

カイラル線形シグマ模型における磁気効果の非摂動くりこみ群を用いた解析

青木 健一, 佐藤 大輔¹, 山田 雅俊
金沢大学

1 はじめに

一定外部磁場の加わった量子色力学 (QCD) では, その磁場に対してカイラル凝縮が単調に増加する magnetic inhibition (MI) と呼ばれる現象が知られており [1], 格子 QCD シミュレーションでは低温度において実証されている. この現象は, 空間次元の減少と関連させて良く説明される. 古典論では荷電粒子が磁場の方向に巻き付いて横方向の運動が制限されるが, 量子論ではこの横方向の運動量が離散化されて Landau 準位が現れる. 荷電フェルミオンはこの Landau 準位に零モードがあるために, ループ補正の infrared singularity の次数が上がり, $1+1$ 次元の時空間でのものと同じになる. この singularity のために, 平均場近似では必ずカイラル対称性の自発的破れが起こる. これをもって空間次元の減少に関連付けるが, 本当に次元が下がるわけでもない. なぜなら $1+1$ 次元以下では, Mermin–Wegner–Coleman (MWC) の定理により連続対称性の自発的破れは禁止されてしまうからである.

しかし, 最近, 格子 QCD シミュレーションで, カイラル相転移温度が逆に磁場に対して減少する結果が報告された [2, 3]. 低温での結果と相反することから, この現象の理由がいかにか非自明かが分かる. ここではこの現象を magnetic inhibition (MI) と呼ぶ [4]. MI を説明する機構として, この報告では福嶋氏と日高氏らの仕事 [4] を取り上げる. 彼らは, MWC の定理に注目した. MWC の定理では, 南部・Goldstone モードの量子補正の infrared singularity が重要になるが, 荷電パイメソンは磁場程度の質量を持ったように振る舞うため脱結合してしまうし, 中性のパイメソン π^0 は磁場を感じない. しかし, クォークで構成される π^0 の内部構造が効いてくるほどの磁場の強さがあれば, π^0 は磁場を感じ, その量子補正の infrared singularity のために対称性が回復する可能性がある. 特に, 有限温度では松原周波数の周期性のためにフェルミオンよりボソンの寄与が支配的になって, MI が起きると考えられる.

我々はこの MI の機構を非摂動くりこみ群 (NPRG) を使って検証する. その定式化の一つとして Wetterich のフロー方程式 [5]

$$\partial_t \Gamma_k[\Phi] = \text{STr} \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi^t} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi} + R_k \right)^{-1} \partial_t R_k \quad (1)$$

を用いる. ここで, $\Gamma_k[\Phi]$ は量子補正がスケール k で赤外切断された有効作用で, R_k はその赤外切断を与える正則化関数である. 今, 紫外から赤外に向かって解くのでくりこみのスケールパラメータを $t = \log \Lambda/k$ とおいている. Λ は理論を定義する初期スケールで, 理論を定義する作用 S_0 を初期条件 $\Gamma_{k=\Lambda} = S_0$ として式 (1) を解けば, フルな量子補正が取り込まれた有効作用 $\Gamma_{k \rightarrow 0} = \Gamma$ が得られる. この方程式を厳密に解くことはできないので近似を用いる必要があるが, この近似を改善する系統的な方法を伴うために非摂動現象の解析に威力を発揮する.

¹e-mail address: satodai@hep.s.kanazawa-u.ac.jp

2 線形シグマ模型

MIの検証を行うために、クォーク場 ψ を基本自由度とするNJL模型の解析を行いたいですが、NPRGを用いた解析では4-fermi結合定数の発散をうまく取り扱わなければならない、直接的な方法では難しい[6]。そこで、今回はNJL模型を補助場の方法を用いてメソン場 $\phi^t = (\sigma, \pi)$ を導入した模型、所謂、線形シグマ模型について、一定外部磁場 $B = (0, 0, B) = \nabla \times \mathbf{A}$ のもとでの解析を行う。実際には、local potential 近似を改善した以下の有効作用を考える：

$$\Gamma_k[\Phi] = \int_x \left\{ \frac{Z_\phi^\parallel}{2} (\partial_\parallel \phi)^2 + \frac{Z_\phi^\perp}{2} (\partial_\perp \phi)^2 + U_k(\phi) + \bar{\psi} i (\not{D} + \bar{g} \boldsymbol{\tau}^t \cdot \phi) \psi \right\}. \quad (2)$$

ここで、クォークの共変微分を $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ とした。メソン場の運動項は磁場 B に対して縦の成分と横の成分の微分 $\partial_{\parallel, \mu} = \delta_{\mu, 4} \partial_4 + \delta_{\mu, 3} \partial_3$ に分け、その係数 $Z_\phi^\parallel, Z_\phi^\perp$ を区別する。これらはメソン場の波動関数くりこみの逆数に対応しており、初期スケール $k = \Lambda$ で零になるべきである。しかし、それではメソン場の伝播関数の分母が零になって解析できないので、徐々に零に近づけてその極限で得られた結果を採用する。

メソン場に関する有効ポテンシャルは、その最小値を与える点 $\rho_0 = \sigma_0^2/2$ の周りで展開して途中で止める近似を行う：

$$U_k(\phi) \equiv U_k(\rho, \sigma) = \sum_{n=0}^3 \frac{\bar{\lambda}_i}{n!} (\rho - \rho_0)^n - \bar{c}\sigma. \quad (3)$$

ここで $\rho = (\sigma^2 + \pi^2)/2$ とおいた。 $\bar{c}\sigma$ はカイラル対称性を陽に破る線形項である。実際には、カイラル極限 $\bar{c} \rightarrow 0$ で評価するが、数値計算の都合でこの線形項を導入した。

ここで解析する模型ではクォークのフレーバー数 N_f を1としたので、NGモードの数は一つである。QCDの有効模型としては、 $N_f = 2$ が適しているが、荷電パイメソン π^\pm は磁場程度の質量を持つ一方、中性パイメソン π^0 はその影響を受けない。このため、磁場が大きい($qB \sim f_\pi^2$ 程度)場合には、 $N_f = 1$ の模型で十分である。

3 背景場フロー

有効作用(2)のくりこみ群発展は、Wetterich方程式(1)を背景場の導入により修正した背景場フロー方程式[7, 8]を用いて評価する。ここでは、背景場フローについて簡単に説明する²。例えばスカラー場 $\phi(x)$ の理論では、通常の正則化関数 $R_k(-\partial^2)$ は微分を引数とするが、この方法では背景場 $\tilde{\phi}$ を導入して定義した有効作用 $\Gamma_k[\phi, \tilde{\phi}]$ の2点関数 $\tilde{x} := \frac{\delta^2}{\delta \phi^2} \Gamma_k[\phi, \tilde{\phi}] \Big|_{\phi=\tilde{\phi}}$ を引数にする。この方法は元々、ゲージ不変なくりこみ群フローを得るために導入された。ここでは、背景場と通常の間を同一視する近似を行う： $\tilde{\phi} = \phi$ 。その結果、フロー方程式の左辺がproper-time表示で表される：

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \frac{1}{x + R_k(x)} \partial_t R_k(x) = -\text{Tr} \int \frac{ds}{s} \partial_t f_k(s) e^{-sx}. \quad (4)$$

ここで、 $f_k(s)$ がproper-time s について正則化を与える関数であり、 $R_k(x)$ から一意に決まる。同様にして、フェルミオンの自由度が加わった有効作用(2)についての背景場フロー方程式が得られる。

この背景場フローの方法の利点は、伝播関数がproper-time表示で表現できるので、Schwingerの方法[9]が使えることである。これにより、伝播関数が運動量固有状態で表せるので、微分(運動量)

²詳しくは他の記事で解説する: K.-I. Aoki, D. Sato and M. Yamada in preparation (2013).

展開が容易に行え，運動項の係数についてのくりこみ群方程式の導出が可能となる．最終的には次の有効ポテンシャル $U_k(\rho, \sigma)$ とメソン運動項の係数 $Z_\phi^\parallel, Z_\phi^\perp$ に関するくりこみ群方程式が得られる：

$$\partial_t U_k(\rho) = \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_p \partial_t f_k(s; a) \left[-e^{-s(\omega_n^2 + p_3^2 + v_\perp^2 p_\perp^2 + M_\sigma^2)} - e^{-s(\omega_n^2 + p_3^2 + v_\perp^2 p_\perp^2 + M_\pi^2)} + 4N_c e^{-s\left(\nu_n^2 + p_3^2 + \frac{\tanh qBs}{qBs} p_\perp^2 + M_\psi^2\right)} \right], \quad (5)$$

$$\partial_t Z_\phi^\parallel = 4N_c \bar{g}^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_p \partial_t f_k(s; a) s^2 e^{-s\left(\nu_n^2 + p_3^2 + \frac{\tanh qBs}{qBs} p_\perp^2 + M_\psi^2\right)}, \quad (6)$$

$$\partial_t Z_\phi^\perp = 4N_c \bar{g}^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_p \partial_t f_k(s; a) s^2 \frac{\tanh(qBs)}{qBs} e^{-s\left(\nu_n^2 + p_3^2 + \frac{\tanh qBs}{qBs} p_\perp^2 + M_\psi^2\right)}. \quad (7)$$

ここで， $\omega_n = 2n\pi T$ ， $\nu_n = (2n+1)\pi T$ ， $p_\perp^2 = p_1^2 + p_2^2$ とおいた．メソン σ, π とクォーク ψ の質量に対応するものはそれぞれ，

$$M_\sigma^2 = Z_\phi^{\parallel -1} (\partial_\rho U + 2\rho \partial_\rho^2 U), \quad M_\pi^2 = Z_\phi^{\parallel -1} \partial_\rho U, \quad M_\psi^2 = 2\bar{g}^2 \rho \quad (8)$$

と与えられる．proper-time の正則化関数は $\partial_t f_k(s; a) = (sk^2)^a e^{-sk^2} / \Gamma(a)$ の形をとる．ここで， $\Gamma(a)$ は Gamma 関数である．式 (5)–(7) 中にメソンの横運動量 p_\perp^2 の係数として横速度の 2 乗 $v_\perp^2 = Z_\phi^\perp / Z_\phi^\parallel$ が現れる．この小ささが対応するループ補正の infrared singularity の大きさに対応する．

ここでの解析では $a = 5/2$ に選ぶ．また，ここでは湯川結合定数 \bar{g} の補正を無視している．

実際の解析では，赤外 ($t \rightarrow \infty$) での有効ポテンシャルの最小点 σ_0 を評価する．この点の値がパイメソンの崩壊定数 f_π に一致する．モデルのパラメータとしては，湯川結合定数はクォークの構成質量と f_π との比から $\bar{g} = 3.2$ と決まる．初期スケール Λ は現実的な有効モデルの値と比べて大きな値に選び ($\Lambda = 2 \text{ GeV}$)， $T = qB = 0$ で $f_\pi = 0.030 \text{ GeV}$ となるように他のモデルパラメータを設定する [10]．ここで，現実的な値から Λ を大きく取り， f_π を小さく取ったのはモデルの cutoff artifact を避けつつ，磁場 qB のスケールが f_π より十分大きな領域を調べたいからである．

4 結果と議論

異なる外部磁場 qB における f_π の温度 T 依存性を計算した結果を図 4 に載せる．この結果から分

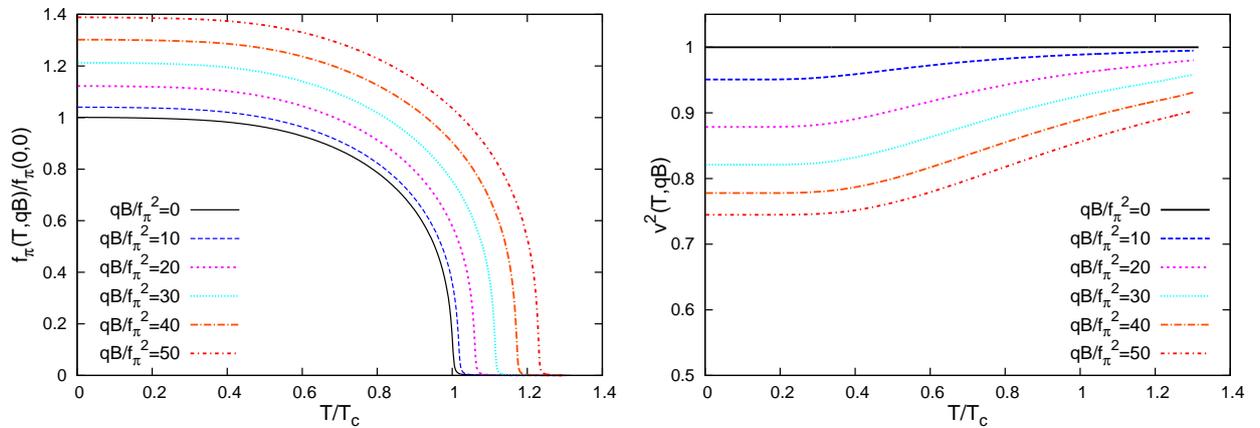


図 1: 左図：崩壊定数 f_π の温度依存性．それぞれの線は異なる外部磁場 qB での結果を表す．右図：横運動速度の二乗 v_\perp^2 の温度依存性．

かるように，磁場を大きくしても相転移温度 T_c は単調に増加するのみである．したがって，magnetic catalysis(MC) しか見られず，期待された magnetic inhibition(MI) の兆候は現れなかった．実際，MI を引き起こす横速度 v_{\perp} が磁場に対して小さくなりきれていないように思われる．

式 (5) から，クォークの量子補正による MC は横速運動量の 2 乗 p_{\perp}^2 の係数 $\tanh qBs/qBs$ が小さくなることから現れると解釈できる．従って，これとパイメソンの量子補正による MI との競合が起きるには，横速度の 2 乗がこの係数と同程度に小さい必要がある：

$$v_{\perp}^2 \sim \frac{k^2}{qB}. \quad (9)$$

ここで $qB \gg k^2$ と，proper-time s が $\partial_t f(s; a)$ のピーク値から $s \sim k^{-2}$ と見なすことができる事実を使った．今，相転移の次数が 2 次であると仮定しているので，有効ポテンシャル $U_k(\phi)$ の原点 $\phi = 0$ での振る舞いを調べれば十分である．さらに， Z_{ϕ}^{\parallel} と Z_{ϕ}^{\perp} に対するメソンからの補正は小さいとして無視し，Lowest Landau level を取る近似をすると，零温度 $T = 0$ での横速度の 2 乗は

$$v_{\perp}^2 \sim \frac{2k^2}{qB} \log \frac{\Lambda^2}{k^2} \quad (10)$$

となり，式 (9) より大きくなってしまう．この結果，MI は起きないと結論できる．有限温度の場合は自明でないが，クォークの温度方向の半周期性により松原モードに零エネルギーがなくなって横速度 v_{\perp} の減少が抑えられてしまうことから，MI は起きないと考えられる．

零温度での結果は，具体的に秩序変数を評価したわけではないが文献 [1] ですでに指摘されていた．文献 [4] で MI が見える結論に至っていたのは，パイメソンの横運動量に \sqrt{qB} 程度の切断を入れていたからである．実際，我々の解析にこの運動量切断を導入したところ（その結果は示さないが） T_c が磁場に対して非単調な振る舞いを示した．しかし，このような有限磁場 $qB \neq 0$ における切断とゼロ磁場 $qB = 0$ における切断とを繋げることのできる有効模型は自明でない．

参考文献

- [1] V. Gusynin, V. Miransky, and I. Shovkovy, Nucl.Phys. **B462**, 249 (1996), hep-ph/9509320.
- [2] G. Bali *et al.*, JHEP **1202**, 044 (2012), 1111.4956.
- [3] G. Bali *et al.*, Phys.Rev. **D86**, 071502 (2012), 1206.4205.
- [4] K. Fukushima and Y. Hidaka, Phys.Rev.Lett. **110**, 031601 (2013), 1209.1319.
- [5] C. Wetterich, Phys.Lett. **B301**, 90 (1993).
- [6] K.-I. Aoki and D. Sato, PTEP **2013**, 043B04 (2013), 1212.0063.
- [7] D. F. Litim and J. M. Pawłowski, Phys.Rev. **D66**, 025030 (2002), hep-th/0202188.
- [8] D. F. Litim and J. M. Pawłowski, Phys.Lett. **B546**, 279 (2002), hep-th/0208216.
- [9] J. S. Schwinger, Phys.Rev. **82**, 664 (1951).
- [10] J. Braun, Phys.Rev. **D81**, 016008 (2010), 0908.1543.