む強結合のゲージ理論において、高エネルギーではエンタングルメント・エントロピー ΔS_A と内部エネルギー ΔE_A が従うべき熱力学第一法則に似た法則

$$\Delta E_A = T_{ent} \cdot \Delta S_A \tag{1}$$

が存在し、この時、定義される有効温度 T_{ent} はこの様なゲージ理論の詳細には依らないことを見出した [4]。この基本法則と有効温度 T_{ent} に関して詳しく説明していく。

エンタングルメント・エントロピー

初めにエンタングルメント・エントロピーの定義とその性質に関して簡単に説明する。ある時刻においてヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を部分系 $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ に分割する。この時に部分系 $\mathcal{H}_B$ の自由度に関しトレースを取り、その自由度を無視する。この時に定義される密度行列

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B \rho \tag{2}$$

を用いて、フォン・ノイマン・エントロピーとしてエンタングルメント・エントロピーは

$$S_A = -\mathrm{Tr}_A\ \rho_A \log \rho_A \tag{3}$$

と定義される。

このエンタングルメント・エントロピーは状態の持つ量子的なもつれを定量的に測定する量である。例えば

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A\right) \otimes \left(|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B\right) \tag{4}$$

の様に直積状態で書かれる量子的にもつれていない状態に対してはエンタングルメント・エントロピーは零になる。しかし、

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B\right) \tag{5}$$

の様に A のスピンの状態が観測されると同時に B のスピンの状態が分かる、量子的にもつれた状態に対してエンタングルメント・エントロピーは零ではなく、log2 という値を持つ。この様にエンタングルメント・エントロピーは状態の量子的なもつれを定量的に測定する物理量である。

ホログラフィック　エンタングルメント・エントロピー

前節で定義したエンタングルメント・エントロピーについて、場の理論で解析を行う事は技術的に困難である。そのため、我々は AdS/CFT 対応に基づいて解析を行った。この AdS/CFT 対応とは d 次元の多くの場を含む強結合のゲージ理論がもう一つ次元の高い $d+1$ 次元の AdS 時空上の古典重力理論に等価であるという予想である。この対応は大雑把にいえば、ゲージ理論の物理量と重力理論の幾何的な量との対応を予言したものである。つまり、エンタングルメント・エントロピーにもホログラフィック エンタングルメント・エントロピーとよばれる対応するある幾何的な量が存在する。

このホログラフィック エンタングルメント・エントロピーは次の様に定義される。ある時刻において AdS 時空の境界を部分系 A と B に分割する。この時、この部分系 A と B の境界を ∂A と呼ぶ。この ∂A からバルク中に伸びていく曲面の内、最も面積が小さくなる曲面は最小曲面 γ_A と呼ばれる。この曲面の面積 $Area(\gamma_A)$ を重力定数 G_N で割ったものとしてホログラフィック エンタングルメント・エントロピーは

$$\Delta S_A = \frac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{4G_N} \tag{6}$$

と定義される。我々はこのホログラフィック エンタングルメント・エントロピーに関して解析を行い、エンタングルメント・エントロピーが従うべき基本法則が存在するかどうか調べた。

基本法則について

我々はエンタングルメント・エントロピーに対しても熱力学第一法則の様な基本法則が存在するか調べる為、次の様なセットアップで解析を行った。

セットアップ

d 次元の共形場理論において熱化や量子熱化の様な何らかの方法によって系を少しだけ励起させることを考える。この時、系の状態は一般に非平衡状態になる。この様な場の理論に対応する重力理論は境界から非常に離れた部分を変形した AdS 時空上の重力理論となる。計量の形として

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\left[-f(z)dt^2 + g(z)dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1}\left(dx^i\right)^2\right] \tag{7}$$

を仮定する。この時、z が零の近傍では $g(z), f(z)$ はそれぞれ

$$g(z) \simeq \frac{1}{f(z)} \simeq 1 + mz^d \tag{8}$$

と展開できる。ここで現れる m というパラメタは対応する場の理論の励起エネルギーのスケールとなっている。この様に系を励起させた際に生じる部分系に含まれるエネルギーの変化とその部分系に対するエンタングルメント・エントロピーの変化を調べた。

エンタングルメント・エントロピーとエネルギー密度

この様なセットアップの下、エンタングルメント・エントロピー ΔS_A と部分系に含まれる内部エネルギー ΔE_A についてホログラフィックに解析を行った。この時、部分系として球形の場合とストリップの場合を考えたがここでは簡単のため、球形の場合の結果について述べる。また、前述した様に系の励起エネルギーは非常に小さく取った。これは定量的には部分系の特徴的な大きさ l を

$$ml^d \ll 1 \tag{9}$$

を満たすように取ることを意味する。この時、エンタングルメント・エントロピーとこの部分系に含まれる内部エネルギーはホログラフィックにそれぞれ

$$\begin{aligned}\Delta S_A &= \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{4(d+1)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \cdot \frac{R^{d-1}}{G_N} \cdot ml^d, \\ \Delta E_A &= \frac{\pi^{\frac{d-3}{2}}}{8\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \cdot \frac{R^{d-1}}{G_N} \cdot ml^{d-1},\end{aligned} \tag{10}$$

と求まる。この時、エンタングルメント・エントロピーは (9) の条件の下、ml^d について展開を行い、その一次まで評価した結果である。この結果から

$$\Delta E_A = T_{ent} \cdot \Delta S_A \tag{11}$$

という関係がエンタングルメント・エントロピーと内部エネルギーの間に成り立つ事が分かる。またこの時、定義される有効温度 T_{ent} は

$$T_{ent} = \frac{d+1}{2\pi l} \tag{12}$$

と求まる。(12) からこの有効温度 T_{ent} は部分系の特徴的な大きさの逆数に比例するが重力定数 G_N や AdS 半径 R 等には依存しないため、理論の詳細に依らない事が分かる。

まとめと展望

強結合で Large N のゲージ理論において、(9) を満たす非常に高エネルギーではエンタングルメント・エントロピーは理論の詳細に依らないユニバーサルな有効温度 T_{ent} を通じての熱力学第一法則に類似した関係式 (11) に従うことを見出した。

今後の展望としては熱力学第二法則の様な他の熱力学法則に類似した基本法則がエンタングルメント・エントロピーに対しても存在するか調べることや、有効温度についてのより深い物理的な理解を行う事が挙げられる。

[1] M. Nozaki, T. Numasawa, A. Prudenziati and T. Takayanagi, "Dynamics of Entanglement Entropy from Einstein Equation," Phys. Rev. D **88**, 026012 (2013) [arXiv:1304.7100 [hep-th]].

[2] M. Nozaki, S. Ryu and T. Takayanagi, "Holographic Geometry of Entanglement Renormalization in Quantum Field Theories," JHEP **1210**, 193 (2012) [arXiv:1208.3469 [hep-th]].

[3] D. D. Blanco, H. Casini, L. -Y. Hung and R. C. Myers, "Relative Entropy and Holography," JHEP **1308**, 060 (2013) [arXiv:1305.3182 [hep-th]].

[4] J. Bhattacharya, M. Nozaki, T. Takayanagi and T. Ugajin, "Thermodynamical Property of Entanglement Entropy for Excited States," Phys. Rev. Lett. **110**, no. 9, 091602 (2013) [arXiv:1212.1164].