

相対論的場の理論における散逸モードの微視的同定

斎藤陽平（高エネルギー加速器研究機構）

本講演は、共同研究 [1] に基づく。詳細な議論については、そちらを参照されたい。

1 はじめに

重イオン衝突におけるクォーク・グルオン・プラズマ (QGP) の時間発展 [2] を始め、BEC の低エネルギー励起 [3] や超新星爆発のシミュレーション [4] など、系の相関長 ξ や相関時間 τ と比べ、はるかに長い空間・時間的スケールの現象を記述する際には、巨視的な有効理論である流体方程式が広く用いられている。流体方程式において、粒子間衝突などの、 τ, ξ と比べはるかに小さいスケールで起きる過程は積分されて定数（輸送係数）として扱われ、その結果ダイナミクスはエネルギーや運動量といった巨視的な物理量（保存量）で記述される。

次に QCD 臨界点のサーベイなどで重要となる、臨界点近傍におけるダイナミクスに興味がある場合の有効理論を考える。系が臨界点 ($T = T_c$) に近づくと、大きな揺らぎのために秩序変数の相関長 ξ および相関時間 τ が

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}, \quad \tau \sim \xi^z, \quad (1)$$

のように発散する。特に τ の発散は、平衡状態への緩和が非常に遅くなることを意味する。 ξ, τ の発散に伴い、いくつかの輸送係数も臨界点で発散する¹。 $T \sim T_c$ でダイナミクスの時間スケールが非常に大きくなる現象を動的臨界現象と呼ぶ。臨界領域における系の振る舞いを調べるには、動的臨界現象の理解が必要不可欠である。また式 (1) 中の z は動的臨界指数と呼ばれ、秩序変数の相関時間だけでなく、輸送係数の発散も決定する。すなわち、臨界ダイナミクスそのものを特徴づける量である。臨界ダイナミクスは巨視的なスケールの現象ではあるが、相関長・相関時間の発散により、 ξ, τ よりはるかに大きなスケールを扱う流体方程式は破綻してしまう。しかし臨界領域では系の自由度の時間スケールが分離しており、自由度を遅い変数と速い変数に分けることができる。動的臨界現象は非常に長時間のダイナミクスであるため、系で最も遅い変数である、秩序変数と散逸モード（分散が $p_0 \propto -ip^2$ で与えられるモード）の時間スケールでみればよい。このとき、他の速い変数は白色ノイズとして扱うことができる。このようなメソスコピックな有効理論（モード結合理論 [7, 8]）は、動的臨界指数 z の評価に大きな成果を上げ、QCD の臨界ダイナミクスにも適用されている [5, 6]。

以上のように、どのスケールの現象に興味があるかによって、用いる有効理論は変わってくる。一方どのようなスケールであろうとも、原理的には微視的な方程式からダイナミクスを理解することは可能である。しかし微視的な理論は粒子同士の衝突を直接扱うため、無数の衝突過程が含まれる巨視的スケールの現象を、単純な摂動論で扱うことは困難である [9]。そこで無数の衝突効果を再足し上げにより取り込むことで、微視的な理論から巨視的スケールの現象を記述することを目指した。二粒子既約 (2PI) 有効作用 [10, 11] は、場の期待値 $\langle \varphi \rangle$ に加え、その 2 点相関関数 ($\sim \langle \varphi \varphi \rangle$) も自己無撞着な方程式で与えることにより、2 点関数までの再足し上げを系統的に行うことができる手法である。本稿では、 $O(N)$ φ^4 模型を 1PI および 2PI 有効作用の $1/N$ 展開 next-leading-order (NLO) で扱い、 φ の 2 点相関関数が長距離・長時間（赤外領域）で散逸モードを持つかどうかを調べる。さらに臨界点における 2 点相関関数から、相関時間 τ の発散を表す動的臨界指数 z の評価を行う。

2 微視的モードの同定

非保存量の秩序変数 φ は、現象論的には長距離・長時間で拡散方程式に従う。そのため φ の 2 点関数は、

$$G_{\text{pheno}}(p_0, \mathbf{p}) \sim \frac{1}{-ip_0/\Gamma + \mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (2)$$

の様に散逸的に振る舞う。式 (2) を時間についてラプラス変換すると、 $G_{\text{pheno}}(t, \mathbf{p}) \sim e^{-\Gamma(\mathbf{p}^2 + m^2)t}$ となるため、 Γ は緩和時間を与える緩和係数であることが分かる。

¹例えば、QCD 相転移と同じ普遍性クラスとされている気液相転移 [5, 6] では、ずり粘性係数が発散する。

次に微視的な理論で φ の緩和を扱う。流体描像が有効な平衡状態近傍においては、線形応答理論を適用できる。従って φ の緩和は、平衡状態における φ の遅延相関関数 $G_R(p)$ で与えられる。 $G_R(p)$ は形式的に、 $G_R(p_0, \mathbf{p}) = [-p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m_0^2 - \text{Re} \Sigma_R(p_0, \mathbf{p}) - i \text{Im} \Sigma_R(p_0, \mathbf{p})]^{-1}$ と書けるため、 $\text{Im} \Sigma_R(p)$ が

$$\gamma^{-1} \equiv \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}} \lim_{p_0 \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial p_0} \text{Im} \Sigma_R(p_0, \mathbf{p}) \right) \neq 0, \infty, \quad (3)$$

を満たせば、 $G_R(p)$ は式 (2) の $G_{\text{pheno}}(p)$ と同様、長距離・長時間（赤外領域）で散逸的に振る舞うといえる。我々は、式 (3) を散逸モードが存在するための条件とした。

本稿では相対論的 $O(N)$ φ^4 模型

$$S[\varphi] = \int dt d^d x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_a(x) \partial^\mu \varphi_a(x) - \frac{m_0^2}{2} \varphi_a(x) \varphi_a(x) - \frac{\lambda_0}{4! N} (\varphi_a(x) \varphi_a(x))^2 \right], \quad (4)$$

を用いて、式 (3) を評価する。ただし m_0, λ_0 は、それぞれ裸の質量と裸の結合定数であり、場の添え字 a は、 $a = 1, \dots, N$ である。また $O(N)$ 対称性から、遅延相関関数 $G_R(p_0, \mathbf{p})$ は、

$$G_R(p_0, \mathbf{p}) \delta_{ab} = G_R^{ab}(p_0, \mathbf{p}) = \int dt d\mathbf{x} e^{i(p_0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \theta(t) \text{Tr} \{ e^{-\beta H} [\varphi_a(t, \mathbf{x}), \varphi_b(0, \mathbf{0})] \}, \quad (5)$$

で与えられる。散逸は熱浴中の粒子との散乱により生じるので、散乱過程が含まれる $1/N$ 展開の NLO を用いる。このとき自己エネルギーのダイアグラムは、図 1 で与えられる。

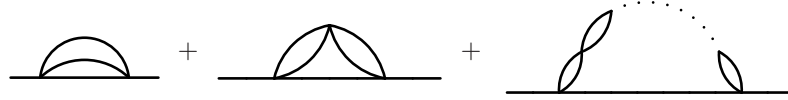


図 1: 自己エネルギーの $1/N$ 展開 NLO ダイアグラム。点線部分はバブルダイアグラムの足し上げを表している。

ここでバブルダイアグラム Π と、 Π を足し上げた相関関数 $D \sim \langle \varphi^2 \varphi^2 \rangle$ を定義する。特に遅延相関関数 $\Pi_R(p)$, $D_R(p)$ は、

$$\Pi_R(p) = \int \frac{dq_0 d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} n(q_0) \rho(q) [G_R(p+q) + G_A(q-p)], \quad (6)$$

$$D_R(p) = \frac{\Pi_R(p)}{1 + \frac{\lambda}{6} \Pi_R(p)}, \quad (7)$$

で与えられる。このとき自己エネルギーの虚部 $\text{Im} \Sigma_R(p)$ は、

$$\text{Im} \Sigma_R(p) = \frac{\lambda}{6N} \frac{\lambda}{6} \int \frac{dq_0 d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \rho(q) \rho_D(p+q) [n(q_0) - n(p_0 + q_0)], \quad (8)$$

となる。ただし $\rho(p)$, $\rho_D(p)$ はそれぞれ $G_R(p)$, $D_R(p)$ のスペクトル関数で、 $n(x) = (e^{\beta x} - 1)^{-1}$ である。式 (3) より γ^{-1} は、

$$\gamma^{-1} = -\frac{\lambda}{6N} \frac{\lambda}{6} \int \frac{dq_0 d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \rho(q_0, \mathbf{q}) \rho_D(q_0, \mathbf{q}) n'(q_0), \quad (9)$$

となる。式 (9) より、 $\rho(p)$, $\rho_D(p)$ が積分領域にオーバーラップを持てば、 $\gamma^{-1} \neq 0$ となることが分かる。

まず 1PI 有効作用で評価する。 $\rho(q)$ は質量殻上 ($q_0^2 - \mathbf{q}^2 = m^2$) に δ 関数のピークを持ち、一方 φ^2 のスペクトル関数 $\rho_D(q)$ は、 $\varphi^2 \rightarrow \varphi\varphi$ と $\varphi^2\varphi \rightarrow \varphi$ （およびその逆過程）に対応して、それぞれ $s = q_0^2 - \mathbf{q}^2 > (2m)^2$ と $s < 0$ に 0 でない値を持つ（図 2 左）。従って $\rho(q)$, $\rho_D(q)$ はオーバーラップを持たず、 $\gamma_{\text{1PI}}^{-1} = 0$ となり、1PI NLO で散逸モードは存在しないことが確認できた。

次に 2PI 有効作用で評価を行う。2PI の枠組みでは、2 点相関関数が自己無撞着な方程式 (Kadanoff-Baym 方程式) で与えられる。すなわち自己エネルギーダイアグラムに現れる相関関数は、自由場の相関関数ではなく、相互作用効果の入った相関関数 (full propagator) となる。式 (3) 中のスペクトル関数にも、すでに熱浴との多重散乱効果を取り込まれている。そのため $\rho(q)$ は δ 関数ではなく、有限の幅を持つ。また $\rho_D(q)$ にも同様に熱浴との散乱による効果を取り込まれている。多重散乱効果によるスペクトル関数の広がり进行评估すると、 $\rho(p)$ 、 $\rho_D(p)$ は積分領域のほぼ全領域に 0 でない値を持つことが分かる。従って積分領域にオーバーラップが生じ (図 2 右) 2PI NLO では $\gamma_{2PI}^{-1} \neq 0$ となる。さらに次元解析などを用いて、 $\gamma_{2PI}^{-1} \neq \infty$ も示すことができる。これらの結果から、散逸モードの導出には多重散乱効果が重要であることが分かった。

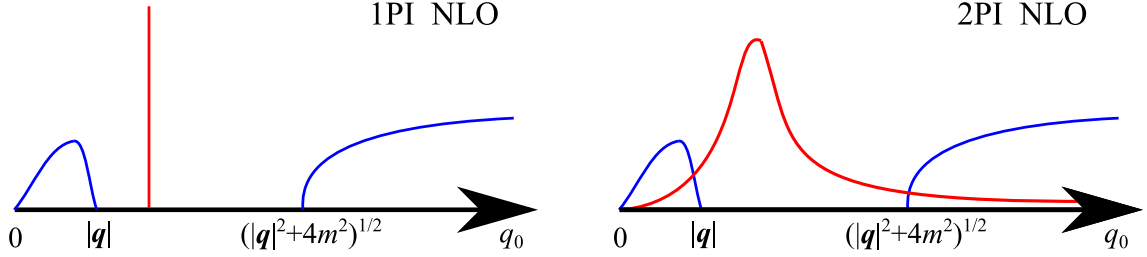


図 2: それぞれ 1PI NLO (左図) と 2PI NLO (右図) について、スペクトル関数 $\rho(q_0, q)$ (赤線) と $\rho_D(q_0, q)$ (青線) の概形を図示した。ただし 2PI NLO の方は、 $\rho(q_0, q)$ のみ再足し上げの効果を取り入れた概形を描いた (ρ 、 ρ_D のオーバーラップをみるには、これで十分である)。1PI NLO では二つのスペクトル関数はオーバーラップ領域を持たないが、2PI NLO ではオーバーラップを持つことが分かる。

3 動的臨界指数 z の評価

系が臨界点に近づくと大きな揺らぎが生じ、相関長と相関時間が発散する。このとき空間と時間のスケール変換に対する不変性が発生する。特に 2 点相関関数はスケール変換に対して、

$$G_R(p_0, \mathbf{p}) = b^{2-\eta} G_R(b^z p_0, b\mathbf{p}), \quad (10)$$

となる (ただし $b > 1$)。ここで η は静的臨界指数で、 $\mathcal{O}(1/N)$ の量である。さらに $b = \Lambda/|\mathbf{p}|$ とおくと²、

$$G_R(p_0, \mathbf{p}) = \left(\frac{\Lambda}{|\mathbf{p}|}\right)^{2-\eta} \cdot G_R\left(\frac{\Lambda^z p_0}{|\mathbf{p}|^z}, \Lambda\right) = \Lambda^{-2} \left(\frac{\Lambda}{|\mathbf{p}|}\right)^{2-\eta} \cdot \tilde{G}_R\left(\Lambda^{z-1} \frac{p_0}{|\mathbf{p}|^z}\right), \quad (11)$$

となり、動的臨界指数 z が p_0 と \mathbf{p} の冪の比として得られることが分かる。また $G_R(p)$ の質量次元が -2 であることを用い、無次元量の関数 \tilde{G}_R を定義した。

臨界点における $G_R(p)$ の関数形について考察する。赤外領域における 2 点相関関数が散逸的であること、および静的臨界現象による $\text{Re} \Sigma_R(p)$ の評価を行うと、

$$G_R(p_0, \mathbf{p}) \sim \frac{1}{-i\Gamma^{-1} p_0 + \Lambda^\eta p^{2-\eta}} = \Lambda^{-2} \left(\frac{\Lambda}{|\mathbf{p}|}\right)^{2-\eta} \cdot \frac{1}{-i\Gamma^{-1} \Lambda^{-\eta} p_0 / |\mathbf{p}|^{2-\eta} + 1}, \quad (12)$$

となる。式 (11)、(12) を比較すると、 $z = 2 - \eta$ が得られる。

式 (12) では、緩和係数 Γ が臨界点においても定数であると仮定したが、一般的には \mathbf{p} に依存し得る。緩和係数の主要な寄与を $\Gamma \sim \Gamma_0 |\mathbf{p}|^{-c}$ と置くと、臨界点における $G_R(p)$ の関数形は、

$$G_R(p_0, \mathbf{p}) \sim \frac{1}{-i\Gamma_0^{-1} (\Lambda/|\mathbf{p}|)^c p_0 + \Lambda^\eta p^{2-\eta}} = \Lambda^{-2} \left(\frac{\Lambda}{|\mathbf{p}|}\right)^{2-\eta} \cdot \frac{1}{-i\Gamma_0^{-1} \Lambda^{c-\eta} p_0 / |\mathbf{p}|^{2-\eta+c} + 1}, \quad (13)$$

となる。式 (11)、(13) を比較すると、 z を形式的に $z = 2 - \eta + c$ と書くことができる [1]。

²ここで Λ は臨界温度 T_c と同じオーダーの量である。

ここまでが論文 [1] に基づく内容であるが、今回講演者はさらに式 (13) を用いて、自己無撞着に Schwinger-Dyson 方程式を解き、 c の値を求めることを試みた。臨界ダイナミクスは赤外領域の物理で記述されるため、 φ の相関関数 $G_R(p)$ だけでなく、 φ^2 の相関関数 $D_R(p)$ についても、周波数 p_0 について 1 次近似をして評価を行った。その結果、動的臨界指数として $z = 3 + \mathcal{O}(1/N)$ を得た。しかし $N \rightarrow \infty$ の極限では相互作用が弱くなるため、臨界点でも緩和係数 Γ は特異的な振る舞いはせず定数のままであり、従って $z = 2 + \mathcal{O}(1/N)$ となるはずである。このことから、自己無撞着な方程式による c の評価は未だ不十分であり、その原因は $D_R(p)$ を周波数について 1 次近似したことにあると考えられる。

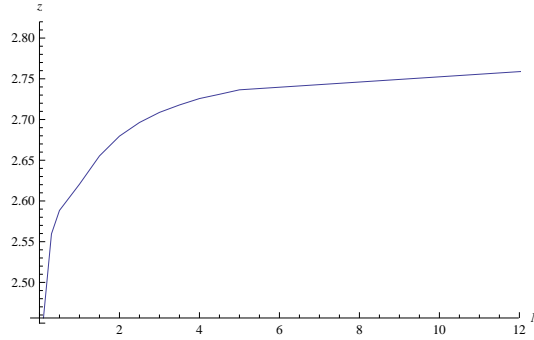


図 3: 臨界指数 z を N の関数としてプロットした。

4 まとめと今後の展望

本稿では、まず相対論的 $O(N)$ φ^4 模型の $1/N$ 展開を用い、 $T \neq T_c$ における 2 点相関関数 $G_R(p)$ が、赤外領域に散逸モード ($p_0 \propto -ip^2$) を持つかどうかを調べた。その結果、1PI 有効作用の NLO には散逸モードが現れないが、再足し上げによる多重散乱効果を取り込める 2PI 有効作用を用いると、NLO で散逸モードが現れることを確認できた。

続いて、臨界領域における系のダイナミクスを特徴づける、動的臨界指数 z の評価を行った。 $T = T_c$ における 2 点相関関数 $G_R(p)$ の散逸的振る舞いから、我々は $z = 2 - \eta$ という値を得た。さらに臨界点における緩和係数 Γ の運動量依存性 ($\Gamma \sim \Gamma_0 p^{-c}$) を考慮することで、臨界指数の値が $z = 2 - \eta + c$ と改善されることについても触れた。 c の正確な評価については今後の課題としたい。

参考文献

- [1] Y. Saito, H. Fujii, K. Itakura, and O. Morimatsu, arXiv:1309.4892 (2013).
- [2] P. F. Kolb and U. Heinz, in *Quark-Gluon Plasma* (2004), vol. 1, p. 634.
- [3] S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **77**, 2360 (1996).
- [4] T. Takiwaki, K. Kotake, and Y. Suwa, ApJ **749**, 98 (2012).
- [5] H. Fujii, Phys. Rev. D **67**, 094018 (2003).
- [6] D. T. Son and M. A. Stephanov, Phys. Rev. D **70**, 056001 (2004).
- [7] K. Kawasaki, Ann. Phys. **61**, 1 (1970).
- [8] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. **49**, 435 (1977).
- [9] L. P. Kadanoff and P. C. Martin, Ann. Phys. **24**, 419 (1963).
- [10] J. M. Luttinger and J. C. Ward, Phys. Rev. **118**, 1417 (1960).
- [11] J. M. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis, Phys. Rev. **D10**, 2428 (1974).