

カイラル非一様相における有限質量効果

柄沢真太郎¹ 巽敏隆
京都大学理学研究科

カイラル非一様凝縮相における有限クォーク質量効果を議論する。

1 はじめに

近年、カイラル対称性の自発的破れに関する非一様構造に関する研究が脚光を浴びている。通常、自発的対称性の破れに伴う秩序変数は通常定数であり、その値が0であるか否かによって相構造の変化を議論する。ところで、秩序変数は定数である必然性はなく、空間的異方性を持つ関数であると考えるのがより一般性のある視点であると言えるだろう。このような精神に基づいて、秩序変数に空間変数依存性を与えたものを非一様構造という。

非一様構造の概念は、物性物理学の分野では FFLO 超伝導 [1]・スピン密度波 [2] などの様々な理論体系に対して用いられている。このアイデアを QCD におけるカイラル対称性の自発的破れに対して適用したものが、カイラル非一様構造である。実際、理想化された状況の下では、有限温度・密度平面上での QCD 相図においてカイラル非一様構造が熱力学的に優位になる相 (カイラル非一様相) が出現することが知られている。

本研究の主眼は、これまで理想化された状況下でのみ議論されてきたカイラル非一様構造の研究を、より現実的な系へ近づけていくことにある。具体的には、カイラル極限・外場無し・アイソスピン対称といった制限を外していく。特に有限クォーク質量系への拡張は重要であるので、これを本研究で議論する。その理由を以下に述べる。

カイラル対称性の自発的破れは有効ポテンシャルがワインボトル型になることで起こるが、カイラル極限の場合このポテンシャルの底 (カイラル球面) は等しい値であり、これが縮退した真空を表している。ところがクォークが有限な裸の質量を持つことによりカイラル対称性は陽に破れてしまい、結果カイラル球面上の各点はもはや等価ではなくなってしまう。このことはカイラル非一様構造に対しても大きな影響を与える。カイラル極限で知られていた構造の関数形が、高々数 MeV の質量を考慮するだけで大きく変化してしまうのである。カイラル極限で知られている非一様構造の代表的な関数形の 1 つとして、Dual Chiral Density Wave(DCDW)[3] があり、これは次のような構造である：

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}\psi\rangle &= \Delta \cos(qz) \\ \langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau_3\psi\rangle &= \Delta \sin(qz)\end{aligned}$$

ここで Δ は凝縮の大きさであり、 q は波数である。式を見れば分かるように、DCDW とはカイラル円周上に「等価に」巻き付いたような構造である。クォーク質量がスイッチすることによって等価性はもはや失われてしまい、DCDW はカイラル円周上の一点に「局在した」構造に変質してしまう。定量的な議論としては、NJL 模型を用いて変分法的にこれを導出する。実際、クォーク質量の最低次まで考慮した場合 sine-Gordon 方程式によって非一様構造が決定されることを示し、その熱力学的について議論する。

¹e-mail address: karasawa@ruby.scphys.kyoto-u.ac.jp

2 フレームワーク

本章では、非一様構造に対する変分的取扱いを議論する。本研究では $N_f = 2, N_c = 3$ の NJL モデルを用いて議論する。ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}(i\partial - m_c)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2]. \quad (1)$$

と与えられる。ここで m_c は裸のクォーク質量である。本研究では DCDW からの有限質量効果による変形に興味があるので、非一様構造の関数形を以下のように変分関数 $\theta(z)$ を用いて定義する [4] :

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \Delta \cos \theta(z) \quad , \quad \langle \bar{\psi}i\gamma_5\tau_3\psi \rangle = \Delta \sin \theta(z). \quad (2)$$

DCDW の関数形と比較すれば明らかのように、(2) は DCDW の一般化に対応していることが分かる。 Δ は空間一様な凝縮の大きさを表している。一方 $\theta(z)$ は空間非一様なカイラル角を表しており、これを変分関数として取り扱うことで有限質量効果による DCDW の変形を議論する。(2) を (1) に代入し、平均場近似を行うことで、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{MF}} = \bar{\psi}[i\partial - M - U(\theta(z))]\psi - G\Delta^2, \quad (3)$$

と書ける。ここで $M = m_c - 2G\Delta$ は構成子クォーク質量であり、 $U(\theta(z)) = -2G\Delta \exp(i\gamma_5\tau_3\theta(z)) - M + m_c$ である。(3) はクォーク場に関する双二次形式であるのでこれは積分可能である。最終的に虚時間法を用いて有限温度の理論とし、さらに化学ポテンシャルを導入することで、熱力学関数の表式が以下のように得られる。

$$\Omega_{\text{MF}} = -T\text{Tr} \log[i\partial - M + \mu\gamma_0 - U(\theta(z))] + G\Delta^2 V, \quad (4)$$

ここで Tr はフレーバー、カラー、松原振動数に関する和と運動量空間に関する積分を表している。また、 V は系の体積である。

3 非一様構造の関数形と熱力学ポテンシャルの表式

以上の準備の下で $\theta(z)$ の関数形を決定する。まずはじめに系の Dirac 作用素及び Dirac-Hartree-Fock 方程式は次のように与えられる :

$$H_{\text{D}} = -i\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + \gamma_0 M + \gamma_0 U(\theta(z)), \quad (5)$$

$$H_{\text{D}}\psi_\alpha = E_\alpha(\theta)\psi_\alpha, \quad (6)$$

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle + i\langle \bar{\psi}i\gamma_5\tau_3\psi \rangle = \Delta e^{i\theta(z)}. \quad (7)$$

(6) 及び (7) を同時に解くことができれば、 $\theta(z)$ の関数形は完全に決定されたことになるが、残念ながら一般解は未だ発見されていない。そこで、本研究では $\theta(z)$ の満たすべき運動方程式を Ω_{MF} を微分展開することで求める [5, 6]。

具体的に微分の 2 次まで求めた結果は

$$\Omega_{\text{MF}}^{\text{der}} = \frac{1}{2}f_\pi^{*2} (\partial_z \theta(z))^2 - m_c \Delta \cos \theta(z). \quad (8)$$

となる。ここで f_π^* はパイオンの崩壊定数である。(8) から $\theta(z)$ の運動方程式を得る :

$$\frac{d^2\theta(z)}{dz^2} - m_\pi^{*2} \sin \theta(z) = 0, \quad (9)$$

(9) は sin-Gordon 方程式である。この方程式の一般解は知られており、 $\theta(z) = \pi + 2\text{am}\left(\frac{m_{\pi}^* z}{k}, k\right)$ である。ここで $0 < k < 1$ はモジュラスパラメータと呼ばれており、 k は 1 に近づくほど kink 的な構造を示すことが分かる。 $\theta(z)$ の関数形が求まったので、これを熱力学ポテンシャルに代入し、 $\mathcal{O}(m_c)$ まで求める。結果は

$$\Omega_{\text{MF}} \simeq \Omega_{\text{DCDW}} + \Omega_{\text{SB}} + G\Delta^2 V, \quad (10)$$

$$\Omega_{\text{DCDW}} = -T \text{Tr} \log[S_{\text{ref}}^{-1} + \mu\gamma_0], \quad (11)$$

$$\Omega_{\text{SB}} = -T \text{Tr}[(S_{\text{ref}}^{-1} + \mu\gamma_0)^{-1} F(m_c; \theta(z))]. \quad (12)$$

である。

4 数値計算結果

前章で熱力学ポテンシャルの表式が求まったので、各 T, μ ごとに Δ, k に関して最小化する。その上で、一様構造に限定した場合の熱力学ポテンシャルと比較すればよい。

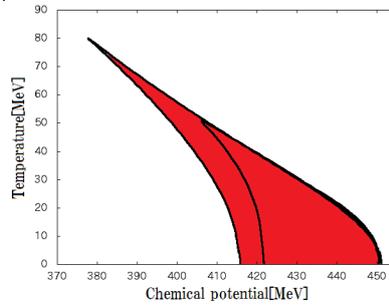


図 1: $m_c = 0, 5 \text{ MeV}$ での温度・化学ポテンシャル平面上での QCD 相図。赤で塗りつぶされた領域が非一様構造が熱力学的に優位になるよう領域。 m_c の上昇と共に非一様相が減少していく。

図 1 は温度・化学ポテンシャル平面上での QCD 相図である。赤で塗りつぶされた部分が非一様構造が熱力学的に優位になる領域であり、 m_c が $0 \text{ MeV}, 5 \text{ MeV}$ のいずれの場合にも非一様相が出現していることが分かる。

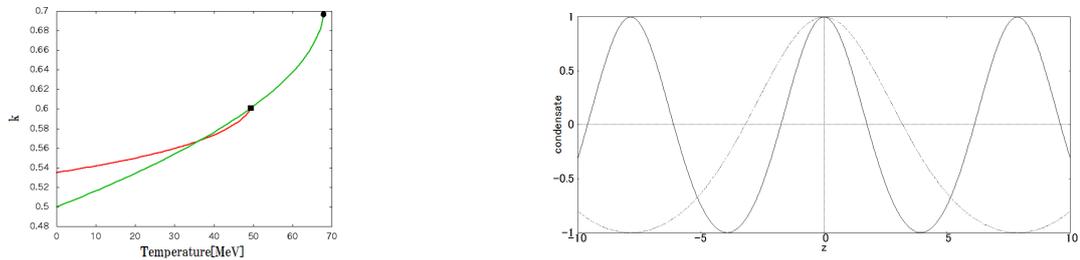


図 2: Left: 温度の上昇に伴う相境界上の k の値の変化。緑 (赤) 線は左 (右) 側の相境界での k の値の推移を表している。黒点 (黒四角) はそれぞれ臨界点 (リフシツツ点) を表す。Right: $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ の関数形の変化。実線は低温領域での非一様構造の関数形であり、点線は臨界点近傍での関数形である。

図 2 は温度の変化に伴う k の値の変化及び非一様構造の関数形の変化を表している。温度の上昇に伴い、 k は 1 に近づいていくことが分かる。即ち、低温領域では DCDW 的な関数形である一方、臨界点近傍では非一様構造は kink 的な関数形が現れることが理解できる。

参考文献

- [1] P. Fulde and R.A.Ferrell, Phys. Rev. A135 (1964) 550.
A.I.Larkin and Y.N.Ovchinnikov, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 47 (1964) 1136.
- [2] A.W.Overhauser, Phys. Rev. Lett. 4 (1960) 462; Phys. Rev. 128 (1962) 1437.
G.Gruner, Rev. Mod. Phys. 66 (1994) 1.
- [3] E.Nakano and T.Tatsumi, Phys. Rev. D71 (2004) 114006.
- [4] S.Karasawa and T.Tatsumi, arXiv:1307.6448
- [5] K.Kikkawa, Prog.Theor.Phys. **56** (1976) 947.
- [6] T.Eguchi, H.Sugawara, Phys.Rev. **D10** (1974) 4257.