新奇な非平衡臨界現象を記述する現象論[1]

南　佑樹
理化学研究所

最近、定常電流が流れる非平衡定常系で、新奇な相転移がゲージ・重力対応により理論的に見出された。本研究では、この相転移を理解するための第一歩として、現象論の構成をする。ここでは、平衡相転移のランダウ理論の拡張を議論する。

1　導入

最近、定常電流が流れる非平衡定常系で新奇な相転移がゲージ・重力対応により理論的に見出された [1] 。以下で、どのような相転移なのかについて簡単に紹介する。

まず、定電場 E が掛けられており定常電流 J が駆動されている、非平衡定常系を考えよう。電場が弱ければ、定常電流は電場に比例する。この領域は線形領域と呼ばれる。電場を強くしていくと、この線形関係は破れ、電流は電場に対して非線形な応答を示すことになる。この領域では線形応答理論が使えず、理論的に微視的に扱うのが非常に困難な状態である。しかしながら、ゲージ・重力対応では、この領域も計算可能であり、実際、微分抵抗（$\partial E/\partial J$）が負になる非線形領域に特徴的な現象も [2, 3]、理論的に再現されている [4] 。

この非線形領域で 系と接している熱浴の温度を変化させると、電場と電流の関係に特異性が表れ、微分抵抗に関する相転移のように見えるというのが、最近、ゲージ・重力対応により見出された新奇な相転移である。図 1 が、電流と電場の関係が温度によりどう変化するか、ゲージ・重力対応により計算したものである。一番上の曲線が臨界温度以下、$T < T_c$ で、真ん中の曲線が $T = T_c$ のとき、下の曲線が $T > T_c$ である。[2] どれも、電流が小さい領域では微分抵抗が負で、一方、大きい領域では微分抵抗は正となっている。

まず、$T < T_c$ では、微分抵抗が正負の領域はスムーズにつながっている。次に、$T = T_c$ の曲線をみると、連続的につながっているが、ある臨界電流 J_c で電場の傾きが発散している。つまり、微分抵抗に特異性が表れる。最後に $T > T_c$ では一見、電場は連続的に見え、点 D から G の間で多価になっている。しかし、この曲線の D → E → F の部分は不安定であると考えられている [1] 。つまり、低電流領域から電流を大きくしていくと、点 D から点 F に不連続にジャンプすることになる。この振る舞いは、微分抵抗が負から正への 1 次相転移のように見える。さらに、$T = T_c$ の振る舞いは 2 次相転移、$T < T_c$ はクロスオーバーのようにみえる。これらの振る舞いを相転移とみなし相図を書くと、図 1 の右上部のようになる。この相図をみると、1 次相転移線の端点が 2 次相転移点になっており、気液相転移の相図や QCD 相図と似ていることがわかる。

さらに、この 2 次相転移点近傍では非線形電気伝導度（$\sigma \equiv J/E$ ）がスケール則を示すことが見出されている [1] 。一次相転移線に沿って、臨界点に近づくと

$$\sigma - \sigma_c \sim (T - T_c)^{1/2} \tag{1}$$

また、$T = T_c$ に保って $J > J_c$ から近づくと

$$\sigma - \sigma_c \sim (J - J_c)^{1/3} \tag{2}$$

[1] この講演は、日高義将氏と中村真氏との共同研究に基づきます。

[2] ここでは、定性的な振る舞いに興味があるとして、「T_c の値がどのくらいなのか？」などは考えないことにする。詳細については、文献 [1] を参照。

と振る舞う。ここで、σ_c は非線形伝導度の臨界点での値。

以上が、ゲージ・重力対応より見出された新奇な非平衡相転移である。これは非平衡定常系で起こるまったく新しい相転移であり非常に興味深い現象である。しかし、ここで問題になるのが、ゲージ重力・対応では「どのような物理がおこっているのか？」がわからないということである。また、この相転移は非線形非平衡状態で起こる現象であり、どのような理論形式で記述できるのかについても、全く明らかではない。

平衡相転移では、拡張した自由エネルギーをオーダーパラメーターについて最小化することにより、定性的な振る舞いが一般に記述できることが知られている。これはランダウ理論と呼ばれ、新しい相転移を解析する際にとられる最初の一歩となっている [5]。

本研究では、この平衡相転移のランダウ理論の非平衡相転移への拡張を試みる。非平衡定常状態にそもそも拡張できるかどうか明らかではないが、ここではチャレンジしてみることにする。これにより、新奇な非平衡相転移を理解するための第一歩を踏み出すことを目指す。

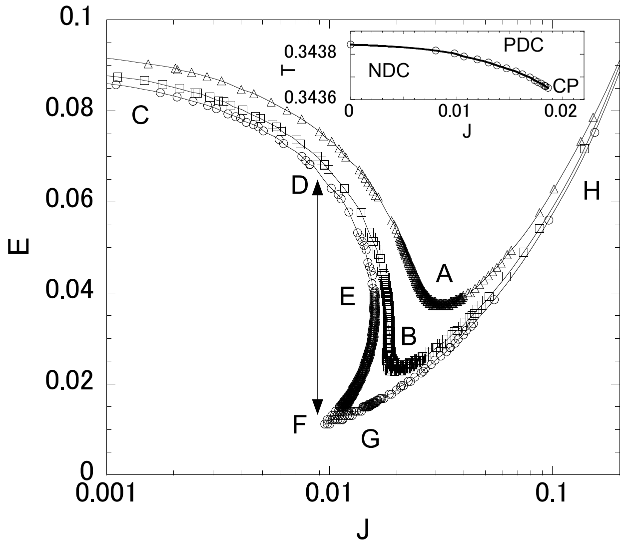

図 1: 電場ー電流曲線の温度依存性。△:$T < T_c$、□:$T = T_c$、○:$T > T_c$ を表す。図の右上部は相図。PDC、NDC はそれぞれ微分抵抗が正負の領域を表す。CP は二次相転移点を表す。文献 [1] より抜粋。

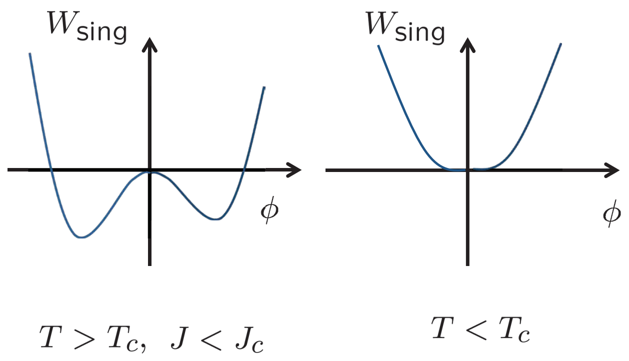

図 2: 散逸をオーダーパラメータの関数として書いた概略図。$T > T_c$ では、二重井戸型で J を変化させることにより一次相転移を起こす（左図）。$T < T_c$ では、一重井戸型で最小値は J に対してスムーズに変化する（右図）。

2 ランダウ理論の拡張

2.1 母関数としての散逸

ランダウ理論の拡張を考えた際にまず問題になるのが、「非平衡定常系で自由エネルギーにあたるものは何か？」ということである。ここで、平衡状態の自由エネルギーに代わるものとして、電流の関数として書いた散逸 $W(J,T)$ を考えよう。これを、電流で微分すれば、与えられた J,T での電場を得る。

$$\frac{\partial W(J,T)}{\partial J} = E(J,T) \tag{3}$$

つまり、散逸を電場の母関数、平衡系での自由エネルギーにあたるものとみなす。

簡単な例として、線形領域におけるジュール熱を考えてみよう。ジュール熱は

$$W(J) = \frac{1}{2\sigma} J^2 \tag{4}$$

で与えられる。ここで σ は線形電気伝導度。このとき、電場は

$$E(J) = \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{1}{\sigma} J \tag{5}$$

となる。つまり、通常の線形関係

$$J = \sigma E \tag{6}$$

を得る。

今、非線形領域への拡張を考える。

$$W(J) = aJ^2 - bJ^4 + cJ^6 \tag{7}$$

ここで、a, b, c はある正のパラメーター。非線形性を表すために、6 次の項まで加えた。これにより、電場のクロスオーバー的な振る舞いを記述できる。

2.2 オーダーパラメーターの導入

さて、散逸関数にオーダーパラメーター ϕ への依存性を導入することで、相転移を記述できるように拡張しよう。ランダウ理論のアナロジーから、拡張した散逸をオーダーパラメーターについて最小化することにより、定常状態が決まると仮定する。つまり、

$$\frac{\partial W(\phi, J, T)}{\partial \phi} = 0 \tag{8}$$

の解、$\bar{\phi}(J, T)$ が、与えられた J, T でのオーダーパラメーターの値である。さらに、これを拡張した散逸に代入したもの $W(\bar{\phi}(J, T), J, T)$ が、J, T での散逸で、

$$\frac{\partial W(\bar{\phi}(J, T), J, T)}{\partial J} = E(J, T) \tag{9}$$

と電場の母関数になるとする。

さて、拡張した散逸の具体的な関数形を考えよう。まず、オーダーパラメーターとカップルし特異性を生む部分と、スムーズな部分に分けて書くことにする。

$$W(\phi, J, T) = W_{\mathrm{sing}}(\phi, J, T) + W_{\mathrm{reg}}(J, T) \tag{10}$$

W_{sing} が特異性を生む部分。W_{reg} がスムーズな変化を与える部分であり、ここでは (7) 式で与えられるものとする。W_{sing} は二次相転移点近傍で

$$W_{\mathrm{sing}}(\phi, J, T) = -r(T - T_c)\phi^2 + \frac{u}{4}\phi^4 - d(J - J_c)\phi \tag{11}$$

と書けると仮定する。ここで、r, u, d は定数。このとき、電場は

$$E(J, T) = E_{\mathrm{reg}}(J, T) - d\bar{\phi}(J, T) \tag{12}$$

となる。ここで $E_{reg} = \partial W_{\mathrm{reg}}/\partial J$ である。つまり、オーダーパラメーターの特異性は電場にそのまま反映される。

今、W_{sing} は $T > T_c$ で、図 2 のように二重井戸型であり、J が J_c より大きくなると、最小値が左の井戸の底から右に飛ぶことになる。つまり、$J = J_c$ で、一次相転移を起こす。また、$T < T_c$ では、一重井戸型になるので J を変化させても、最小値はジャンプせずスムーズに変化する。つまり、クロスオーバーである。一次相転移とクロスオーバーが定性的に記述できることがわかる。

次に、スケール則についてみる。$T = T_c$ に固定して臨界点に近づくと、(11) 式の最小化から

$$\bar{\phi}(J, T_c) \sim (J - J_c)^{1/3}, \tag{13}$$

$$\sigma - \sigma_c \sim (J - J_c)^{1/3} \tag{14}$$

を得る。さらに、$J = J_c$ に固定して、近づくと

$$\bar{\phi}(J_c, T) \sim (T - T_c)^{1/2}, \tag{15}$$

$$\sigma - \sigma_c \sim (T - T_c)^{1/2} \tag{16}$$

を得る。式 (1)、(2) のスケール則を再現できていることがわかる。

2.3 まとめ

本研究では、定常電流が流れる非平衡定常系での新奇な相転移を理解するための第一歩として、平衡相転移のランダウ理論の拡張を議論した。その結果、拡張した散逸の最小化により、一次相転移、クロスオーバーの定性的振る舞い、および、スケール則が記述できることがわかった。また、この相転移を記述するためには、変数として、電流 J、電場 E、温度 T のほかにオーダーパラメータが必要であることが示唆された。さらに、そのオーダーパラメータは臨界点近傍で、式 (13)、(15) のように振る舞うであろうことが分かった。

しかし、この現象論には記述できない点が一つだけある。図 1 をみると、$J = J_c, T = T_c$ で、電場の傾きは左から近づくと $-\infty$ となるが、右から近づくと正の有限の値となっている。しかし、(11) 式の最小化では、電場の傾きは、どちらから近づいても $-\infty$ となり記述できない。この傾きが、臨界点に近づく方向により違うという現象は、平衡相転移の場合と大きくことなる点である。

今後の展望としては、「記述できない点がなぜ現れるのか？」、「オーダーパラメータはどのような物理量に対応するのか？」、この現象論の統計力学的な基礎付け、などがあげられる。

参考文献

[1] S. Nakamura, Phys. Rev. Lett. **109**, 120602 (2012) [arXiv:1204.1971 [hep-th]].

[2] E. Scholl, *Nonlinear Spatio-Temporal Dynamics and Chaos in Semiconductors* (Cambridge University Press, Cambridge 2001).

[3] Y. Taguchi, T. Matsumoto and Y. Tokura, Phys. Rev. B **62**, 7015 (2000).

[4] S. Nakamura, Prog. Theor. Phys. **124**, 1105 (2010) [arXiv:1006.4105 [hep-th]].

[5] P. A. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principle of condensed matter physics*, (Cambridge University Press, 1995) .