AdS/CFT 対応における定常粘性流

小川 軌明[1]
韓国高等科学院 (KIAS)

外力の作用により速度勾配が定常に保たれた流体系は、時観的に不変でありながらエネルギー・運動量の散逸が存在する非平衡定常系である。本研究ではそのような系に対して、強結合領域で AdS/CFT 対応に基づく重力双対の構成と、それに基づく散逸の計算を試みた。その結果、無質量クォーク流体の場合、エネルギーおよび運動量の散逸に荷電カレント勾配の 2 乗から始まる粘性項が現れることを見出した。

1 セットアップ

ゲージ対称性 SU(N_c) を持つ $\mathcal{N}=4$ Yang-Mills 理論に $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つ N_f 組のクォーク (ハイパー多重項) が結合した理論を考える。ここで前者 (グルーオン・セクタ) は一定温度のプラズマ状態にあり、後者のクォーク流体が外力を受けて流速勾配を持っているとする。ここで $N_c \gg N_f$ であれば前者の熱容量は後者に比べてはるかに大きく、後者の振る舞いに注目すれば前者は熱浴の役割を果たす。本稿では以下、この非平衡定常系に対して AdS/CFT 対応による重力双対を構成し、その散逸を計算する。

2 重力双対

この理論には重力側で、表 1 のような D3-D7 配位が対応することが良く知られている [1]。ゲージ理論側の N_c, N_f は D3 および D7 の枚数にそれぞれ対応し、$N_c \gg N_f$ で D7 は D3 のつくる背景時空上のプローブとして扱ってよい。すなわち、このとき背景時空は熱浴温度に対応した AdS$_5$-Schwartzchild ブラックホール時空

$$ds^2 = -\frac{(1-(z/z_H)^4)^2}{z^2(1+(z/z_H)^4)}dt^2 + \frac{dz^2}{z^2} + \frac{1+(z/z_H)^4}{z^2}(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2) + d\Omega_5^2 \tag{1}$$

であり、その上を運動するプローブ D7 ブレーンの DBI 作用

$$S_{DBI}^{D7} = -N_f T_{D7}\int d^8\xi \sqrt{-\det\left(\tilde{g}+2\pi\alpha' F\right)} \tag{2}$$

を考えれば良い。ここで $\tilde{g}_{\mu\nu}$ は D7 ブレーン上の誘導計量、$F_{\mu\nu}$ は D7 ブレーン上の U(1) ゲージ場 A_μ の強さである。また D7 ブレーンの埋め込み形状 $\theta(z)$ の遠方 ($z \to 0$) での振る舞いがクォーク質量に対応する ($\theta(z) \sim m_q z + \mathcal{O}(z^2)$) が、特にクォーク質量が 0 の場合には $\theta(z) \equiv 0$ となる。簡単のため、以下では専らこの場合を扱う。

また、クォーク・セクタのエネルギー運動量テンソルおよび散逸は、重力側では D7 上でゲージ場 A_μ が作るエネルギー運動量テンソルから求められる [2]. 特に散逸は、重力側ではエネルギーや運動量のホライズンへの流入と捉えることができ、エネルギー散逸は ${T^z}_0^{(D7)}$、x_1 方向の運動量散逸は ${T^z}_1^{(D7)}$ となる。非平衡定常系ではこれらは外力の仕事および力積と釣り合う必要がある (エネルギーや運動量の流入と流出が等しい)。従って外力の大きさ F およびその仕事率 W は

$$F = {T^z}_1^{(D7)}, \qquad W = -{T^z}_0^{(D7)}, \tag{3}$$

と表されることがわかる。

[1]e-mail address: `noriaki@kias.re.kr`

	t	x_1	x_2	x_3	r	θ	ϕ	σ_1	σ_2	σ_3
D3	○	○	○	○						
D7	○	○	○	○	○	$\theta(r)$		○	○	○

表 1: D3-D7 配位。$x_4 \sim x_9$ の $\mathbb{R}^6$ を極座標表示し、S^5 を S^2 上の S^3 ファイバーで表した。θ, ϕ はそれぞれ S^2 の緯度・経度座標、$\sigma_1 \sim \sigma_3$ は S^3 の座標を表す。

3 解の構成

ここで速度勾配に代え、定常なクォークカレント勾配のある配位を考える[2]。具体的には

$$J^0 = J^0_{(0)}\,, \qquad J^1 = J^1_{(0)} + x_2 J^1_{(1)} + \mathcal{O}(x_2^2)\,, \qquad J^2 = J^3 = 0\,, \tag{4}$$

とし、x_2 の領域および勾配 $J^1_{(1)}$ は小さいとして、これらでの展開を考える[3]。すると D7 上のゲージ場 A_μ は関数 $a_0^{(0)}(z)$, $a_1^{(0)}(z)$, $a_1^{(1)}(z)$ を用いて

$$A_0(z) = \mu + Ex + a_0^{(0)}(z) = \mu + Ex + \frac{J^0_{(0)}}{2\pi^2 N_f T_{D7}\alpha'^2} z^2 + \mathcal{O}(z^3)\,, \tag{5}$$

$$A_1(z) = a_1^{(0)}(z) + x_2 a_1^{(1)}(z) = \frac{J^1_{(0)} + x_2 J^1_{(1)}}{2\pi^2 N_f T_{D7}\alpha'^2} + \mathcal{O}(z^3)\,, \tag{6}$$

と表すことができる。最右辺は無限遠 (AdS 境界)$z \to 0$ における漸近形である。またここで x_1 方向の一様電場 E を導入した。

この式を作用 (2) に代入すれば、具体的に運動方程式を解くことができる。またそれを用いて ${T^z}_0^{(D7)}$ および ${T^z}_1^{(D7)}$ を求めることができ、最終的に外力およびその仕事率は

$$F = EJ^0_{(0)} + \frac{E^3 (J^0_{(0)})^3}{2^{11}\,(N_f T_{D7})^3\,(J^1_{(0)})^2} (J^1_{(1)})^2 + \mathcal{O}\left((J^1_{(1)})^3\right)\,, \tag{7}$$

$$W = E\left(J^1_{(0)} + x_2 J^1_{(1)}\right) + \frac{E^3 (J^0_{(0)})^2}{2^{11}\,(N_f T_{D7})^3\,J^1_{(0)}} (J^1_{(1)})^2 + \mathcal{O}\left((J^1_{(1)})^3\right)\,, \tag{8}$$

と求められる。これらのうち各々右辺第 1 項は抵抗によるジュール熱を表しており、勾配 $J^1_{(1)}$ に依存する第 2 項が粘性の寄与と考えられる。またここで $J^0_{(0)}$ および $J^1_{(1)}$ は E の関数として求められる [1] ことにも注意されたい。

4 議論

上記結果は、粘性応力らしきものがカレント勾配の 2 次から始まるという一見して奇妙なものである。AdS/CFT を用いた通常の線形応答理論による計算で、この系のクォーク・セクタの擦り粘性係数は 0 でないことがわかっている [3]。その結果との整合性を保つためにも、流速勾配とカレント勾配の関係を整理すること、用いている近似の妥当性を検証する[4]ことなどが少なくとも必要である。それらが解決されれば、数値解析などにより非線形領域を調べることも可能になると考えられる。

---

[2]非相対論的な場合にはこれらは単なる比例関係であり問題はない。ただ以下の計算は $m_q = 0$ の場合であり、クォーク対生成が容易に起こるために一般に両者には大きな違いが生じている。ポスターセッションにて中村真氏にご指摘頂いた。

[3]高次の効果を取り入れるには偏微分方程式を解く必要があり、解析的に扱うことには困難があると予想される。ただ、数値的な取扱いは可能であろう。

[4]本稿で考えた摂動項は、重力側で z の領域によっては必ずしも小さいと見なすことができない可能性がある。ポスターセッションにて高柳匡氏にご指摘頂いた。

参考文献

[1] A. Karch and A. O'Bannon, JHEP **0709**, 024 (2007) [arXiv:0705.3870 [hep-th]].

[2] A. Karch, A. O'Bannon and E. Thompson, JHEP **0904**, 021 (2009) [arXiv:0812.3629 [hep-th]].

[3] D. Mateos, R. C. Myers and R. M. Thomson, Phys. Rev. Lett. **98**, 101601 (2007) [hep-th/0610184].