

冷却原子系を用いた量子シミュレーション： 格子場の理論に対する新奇シミュレーション技術の現状と未来

一瀬郁夫

名古屋工業大学大学院工学研究科

現在、冷却原子系は実験・理論ともに精力的に研究され急速に進歩している物理学分野のひとつである。特にその中で冷却原子系にレーザーを当て、光格子を構成し、そこに原子を自在にトラップさせる技術が開発された。この技術を用いて、現存する計算機シミュレーション（古典シミュレーション）では解明が難しかった量子系、有限密度 QCD や強相関電子系などの研究を行うことが提案され、量子シミュレーションと呼ばれている。このレビュー講演では、その現状を概観し、特に興味深いテーマについて詳細に紹介する。その後、今後の展開を議論する。本テーマについてのレビュー講演は未だ多く為されていないので、広い意味での素粒子論研究者を聴衆と考えて講演の構成を行った。

1 Introduction

まず、量子シミュレーションについて簡単に説明しておこう。この考えは、量子コンピュータと同時代に、Feynman によって提唱されたことになっている。いつの時代にも物理的に興味のある量子系は存在し、なお且つその幾つかは解析的にその構造を解明することが難しく（だから面白い）、またその時代の計算機技術では信頼する解析が出来ないという状況が現れる。現在の例としては、有限密度量子色力学 (QCD) や高温超電導を代表とする強相関電子系がその範疇である。Einstein の言葉を借りると「問題はそれが生まれた枠内では解決することが出来ない。」この「名言」が意味するように、上記のような問題の解決には、別の枠組みの出現が必要であると考えてるのが自然であろう。

量子シミュレーションとは、興味のある量子系に対して疑似的な量子系を人工的に構成し、その物理的性質を調べ、元の量子系について新しい知見を得ることである [1]。この疑似系は十分に制御可能でなくてはならない。また、汎用性も要求されるであろう。疑似系を用いた実験では、系のパラメータは自在にコントロール出来、また物理現象を実際に時間を追って観測出来ることが望ましい。

ここで、素粒子物理学と物性物理学における「理論」およびシミュレーションの意味合いの違いについて注意しておく。素粒子論では QCD, QED に代表されるように自然を統括する理論はシンプルであり、基本的にその理論を「解く [2]」ことが目標とされる。この「解く」目標に量子シミュレーションは向かうこととなる。一方物性物理学においては、高温超電導現象に代表されるように、発見された物理現象の本質的な起源は明らかではなく、理論モデルはそれぞれの研究者の好みで提唱される。理論モデルは物質のある側面のみを記述していると考えべきで、量子シミュレーションはどのモデルが本質を捉えているかというように、モデルの識別に使われることになるであろう。

現在、この量子シミュレーションを実現する量子系として、希薄原子系が注目を集めている。この系は磁場や電場でトラップされた $10^6 \sim 10^7$ 個からなる原子集団であり、その次元や粒子間相互作用を自在にコントロール可能な点がその他の系と大きく異なっている。更に近年この原子系にレーザーを当て、人為的に空間格子を構築し、その格子点に原子をトラップすることが可能となった。これを光格子と呼ぶ。これにより、格子場の理論と密接に関連した量子系が存在することとなった。

ここで原子と素粒子との関係について説明しておこう。原子は内部自由度を持つ。この事実を積極的に使い、相対論的場の量子論の量子シミュレーターとして冷却原子系を用いることが可能となる。例えば a および b という 2 つの原子があり、その励起状態をそれぞれ a^* , b^* としよう。散乱により $a + b \rightarrow a^* + b^*$ となる過程を考える。ここで a^* , b^* はその磁氣的、電氣的性質が a, b と異なるため、

別の粒子に変化したと見なすことが出来、実際 a, a^* を別の光格子にトラップすることが可能である。そのトラップポテンシャルの形状が異なるために、2つの粒子は異なる質量を持つことが出来る。素粒子論的に見ると、上記の過程は2体粒子の散乱により、別の粒子が生成されたことになる。この例のように、原子系では原子そのものが消滅・生成されることはないが、その励起状態を上手く使うことにより、素粒子間の相互作用を疑似的に表現することが出来る。

この講演においては、光格子上の冷却原子系が興味ある量子系を疑似的に表す例を3つほど挙げ、その基本的な性質を説明することとする。

2 SU(N) 反強磁性スピンモデルと CP^{N-1} シグマモデル：

1/N-展開法の信頼性の実験的検証

このセクションではまず強相関物性系の典型である反強磁性量子スピン系についての量子シミュレーションを紹介しよう。またこの量子系は場の量子論の興味深いモデルである CP^{N-1} シグマモデルと密接に関連している。

電子のスピンは言うまでもなく $1/2$ であり、格子サイト上の強い斥力下では、電子数と格子数が同じときにはスピンの自由度のみが生き残り、系は反強磁性スピンモデルで記述される。これを Heisenberg モデルで表すとその Hamiltonian は、

$$H_{\text{SU}(2)} = J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j, \quad (1)$$

である。ここで $\hat{\mathbf{S}}_i$ は2次元正方格子のサイト i 上のスピン演算子である。このスピン演算子を粒子の生成・消滅演算子で記述することを考えよう。スピン \uparrow, \downarrow に対応して2種類のボソン演算子 $\hat{z}_{i,1}, \hat{z}_{i,2}$ を導入すると、スピン演算子は $\hat{\mathbf{S}}_i = \frac{1}{2} \hat{z}_i^\dagger \boldsymbol{\sigma} \hat{z}_i$ と表されるがスピンの大きさが $1/2$ なので、ボソンの Hilbert 空間に $\sum_a \hat{z}_{i,a}^\dagger \hat{z}_{i,a} |\text{Phys}\rangle = |\text{Phys}\rangle$ と制限を付ける。この表現は Schwinger ボソン表現として知られるが、その経路積分表示に対応する変数 $\sum_a |z_{i,a}|^2 = 1$ は CP^1 変数 (Complex Projective) と呼ばれる。スピンの $SU(2)$ 対称性は、この CP^1 変数の $SU(2)$ -unitary 変換に対する対称性に他ならない。

ここでスピンの大きさが大なる系を考えよう。単純に考えると、スピンの大きくなれば量子揺らぎは小さくなり、古典スピンに近づくこと期待される。電子のスピンは $1/2$ と決まっているが、原子では例えば ^{132}Cs , ^9Be , ^{135}Ba などがスピン $3/2$ を持ち、これらの原子は光格子にトラップされることが知られている。本来これらの反強磁性系も対称性としてスピン $SU(2)$ を持つが、on-site の原子間相互作用を調節することにより、その対称性を最大の $SU(4)$ にまで、高めることが可能であることが示される [3, 4]。原子はスピン $3/2$ を持つので、その z -成分は $(3/2, 1/2, -1/2, -3/2)$ であり、 $SU(4)$ 対称性はこの4成分を混ぜる unitary 変換に他ならない。同様にスピン $\ell/2$ ($\ell=\text{odd}$) まで拡張すると、その系は $SU(2\ell+1)$ 対称性を持つことになる。そしてこの $SU(2\ell+1)$ Heisenberg model は上記の CP^{N-1} 変数 $z_{i,a}$ ($a = 1, 2, \dots, N$) を用いて表される。ただしここで $N = 2\ell + 1$ である。

拡張された $SU(N)$ Heisenberg モデルの低エネルギー励起は、以下の連続時空間で定義された CP^{N-1} シグマモデルで表されることが知られている、

$$Z = \int D\bar{z} Dz D\sigma \exp \left(- \frac{N}{2g} \int d^3r [\bar{D}_\mu \bar{z} D_\mu z + \sigma (|z|^2 - 1)] \right), \quad (2)$$

ここで $D_\mu = \partial_\mu - (\bar{z} \partial_\mu z)$ であり、 σ は CP^{N-1} の物理的状態の拘束条件を架すための multiplier である。また結合定数 g は系の anisotropy $\lambda = J_x/J_y$ により $g = (1 + \lambda)/(\sqrt{2\lambda})$ と表される。系が対称

である場合は $\lambda = 1$ に対応し、 g は小さく系は自発的に対称性を破っているが、anisotropy が大きくなると g は大きくなり、対称性の破れは回復する。つまり、 g を変化させていくと、量子相転移が起ることになる。場の理論のモデルである式 (2) は、local gauge 変換 $z_x \rightarrow e^{i\alpha_x} z_x$ に対して不変であることに注意しよう。この対称性は元のスピン演算子が z_x の bilinear で出来ていることから生じている。また、 $A_{x\mu} \equiv i(\bar{z}\partial_\mu z)$ と定義すると、 $A_{x\mu}$ はゲージ場の役割を果たし、自然な形でこの複合ゲージ場を新たな自由度として理論に導入することが可能であることが実際の計算により示すことが出来る。さて、モデル式 (2) の相構造を調べることを考えよう。ここで N が十分大きな場合を考える。すると結合定数 g の大きさには制限を付けることなく $1/N$ を展開パラメーターとして、モデルの性質を解析的に求めることが出来る。 $1/N$ 展開の leading では、先のゲージ場とのカップリングを無視することが出来、非自明な期待値として $\langle z_N \rangle$ と $\langle \sigma \rangle$ を考えればよく、それらの有効ポテンシャルは $z_a (a \neq N)$ の単純なガウス積分を実行することにより、求めることが出来る。その結果、予想されるように2つの相が存在し、それらの内 $\langle z_N \rangle \neq 0, \langle \sigma \rangle = 0$ の相は反強磁性の長距離秩序をもつ相であり、また、 $\langle z_N \rangle = 0, \langle \sigma \rangle \neq 0$ の相はエネルギーギャップを持つ常磁性相である。この2つの相間の相転移は2次転移であり、 $1/N$ の高次の効果を考えてもその結果は変わらない [5]。

さてここで、連続極限を取る前の有限格子上で定義された格子 CP^{N-1} 理論を考えよう [4]。格子上的モデルに対しては、数値計算的手法のモンテカルロ・シミュレーションが適応できる。 CP^{N-1} 拘束についてはその変数を三角関数を用いて正確に表現することが出来る。ただし、あまり大きな N については変数の数が多くなるので計算に長い時間を取り、実行は難しくなる。実際の計算結果を格子 CP^2 モデルについて示すと、図2に見るように、比熱がシステムサイズ依存性を示し、その依存性が有限サイズスケールで綺麗にフィット出来ることから転移が2次であると結論できる。格子 CP^1 モデルについても、同様な結果が得られている。

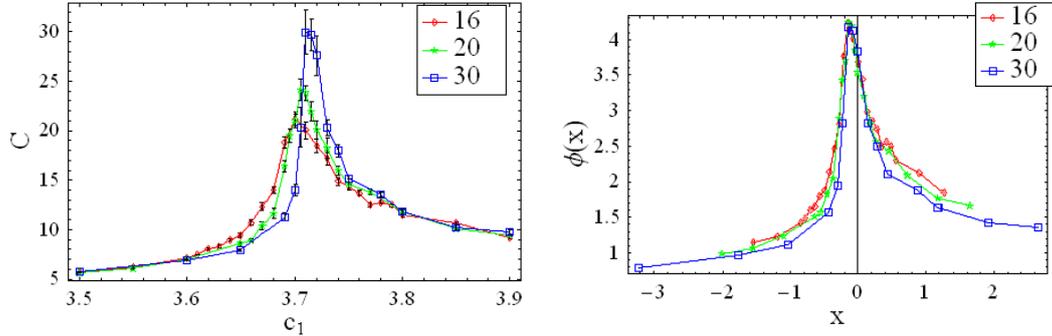


図 1: 格子 CP^2 モデルの比熱システムサイズ依存性と有限サイズスケールリングの結果。2次の相転移の存在を強く示している。 $C_1 \equiv N/g$ 。

さて次に注目している $N = 4$ の結果を、図2に示そう。内部エネルギーは $C_1 \sim 4.5$ 付近で飛びを示し、さらに比熱は非常に大きな値を持っている。この振る舞いは転移が1次であることを強く示している。この考察を確かめるために状態密度のエネルギー分布 $N(E)$ を計算した結果が、図3である。 $C_1 = 4.498$ で $N(E)$ はダブルピークを示し、内部エネルギーが異なる2つの状態が共存していることを示している。これらの計算結果より、 $N = 4$ のモデルでは1次転移と考えると良さそうであるが、いずれにしても計算は有限系で行われており、確定した結果とは言い切れない。

以上の結果は連続理論の $1/N$ -展開の結果と、格子上的理論の数値計算の結果が矛盾していることを示している。可能な解釈としては $1/N$ -展開の収束半径は有限で、 $1/4$ より小さいとなるが、最近の研究では $N \geq 4$ の全てにおいて1次転移との結論が得られている [6]。そこで先に述べた極低温原子系での実験が実現すれば、この問題に対する回答が得られると期待される。

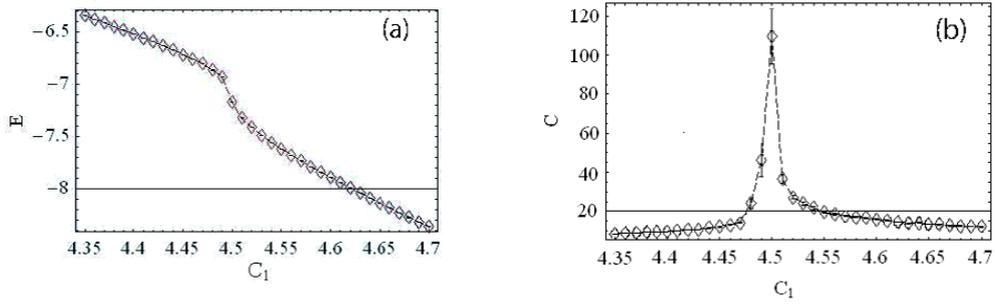


図 2: 格子 CP^3 モデルの内部エネルギーと比熱の結果。1 次の相転移の存在を強く示している。 $C_1 \equiv N/g$ 。

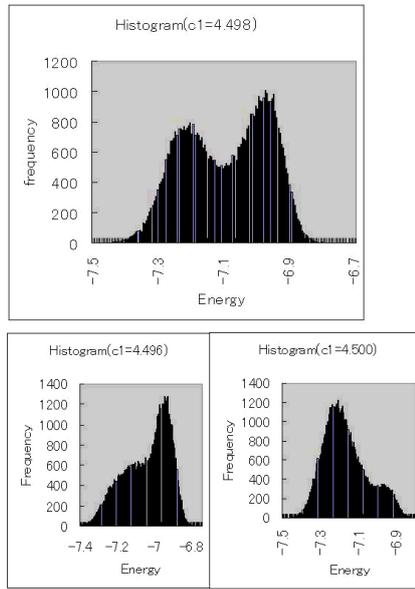


図 3: 格子 CP^3 モデルの状態密度のエネルギー分布。1 次の相転移の存在を強く示している。 $C_1 \equiv N/g$ 。

3 Schwinger model (cQED₂)

近年、格子ゲージ理論の量子シミュレーションを実現するために種々の提案がなされている。基本的に空間格子は先に説明した光学格子により実現し、時間は連続の実時間である。つまり Hamiltonian 形式となる。クォーク等の fermion は格子サイトに配置され、ゲージ場の役割を担う boson はリンク上に置かれる。この実験設定は現時点で可能と考えてよい。問題となるのは局所ゲージ対称性の出現である。

現時点で格子ゲージ理論の定式化には 2 つの方法がある。この章ではそのうちの一つを紹介し、もうひとつは次の章で説明しよう。モデルとしては最も簡単で、また詳しく調べられている 2 次元 compact QED (Schwinger model と呼ばれる) を考える。

一般的に格子サイト上に置かれた物質場 ψ_n はゲージ変換により $\psi_n \rightarrow V_n \psi_n$ と変換される。ここで V_n はゲージ群の元である。一方、ゲージ場 $U_{n,k}$ は $U_{n,k} \rightarrow V_n U_{n,k} V_{n+k}^\dagger$ と変換される。先に述べたようにモデルは連続時間形式で定式化されるので、 $U_{n,k}$ に共役な演算子として電場 $E_{n,k}$ が導入され、交

換関係

$$[E_{n,k}, U_{m,\ell}] = \delta_{n,m} \delta_{k,\ell} \quad (3)$$

が満たされる。原子系においてゲージ理論を実現するためには、この交換関係 (3) を満たすことを考えなくてはならないことになる。そこで、quantum link model (QLM) と呼ばれる以下の方法を紹介しよう。

各リンク上に2つの原子（より正確には、同じ原子の2つの異なる状態） a と b を置き、それぞれの粒子数演算子を N_a, N_b とする。リンク上の粒子数の和 $N_a + N_b$ は一定で 2ℓ とする。角運動量演算子を作る要領で以下の昇降演算子 L_+, L_- および z 成分演算子を定義する。

$$L_+ = a^\dagger b, \quad L_- = b^\dagger a, \quad L_z = \frac{1}{2}(N_a - N_b). \quad (4)$$

上の演算子 (4) で定義される角運動量の大きさは ℓ であることが容易に確かめられる。さてここで、 $L_+ \leftrightarrow U, L_- \leftrightarrow U^\dagger, L_z \leftrightarrow E$ と対応させると、ゲージ理論の交換関係 (3) が再現されることに注目しよう。この事実をもちいてゲージ理論を原子で表現する提案を QLM と呼ぶ。各リンク上に2つの原子を準備するので、pure gauge ではないことに注意する。このゲージ角運動量対応を用いて容易に Kogut-Susskind ゲージ理論 Hamiltonian が定式化出来る。更に詳しい検討は fermion についての説明の後に行う。

格子 fermion については staggerd fermion について説明を行う。Wilson fermion についても提案がなされていることだけ、記しておく。格子点を even site, odd site に分け、それぞれ c および d の fermion を置き、 $c_n (n \in \text{even}), d_n (n \in \text{odd})$ とする。（ここで c, d fermion は同じフェルミ原子の異なる内部状態であることを注意しておく。）質量項を $H_M = M \sum_n (-1)^n \psi_n^\dagger \psi_n$ 、ここで $\psi_n = c_n (d_n), n = \text{even} (n = \text{odd})$ である。実験において Dirac sea を実現するには、odd サイト上の d 原子のみを詰めた状態から始めればよいことが分かる。また、有限密度系を実現するには更に even サイト上の c 原子を必要なだけ置けばよいことになる。ゲージ場とのカップリングは以上のことより $H_P = \lambda \sum_n (\psi_n^\dagger L_{+,n} \psi_{n+1} + \text{h.c.})$ となる。ここで空間1次元の場合について書いたが、高次元への拡張は明らかである。

以上説明した方法で、光学格子上に QED を再現することが出来る。非可換ゲージ理論を作りたければ、複数のボソンをリンク上に準備すればよい。局所ゲージ不変性は H_P で与えられる a, b boson と c, d fermion の相互作用において全角運動量が保存するので、それぞれの z -成分を電荷と読み替えれば実現されていることが分かる [7]。以下に問題点を述べておく。

1. 角運動量の Hilbert 空間は有限次元である。一方、ゲージ場の空間は無次元である。
2. L_+, L_- は unitary 演算子ではない。ただし $\ell \rightarrow \infty$ では unitary となる。
3. QLM と格子ゲージ理論の相構造の対応を古典シミュレーションで明確にしておく必要がある。
4. この compact QED は M や密度を変化させると相転移が起ることが期待される。実際に実験でその転移はどのように観測されるのか？

4 格子ゲージ理論: Gauge-Higgs model

先の章ではゲージ場を表すのに角運動量の演算子を用いた。もうひとつの可能性としてリンク上に作られた BEC を用いる方法がある [8, 9]。図4に正方格子のリンク上に作られた BEC の図を示す。そこに示したように、4種類の異なる内部自由度をもつ BEC を $\Psi_k (k = 1, \dots, 4)$ で表すと系の Hamiltonian は（連続空間表記で）

$$H = \Psi^\dagger(x) \left[\delta_{k\ell} \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V_k(x) \right) + \Omega_{k\ell} \right] \Psi_\ell + g_{k\ell} \Psi_k^\dagger(x) \Psi_\ell^\dagger(x) \Psi_\ell(x) \Psi_k(x), \quad (5)$$

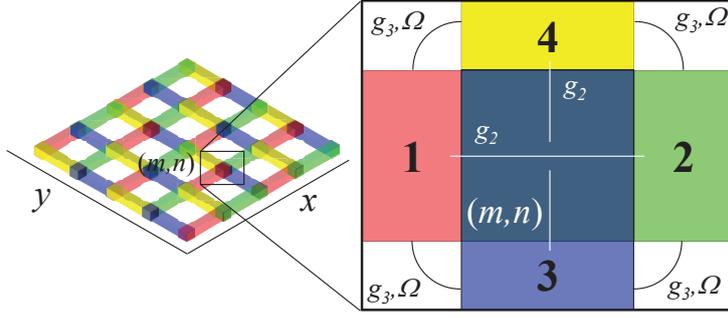


図 4: 格子リンク上に置かれた BEC とその間の相互作用。1, ..., 4 は BEC の種類を表す。

で与えられる。ここで $V_k(x)$ は原子 k のポテンシャル、 g_{kl} は相互作用であり、 Ω_{kl} はラマン散乱によるラビ振動を表す。それぞれのパラメーターで有限の値を持つ量は図 4 に示してある。また、化学ポテンシャルの項は省略している。

さて、上記の BEC の位相をゲージ場と見なすわけであるが、数学的にその構造を見るために、以下のような変数を導入する。

$$\Psi_{ri} = \sqrt{\hat{\rho}_{ri}} e^{i\hat{\theta}_{ri}}, \quad \hat{\rho}_{ri} = \rho_0 + \hat{\eta}_{ri}. \quad (6)$$

ここで ρ_0 は平均密度（化学ポテンシャルで制御される）であり、演算子 $\{\hat{\eta}_{ri}, \hat{\theta}_{ri}\}$ は互いに共役な演算子である。従って、 $\hat{\theta}_{ri}$ を格子リンク (r, i) 上のゲージ場と見なしたときに、 $\hat{\eta}_{ri}$ は電場と理解される。この変数を用いて Hamiltonian (5) を書きなおす。そのときに式 (5) の相互作用項の g_{kl} を調節して、密度（電場） $\hat{\eta}_{ri}$ がガウス則を近似的に満たすようにする。

$$\begin{aligned} \hat{H}_a &= \frac{1}{2\gamma^2} \sum_r \left(\sum_i \nabla_i \hat{\eta}_{ri} \right)^2 + V_0 \sum_{r,i} \hat{\eta}_{ri}^2 + \hat{H}_L(\{\hat{\theta}_{ri}\}), \\ \hat{H}_L &= 2g'\rho_0 \sum_{r,i < j} \left(\cos(\hat{\theta}_{ri} - \hat{\theta}_{rj}) + \dots \right). \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $\gamma^2 \propto (g_{kl})^{-1}$ であり、また V_0 はポテンシャルからくるパラメーターである。

Hamiltonian (7) の第 1 項において、 $\gamma \rightarrow 0$ の極限を考えると、明らかにガウス則を満たす状態 $(\sum_i \nabla_i \hat{\eta}_{ri})|Phys\rangle = 0$ のみが物理的な有限エネルギー状態として現れ、その subspace での有効理論を考えれば良いことになる。これはこの極限における有効理論では局所ゲージ対称性が出現することを意味する。しかしながら、この極限は fine tuning であり、原子系の実験では厳密にこの極限を実現することは難しい。そこで、この条件を緩めたときにどのような理論が出現するかを調べることにする [9]。詳しく調べるために、以下では経路積分表示に移ることにする。

経路積分表示で分配関数 Z は

$$\begin{aligned} Z_a &= \int \prod_{x,i} [d\eta_{xi} d\theta_{xi}] \exp \left[\sum_{x,i} \left(-i\eta_{xi} \nabla_4 \theta_{xi} - \Delta\tau V_0 \eta_{xi}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta\tau}{2\gamma^2} \sum_x \left(\sum_i \nabla_i \eta_{xi} \right)^2 - \Delta\tau \sum_{x_4} H_L(\{\theta_{xi}\}) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

となる。 $\Delta\tau$ は時間方向の格子間隔である。ここで問題となる因子

$$\tilde{G} \equiv \prod_x \exp[(-\Delta\tau/2\gamma^2) Q_x^2], \quad Q_x \equiv -\sum_i \nabla_i \eta_{xi}$$

に注目すると、

$$\tilde{G} \simeq \int_0^{2\pi} \prod_x \frac{d\theta_{x4}}{2\pi} \exp \left(\frac{\gamma^2}{\Delta\tau} \cos \theta_{x4} - i\theta_{x4} \sum_i \nabla_i \eta_{xi} \right), \quad (9)$$

と、時間方向のリンクに乗ったゲージ場の第4成分 θ_{x4} を用いて表すことが出来る。この式 (9) を式 (8) に代入し、 η_{xi} についてのガウス積分を実行すると、以下の式が導かれる

$$\begin{aligned}
Z_a &= \int [dU] \exp(A_a), \quad A_a = A_I + A_P + A_L, \\
A_I &= \sum_{x,\mu} c_{1\mu} \cos \theta_{x\mu}, \quad A_P = \sum_{x,\mu < \nu} c_{2\mu\nu} \cos \theta_{x\mu\nu}, \\
A_L &= \sum_{x,\mu < \nu} c_{3\mu\nu} \left[\cos(\theta_{x\mu} - \theta_{x\nu}) + \cos(\theta_{x\mu} + \theta_{x+\mu,\nu}) \right. \\
&\quad \left. + \cos(\theta_{x+\mu,\nu} - \theta_{x+\nu,\mu}) + \cos(\theta_{x\nu} + \theta_{x+\nu,\mu}) \right]. \tag{10}
\end{aligned}$$

ここで、 $U_{x\mu} = e^{i\theta_{x\mu}}$, $c_{14} = \gamma^2/\Delta\tau$, $c_{1i} = 0$, $c_{2i4} \simeq (2\Delta\tau V_0)^{-1}$ であるが、それらの項を含み上記モデルを冷却原子系で実現するための提案が多くなされている。そこでここではモデル (10) について詳しく調べることにする。

モデル (10) は明らかに局所ゲージ不変性を破る。しかしここで、サイト上に新たにボソン場 $\phi_x = e^{i\varphi_x}$ を導入することにより、局所ゲージ不変な形にモデル (10) を書き換えることができる。その結果

$$\begin{aligned}
Z_{\text{GH}} &= \int [d\phi][dU] \exp A_{\text{GH}}(\{U_{x\mu}\}, \{\phi_x\}), \\
A_{\text{GH}} &= A'_I + A_P + A'_L, \quad \int [d\phi] \equiv \prod_x \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_x}{2\pi}, \\
A'_I &= \sum_{x,\mu} c_{1\mu} \cos(\varphi_x + \theta_{x\mu} - \varphi_{x+\mu}), \\
A'_L &= \sum_{x,\mu < \nu} c_{3\mu\nu} \left[\cos(\varphi_{x+\nu} + \theta_{x\mu} - \theta_{x\nu} - \varphi_{x+\mu}) \right. \\
&\quad + \cos(\varphi_x + \theta_{x\mu} + \theta_{x+\mu,\nu} - \varphi_{x+\mu+\nu}) \\
&\quad + \cos(\varphi_{x+\mu} + \theta_{x+\mu,\nu} - \theta_{x+\nu,\mu} + \varphi_{x+\nu}) \\
&\quad \left. + \cos(\varphi_x + \theta_{x\nu} + \theta_{x+\nu,\mu} - \varphi_{x+\nu+\mu}) \right] \tag{11}
\end{aligned}$$

はモデル (10) と等価である。実際、以下のゲージ不変性を用いて、 $Z_{\text{GH}} = Z_a$ を示すことが出来る。

$$\begin{aligned}
\theta_{x\mu} &\rightarrow \theta'_{x\mu} = \theta_{x\mu} + \Lambda_{x+\mu} - \Lambda_x, \\
\phi_x &\equiv e^{i\varphi_x} \rightarrow \phi'_x = e^{i\Lambda_x} \phi_x \quad (\varphi_x \rightarrow \varphi'_x = \varphi_x + \Lambda_x). \tag{12}
\end{aligned}$$

以上の変換性より、 ϕ_x は Higgs 場と理解することが出来る。

種々の gauge-Higgs モデル (11) について、モンテ-カルロ・シミュレーションにより調べた相構造を以下に示そう。モデルのパラメーターの定義は表 13 に与える。

Model	c_{14}	c_{1i}	c_{2i4}	c_{2ij}	c_{3i4}	c_{3ij}
IP	c_1	c_1	c_2	c_2	0	0
ItPtLs	c_1	0	c_2	0	0	c_3
ItPLs	c_1	0	c_2	c_2	0	c_3
PL	0	0	c_2	c_2	c_3	c_3

(13)

それらのモデルの (3+1) 次元系の相構造を図 5 に示そう。相は Higgs 相、閉じ込め相およびクーロン相からなる。ここで冷却原子系の言葉で各相を理解すると、Higgs 相は BEC 相に対応し、閉じ込め相はモット相、そしてクーロン相は gapless の励起が存在しながら長距離相関が無い相であり、

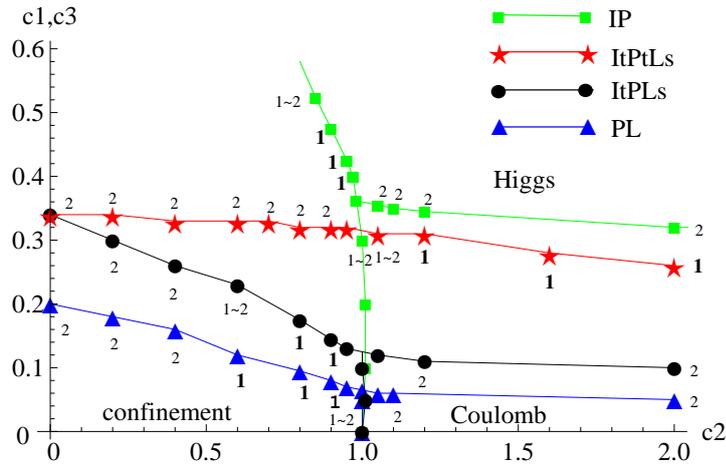


図 5: 表 13 に示したモデルの $c_2 - c_{1,3}$ 平面での相構造。相境界の数字は転移の次数をあらわす。

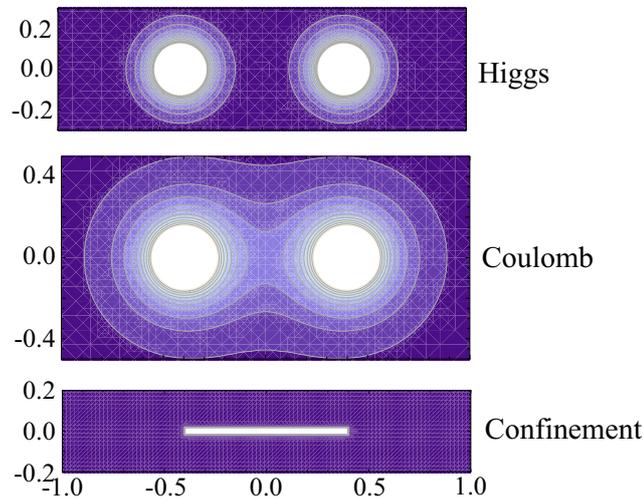


図 6: static source (quark-antiquark) による原子密度の揺らぎの模式図。 $\Delta\rho_r \equiv (\sum_i \eta_{ri}^2/3)^{1/2}$ を示す。

plaquette 項を持つモデル特有の相と言える [10]。この plaquette 項が小さい場合、図 5 に示すように、先の γ の大きさを小さくしていくと、Higgs 相から閉じ込め相への転移が観測されるはずである。

数値計算ではゲージ場の位相に対応する BEC の位相が変数となっているが、実際の冷却原子の実験では、原子密度の空間依存性がまず始めに観測される量であろう。ゲージ理論における static source はポテンシャル $V_k(x)$ を変形させることにより、比較的容易に冷却原子系に持ち込むことが出来ると予想される。quark-antiquark を static source として系に持ち込んだときの電場=密度揺らぎを図 6 に表しておく。

5 まとめと将来の展望

1. この講演では現在提案されている量子シミュレーションの具体例を紹介した。
2. 実験技術の向上により、提案された種々の格子モデルは実現可能となるであろう。
3. その中で、ゲージ理論としては gauge-Higgs モデルが最初に実現されると期待される。

4. local gauge 対称性を実現する新しいアイデアの提唱が待たれる。
5. 実験的には温度をコントロールすることが出来れば、得るところは多い。
6. 時間変化を追いながら相転移現象が観測出来ることが期待される。
7. 有限密度ゲージ理論の実現には符号問題等の大きな問題がないので、近い将来の実現が待望される。

参考文献

- [1] 例えば、M. Lewenstein, A. Sanpera, and V. Ahufinger, *Ultracold Atoms in Optical Lattices: Simulating Quantum Many-body Systems* (Oxford University Press, 2012).
- [2] 基礎理論が観測される現象を説明することを確認することも含む。
- [3] Y. Qi and C. Xu, Phys. Rev. B78, 014410(2008).
- [4] K.Kataoka, S. Hattori, and I. Ichinose, Phys. Rev. B83, 17449(2011).
- [5] 例えば、I.Ya. Areeva and S.I. Azakov, Nucl. Phys. B162, 298(1980).
- [6] A. Nahum, J.T. Chalker, P. Serna, M. Ortuno, and A.M. Somoza, Phys. Rev. Lett. 107, 110601(2011); arXiv:1308.0144
- [7] 例えば、E. Zohar, J. Ignacio, and B. Reznik, arXiv:1303.5040 およびそこに引用されている文献.
- [8] E. Zohar and B. Reznik, Phys. Rev. Lett. **107**, 275301 (2011).
- [9] K.Kasamatsu, I. Ichinose, and T. Matsui, Phys. Rev. Lett. 111, 115303(2013); arXiv:1212.4952.
- [10] H. P. Büchler, M. Hermele, S. D. Huber, M. P. A. Fisher, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **95**, 040402 (2005).