

格子 QCD による非閉じ込め相におけるチャームクォークの拡散係数と緩和時間の解析

池田惇郎, 浅川正之, 北沢正清
大阪大学大学院理学研究科物理学専攻

1 はじめに

RHIC 及び LHC における重イオン衝突実験に対する流体模型の成功以降、クォークグルーオンプラズマ (QGP) の輸送係数は実験による測定の対象として、また散逸流体模型による数値計算の入力として、更には QGP を含めた、強結合多体系の輸送現象の一つとして興味を持たれている。

一般によく知られている流体方程式としては、Navier-Stokes(NS) 方程式が挙げられる。しかし、相対論的な NS 方程式は「因果律を破る」、「数値計算における不安定性」などの問題がある、このため重イオン衝突実験における QGP の時間発展を扱うには 2 次の散逸項を導入してこれらの問題を解決した Israel-Stewart 方程式などを用いることが望ましい。IS 方程式には 2 次の散逸項に対する輸送係数として緩和時間が現れる。輸送係数の一つとしてチャームクォークの拡散係数がある。緩和時間は 2 次の散逸項の輸送係数として、流体方程式に現れる。

本研究では輸送係数の一つであるチャームクォークの拡散係数とその緩和時間に注目し格子 QCD による解析を行う。2 次の流体方程式から得られる緩和時間近似を仮定するとスペクトル関数の低エネルギー構造を決めることができる。この関係を用いて格子 QCD から得られたベクターカレントの相関関数から、非閉じ込め相におけるチャームクォークの拡散係数と緩和時間を読み取ろうと試みた。

2 緩和時間近似とスペクトル関数の低エネルギー構造

Israel-Stewart 方程式には緩和時間が定義されている。媒質の静止系においてカレント流 n^μ の従う流体方程式は、 $n^\mu = -nq^\mu/(\rho + P)$ として

$$\frac{d}{dt}q^\mu = -\frac{1}{\tau_D}(q^\mu + (\text{熱力学量の微分項})) \quad (1)$$

である [1]。 q^μ は熱流、 n は粒子密度、 ρ はエネルギー密度、 P は運動量密度であり、 τ_D は緩和時間と呼ばれる。右辺第一項以外を無視すると、 q^μ の時間発展は

$$q^\mu(t) = q^\mu(0) \exp(-t/\tau_D) = q^\mu(0) \exp(-\Gamma t) \quad (2)$$

となる。ただし $\Gamma \equiv 1/\tau_D$ とした。

緩和時間近似とスペクトル関数の関係を見るために、まずチャームクォーク c のカレント $J_i(t, x) = \bar{c}i\gamma_i c$ ($i = 1, 2, 3$) の相関関数、 $\langle J_i(t)J_i^\dagger(0) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | J_i(t)J_i^\dagger(0) | n \rangle$ のフーリエ・ラプラス変換を考える。[2][3]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \langle J_i(t)J_i^\dagger(0) \rangle e^{i\omega t} &= 2\pi \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^\infty d\omega' e^{-i\omega' t} \rho^+(\omega') \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^\infty d\omega' \frac{i}{\omega - \omega' + i\eta} \rho^+(\omega') \\ &\xrightarrow{\text{Re}} 2\pi^2 \rho^+(\omega) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega - \omega' - i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega'} + i\pi\delta(\omega - \omega') \quad (4)$$

および $\langle J_i(t)J_i^\dagger(0) \rangle$ のフーリエ変換

$$\rho^+(\omega) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle J_i(t)J_i^\dagger(0) \rangle e^{i\omega t} \quad (5)$$

を使った。

一方、式 (3) において、式 (2) から $\langle J_i(t)J_i^\dagger(0) \rangle = \langle J_i(0)J_i^\dagger(0) \rangle \exp(-\Gamma t)$ を仮定して変形すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt \langle J_i(t)J_i^\dagger(0) \rangle e^{i\omega t} &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} e^{-\Gamma t} \langle J_i(0)J_i^\dagger(0) \rangle \\ &\propto \frac{i\omega + \Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} \\ &\xrightarrow{\text{Re}} \frac{\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。一方、スペクトル関数 $\rho(\omega)$ は $\langle [J_i(t), J_i^\dagger(0)] \rangle$ のフーリエ変換であり、すぐ確かめられるように、 $\rho(\omega) = (1 - e^{-\beta\omega})\rho^+(\omega)$ を満たすので、式 (3) と式 (6) から $\omega \rightarrow 0$ のとき

$$\rho(\omega) \sim A \frac{\omega\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} \quad (7)$$

が成り立つ。

これを用いて格子 QCD から得られた虚時間相関関数

$$D(\tau) = \int d^3x \langle J_i(\tau, x)J_i^\dagger(\tau, x) \rangle = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} K(\tau, \omega)\rho(\omega) \quad (8)$$

を解析する。ただし $K(\tau, \omega) = \cosh(\omega(\tau - 1/2T)) / \sinh(\omega/2T)$ である。

ゼロ温度で $\omega = 0$ におけるスペクトル関数の傾きは 0 だとわかっているので高エネルギー部分の寄与を消すために、スペクトル関数が熱効果を受けなかったと仮定した時の相関関数である Reconstructed 相関関数 [4]

$$G_{\text{rec}}(\omega, T; T') \equiv \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\omega, T') K(\omega, \tau, T) \quad (9)$$

を相関関数から引いた量

$$\Delta G(\tau, T; T') = G(\tau) - G_{\text{rec}}(\tau, T; T') \quad (10)$$

を考える。これに対応するスペクトルとして、最も単純なゼロ温度効果として、式 (8) の寄与に加え J/ψ のピークが消える効果を考慮し、

$$\Delta\rho = A \frac{\omega\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} - Z\delta(\omega - m_{J/\psi}) \quad (11)$$

という構造を仮定し、 A, Γ, Z の 3 パラメーターを用いてフィットする。

Reconstructed correlator は $T = 3T'$ のとき、恒等式

$$\frac{\cosh[\omega(\tau - N_\tau/2)]}{\sinh(\omega N_\tau/2)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\omega|\tau+n/T|} \quad (12)$$

により

$$G_{\text{rec}}(\tau, T; \frac{1}{3}T) = G(\tau, \frac{1}{3}T) + G(\tau + \frac{1}{T}, \frac{1}{3}T) + G(\tau + 2\frac{1}{T}, \frac{1}{3}T) \quad (13)$$

と構成することができる。

3 Lattice の設定

本稿では、クエンチ QCD で $\beta = 7.0$, $32^3 \times N_\tau$ の非等方格子で生成された相関関数 [5] を使った (表 1)。非等方度は $\xi = a_\sigma/a_\tau = 4.0$ 、格子間隔は $a_\tau = a_\sigma/4 = 9.75 \times 10^{-3}\text{fm}$ である。フェルミオンには Wilson fermion を使っている。

表 1: 虚時間の格子数、温度、ゲージ配位の数

N_τ	32	96
T/T_c	2.33	0.78
N_{gauge}	141	194

4 結果

LatticeQCD から得られた相関関数と、 $\Delta\rho$ を使ったフィットを図 1 に示す。

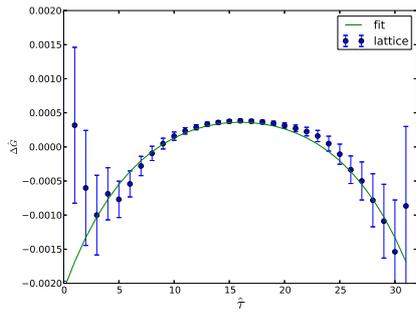


図 1: 相関関数とフィット

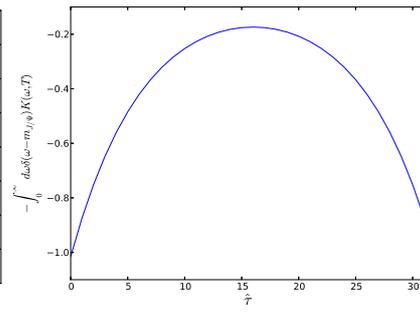


図 2: $-Z\delta(\omega - m_{J/\Psi})$ の寄与

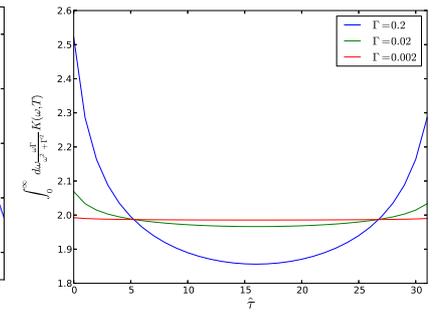


図 3: Γ の寄与

図 (1) と図 (2) から $\Delta\hat{G}$ の形状は $-Z\delta(\omega - m_{J/\Psi})$ で決まっていることが分かる。そして、 $\hat{\tau} = N_\tau/2$ 周辺の平坦になっている領域が、 $A\frac{\omega\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2}$ の寄与によるものであることが図 (3) から読み取れる。

しかし、 $A\frac{\omega\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2}$ に比べて $-Z\delta(\omega - m_{J/\Psi})$ の寄与が大きく、しかも Γ の変化に対して $\int d\omega \Delta\rho(\omega)K(\tau, \omega)$ があまり敏感でないため、 Γ をフィットによって決定することは A, Z に比べると難しいという事が分かった。

5 まとめ

流体方程式から得られる緩和時間近似によってスペクトル関数の低エネルギー領域の構造を仮定し、格子 QCD から得られた相関関数にフィットを行った。フィットにはスペクトル関数の高エネルギー部分の寄与を打ち消すために相関関数から Reconstructed 相関関数を引いたものを使用した。

緩和時間 τ と逆数の関係にある Γ は他のパラメータ A, Z に比べると相関関数の形状への影響が少なく、 Γ をフィットから求めるには工夫が必要なことがわかった。

参考文献

- [1] W. Israel, *Annals of Physics* 100, 310 (1976).
- [2] L. P. Kadanoff and P. C. Martin, *Annals of Physics* 24, 419 (1963).
- [3] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (2006) 87 p.
- [4] H. B. Meyer, *J. High Energ. Phys.* 2010, 1 (2010).
- [5] M. Asakawa and T. Hatsuda, *Phys. Rev. Lett.* 92, 012001 (2004).