

# 高温高密度多フレーバー QCD における一次相転移の終点

江尻信司<sup>1</sup>

新潟大学大学院 自然科学研究科

多フレーバー QCD によるテクニカラー模型が実現した場合、その模型の電弱相転移が強い一次相転移になり、電弱バリオン生成シナリオが実現可能かどうか興味深い。本研究では2つの軽いフェルミオンと  $N_f$  個の重いフェルミオンが存在する系で、有限温度相転移の次数がその質量の関数としてどのように変化するかを議論する。その結果、 $N_f$  が大きくなるにつれて、さらに、化学ポテンシャルが大きくなるにつれて、一次相転移の領域が広がることが分かった。

## 1 多フレーバー QCD によるテクニカラー模型

ヒッグス粒子が複合粒子であるかどうか関心がもたれている。その複合ヒッグス模型の代表例であるテクニカラー模型が、多フレーバー QCD によって構築できるかどうかを調べるために、現在、いくつかの研究グループによって格子 QCD の数値シミュレーションが行われている。そこで、もしそのテクニカラー模型が実現した場合、次の段階として、その模型の電弱相転移が強い一次相転移になり、宇宙初期での電弱バリオン生成のシナリオが描けるかどうか興味深い [2]。素粒子標準模型での電弱相転移の次数については、一次相転移にならないことが分かっている [3]。

ゲージボゾンに吸われる3種類を除き、実験で検証可能なエネルギー領域にテクニ・南部・ゴールドストーン (NG)・ボゾンはないので、ゲージボゾンに吸収される NG ボゾンを作る質量ゼロの2フレーバーが質量ゼロで、そのほかのテクニ・フェルミオンの質量は実験にかからによる重さでなければならぬ。また、QCD 相転移の知識から、3フレーバー以上の QCD の有限温度相転移は、カイラル極限で一次相転移なので、すべての質量が軽い領域で一次相転移になるはずである。2種類だけ質量ゼロの場合は二次相転移、さらに、どの質量も軽くない場合はクロスオーバーになることが推測される。その場合、どの質量までが一次相転移で、電弱バリオン生成を引き起こすことができるかを数値シミュレーションで調べることが重要である。

## 2 ヒストグラム法による一次相転移の終点の測定

本研究では、質量  $m_l$ 、化学ポテンシャル  $\mu$  の2つの軽いフェルミオンと、質量  $m_h$ 、化学ポテンシャル  $\mu_h$  の  $N_f$  個の重いフェルミオンが存在する系で、有限温度相転移の次数がその質量の関数としてどのように変化するかを議論する。2フレーバーのシミュレーションを行い、残りの  $N_f$  個のフェルミオンの動的効果は reweighting 法によって取り入れる。  $N_f$  が十分大きい場合に、プラケット変数  $P$  のヒストグラムを計算して、その形から相転移の次数を判定する。一次相転移の場合は、相転移点で2つの相が等確率で実現するので、確率分布関数は2つの異なる  $P$  でピークを持つはずである [4, 5, 6]。

以下のように定義された  $P$  についての確率分布関数 (ヒストグラム) を考える。

$$\begin{aligned} w(P; \beta, m_l, \mu, m_h, \mu_h) &= \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \delta(P - \hat{P}) e^{-S_q - S_g} \\ &= \int \mathcal{D}U \delta(P - \hat{P}) e^{6\beta N_{\text{site}} \hat{P}} (\det M(m_l, \mu))^2 (\det M(m_h, \mu_h))^{N_f} \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup>e-mail address: ejiri@muse.sc.niigata-u.ac.jp,  
この報告は KEK の山田憲和氏との共同研究 [1] に基づいています。

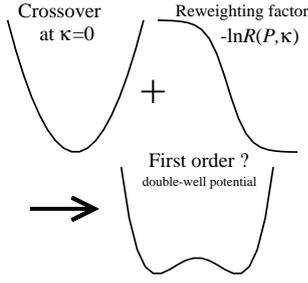


図 1: reweighting 法による有効ポテンシャルの変化。

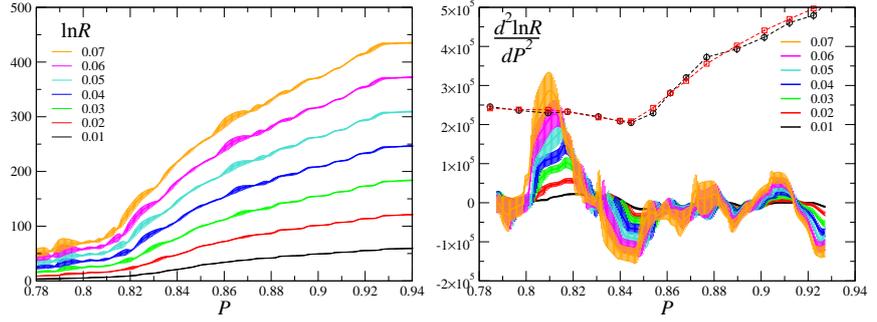


図 2: 左: プラケットの関数とした  $\ln R(P; h, 0)$ 。右: 実線は  $\ln R(P; h, 0)$  の曲率。印と 印付破線は  $d^2 V_0 / dP^2(P)$ 。

ここで、 $S_g$ 、 $S_q$  はゲージ場とクォーク場の作用で、 $M$  はクォーク行列、 $N_{\text{site}} \equiv N_s^3 \times N_t$  は格子数、 $\beta = 6/g_0^2$  はシミュレーションパラメータである。 $\delta(P - \hat{P})$  は演算子  $\hat{P}$  を値  $P$  に拘束するという意味である。 $\hat{P}$  は一般化されたプラケットで、改良されたゲージ場の作用にも適用できるように、 $\hat{P} = -S_g / (6N_{\text{site}}\beta)$  と定義する。標準作用の場合は  $1 \times 1$  Wilson loop である。さらに、有効ポテンシャルを  $V_{\text{eff}}(P; \beta, m, \mu) = -\ln w(P; \beta, m, \mu)$  と定義する。

2 フレーバー QCD ( $m_h = \infty$ ) から reweighting 法で有効ポテンシャルを求めるとすると、

$$V_{\text{eff}}(P; \beta, m, \mu) = V_0(P; \beta_0) - \ln R(P; \beta, m, \mu; \beta_0) \quad (2)$$

で得られる。ここで、 $V_0(P; \beta)$  は  $\mu = 0$  での 2 フレーバー QCD の有効ポテンシャルで、 $R$  は

$$\ln R(P; \beta, m, \mu; \beta_0) = 6(\beta - \beta_0)N_{\text{site}}P + \ln \left\langle \left( \frac{\det M(m_l, \mu)}{\det M(m_l, 0)} \right)^2 \left( \frac{\det M(m_h, \mu_h)}{\det M(\infty, 0)} \right)^{N_f} \right\rangle_{P:\text{fixed}} \quad (3)$$

である。 $\langle \dots \rangle_{P:\text{fixed}} \equiv \langle \delta(P - \hat{P}) \dots \rangle_{\beta_0} / \langle \delta(P - \hat{P}) \rangle_{\beta_0}$  は  $P$  を固定した期待値で、 $\langle \dots \rangle_{\beta_0}$  は  $\mu = 0$  の 2 フレーバー・シミュレーションを  $\beta_0$ 、 $m_l$  で実行したときの期待値である。 $\beta_0$  はシミュレーション点で  $\beta$  と違ってよい。図 1 に一次相転移が現れるときの予想を図示した。2 フレーバーで質量がゼロでないときはクロスオーバーなので常に有効ポテンシャルは  $P$  について 2 次関数 (分布関数はガウス分布) で、 $\ln R$  が大きな曲率をもった関数なら、有限質量で W 型 (分布関数が 2 山) になり得る。 $\kappa$  はホッピングパラメータで、質量の逆数に比例するものである。式 (3) から、 $M$  があらわに  $\beta$  に依らない場合、 $\beta$  の依存性は  $P$  の 1 次項にしか現れない。2 階微分  $d^2 V_{\text{eff}} / dP^2$  に注目すれば、 $\beta$  の依存性がなくなり、 $V_{\text{eff}}$  の形を議論する際に  $\beta$  を相転移点に調節する必要がなくなる [4]。 $V_{\text{eff}}(P)$  の最小点は  $\beta$  の選び方でどこにでもできるので、 $d^2 V_{\text{eff}} / dP^2$  の曲率が負になる  $P$  の領域があれば、W 型ポテンシャル、一次相転移という意味である。さらに、2 フレーバーの  $d^2 V_0 / dP^2$  の計算は、ガウス分布になることを仮定すれば、ヒストグラムを描いて求める必要もなく、 $d^2 V_0 / dP^2 = 6N_{\text{site}} / \chi_P$  から簡単に得られる。 $\chi_P$  は  $P$  の感受率、 $\chi_P \equiv 6N_{\text{site}} \langle (P - \langle P \rangle)^2 \rangle$  である。

ここで、 $N_f$  フレーバーは重いと仮定する。式 (3) の 2 番目の行列式は、標準 Wilson フェルミオンの場合、質量の逆数  $\kappa_h$  の展開の初項で、

$$\ln \left[ \frac{\det M(\kappa_h)}{\det M(0)} \right] = 288N_{\text{site}}\kappa_h^4 \hat{P} + 12N_s^3 (2\kappa_h)^{N_t} \left[ \cosh(\mu_h/T) \hat{\Omega}_R + i \sinh(\mu_h/T) \hat{\Omega}_I \right] + \dots \quad (4)$$

と近似できる。ここで、 $\hat{\Omega}_R$ 、 $\hat{\Omega}_I$  は Polyakov loop の実部と虚部である。その近似を用いて、図 2 は、[7] で得られた配位で計算したゼロ密度の  $\ln R(P)$  (左図)、 $d^2 V_0 / dP^2(P)$  (右図の赤と黒の破線) と

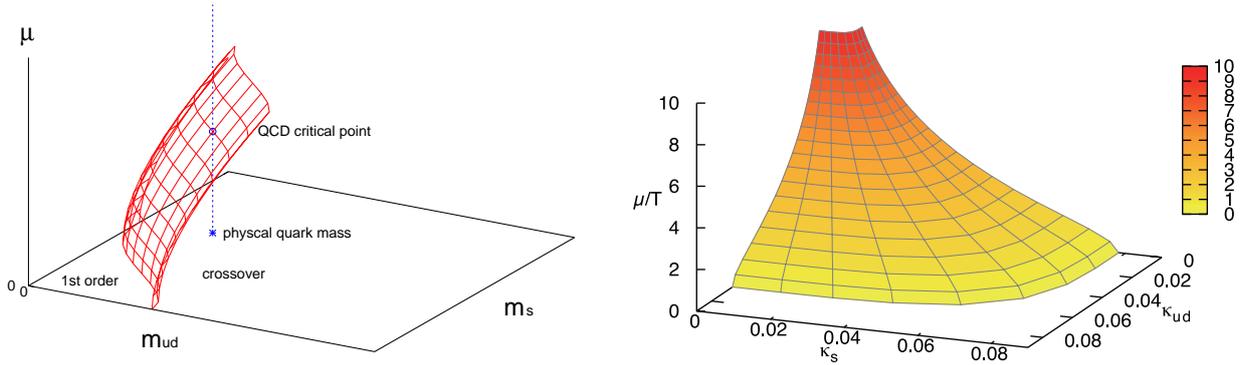


図 3:  $m_{ud}$ ,  $m_s$ ,  $\mu$  の関数とした相転移温度での相転移の次数の変化。左がクォーク質量が軽い領域の臨界面の予想図で、右が [8] で計算されたクォークが重い領域の臨界面。

ゼロ密度の  $d^2 \ln R/dP^2(P)$  (右図の誤差棒付の実線) の結果である。(p4-improved staggered action、擬スカラー・ベクトル・メソン質量比  $m_{PS}/m_V \approx 0.7$ 、格子数  $16 \times 4$  で配位を生成した。)  $h$  は重いフェルミオンの質量を表すパラメータで、グラフの色で  $h$  を表し、値を図の脇に書いた。Wilson フェルミオンの場合、 $h = 2N_f(2\kappa_h)^{N_t}$  が定義である。 $h$  が 0.06 を超えると、 $P \approx 0.81$  あたりで  $d^2 V_{\text{eff}}/dP^2 = d^2 V_0/dP^2 - d^2 \ln R/dP^2$  が負になることが分かる。これは有効ポテンシャルがW型になることを意味している。ちょうど  $P$  の一点だけで  $V_{\text{eff}}(P)$  曲率ゼロになる  $h$  の臨界点を見積もると、臨界点は、 $h_c = 0.0614(69)$  であることが分かった。

フェルミオンが重いという近似では、 $\kappa_h$  は  $h$  の中にしか現れず、臨界点での  $\kappa_h^{\text{crit}}$  の  $N_f$  依存性は、

$$\kappa_h^{\text{crit}} = \frac{1}{2} \left( \frac{h_c}{2N_f} \right)^{1/N_t} \quad (5)$$

となる。このことから、 $N_f$  が大きくなるにつれて、 $\kappa_h^{\text{crit}}$  が小さくなることが分かる。ここで用いた  $\kappa_h$  が小さいという近似も、 $N_f$  がある程度以上大きければ正当化される。得られた結果をまとめると、質量を無限大から減少させたところ、かなり重い質量でクロスオーバーから一次相転移になった。その一次相転移になる質量は  $N_f$  が増加するにつれて大きくなることが分かった [1]。

### 3 QCD 相転移の理解へのフィードバック

$N_f$  がある程度大きければ、2 フレーバーの配位 ( $\kappa_h = 0$ ) からの reweighting で簡単に臨界質量の計算ができることが分かった。この性質を用いて、現実の QCD 相転移に近いアップ・ダウン・ストレンジの動的クォークを含む 2+1 フレーバー QCD の相転移の理解へ、フィードバックを考える。

低密度でクロスオーバーであった QCD の相転移が、ある密度で二次相転移になり、さらに高密度で一次相転移になることが予想されていて、その相転移の次数が変わる臨界点を見つけることが、現在、理論・実験どちらからも注目されている。格子 QCD のシミュレーションで素朴に化学ポテンシャルを大きくすると、符号問題が起きて数値計算ができなくなるので、温度、密度だけでなく、クォーク質量もパラメータとして、密度ゼロから徐々に臨界点の質量依存性を調べることによって、現実世界の臨界点を議論することは有効な手段である。図 3(左) は、QCD 相転移に關与する、アップ・ダウンクォークの質量 ( $m_{ud}$ ) とストレンジクォークの質量 ( $m_s$ ) と化学ポテンシャル ( $\mu$ ) の関数とした、相

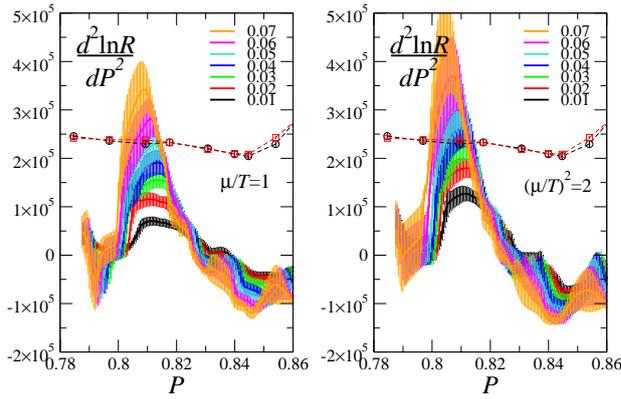


図 4:  $\mu/T = 1.0, \mu_h = 0$ (左)、 $\mu/T = \sqrt{2}, \mu_h = 0$ (右)での  $\ln R(P; h, \mu)$  の曲率

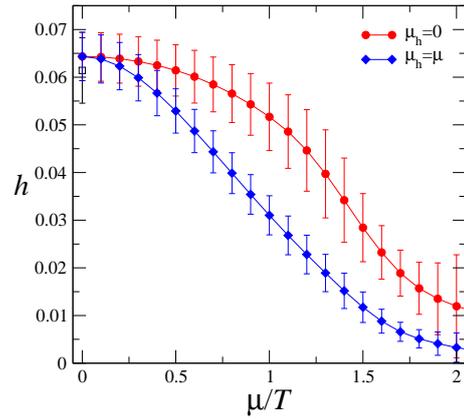


図 5: 右:  $(h, \mu)$  面での臨界線。印が  $\mu_h = 0$  で、印が  $\mu_h = \mu$  の結果。

転移温度での相転移の性質の変化の予想を図示したものである。赤い網で描いた面がクロスオーバー(右側)と一次相転移(左側)の領域を分ける二次相転移の面である。\*印から上に伸びた青い破線が現実のクォーク質量で、この線が臨界面を超える点が臨界点(印)である。このような臨界面を  $\mu$  が小さいところから調べ上げることができれば、低密度でのクロスオーバーが高密度で一次相転移に変わる  $\mu$  が分かる。すべてのクォークが十分重いときも一次相転移で、臨界面があり、[8]ではその臨界面を任意の  $\mu$  で調べ上げることができた。結果は図 3(右)である。クォークが十分重いとして、式(4)の近似式を用いることによって、すべての  $\mu$  で臨界面を計算した。しかし、物理として重要なクォークが軽い領域の臨界面は、クォーク質量が非常に軽い領域にあり、その研究を行うためには大変な計算コストがかかることが予想され、その臨界面が物理的質量点の線と交わる方向に傾いていくのかも確認されていない。

本研究では、 $2 + N_f$  フレーバー QCD で、その臨界点が化学ポテンシャルと共にどのように変化するかを議論する。[4]では[7]で得られた p4-improved staggered action で生成した配位を用いて、2 フレーバー QCD の有限密度での臨界点を探索した。その計算に重い  $N_f$  フレーバーを加えて計算を行い、臨界点での重いフェルミオンの質量が  $\mu$  と共にどのように変化するかを調べる。有効ポテンシャルの曲率の結果は図 4 で、左図が  $\mu/T = 1.0$ 、右図が  $\mu/T = \sqrt{2}$  の ( $\mu_h = 0$  とした) 結果である。  $\mu$  が増えるに従って、 $d^2 \ln R/dP^2$  の最大値が大きくなるのが分かる。つまり、 $\mu$  が増加すると、より小さな  $h$  でも有効ポテンシャルの曲率が負になることを意味している。その負の曲率が現れる臨界点をプロットした結果が図 5 である。赤の印が  $\mu_h = 0$  の結果で、青の印が  $\mu_h = \mu$  の結果である。臨界線より上が一次相転移の領域である。密度が高くなるに従い、 $h$  の臨界点が小さくなっている。 $h = 2N_f(2\kappa_h)^{N_t}$  なので、 $\mu$  が大きくなると、一次相転移になる  $\kappa_h$  が小さくなるのが分かった。本研究も [4] 同様、 $\mu$  が小さい領域だけで正しい近似を使っていて、高密度領域で正しい保証はないが、少なくとも低密度で  $O(\mu^2)$  までは厳密である。仮に  $N_f$  を小さくしていても同じような結果が得られるとすれば、 $2+1$  フレーバー QCD の一次相転移の領域は密度が高くなると大きくなり、物理的質量の点では、臨界点でクロスオーバーが一次相転移に変わることを示唆している。

この解析は  $N_f$  が大きい場合にだけ妥当であるが、例えば、2 フレーバーの質量がゼロのところにあると予想される三重臨界点付近でのスケーリング則は  $N_f$  によらずユニバーサルであると言われている。 $N_f$  が大きい場合から研究し、徐々に  $2+1$  フレーバー QCD に近付けるようなアプローチも有効であると考えられる [6]。

## 4 まとめ

多フレーバー QCD によるテクニカラー模型が実現した場合、その模型の電弱相転移が強い一次相転移になり、宇宙初期での電弱バリオン生成のシナリオが描けるかどうかという問題が動機で、2つの軽いフェルミオンと  $N_f$  個の質量のあるフェルミオンが存在する系の有限温度相転移を調べた。2フレーバーのシミュレーションを行い、残りの  $N_f$  個のフェルミオンの動的効果は reweighting 法によって取り入れた。 $N_f$  が十分大きい場合に、ブラケットのヒストグラムを計算して、その形から相転移の次数を判定した。質量を無限大から減少させたところ、かなり重い質量でクロスオーバーから一次相転移になり、その一次相転移の領域は  $N_f$  が増加するにつれ広くなることが分かった。さらに、フェルミオンに化学ポテンシャル  $\mu$  を課し、有限密度の効果を調べた。 $\mu$  が大きくなるにつれて一次相転移の領域が広がることが分かった。この研究は、一次相転移の領域が狭いために研究が難しい 2+1 フレーバー QCD の相構造の解明に向けた、重要な 1 ステップになることが期待される。

## 参考文献

- [1] S. Ejiri and N. Yamada, Phys. Rev. Lett. **110**, 172001 (2013).
- [2] Y. Kikukawa, M. Kohda and J. Yasuda, Phys. Rev. D **77**, 015014 (2008).
- [3] Z. Fodor, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **83**, 121 (2000).
- [4] S. Ejiri, Phys. Rev. D **77**, 014508 (2008).
- [5] H. Saito, S. Ejiri, S. Aoki, T. Hatsuda, K. Kanaya, Y. Maezawa, H. Ohno, and T. Umeda (WHOT-QCD Collaboration), Phys. Rev. D **84**, 054502 (2011).
- [6] S. Ejiri, Euro. Phys. J. A **49**, 86 (2013).
- [7] C. R. Allton, M. Döring, S. Ejiri, S.J. Hands, O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann and K. Redlich, Phys. Rev. D **71**, 054508 (2005).
- [8] H. Saito, S. Ejiri, S. Aoki, K. Kanaya, Y. Nakagawa, H. Ohno, K. Okuno, T. Umeda (WHOT-QCD Collaboration), arXiv:1309.2445.