On propagators in de Sitter space

京都産業大学益川塾 酒谷 雄峰 *
E-mail: yuho@cc.kyoto-su.ac.jp
京都大学理学研究科 杉下 宗太郎
E-mail: sotaro@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp
京都大学理学研究科 福間 将文
E-mail: fukuma@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

概要: 曲がった時空上の場の理論では、一般には Hamiltonian が時間依存するため、定常時空の場合のように真空を一意に選ぶことができず、伝播関数の定義に不定性が残ってしまう。我々は、Hamiltonian が時間依存する場合に、各時刻 t における Hamiltonian $H(t)$ の瞬間的基底状態として真空 $|0_t\rangle$ を定義し、その真空に関する伝播関数を求める計算手法を与えた [1]。

本研究では、de Sitter 時空を含む一般的な非定常時空上の自由スカラー場の理論を考えた。まず、場を $\phi(t,\mathbf{x}) = \sum_n \phi_n(t)\, Y_n(\mathbf{x})$ のようにモード展開し、各時刻 t_I ごとに Hamiltonian を

$$H(t_I) = \sum_n \omega_n(t_I) \left(a_n^\dagger(t_I)\, a_n(t_I) + \frac{1}{2} \right) \tag{1}$$

のように対角化する消滅演算子 $a_n(t_I)$ を求めた。そして、$a_n(t_I)\,|0_{t_I}\rangle = 0$ という要請から時刻 t_I における**瞬間的基底状態** $|0_t\rangle$ を定義した。次に、異なる時刻の消滅演算子 $a_n(t)$ 同士を関係づける Bogoliubov 係数を、時空の計量 $g_{\mu\nu}$ とスカラー場の質量 m の関数として求めた:

$$\begin{pmatrix} a_n(t) \\ a_n^\dagger(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^*(t;t') & -\beta^*(t;t') \\ -\beta(t;t') & \alpha(t;t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n(t') \\ a_n^\dagger(t') \end{pmatrix} . \tag{2}$$

ここで注意すべき点は、瞬間的基底状態 $|0_t\rangle$ は、時刻 t の Hamiltonian $H(t)$ の基底状態であるが、異なる時刻 t' における瞬間的基底状態 $|0_{t'}\rangle$ は $H(t)$ の基底状態ではないという点である。実際に、$H(t)$ を時刻 t' における生成消滅演算子で展開し直すと

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_n \omega_n(t) \left[|\alpha(t;t')|^2 + |\beta(t;t')|^2 \right] \left(a_n^\dagger(t')\, a_n(t') + \frac{1}{2} \right) \\ &\quad - \sum_n \omega_n(t) \left[\alpha(t;t')\, \beta^*(t;t')\, a_n^\dagger(t')\, a_n^\dagger(t') + \alpha^*(t;t')\, \beta(t;t')\, a_n(t')\, a_n(t') \right] \end{aligned} \tag{3}$$

となり、$\beta(t;t') \neq 0$ であれば $a_n(t')$ で消される状態 $|0_{t'}\rangle$ は $H(t)$ の基底状態にならない。

上で求めた Bogoliubov 変換 (2) を用いると、時刻 t における場の演算子 $\phi_n(t)$ を、任意の時刻 t_I における生成消滅演算子を用いて展開することができる:

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\rho(t)\,\omega_n(t)}} \left[a_n(t) + a_n^\dagger(t) \right] \qquad \left[\rho(t)\text{: 時空の計量 } g_{\mu\nu} \text{ のある関数} \right] \\ &\equiv \varphi_n(t;t_I)\, a_n(t_I) + \varphi_n^*(t;t_I)\, a_n^\dagger(t) . \end{aligned} \tag{4}$$

この展開係数 $\varphi_n(t;t_I)$ を、時刻 t_I における瞬間的基底状態に関する**波動関数**と呼ぶ。この波動関数を用いると、直ちに**伝播関数**

$$G_{00}(x,x';\,t_0,t_0) \equiv \frac{\langle 0_{t_0}|\,\mathrm{T}\,\phi(x)\,\phi(x')\,|0_{t_0}\rangle}{\langle 0_{t_0}|0_{t_0}\rangle}\,, \quad G_{10}(x,x';\,t_1,t_0) \equiv \frac{\langle 0_{t_1}|\,\mathrm{T}\,\phi(x)\,\phi(x')\,|0_{t_0}\rangle}{\langle 0_{t_1}|0_{t_0}\rangle} \qquad (5)$$

が計算できる (T: 時間順序積)。特に、瞬間的基底状態 $|0_{t_I}\rangle$ において、時刻 t_I を無限の過去 t_i および無限の未来 t_f にとばす極限として、**in-真空**および **out-真空**を定義することができ、それらを用いて in-in および in-out プロパゲータが次のように定義できる:

$$G^{\mathrm{in/in}}(x,x') \equiv \lim_{t_0\to t_i} G_{00}(x,x';\,t_0,t_0)\,, \qquad G^{\mathrm{out/in}}(x,x') \equiv \lim_{\substack{t_0\to t_i\\ t_1\to t_f}} G_{10}(x,x';\,t_1,t_0)\,. \qquad (6)$$

上で定義した in-out プロパゲータは、無限の過去における瞬間的基底状態と無限の未来における瞬間的基底状態の間の振幅なので、iε 処方を行った**経路積分から求められる 2 点関数**と一致すると期待される。[1] では、Hamiltonian を $H(t) \to e^{-\mathrm{i}\varepsilon}\,H(t)$ とする iε 処方を用いて、ある条件を満たす時空上のスカラー場の理論では、2 つのプロパゲータが確かに一致することを示した。

次に、以上の一般的な枠組みを **de Sitter 時空**上の自由スカラー場の理論に応用した。特に、de Sitter 時空のグローバルパッチおよび Poincaré パッチ上のスカラー場の理論において、任意の時刻の瞬間的基底状態に関する波動関数および伝播関数を計算した。その結果、Poincaré パッチの in-真空が、de Sitter 時空上の自然な真空として知られている Bunch-Davies 真空 [2] に一致することがわかった。また、de Sitter 時空上のスカラー場の理論の真空状態としては、α-真空と呼ばれる一群の de Sitter 不変な真空が知られていたが [3, 4]、今回調べた 2 つのパッチでは、in-真空や out-真空は全てこの α-真空に属していることがわかった。さらに、2 つのパッチにおいて、in-out プロパゲータと経路積分から求められる 2 点関数を数値的に評価し、両者が確かに一致することを確認した。

また、以上で説明した手法の興味深い応用例として、Poincaré パッチの有限の過去における瞬間的基底状態を用いて de Sitter 時空がもつ (非平衡) 熱力学的性質を調べるという研究 [5] がある。

References

[1] M. Fukuma, S. Sugishita and Y. Sakatani, Phys. Rev. D **88**, 024041 (2013) [arXiv:1301.7352 [hep-th]].

[2] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, Proc. Roy. Soc. Lond. A **360**, 117 (1978).

[3] E. Mottola, Phys. Rev. D **31**, 754 (1985).

[4] B. Allen, Phys. Rev. D **32**, 3136 (1985).

[5] M. Fukuma, Y. Sakatani and S. Sugishita, arXiv:1305.0256 [hep-th].

*: 講演者.