AdS/CFT 対応による非平衡定常系の有効温度の解析

名古屋大学大学院理学研究科 中村　真[1]
E-mail: nakamura@hken.phys.nagoya-u.ac.jp

Introduction

非平衡統計物理学は現代物理学のフロンティアの一つである。特に、平衡から離れ線形応答領域を超えた系の記述に関しては、まだ未知の部分が多い。本研究では、線形応答領域を超えた非平衡定常系において、物理自由度の揺らぎを AdS/CFT 対応の枠組みで解析し、非平衡定常系における有効温度とその振る舞いについて解析した。本稿ではその概要を報告する。

非平衡系は大きく二つに分類することが出来る。一つは時間に依存する系であり、もう一つは非平衡だが時間には依存しない非平衡定常系である。本研究では、後者の非平衡定常系、特に

1. 電場と平行な方向に定常電流の流れる系（定常電流系と呼ぶことにする）
2. 熱浴中を一定の外力によって一定速度で牽引されるテスト粒子の系（ランジュバン系と呼ぶことにする）

ついて考える。これらの非平衡定常系はいずれも「着目系」「熱浴」および「外力を与える外部系」から構成されている。上記の例では荷電粒子の集合やテスト粒子が着目系に対応する。着目系は一定温度 T の熱浴と接しているものと仮定する。着目系には外部電場や外力が供給されており、熱浴との相互作用により絶えず熱が生成され、非平衡にドライブされている。熱が生成される一方では着目系を定常に保つことができないが、熱生成と同じ割合で熱を熱浴に逃がして着目系の熱収支をバランスさせせると、マクロ変数が時間変化しない非平衡定常状態が実現される。熱浴の自由度、つまり熱浴の比熱は十分大きくとり、着目系からの熱流入に関わらず熱浴の温度は一定値を保つものとする。

ここで一つの基本的な問いを考えることにしよう。

> 熱平衡にある系では、系の巨視的な性質は、温度などのごく少数の巨視的パラメータで特徴づけることができた。それでは、非平衡定常系においても、系を巨視的に特徴づける少数のパラメータは存在するであろうか。そしてもし存在すれば、どのような振る舞いをするのであろうか？

ここでは、この問いをさらに具体化し、非平衡定常状態に温度と類似の概念が存在するか、存在するとしたらどのように定義され、どのように振る舞うのか、について考察する。以後、非平衡定常系における「温度」を「有効温度」と呼ぶことにする。

AdS/CFT 対応

AdS/CFT 対応とは、あるクラスの強結合量子ゲージ理論を古典重力理論にマップする枠組みである。この対応を用いると、ゲージ理論側の非摂動的解析を重力理論を用いて行うことが可能となり、QCD や物性系への応用に向けた研究がなされている。特に、物性物理学への応用上注目すべき点は、多自由度系の扱いが簡略化され得る点であろう。AdS/CFT 対応を用いてゲージ粒子の多自由度系を重力理論にマップすると、巨視的物理量の従う関係式が、重力理論の古典力学の

[1]本研究はカリフォルニア工科大学／ KIPMU の大栗博司氏との共同研究に基づきます。

関係式として容易に得られる場合がある。また重力理論という異なる描像に移ることで、統計系に対する新たな視点が得られる場合もある。

本研究で特に注目するのは、AdS/CFT 対応による重力理論側での温度概念についてである。通常、平衡系での温度 T を定義するにはいくつかの方法が存在する（以下、$k_B = 1$ とする。）：

1. 統計分布 P による定義：$P \propto \exp[-E/T]$
   ここで E は注目する状態のエネルギーである。

2. 熱力学第一法則による定義：$dE = TdS$
   E は系の内部エネルギー、S はエントロピーである。

3. 揺動散逸定理による定義：$D = T\mu$
   ここでは例としてブラウン粒子系を考え、「揺らぎ」として拡散係数 D を、「散逸」として易動度 μ を用いたが、一般に「揺らぎ」と「散逸」の比から温度を決めることができる。

一方、重力理論側では第 4 番目の定義方法が存在する：

4. ホーキング温度による定義：$\xi^\mu \nabla_\mu \xi^\nu = 2\pi T \xi^\nu$
   ここで ξ^μ は時空の Killing vector であり、この式はホライズン上で求めるものとする。ホライズン上において ξ^μ は光円錐面に直交する。

これらの平衡系での温度の定義式のうち、非平衡定常系へ一般化可能と思われる定義はどれであろうか。まず、非平衡系では統計分布がどのような形となるのか先験的には非自明であり、1 の定義を採用するのは危険であろう。2 については、非平衡系においても熱力学第一法則が存在するのか、また存在するとしても非平衡系におけるエントロピーをどのように定義したら良いのか、についていずれも非自明であるから、この定義を用いるのも得策ではない。一方、非平衡系においても揺動、散逸は定義・測定可能であるから、少なくとも 3 を用いた定義は可能である。実際、非平衡物理学の研究者の間では、揺動散逸関係式による有効温度の定義が用いられることがある [2]。

本研究での主張は以下の通りである。

- AdS/CFT 対応で非平衡定常系を扱う場合、4 のホーキング温度（ただし、以下で述べるように、通常のブラックホールに対するものとは異なる）による有効温度の定義が自然に現れる。さらに、このホーキング温度による有効温度の定義は、3 の揺動散逸関係式による定義と等価となる。

- 非平衡定常系での揺らぎの相関関数は、この有効温度で特徴付けられる。

- 非平衡にドライブすることで、有効温度が熱浴の温度よりも「低くなる」場合が存在する。

以下、紙数が許す範囲でこれらの主張について説明をしたい。

重力側における有効ホライズン

非平衡定常系は「着目系」「熱浴」「外力を供給する外部系」から構成されることは既に述べた。ここで「外部系」については、適切な外力を境界条件等の形で理論に課すことで表現できる。また、重力理論側において、熱浴の構成は比較的容易である。AdS/CFT 対応によれば、熱平衡にあるゲージ理論系は高次元のブラックホール時空に対応することが知られている[2]。そこで重力側にホーキング温度 T のブラックホール時空を用意することによって、温度 T の熱浴を系に用意したことになる。

[2] ここでは非閉じ込め相にあることを仮定する。

AdS/CFT 対応の枠組みでの着目系については、通常、適切なオブジェクトを、このブラックホール時空に挿入することで実現される。例えば、ランジュバン系のテスト粒子は、重力時空の境界からブラックホールのホライズンに向かって伸びる弦で表現される。この場合、境界上の弦の端点には「端点の移動速度 v」を境界条件として課す。また定常電流系の場合は、着目系は重力時空の境界からホライズンに向かって伸びる D-brane で表現され、D-brane 上には一定の外部電場 E を境界条件として課す。

さてここで、テスト粒子の位置の「揺らぎ」や定常電流系の電流密度の「揺らぎ」に着目することにしよう。これらの揺らぎは、重力理論側における弦の振動や D-brane 上の電磁場の振動として表現される。そこで重力側のこれらの自由度の従う方程式を、非平衡定常状態に相当する解の近傍で求めてみると、以下のような式が得られる：

$$\partial_\mu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \delta x\right] = 0, \qquad (1)$$

$$\partial_\mu \left[\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \delta f_{\nu\rho} \tilde{g}^{\rho\lambda}\right] = 0. \qquad (2)$$

ここで、δx、$\delta f_{\mu\nu}$ はそれぞれ弦の微小変位、および D-brane 上の電磁場の field-strength の微小変位であり、変位の 2 次以上の項は無視した。これらの方程式から気づくことは、$g_{\mu\nu}$ や $\tilde{g}_{\mu\nu}$ を計量とみなすと、これらの方程式は曲がった時空上のクラインゴルドン方程式、あるいは曲がった時空上のマックスウェル方程式に他ならないことである。従って、今着目している微小振動は $g_{\mu\nu}$ や $\tilde{g}_{\mu\nu}$ で現される「有効時空」上の自由度と見なすことができる。一般に、この有効時空は、弦や D-brane が挿入された、熱浴を表すブラックホール時空とは異なる時空となっている。

この有効時空上には、これらの微小変位の波動が逃げ出すことのできない領域が存在する。この領域は、ちょうどブラックホールにおける光が逃げ出すことのできない領域に類似しており、ブラックホールのホライズンと同様、微小変位が脱出できる限界の位置が有効時空上に存在する。この限界の位置を「有効ホライズン」と呼ぶことにする。有効ホライズン近傍の微小変位の従う運動方程式は、ブラックホール時空上の場の運動方程式と全く同じ形をしているため、ブラックホールのホーキング輻射と同様に、この有効ホライズンは微小変位を輻射することになる。従って、この微小変位が感じる「ホーキング温度」を「有効ホライズン」上で定義することが出来る。この有効ホライズンで定義されるホーキング温度を「有効温度」と呼ぶことにする。

この有効温度は物理的に意味を成すのであろうか。実際、非平衡定常状態まわりの微小変位の相関関数はこの有効温度に支配されていることを示すことができる。また、非平衡定常状態まわりの揺動散逸関係式に現れる温度は、熱浴の温度ではなく有効温度であることも示される。AdS/CFT 対応では、このような有効温度がホーキング温度の描像で現れることは興味深い。

本研究では、このような有効温度の視点を明確にするとともに、様々な系について具体的に有効温度を外力の関数として計算した。その結果、外力を加えて非平衡にドライブすることで、系の有効温度を周囲の熱浴の温度よりも「下げる」ことが出来る例を多く構成することが出来た。一見、外力を加えることで有効温度が下がることは直観に反するように感じるが、実はそのような振る舞いを示す物性モデルも構成されており [3]、このような振る舞いは何ら物理的理由で禁止されていない。なお、熱浴の温度と有効温度の差異は、外力の 2 次のオーダーから現れるため、このような効果は線形応答領域を超えて初めて見られる効果である。

本稿では、紙数の関係上、研究の詳細を具体的な形で紹介するよりも、概略を述べる形とさせて頂いた。詳細や、より正確な記述は文献 [1] や、そこで引用されている文献を参考にして頂きたいが、この記事を読まれて詳細に興味を持たれた方々は、遠慮なくコンタクト頂ければ幸いである。

参考文献：

[1] Shin Nakamura and Hirosi Ooguri, “Holographic Refrigerator,” arXiv:1309.4089 [hep-th]. なお、本稿中の [2][3] は、この論文での引用文献 [9][8] をそれぞれ参照して頂きたい。