ＱＣＤ物質の緩和と相対論的流体方程式の輸送係数

室谷　心[1]
松本大学総合経営学部

相対論的な双曲型流体方程式である Israel-Stewart 方程式の輸送係数を、ハドロンの分子動力学モデルの数値シミュレーションで評価する。ハドロンの分子動力学モデルとしては、確率的衝突事象生成コード URASiMA を用いる。Israel-Stewart 方程式に新たに表れる輸送係数 α や β の振る舞いを議論した.

1　はじめに

RHIC での v2 の振る舞いに対する成功以来，流体モデルは高エネルギー重イオン衝突で生成される QGP の時空発展を記述する現象論的モデルとして，一定の評価を得たといってよいであろう．多くの場合，現象論として使われているのは QGP に対する完全流体モデルである [1]．完全流体は緩和時間ゼロの理想的な系であり，強く相互作用しているであろう QGP を記述するモデルとしては自然なものである．しかし，次のステップとして緩和の一次のオーダーを取り込むように理論を進めることも解析の自然な進歩であろう．

緩和の影響を取り込んだ流体方程式としてはナビエ・ストークス方程式がよく知られている．しかしながらナビエ・ストークス方程式は時間微分については 1 階で空間微分については 2 階の拡散型方程式であり，相対論的に共変になっていない．相対論から要請されるように，時空の扱いが対等になるようにナビエ・ストークス方程式を拡張した方程式として，イスラエルとスチュアートによる因果的流体方程式が知られている．イスラエル・スチュアート方程式には熱力学流について時間の 2 階微分の項や異なった熱力学流との相互作用項が存在し，時間微分と空間微分が対称に入っていて，相対論的には好ましい形に作られている．これらの新しい項の存在は，通常のナビエ・ストークス方程式にはなかった新しい輸送係数がモデルに存在することを意味し，流体モデルの立場からはこの新しい係数も，流体方程式を解く前に温度や密度といった熱力学量の関数としてあらかじめ与えられているべきものである．イスラエル・スチュアートにしたがって時間の 2 階微分の項の係数を β，異なった流れの間の相互作用項の係数を α と描くことにする．

2　輸送係数の微視的な表式

相対論的流体の微視的な表式については，ボルツマン方程式に基づく議論がよくなされているが [4]，ここでは，輸送係数を熱力学量の関数として求める際により扱いやすい，非平衡密度演算子に基づく方法をとる．すでに文献 [5] で議論したように，Nakajima-Zubarev 流の非平衡密度演算子

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho} \;&=\; Q^{-1}\mathrm{exp}\Bigg[\int dx^{\mu}\left\{\beta(\boldsymbol{x},t)U^{\nu}(\boldsymbol{x},t)\hat{T}_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)-\beta(\boldsymbol{x},t)\mu(\boldsymbol{x},t)U^{\nu}(\boldsymbol{x},t)\hat{J}_{\nu}(\boldsymbol{x},t)\right\} \\
&\quad -\int d^{\mu}\boldsymbol{x}\int_{-\infty}^{t}U^{\rho}dx_{\rho}\mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\left[\hat{T}_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t')\partial^{\mu}(\beta U^{\nu}(\boldsymbol{x},t'))+\hat{J}_{\nu}(\boldsymbol{x},t')\partial^{\nu}(\beta(\boldsymbol{x},t')\mu(\boldsymbol{x},t'))\right]\Bigg]
\end{aligned}
$$

からスタートし，熱力学的な力 $\partial^{\mu}(\beta U^{\nu}(\boldsymbol{x},t'))$ や $\partial^{\nu}(\beta(\boldsymbol{x},t')\mu(\boldsymbol{x},t'))$ の変化は巨視的なものであると考えて，微視的な相関の外に出してやれば，熱力学量を通してのみ場所の関数であるような局所的な係数を持つ時空発展の方程式が得られる．

[1]e-mail address: muroy@matsu.ac.jp

上式右辺の指数関数で第一項目だけとれば熱力学的な力のない局所平衡分布関数 ρ_l となる．エネルギー運動量テンソルの期待値 $\langle T^{\mu\nu}\rangle$，電荷流の期待値 $\langle J^\mu\rangle$ を上の非平衡密度行列でとり，熱力学的力の項を無視すれば，局所平衡分布関数 ρ_l の期待値で

$$\langle \hat{T}^{\mu\nu}(x)\rangle_l = (\varepsilon + P)U^\mu U^\nu - Pg^{\mu\nu} \tag{1}$$

$$\langle \hat{J}^{\mu}(x)\rangle_l = nJ^\mu \tag{2}$$

となり，両辺の発散を取れば完全流体の方程式と電荷流保存の式が得られる．非平衡密度演算子の指数部第 2 項の熱力学的な力の部分を展開して，線形応答の範囲で一次までとることにする．展開した演算子の熱力学的力の部分を期待値を取る演算子 $\hat{T}^{\mu\nu}(x)$ や $\hat{J}^\mu(x)$ の座標点の周りで展開し 0 次（巨視的変化なので微視的には時空点によらず定数）だけを考えれば，粘性

$$\int d^3\boldsymbol{x}' \int_{-\infty}^{t} dt' \mathrm{e}^{(t-t')} (\hat{T}^{\mu\nu}(x), \hat{T}_{\rho\sigma}(x'))$$

や電気伝導率

$$\int d^3\boldsymbol{x}' \int_{-\infty}^{t} dt' \mathrm{e}^{(t-t')} (\hat{J}^{\mu}(x), \hat{J}_{\rho}(x'))$$

を与えるカノニカル相関の久保公式となる．ここで　$(\hat{O}, O')$ はカノニカル相関である．

さらに座標に関する展開の１次までとれば

$$\int d^3\boldsymbol{x}' \int_{-\infty}^{t} dt' \mathrm{e}^{(t-t')} (\hat{T}^{\mu\nu}(x), U^\lambda({x_\lambda}' - x_\lambda)\hat{T}_{\rho\sigma}(x'))$$

や

$$\int d^3\boldsymbol{x}' \int_{-\infty}^{t} dt' \mathrm{e}^{(t-t')} (\hat{T}^{\mu\nu}(x), ({x_\lambda}' - x_\lambda)\hat{J}_{\rho}(x'))$$

がイスラエル・スチュアートの流体方程式に現れる輸送係数 β や α を与えることがわかる．つまり，通常の粘性係数や電気伝導率は熱力学流や電荷電流のカノニカル相関の積分で与えられるが，イスラエル・スチュアートの新しい輸送係数は，熱力学流や電荷電流のカノニカル相関に二つの演算子の時間差や距離の重みを付けて積分したものとなる．β は時間差の重みを付けて自己相関を取ったものなので，すでに知られているようにそのカレントの緩和時間となる．α は異なったカレントとの相関なのでキュリーの定理で落ちてしまいそうに思えるが，重みとして入った時空間距離が対称性の違いを補償することになる．したがってゼーベック効果やペルティエ効果のような異なったカレント間の相関の効果が現れる．詳しくは [5] を見てほしい．

3　HadroMorecular な計算

輸送係数がカノニカル相関で与えられることが解ったので，あとは，これを有限温度場の理論で計算すれば，QGP やハドロン流体の方程式の係数が完全に決まることになる．しかしながらこの計算は，現実問題としては非常に難しいので，ここではハドロンの分子動力学的な計算による評価でとりあえずは我慢することにする．

ここで使うハドロン分子動力学系は，散乱衝突事象生成子 URASiMA に基づくものであり [6]，我々は１０年ほど前に，拡散係数や輸送係数の評価を行った [7]．また，ずれ粘性エントロピー比 η/s の評価も行ったことがある [8]．今回この統計力学系を使って，時間や距離の重みの付いたカノニカル相関の評価を試みた．

流れの演算子 $\hat{O}_1$，$\hat{O}_2$ のカノニカル相関積分

$$\langle\langle O_1|O_2\rangle\rangle = \lim_{\zeta\to 0+}\int_{-\infty}^{t} dt' \mathrm{e}^{-\zeta(t-t')}\int d^3\boldsymbol{x}' \left(\hat{O}_1(\boldsymbol{x},t),\hat{O}_2(\boldsymbol{x}',t')\right),$$

を考え，そのうちの時間積分だけ残し空間積分を実行した

$$\int d^3\boldsymbol{x}' \left(\hat{O}_1(\boldsymbol{x},t),\hat{O}_2(\boldsymbol{x}',t')\right),$$

を $\langle\hat{O}_1(t)|\hat{O}_2(t')\rangle$ とする．分子動力学的に評価し，この $\langle\hat{O}_1(t)|\hat{O}_2(t')\rangle$ の非零領域が有限な時間内におさまっていれば，時間積分も適切に実行することができる．

温度が 140MeV 程度のハドロンガスの場合についてバリオン数流とずれ粘性の間のクロス相関で現れる α のための，相関 $\langle I_B|\mathbf{x}|\pi\rangle$ を計算してみたところ，図 1 のようになった．

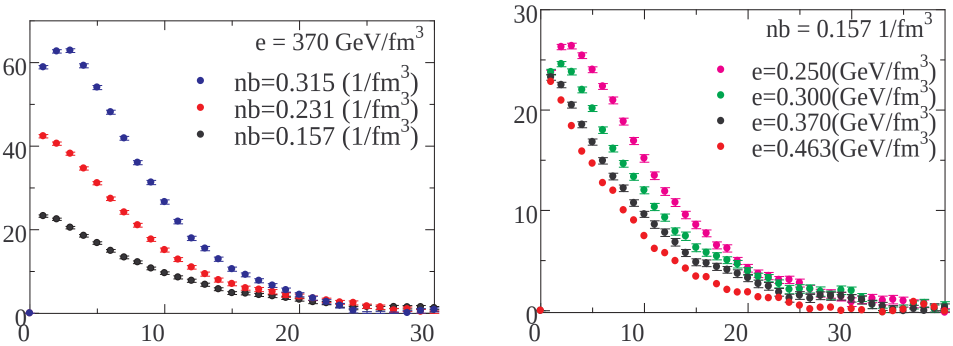

図 1: $\langle I_B|\mathbf{x}|\pi\rangle$ 横軸は時間/fm．エネルギー密度を一定にしバリオン数密度を変えた場合 (左) および，バリオン数密度を一定にしエネルギー密度を変えた場合 (右)

図 1 のグラフを積分すれば，バリオン流とずれ粘性の間の係数 α を，バリオン数密度とエネルギー密度の関数として求めることができる．現在，さらに解析を進めているところである．

参考文献

[1] For example see, T. Hirano, N. van der Kolk, A. Bilandzic, Lect. Notes Phys. **785**, 139-178 (2010).

[2] W. Israel, Ann. of Phys. **100**(1976), 310.

[3] W. Israel and J. M. Stewart, Ann. of Phys. **118**, 341 (1979).

[4] K. Tsumura and T. Kunihiro,Phys. Lett. **B690**, 255 (2010);K. Tsumura, T. Kunihiro and K. Ohnishi, Phys. Lett. **646B**, 134 (2007).

[5] S. Muroya and M. Mizutani, arXiv:1211.7173;
see also S. Muroya, Prog. Theor. Phys. Suppl. **193**, 327(2012).

[6] N. Sasaki, Prog. Thor. Phys. **106**, 783 (2001).

[7] N. Sasaki, O. Miyamura, S. Muroya and C. Nonaka, Europhys. Lett. **54**, 38 (2001);
N. Sasaki, O. Miyamura, S. Muroya and C. Nonaka, Phys. Rev. **C62**, 011901(R)(2000).

[8] S. Muroya and N. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **113**, 457 (2005).