$SU(2|4)$対称なゲージ理論の厳密計算から探るgauge/gravity対応

○浅野侑磨, 伊敷吾郎, 岡田崇, 島崎信二

Introduction

動機

i) Lin-Maldacena対応の検証:

[Lin-Maldacena '05]

Plane Wave 行列模型 (PWMM)
SYM on $R\times S^2$
SYM on $R\times S^3/Z_k$
NS5-brane theory on $R\times S^5$ (・・・LST)

$\longleftrightarrow$ $R\times SO(3)\times SO(6)$対称な対応する重力解

ii) ゲージ理論自体に対する興味:

M理論を記述すると期待されているPWMMや、4次元 $\mathcal{N}$=4 SYMはそれ自体が面白い。

やったこと

i) Little String Theory極限が存在することを示した。→ PWMMのdouble scaling lim.でIIA LSTが定義できる。

ii) 4次元 $\mathcal{N}$=4 SYMの超対称なWilson loopの期待値のn点函数についてゲージ理論側と重力側とで一致することを示した。
特に、演算子の位置τに依らない特殊な性質が両側から理解できた。

$SU(2|4)$対称な理論たちとlocalization

PWMMはBFSS modelをmass-deformationしたもの:

[Berenstein-Maldacena-Nastase '02]

$$S_{PW}=\frac{1}{g_{PW}^2}\int d\tau \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}-\frac{\mu^2}{8}X_mX^m-\frac{i}{2}\Psi\Gamma^M D_M\Psi\right)=S_{BFSS}+\frac{1}{g_{PW}^2}\int d\tau \mathrm{Tr}\left(-\frac{\mu^2}{2}X_aX^a-\frac{\mu^2}{8}X_mX^m+i\mu\varepsilon_{abc}X^aX^bX^c-\frac{3i\mu}{8}\Psi\Gamma^{234}\Psi\right)$$

(以下、μ=2)

M: 1,...,10, a: 2,3,4, m: 5,...,10

真空は既約分解(ブロック対角)に現れる表現と重複度 $\{j_s,N_s\}$ でラベルされる:

$$\hat{X}_a=-2L_a=-2\bigoplus_{s=1}^{\Lambda}\mathbf{1}_{N_s}\otimes L_a^{[j_s]}$$

$SU(2|4)$対称な理論の間の関係:

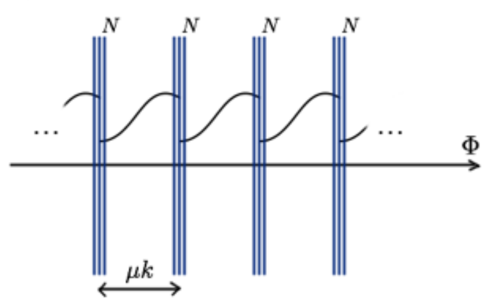
[Ishii-Ishiki-Shimasaki-Tsuchiya '06]

PWMM のある真空周り $\xrightarrow{\text{commutative lim.}}$ $\mathcal{N}$=8 SYM on $R\times S^2$ $\xrightarrow{\text{Taylor's T-dual}}$ $\mathcal{N}$=4 SYM on $R\times S^3/Z_k$

LST lim. (予想)

Little String Theory on $R\times S^5$

Taylor's T-dualのイメージ



このように、親玉のPWMMの真空として高次元の他の場の理論が含まれている。

従って、PWMMを調べることで、全ての$SU(2|4)$対称な理論を調べる事ができる。

PWMMへのlocalizationの適用:

[Y.A.-Ishiki-Okada-Shimasaki '12]

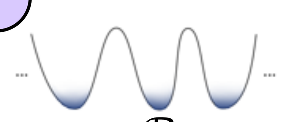
$SU(2|4)$対称な理論の超対称な演算子の期待値は、Plane Wave行列模型(PWMM)に対してlocalizationを適用させる事で求めることができる。localizationの結果、saddle pointは $\boxed{\hat{X}_{10}=\frac{M}{\cosh\tau},\quad \hat{X}_{a'}=-2L_a}$ $\left(a\in SO(3)\text{ 方向の添字},\quad M=\bigoplus_s M_s\otimes\mathbf{1}_{2j_s+1},\quad M_s\text{: 定数行列}\right)$

超対称な演算子$\mathcal{O}$ の期待値は、 このsaddle point周りの1-loop積分のみが寄与し、行列積分に帰着する:

$$\boxed{\langle\mathcal{O}\rangle=\frac{1}{Z_{\mathcal{R}}}\int[dM]\;\mathcal{O}\;Z_{1-loop}(\mathcal{R},M)e^{-\frac{2}{g_{PW}^2}\mathrm{Tr}M^2}}$$

$$\left(Z_{1-loop}=\prod_{s,t=-\Lambda/2}^{\Lambda/2}\prod_{J=|j_s-j_t|}^{j_s+j_t}\prod_{i=1}^{N_s}{\prod_{j=1}^{N_t}}'\left[\frac{\{(2J+2)^2+(m_{si}-m_{tj})^2\}\{(2J)^2+(m_{si}-m_{tj})^2\}}{\{(2J+1)^2+(m_{si}-m_{tj})^2\}^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right)$$

$\mathcal{R}$: ある真空を表す$SU(2)$表現



$\mathcal{R}$

m_{si}: M_sの固有値

以下で定義されるϕはSUSY不変な場である。(そのようなKilling spinorをとった)

$$\phi:=v^M X_M=-2(X_4-\cosh\tau X_0-\sinh\tau X_9),\quad \delta_s\phi=0$$

(v^M: Killing vector)

超対称な演算子$\mathcal{O}$の内、ϕ から作られるgauge不変な演算子は以下のクラスに属するものである:

PWMMでは
$\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}_1(\phi(\tau_1))\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}_2(\phi(\tau_2))\cdots$

SYM on $R\times S^2$では
$\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}_1(\phi(\tau_1,\Omega))\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}_2(\phi(\tau_2,\Omega))\cdots$

SYM on $R\times S^3/Z_k$では
$\mathcal{F}_1\left(W_{S^3}(\tau_1\text{での大円})\right)\mathcal{F}_2\left(W_{S^3}(\tau_2\text{での大円})\right)\cdots$

$W_{S^3}(\tau\text{での大円})$: Wilson loop operator

$R\times S^3$上の$\mathcal{N}$=4 SYMでは、Wilson loopのn点函数の期待値はGaussian matrix modelで計算できる:

$$\langle W_{S^3}(\tau_1\text{での大円})W_{S^3}(\tau_2\text{での大円})\cdots\rangle=\frac{1}{Z}\int[dM]\Delta^2(M)\,e^{-\frac{2}{g_{PW}^2}\mathrm{Tr}M^2}\frac{1}{N_{PW}}\mathrm{Tr}e^{2\pi M}\frac{1}{N_{PW}}\mathrm{Tr}e^{2\pi M}\cdots$$

この結果を更に調べたい

Little String Theory Limit

超対称な演算子の期待値のτ非依存性

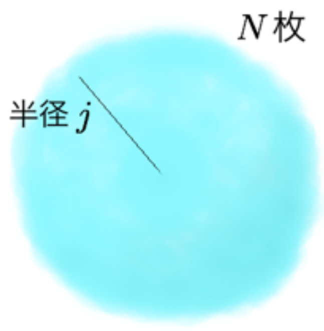
Little String Theory Limit

PWMMにおけるLittle String Theory(LST)への極限が存在する事をゲージ理論の枠内で示したい。

LSTは、PWMMの以下のdouble scaling limitに対応する真空周りの理論であることが重力側から予想されていた:

[Ling-Mohazab-Shieh-Anders-Raamsdonk '06]

PWMMの
spin$j$ のN枚 fuzzy sphere
に対応する真空周り



$j = \frac{N_5 - 1}{2}$: fixed, $\quad N \to \infty$,

$\frac{1}{N}\lambda^{\frac{5}{8}} e^{a\lambda^{\frac{1}{4}}/N_5} = \tilde{g}_s$: fixed

$(N_5 N = N_{PW},\ \lambda = g_{PW}^2 N)$

$R\times S^5$上のIIA LST
(N_5枚のNS5-brane)

ゲージ理論側からも示せるか?

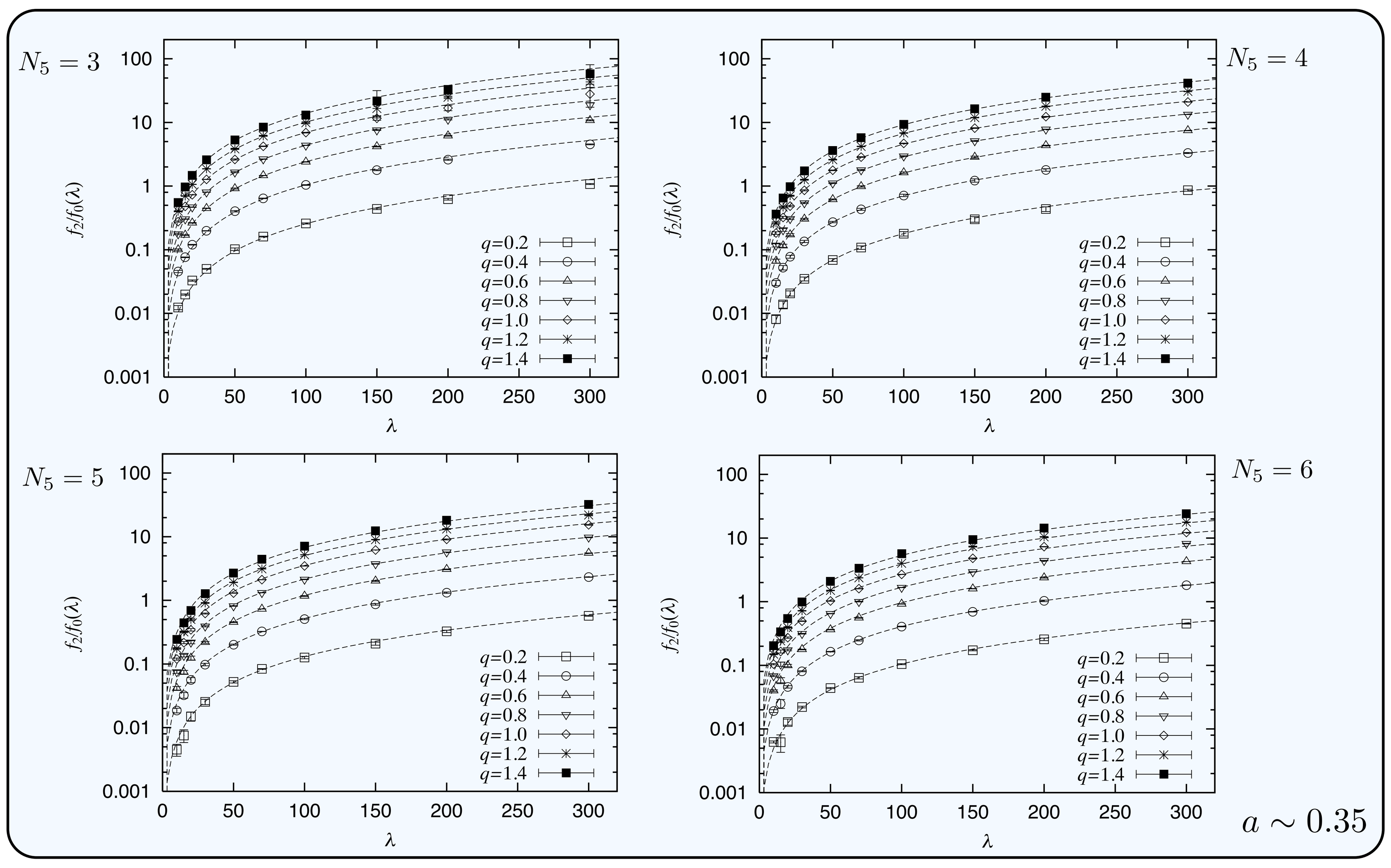
このLST極限が存在すれば、この理論の演算子$\mathcal{O}$ の期待値は以下のように展開することができる:

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{O}\rangle &= c(\lambda)(a_0 + a_2\tilde{g}_s^2 + a_4\tilde{g}_s^4 + \cdots)\\ &= c(\lambda)\left(a_0 + \frac{a_2\lambda^{\frac{5}{4}}e^{2a\lambda^{\frac{1}{4}}/N_5}}{N^2} + \frac{a_4\lambda^{\frac{5}{2}}e^{4a\lambda^{\frac{1}{4}}/N_5}}{N^4} + \cdots\right)\\ &= f_0(\lambda) + \frac{f_2(\lambda)}{N^2} + \frac{f_4(\lambda)}{N^4} + \cdots\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{f_{2n+2}(\lambda)}{f_{2n}(\lambda)} \propto \lambda^{\frac{5}{4}} e^{2a\lambda^{\frac{1}{4}}/N_5}}$$

$\mathcal{O}$ としてloop演算子 $\mathrm{Tr}\, e^{qM}/N$ を適用して、様々なN_5の値でMonte Carlo simulation

同じaで全てうまくfitされた:



これはLST極限が存在する1つの有力な証拠

$\mathcal{N}$=8 SYM on $R\times S^2$ や$\mathcal{N}$=4 SYM on $R\times S^3/Z_k$ からのLST極限も存在し、同様に数値計算できる。(work in progress)

[Ling-Shieh-Anders '06]

超対称な演算子の期待値のτ非依存性

ゲージ理論側:

一般に$\phi(\tau)$のみから作られる相関函数はτに依存しない。

Ward id.を用いてこのτ 非依存性を示せる。

SUSY変換で$\partial_\tau\phi$となる場が存在: $\boxed{\delta_s\Psi_1 = D_1\phi = \partial_\tau\phi - i[X_1,\phi]}$

$$\begin{aligned}0 &= \delta_s\langle\mathrm{Tr}[\Psi_1(\tau)\phi(\tau)^{n-1}]\cdots\rangle\\ &= \frac{1}{n}\langle\mathrm{Tr}[D_1(\phi(\tau)^n)]\cdots\rangle\\ &= \frac{1}{n}\langle\partial_\tau\mathrm{Tr}[\phi(\tau)^n]\cdots\rangle\end{aligned}$$

簡単のために$R\times S^3$上の$\mathcal{N}$=4 SYMに対応する真空に限定した場合:

$$\langle W(\tau)W(0)\rangle_{conn.} = \frac{1}{ZN_{PW}^2}\int[dM]\Delta^2(M)\, e^{-\frac{2}{g_{PW}^2}\mathrm{Tr}M^2}\mathrm{Tr}e^{2\pi M}\mathrm{Tr}e^{2\pi M}\Big|_{conn.}$$

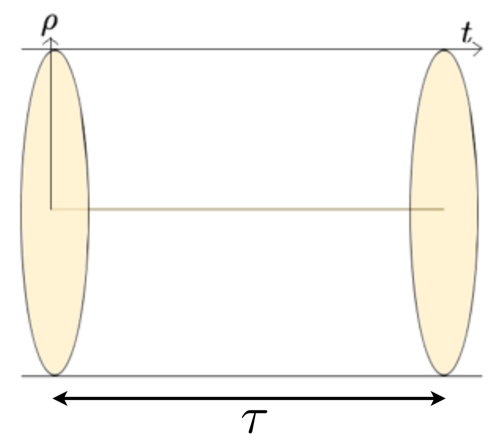
τに依存しなくなっている。

$$\sim e^{2\sqrt{\lambda}}$$

重力側:

この場合のτ 非依存性は、重力側ではどうなっているであろうか?
対応する重力解中のminimal surfaceを計算した。

2-disk解しか許されない



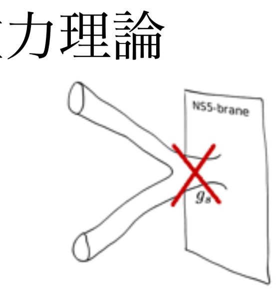
$$\sim e^{2\sqrt{\lambda}}$$

他のゲージ理論に対するゲージ/重力対応 (work in progress)

A. Little String Theoryが持つ性質

[reviewは、Aharony '99, Kutasov '01 etc.]

- NS5-braneの配位について$g_s\to0$の極限で得られる6次元非重力理論



- 理論はnon-local (cf. T-duality...)・・・String?

- Well-defined off-shell Green function (cf. gauge/gravity)
・・・場の理論?

弦の性質と非重力な場の理論の性質の両方を併せ持つ。