

強結合格子 QCD における高運動量補助場成分の寄与

市原 輝一^{A,B}, 中野 嵩士^C, 大西 明^B
京大理^A, 京都大学基礎物理学研究所^B, (株) 構造計画研究所^C

概要

強結合格子 QCD に補助場のモンテカルロ法を適用する。発生する符号問題の起源を明らかにし、得られた結果を議論する。

1 はじめに

QCD の第一原理計算である格子 QCD は、QCD を研究する上で有用な手法である。しかし、有限化学ポテンシャルを含む格子 QCD のモンテカルロシミュレーションでは、符号問題が発生するため、その解析が非常に難しい。そこで、有限化学ポテンシャル領域を含む QCD 相図を研究する別の手法として、強結合格子 QCD (格子 QCD の強結合展開) がある。先行研究では、この強結合格子 QCD による相図研究の多くが、符号問題の影響がない平均場近似で行われている。平均場近似を超えた解析では符号問題の影響が現れる可能性がある。実際、近年行われたモノマー・ダイマー・ポリマー (MDP) 計算 [1] と補助場のモンテカルロ (AFMC) 法 [2] による研究の両方で、符号問題が発生する事が判明している。現在の AFMC 法での解析は格子サイズが小さく、大きな格子サイズへ適用する為には、符号問題による統計重みの打消しの起源を明瞭にする必要がある。そこで今回、強結合格子 QCD における補助場のモンテカルロ法を紹介し、その際に出現する符号問題の起源を同定する。

2 補助場のモンテカルロ (AFMC) 法と符号問題

補助場のモンテカルロ (AFMC) 法とは、導入された補助場に対し平均場近似を適用せず、モンテカルロ法を用いて数値的に積分する方法である。この方法により、補助場の揺らぎの効果が考慮される。また符号問題とは、統計重みが複素数となることで、重みの打ち消しあいが起こり、数値計算精度が低下する問題である。この節では、強結合格子 QCD における補助場のモンテカルロ法と符号問題との関係について紹介する。今回の定式化では、格子フェルミオンとして Unrooted staggered fermion を用いる。また、非等方因子 γ は空間方向と時間方向の作用の比として導入する [3]。この時作用は、強結合極限と $1/d$ 展開 (d は空間次元数) の主要項のみを考慮すると

$$Z = \int \mathcal{D}[\chi, \bar{\chi}, U_0] e^{-S_{\text{SCL}}}, \quad (2.1)$$

$$S_{\text{SCL}} = \frac{1}{2} \sum_x [V_x^+(\mu) - V_x^-(\mu)] - \frac{1}{4N_c} \sum_{x,y} M_x V_{x,y} M_y + m_0 \sum_x M_x, \quad (2.2)$$

$$V_x^+(\mu) = e^{\mu/\gamma^2} \bar{\chi}_x U_0 \chi_{x+\hat{0}}, V_x^-(\mu) = -e^{-\mu/\gamma^2} \bar{\chi}_{x+\hat{0}} U_0^\dagger \chi_x, V_{x,y} = \frac{1}{2} \sum_j (\delta_{x+\hat{j},y} + \delta_{x-\hat{j},y}), \quad (2.3)$$

となる [3, 4, 5, 6]。ここで、裸の質量 m_0 、化学ポテンシャル μ 、(反)クォーク場 $(\bar{\chi})\chi$ 、リンク変数の第 0 成分 U_0 、カラー $N_c = 3$ 、メソン場 $M_x = \bar{\chi}_x \chi_x$ である。但し、格子間隔 a は省略した。 S_{SCL} の初項は時間方向の運動項、第 2 項はメソンホッピング項、第 3 項は質量項を表す。次に補助場を導入し、式 (2.2) のメソン 2 体場を 1 体場に帰着させる。各サイトで違う値をとるので、Extended Hubbard-Stratnovich(EHS) 変換 [2, 5] を採用する (

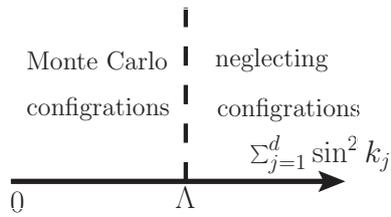


図 1 カットオフパラメータ Λ と Monte Carlo 配位との関係図。 Λ より大きい運動量の配位は無視して計算する事で、高運動量補助場成分の秩序変数に与える影響を調べる。

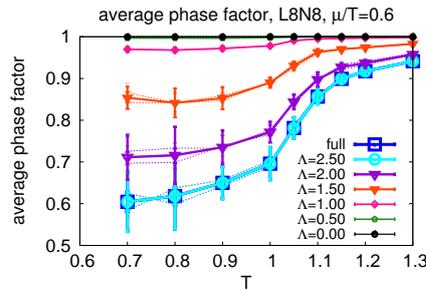


図 2 average phase factor の Λ 依存性。 Λ を 0 にする程、数値計算精度の低下が問題とならなくなる。

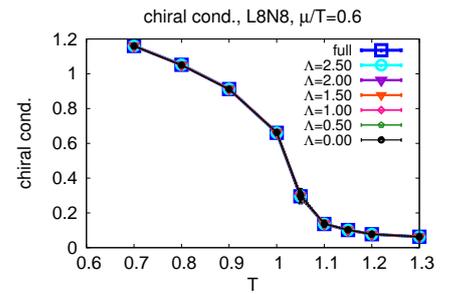


図 3 カイラル凝縮の Λ 依存性。カイラル凝縮に Λ 依存性はみられない。

$\exp[\alpha AB] = \int \mathcal{D}[\phi, \varphi] \exp[-\alpha [\phi^2 + \varphi^2 + (A+B)\varphi - i(A-B)\phi]]$. これは数学的な恒等式であり、符号問題の原因となる虚数が必然的に導入される。フーリエ変換の後、EHS 変換を用い、 $M_{-\mathbf{k}, \tau}, iM_{-\mathbf{k}+(\pi, \pi, \pi), \tau}$ に対する補助場として $\sigma_{-\mathbf{k}, \tau}, \pi_{\mathbf{k}, \tau}$ を導入する [2]。この結果、フェルミオン行列の空間的対角項 (有効質量項) が以下のように変更される。

$$m_x = m_0 + \frac{1}{4N_c} \sum_j \left[(\sigma + i\varepsilon\pi)_{x+\hat{j}} + (\sigma + i\varepsilon\pi)_{x-\hat{j}} \right]. \quad (2.4)$$

ここで、 $\varepsilon_x = (-1)^{\tau+x_1+\dots+x_d}$ であり、連続理論における γ_5 と似た役割をする。式 (2.4) から、AFMC 法を用い数值的に補助場を積分する際に、この有効質量項から符号問題が現れる。そこで、どのような場合に統計重みの打ち消しが厳しくなるかを以下では考察する。まず、 π 場が空間的に一樣な場合を考える。この時、 π 場が ε_x と結合している為に隣接サイト同士で絶対値が等しい逆符号の値をとる。全空間で和をとるので、隣接サイト同士で π 場が打ち消しあい、 $i\varepsilon\pi$ 項の効果は 0 となる。よって、 π 場がほぼ一樣であるような低運動量モードが寄与する場合には、このような場同士のキャンセルが起こり、数値計算精度の低下が問題とならない。一方、場が大きく揺らぐような高運動量モードが効くような場合には、 ε_x 項による場の打ち消しあいが十分ではなくなり、数値計算精度の低下を招く可能性がある。次の節で、以上の議論を数的に確認する。

3 結果

強結合格子 QCD における AFMC 法では、高運動量モードにより統計重みの打ち消しが激しくなる可能性がある。そこで、高運動量モードをカットすることで、高運動量補助場成分の weight cancellation に対する寄与を数的に確認する。まず、高運動量モードを空間方向に対する補助場の運動量 ($\sum_{j=1}^d \sin^2 k_j$) の内、カットオフパラメータ Λ より値が大きいモードとして定義する (図 1)。 Λ のとる値は $0 \leq \Lambda \leq d(=3)$ の範囲であり、今回の計算では Λ よりも大きい高運動量モードを無視する。なお、 Λ が値 $d(=3)$ をとる時は、全てのモンテカルロ配位を考慮した計算となり、値 0 をとる時は一番低い運動量モードのみを取り入れた計算に対応する。今回の数値計算結果は全て、カイラル極限 $m_0 = 0$ 、格子サイズ 8^4 、 $\mu/T = 0.6$ 上での計算である。また、誤差は Jack knife 法で評価した。図 2 は統計重みの打ち消しの度合いを示す average phase factor の図である。average phase factor は統計重みの複素位相を θ とすると、 $\langle e^{i\theta} \rangle$ と表現される。1 に近いほど統計重みの打ち消しが無い事を表し、数値計算精度の低下がない。逆に 0 に近い程、統計重みの打ち消しが激しくなり数値計算精度の低下が著しくなる。図 2 から、カットオフ Λ を $d \rightarrow 0$ に動かすと 1 に近づき統計重みのキャンセルがなくなる。これは前章の考察と無矛盾であり、高運動量補助場成分が数値計算精度低下の起源となる事が確認された。次に、秩序変数の Λ 依存性の結果を議論する。図 3 はカイラル凝縮のカットオフ依存性を表している。ここで、カイラル極限であるため、カイラルサークルの半径をカイラル凝縮としている。図 3 によると、カイラル凝縮は

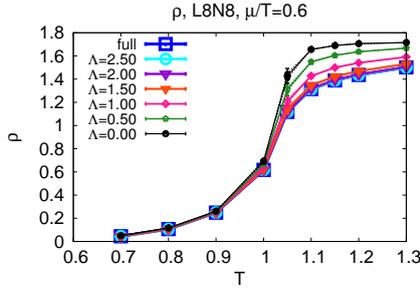


図4 クォーク数密度の Λ 依存性。

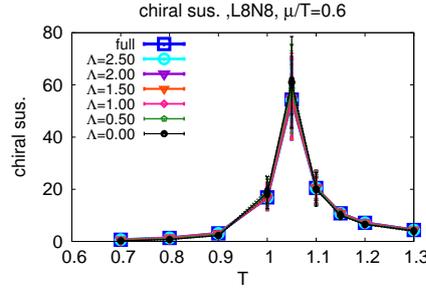


図5 カイラル感受率の Λ 依存性。

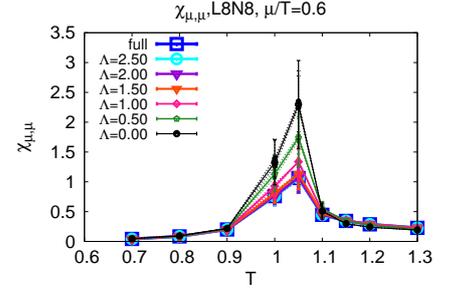


図6 クォーク数感受率の Λ 依存性。

カットオフ依存性がない。これはモンテカルロ法における積分変数が σ, π である事と、スカラー・擬スカラーモードは最も低い補助場運動量成分に含まれることに起因する。図4、図5、図6はそれぞれクォーク数密度、カイラル感受率、およびクォーク数感受率のカットオフ依存性である。これらの結果から、カットオフパラメータ Λ が2.0以上であればクォーク数密度、カイラル感受率、クォーク数感受率の振る舞いがカットオフに依存しない。一方で、図2から average phase factor は全ての配位を取り入れた場合に比べて1に近くなっており、モンテカルロ法における重みのキャンセルが改善している。よって、average phase factor を改善しながらも、相転移現象に関する物理量の値が変化しないような臨界カットオフ Λ_c の存在が示唆される。

4 まとめと展望

本研究では、補助場のモンテカルロ法による符号問題の起源について議論した。補助場に対するモンテカルロ計算を行う際、高運動量補助場成分が数値計算精度の低下を招く事が定性的・数値的に確認された。さらに Λ_c を選ぶ事で、数値計算精度の低下がより問題となる、大きな格子サイズでの相転移研究が可能である事が示唆された。そこで、高運動量成分をカット、もしくは近似することで、より大きな格子サイズでQCD相転移を議論するという方向が考えられる。

参考文献

- [1] F. Karsch, K. H. Mutter, Nucl. Phys. B 313, 541 (1989);
W. Unger and P. de Forcrand, J.Phys. G 38, 124190 (2011).
- [2] A. Ohnishi, T. Ichihara, and T. Z. Nakano, PoS LATTICE2012, 088 (2012).
- [3] N. Bilic, F. Karsch, and K. Redlich, Phys. Rev. D 45, 3228 (1992).
- [4] G. Faldt and B. Petersson, Nucl. Phys. B265, 197 (1986).
- [5] K. Miura, T. Z. Nakano, A. Ohnishi, and N. Kawamoto, Phys. Rev. D80, 074034(2009);
T. Z. Nakano, K. Miura and A. Ohnishi, Prog. Theor. Phys. 123, 825 (2010).
- [6] Y. Nishida, Phys. Rev. D69, 094501 (2004);
K. Fukushima, Prog. Theor. Phys. Supplement 153, 204 (2004).