Duality Constraints on String Theory

Hirotaka Irie (YITP, Kyoto Univ.)

２０１３年８月２３日　基研研究会２０１３「場の理論と弦理論」

based on collaborations with

Chuan-Tsung Chan (Tunghai Univ.) and Chi-Hsien Yeh (NCTS)

Main Reference

[CIY5], “Duality Constraints on String Theory I: spectral networks and instantons,” arXiv:1308.**** (**appear soon in the next week!**)

話したいこと

話したいこと

- 摂動論（ラージN）で双対性が見える

  v.s. 非摂動論で双対性が実現される

話したいこと

- 摂動論（ラージN）で双対性が見える
  v.s. 非摂動論で双対性が実現される
- 非摂動的定式化が非摂動的不定性（Non-perturbative [contour] ambiguity）を持ちうること

話したいこと

- 摂動論（ラージN）で双対性が見える
  v.s. 非摂動論で双対性が実現される
- 非摂動的定式化が非摂動的不定性（Non-perturbative [contour] ambiguity）を持ちうること
- 双対性を非摂動論的に捉えることができれば、非摂動論的不定性が制限されることを見る

始める前の注意

- 「ミニマル弦理論」を考えるが、Topological Recursion/スペクトラル曲線で記述される範囲の弦理論・行列模型・可積分系に容易に拡張出来る
（ただし、<u>β-ensemble/量子スペクトラル曲線の時はあまり容易ではない</u>）
- DSL（Double Scaling Limit）は本質的ではない：g = N^{-1}

次の2つの系は同じか？

Two-matrix model

$$\mathcal{Z} = \int dX dY \, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X)+V_2(Y)-XY]}$$

次の2つの系は同じか？

Two-matrix model

$$\mathcal{Z} = \int dX dY \, e^{-N \mathrm{tr}[V_1(X) + V_2(Y) - XY]}$$

“Yを先に積分”

X-system

次の2つの系は同じか？

Two-matrix model

$$\mathcal{Z} = \int dX dY\, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X)+V_2(Y)-XY]}$$

“Yを先に積分”

“Xを先に積分”

X-system

Y-system

次の2つの系は同じか？

Two-matrix model

$$\mathcal{Z} = \int dX dY \, e^{-N \mathrm{tr}[V_1(X) + V_2(Y) - XY]}$$

"Yを先に積分" → X-system

"Xを先に積分" → Y-system

X-system ⟷ Y-system

spectral (p-q) dual

次の2つの系は同じか？

Two-matrix model

$$\mathcal{Z} = \int dX dY \, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X)+V_2(Y)-XY]}$$

“Yを先に積分”　　　　“Xを先に積分”

X-system　$\longleftrightarrow$　Y-system

spectral (p-q) dual

注）XとYはそれぞれ互いに双対な時空を表す

≒　Double Field Theory

Large N (摂動論) で見る

Large N (摂動論) で見る

スペクトラル曲線の比較

X-system

Y-system

Large N (摂動論) で見る

スペクトラル曲線の比較

X-system ⟷ Y-system

行列 X のレゾルベント

$$R(x) = \left\langle \frac{1}{N} \mathrm{tr} \frac{1}{x - X} \right\rangle$$

行列 Y のレゾルベント

$$\widetilde{R}(y) = \left\langle \frac{1}{N} \mathrm{tr} \frac{1}{y - Y} \right\rangle$$

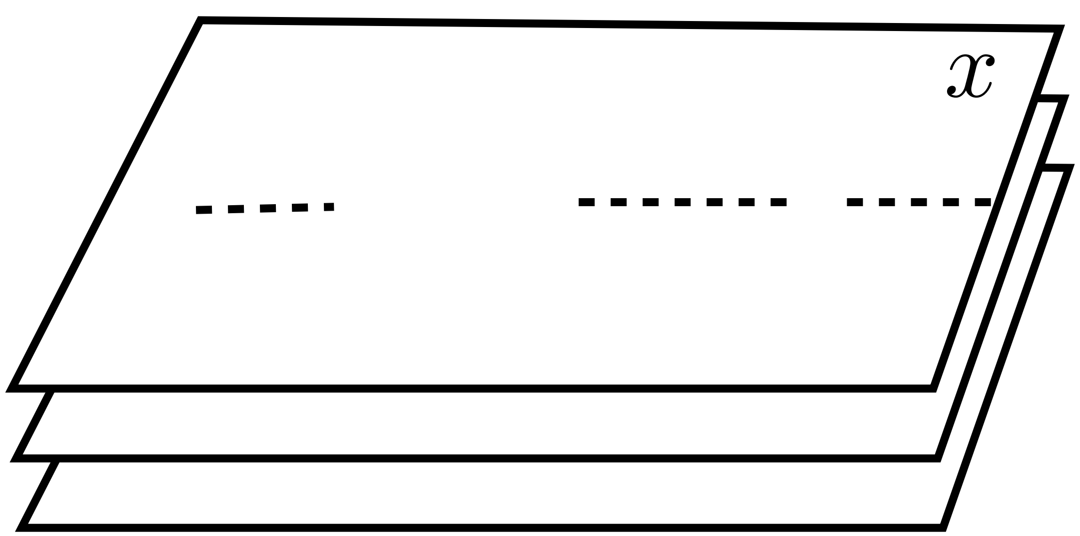
Large N (摂動論) で見る

スペクトラル曲線の比較

X-system ⟷ Y-system

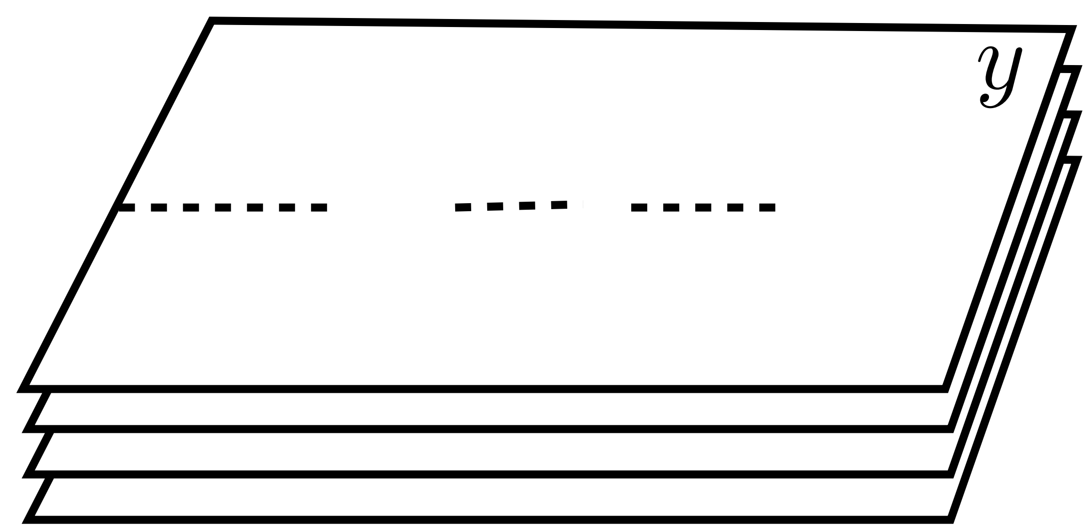
行列 X のレゾルベント

$$R(x) = \left\langle \frac{1}{N} \mathrm{tr} \frac{1}{x - X} \right\rangle$$



行列 Y のレゾルベント

$$\widetilde{R}(y) = \left\langle \frac{1}{N} \mathrm{tr} \frac{1}{y - Y} \right\rangle$$



Large N (摂動論) で見る

スペクトラル曲線の比較

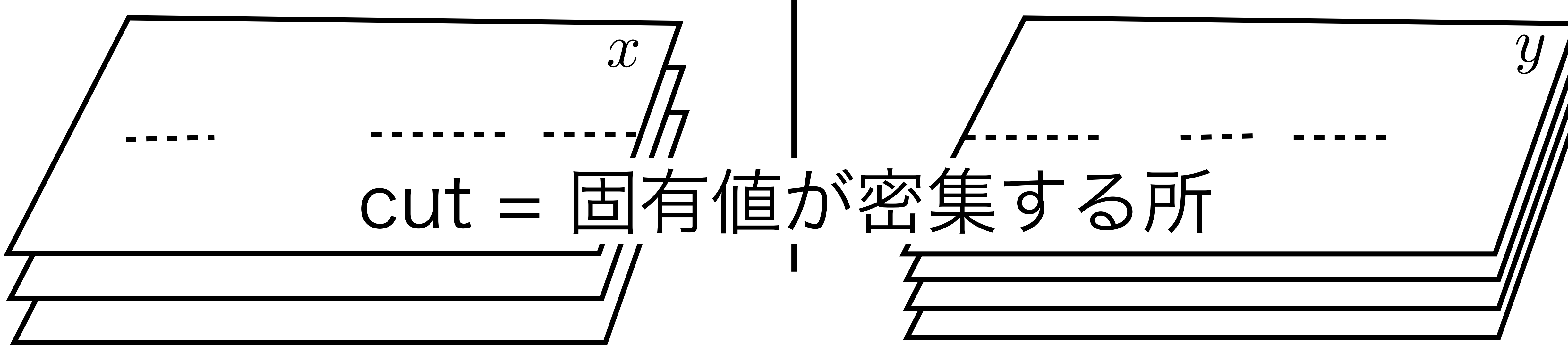
X-system ⟷ Y-system

行列 X のレゾルベント

$$R(x) = \left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}\frac{1}{x-X} \right\rangle$$

行列 Y のレゾルベント

$$\widetilde{R}(y) = \left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}\frac{1}{y-Y} \right\rangle$$



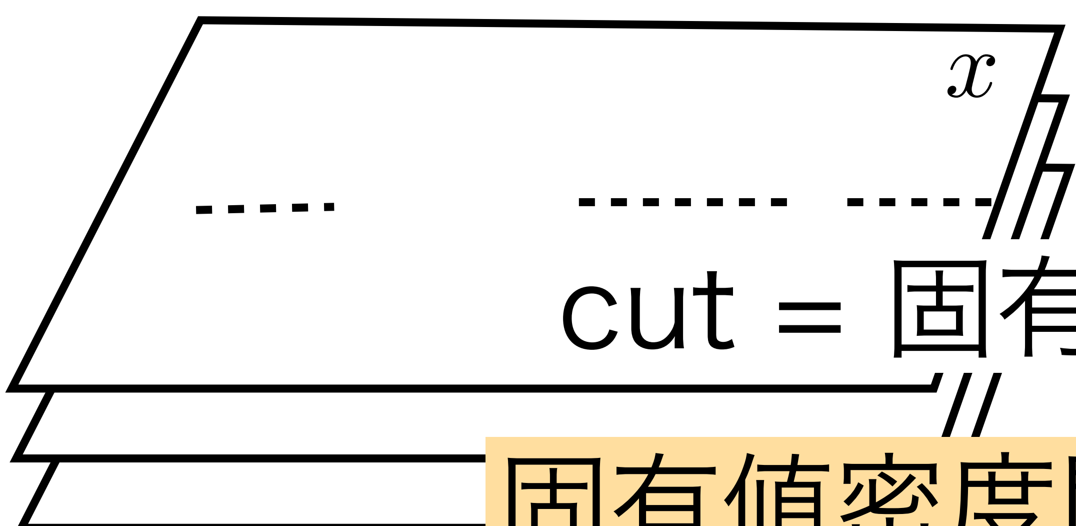
cut = 固有値が密集する所

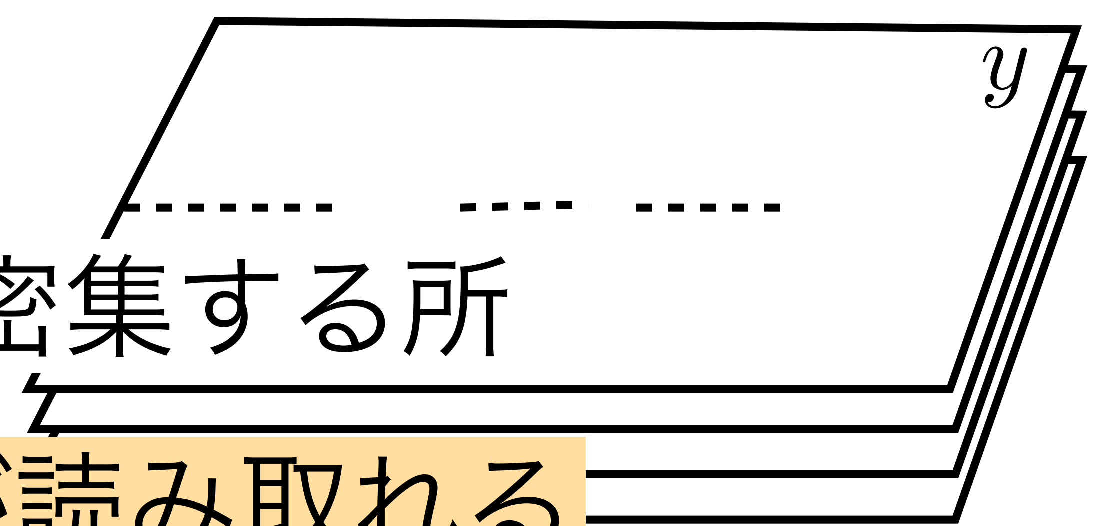
Large N (摂動論) で見る

スペクトラル曲線の比較

X-system ⟷ Y-system

X-system	Y-system
行列 X のレゾルベント	行列 Y のレゾルベント
$R(x) = \left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}\frac{1}{x-X} \right\rangle$	$\widetilde{R}(y) = \left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}\frac{1}{y-Y} \right\rangle$





cut = 固有値が密集する所

固有値密度関数が読み取れる

Large N (摂動論) で見る

スペクトラル曲線の比較

X-system ⟷ Y-system

行列 X のレゾルベント

$$R(x) = \left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}\frac{1}{x-X} \right\rangle$$

行列 Y のレゾルベント

$$\widetilde{R}(y) = \left\langle \frac{1}{N}\mathrm{tr}\frac{1}{y-Y} \right\rangle$$

$$F(x, R) = 0 \quad x$$

$$\widetilde{F}(y, \widetilde{R}) = 0 \quad y$$

cut = 固有値が密集する所

固有値密度関数が読み取れる

Large N (摂動論) で見る

スペクトラル曲線の比較

X-system ⟷ Y-system

行列 X のレゾルベント

$$R(x) = \left\langle \frac{1}{N} \mathrm{tr} \frac{1}{x - X} \right\rangle$$

行列 Y のレゾルベント

$$\widetilde{R}(y) = \left\langle \frac{1}{N} \mathrm{tr} \frac{1}{y - Y} \right\rangle$$

$$F(x, R) = 0 \quad x$$

$$\widetilde{F}(y, \widetilde{R}) = 0 \quad y$$

実は、スペクトラル曲線は本質的に同じ

$$\widetilde{F}(y, x) = F(x, y) = 0$$

スペクトラル曲線が双対

$F(x, y) = 0 \quad \boxed{x \leftrightarrow y}$

スペクトラル曲線が双対

$$F(x,y)=0 \qquad \boxed{x \leftrightarrow y}$$

Symplectic Invariance

X-system ⟷ Y-system

スペクトラル曲線が双対

$$F(x,y)=0 \qquad x \leftrightarrow y$$

Symplectic Invariance

$F(x,R)=0$ $\qquad$ $\widetilde{F}(y,\widetilde{R})=0$

X-system $\longleftrightarrow$ Y-system

Topological Recursion [Eynard-Orantin '07]
(=Loop Eqs)で摂動論の全次数が復活できる

スペクトラル曲線が双対

$$F(x,y)=0 \qquad \boxed{x \leftrightarrow y}$$

Symplectic Invariance

$F(x,R)=0$ $\qquad$ $\widetilde{F}(y,\widetilde{R})=0$

X-system $\longleftrightarrow$ Y-system

Topological Recursion [Eynard-Orantin '07]
(=Loop Eqs)で摂動論の全次数が復活できる

特に、自由エネルギーの摂動展開係数はすべて一致

$$\mathcal{F}_{\mathrm{pert}}(g)=\sum_{n=0}^{\infty} g^{2n-2}\mathcal{F}_n$$

スペクトラル曲線が双対

$$F(x,y)=0 \qquad \boxed{x \leftrightarrow y}$$

Symplectic Invariance

$$F(x,R)=0 \qquad\qquad \widetilde{F}(y,\widetilde{R})=0$$

X-system ⟷ Y-system

Topological Recursion [Eynard-Orantin '07]
(=Loop Eqs)で摂動論の全次数が復活できる

特に、自由エネルギーの摂動展開係数はすべて一致

$$\mathcal{F}_{\mathrm{pert}}(g)=\sum_{n=0}^{\infty} g^{2n-2}\mathcal{F}_n$$

インスタントンは曲線の変形で与えられて、同様に一致

$$\mathcal{F}^{(I)}_{\mathrm{Inst}}(g)=\sum_{n=0}^{\infty} g^{n-1}\mathcal{F}^{(I)}_n$$

$I \in \{\mathrm{instantons}\}$

スペクトラル曲線が双対

$$F(x,y)=0 \qquad \boxed{x \leftrightarrow y}$$

Symplectic Invariance

$$F(x,R)=0 \qquad\qquad \widetilde{F}(y,\widetilde{R})=0$$

X-system $\longleftrightarrow$ Y-system

Topological Recursion [Eynard-Orantin '07]

全次数摂動論（インスタントンも含む）で完全等価

(=Loop Eqs) で摂動論の全次数が復活できる

特に、自由エネルギーの摂動展開係数はすべて一致

$$\mathcal{F}_{\rm pert}(g)=\sum_{n=0}^{\infty} g^{2n-2}\mathcal{F}_n$$

インスタントンは曲線の変形で与えられて、同様に一致

$$\mathcal{F}^{(I)}_{\rm Inst}(g)=\sum_{n=0}^{\infty} g^{n-1}\mathcal{F}^{(I)}_n$$

$$I\in\{\text{instantons}\}$$

世界面の記述（Liouville理論）

$$S = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\left[g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + QR\phi + 4\pi\mu e^{2b\phi}\right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\left[g^{ab}\partial_a X\partial_b X + i\widetilde{Q}RX\right] + S_{\mathrm{ghost}}$$

$$\boxed{Q = b + \frac{1}{b}, \quad \widetilde{Q} = b - \frac{1}{b} \qquad\qquad b = \sqrt{\frac{p}{q}}}$$

世界面の記述（Liouville理論）

$$S=\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\Big[g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi+QR\phi+4\pi\mu e^{2b\phi}\Big]+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\Big[g^{ab}\partial_a X\partial_b X+i\widetilde{Q}RX\Big]+S_{\mathrm{ghost}}$$

$$Q=b+\frac{1}{b},\quad \widetilde{Q}=b-\frac{1}{b}\qquad b=\sqrt{\frac{p}{q}}$$

p-q duality: p ↔ q $\Leftrightarrow$ $b\leftrightarrow\frac{1}{b}$ (≒T-duality)

世界面の記述（Liouville理論）

$$S = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\Big[g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + QR\phi + 4\pi\mu e^{2b\phi}\Big] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\Big[g^{ab}\partial_a X\partial_b X + i\widetilde{Q}RX\Big] + S_{\mathrm{ghost}}$$

$$Q = b + \frac{1}{b}, \quad \widetilde{Q} = b - \frac{1}{b} \qquad b = \sqrt{\frac{p}{q}}$$

p-q duality: p $\leftrightarrow$ q $\Leftrightarrow$ $b \leftrightarrow \frac{1}{b}$ (≒T-duality)

３点関数（DOZZ）の基本原理！

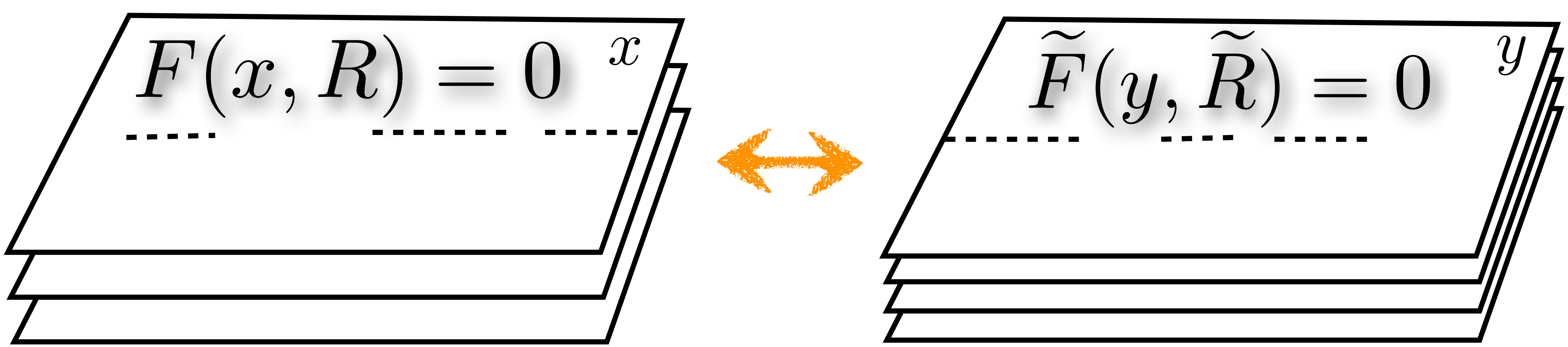
世界面の記述（Liouville理論）

$$S = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\Big[g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + QR\phi + 4\pi\mu e^{2b\phi}\Big] +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\Big[g^{ab}\partial_a X\partial_b X + i\widetilde{Q}RX\Big] + S_{\text{ghost}}$$

$$\boxed{Q = b + \frac{1}{b},\quad \widetilde{Q} = b - \frac{1}{b} \qquad b = \sqrt{\frac{p}{q}}}$$

p-q duality: p ↔ q $\Leftrightarrow$ $b \leftrightarrow \frac{1}{b}$ (≒T-duality)

３点関数（DOZZ）の基本原理！



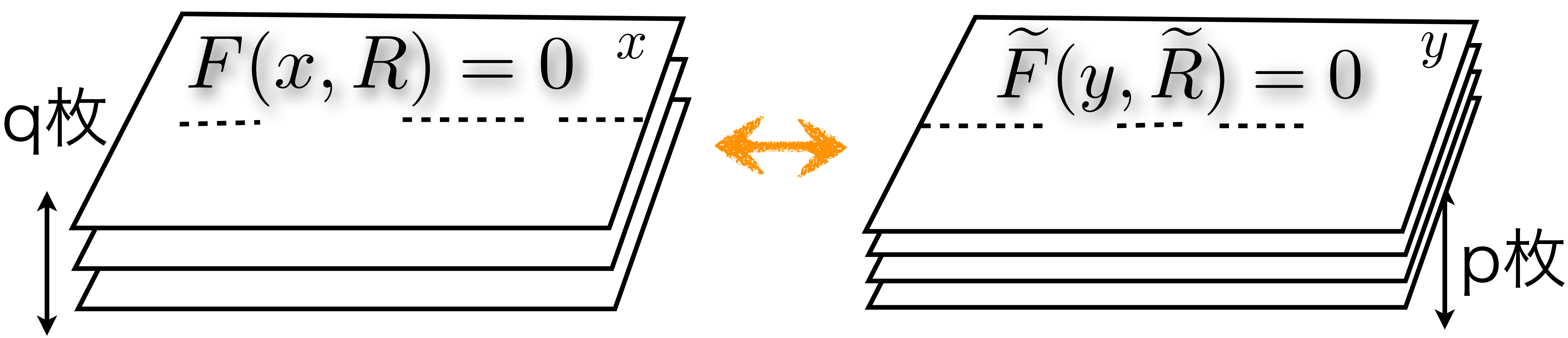
世界面の記述（Liouville理論）

$$S=\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\Big[g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi+QR\phi+4\pi\mu e^{2b\phi}\Big]+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\Big[g^{ab}\partial_a X\partial_b X+i\widetilde{Q}RX\Big]+S_{\mathrm{ghost}}$$

$$\boxed{Q=b+\frac{1}{b},\quad \widetilde{Q}=b-\frac{1}{b}\qquad\qquad b=\sqrt{\frac{p}{q}}}$$

p-q duality:　p ↔ q　$\Leftrightarrow$　$b\leftrightarrow\frac{1}{b}$　(≒T-duality)

３点関数（DOZZ）の基本原理！



p-q duality and T-duality: 関連論文

- [Fukuma-Kawai-Nakayama ’92]

  $[P,Q]=1 \Leftrightarrow [Q,-P]=1$

- [Kharchev-Marshakov ’92]

  from (p,1) to (p,q)

- [Asatani-Kuroki-Okawa-Sugino-Yoneya ’96]

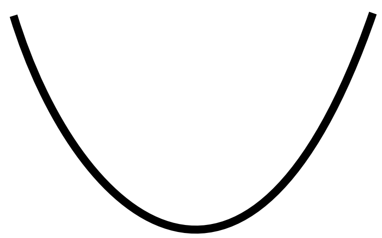
  Kramers-Wannier duality in Random Surfacs

- [Kuroki-Sugino ’07]

  D-instanton chemical potentials

非摂動論（completion）

非摂動論（completion）

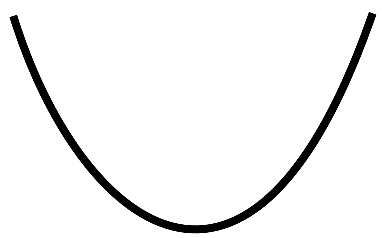


全次数摂動論

+インスタントン

$$\left\{\mathcal{F}_n;\mathcal{F}_n^{(I)}\right\}_{n,I}$$

非摂動論（completion）

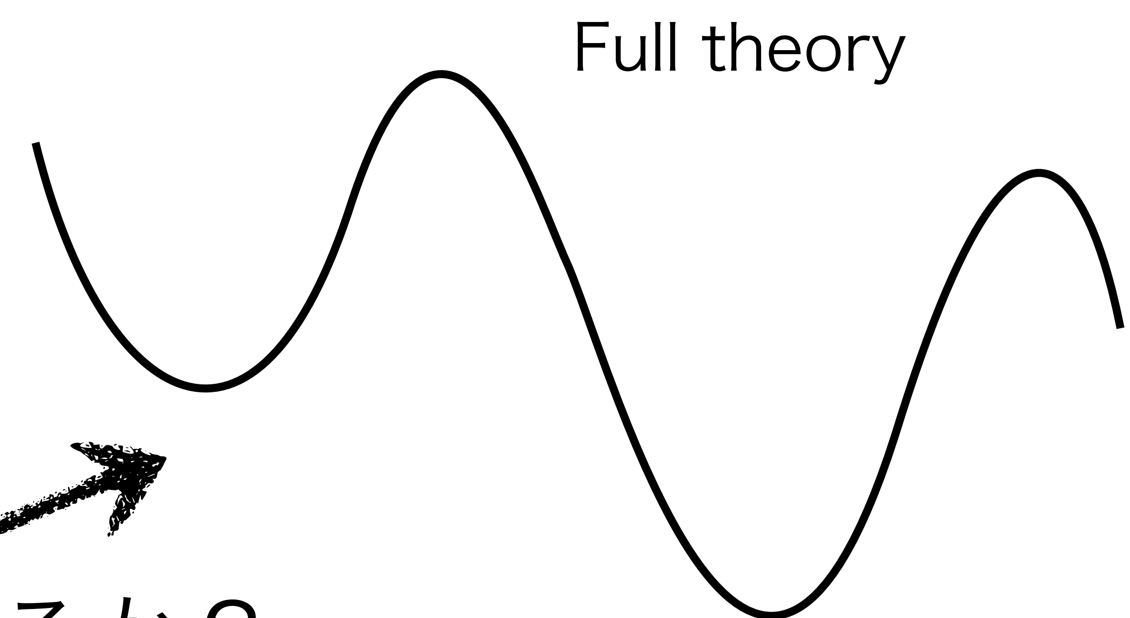


全次数摂動論

＋インスタントン

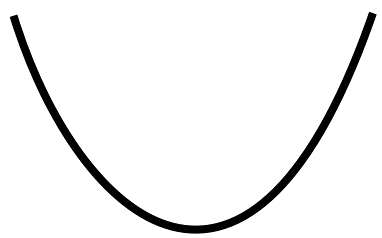
$$\left\{\mathcal{F}_n;\mathcal{F}_n^{(I)}\right\}_{n,I}$$

再構成できるか？



非摂動論（completion）

鞍点方程式の解

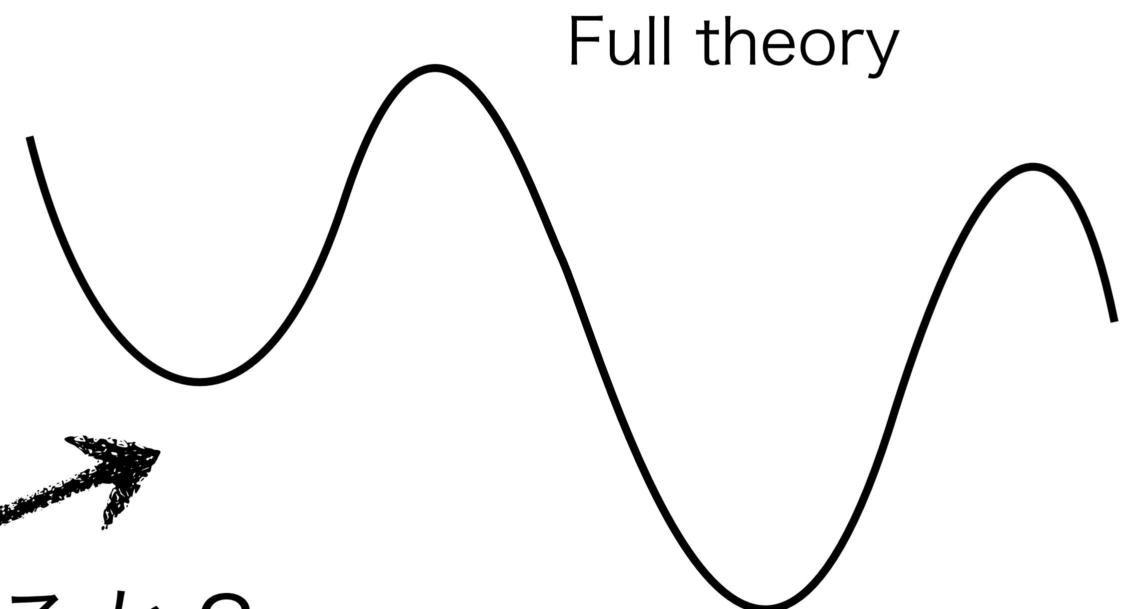


全次数摂動論

+インスタントン

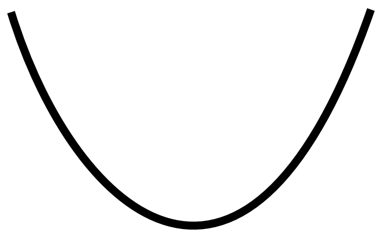
$$\left\{\mathcal{F}_n;\mathcal{F}_n^{(I)}\right\}_{n,I}$$

再構成できるか？



非摂動論（completion）

鞍点方程式の解



全次数摂動論

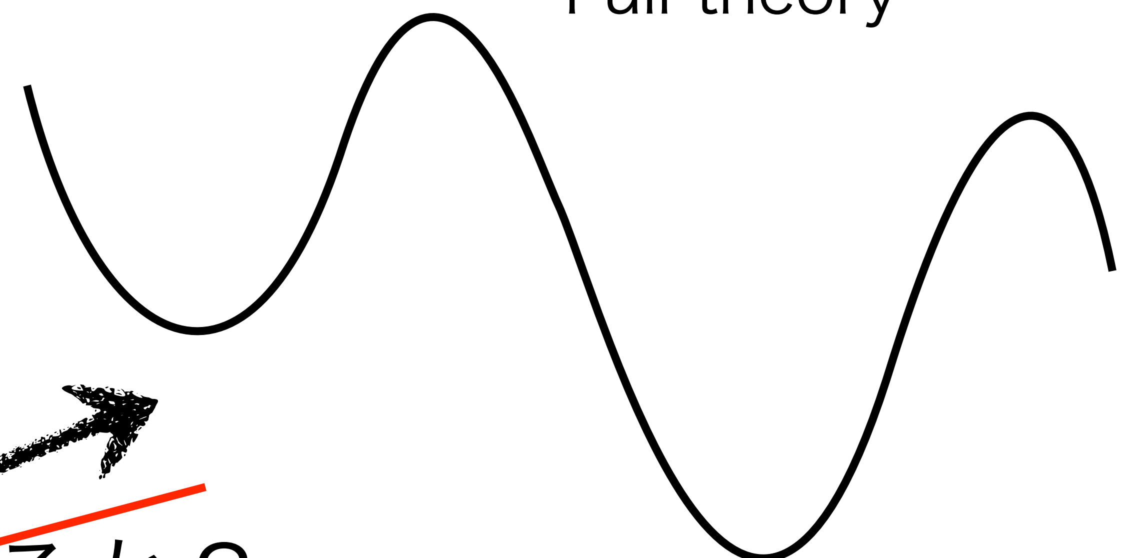
＋インスタントン

$$\left\{\mathcal{F}_n;\mathcal{F}_n^{(I)}\right\}_{n,I}$$

~~再構成できるか？~~

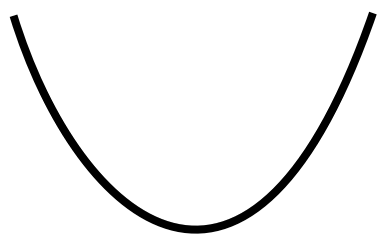
$\rightarrow$ **情報が足らない！**

Full theory



非摂動論（completion）

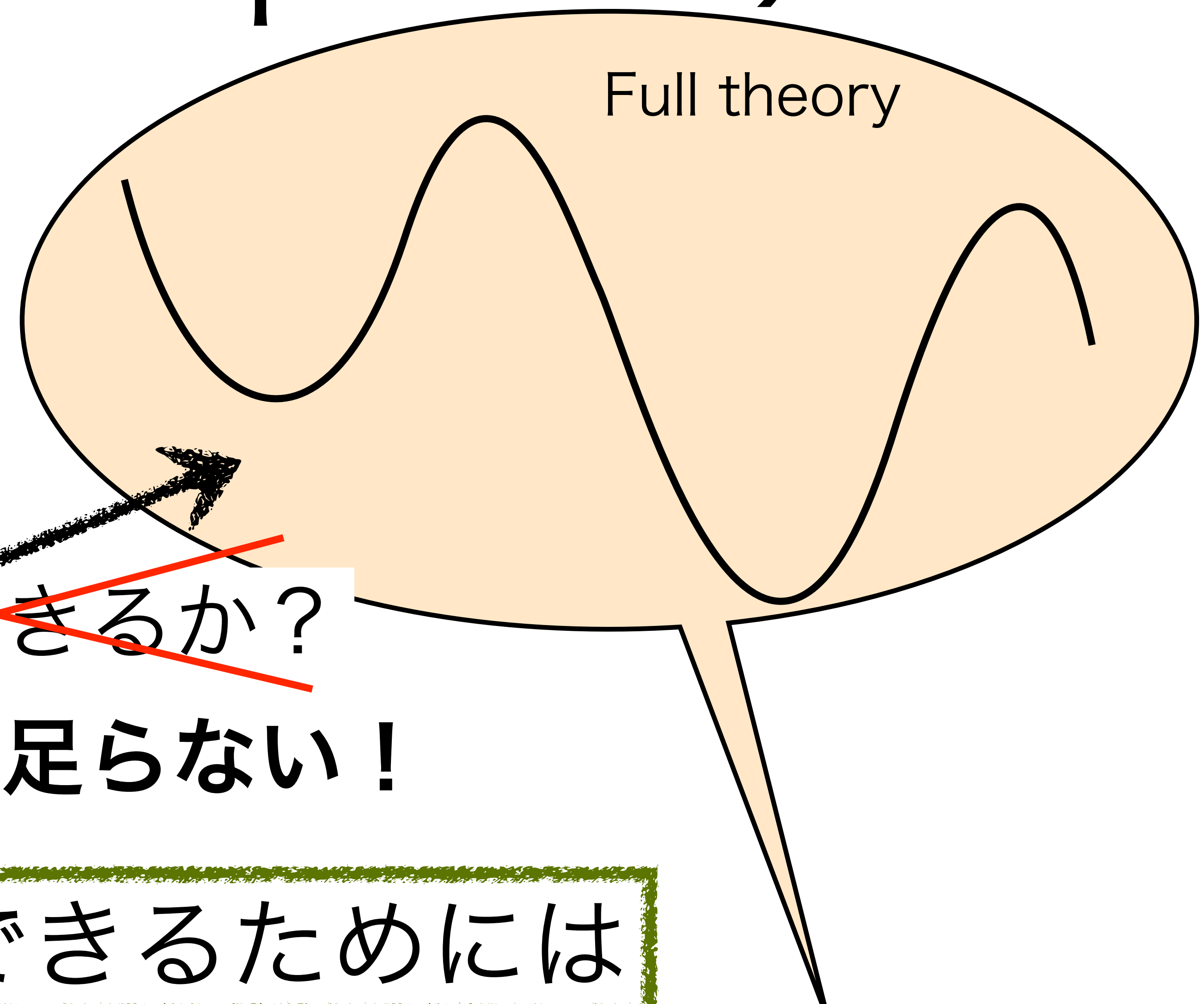
鞍点方程式の解



全次数摂動論

+インスタントン

$$\left\{\mathcal{F}_n;\mathcal{F}_n^{(I)}\right\}_{n,I}$$



~~再構成できるか？~~

→ **情報が足らない！**

再構成できるためには

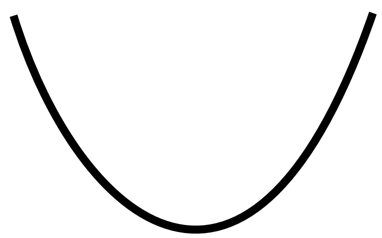
V.S.

$$\mathcal{F}\simeq\sum_{n=0}^{\infty}g^{2n-2}\mathcal{F}_n+\sum_{I\in\mathfrak{I}_{\mathrm{relev}}}\theta_I\times g^{1/2}\exp[\frac{1}{g}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n^{(I)}]$$

・鞍点の選別（全鞍点が現れる訳ではない）

非摂動論（completion）

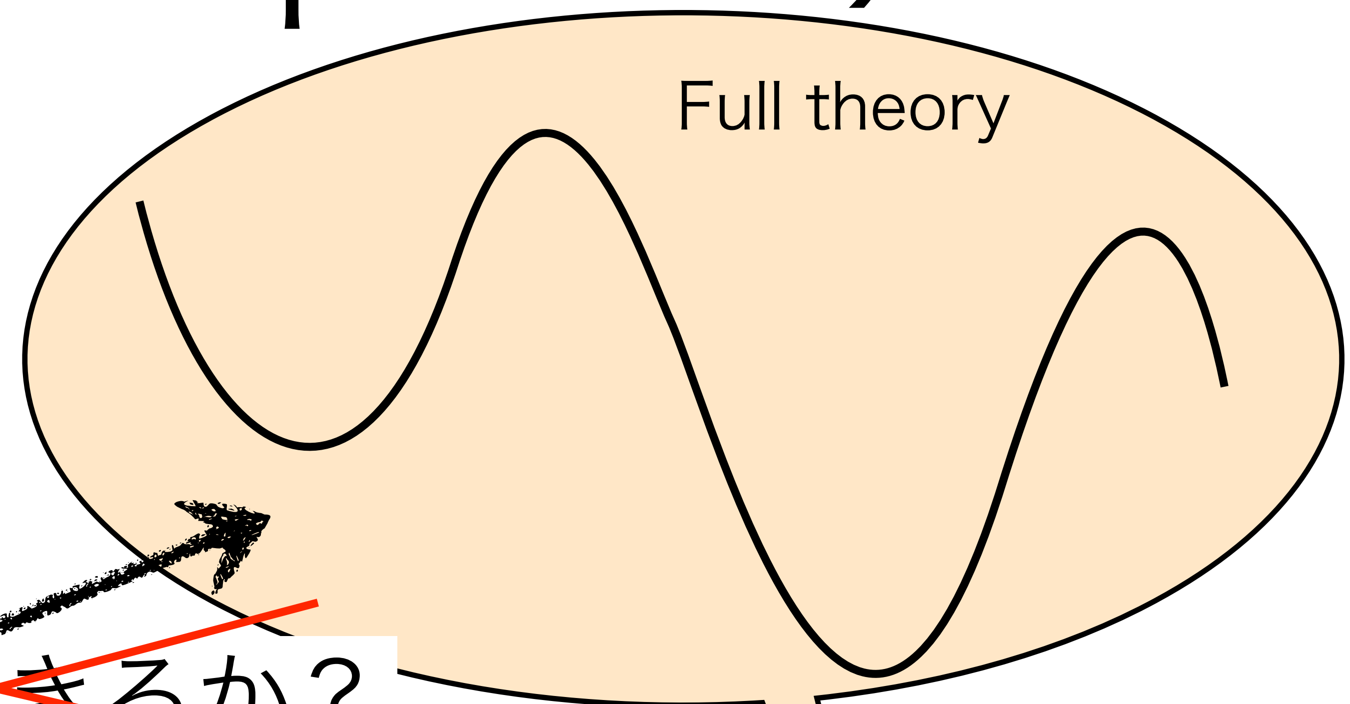
鞍点方程式の解



全次数摂動論

＋インスタントン

$$\left\{\mathcal{F}_n;\mathcal{F}_n^{(I)}\right\}_{n,I}$$



~~再構成できるか？~~

→ **情報が足らない！**

再構成できるためには

$$\mathcal{F} \simeq \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n-2}\mathcal{F}_n + \sum_{I\in\mathfrak{I}_{\mathrm{relev}}} \theta_I \times g^{1/2}\exp\Big[\frac{1}{g}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n^{(I)}\Big]$$

V.S.

- 鞍点の選別（全鞍点が現れる訳ではない）
- ポテンシャルの情報（ストークス現象）

非摂動論（completion）

$$\mathcal{Z} = \int dX\,dY\, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X)+V_2(Y)-XY]}$$

“Yを先に積分”

“Xを先に積分”

X-system

Y-system

spectral (p-q) dual

非摂動論（completion）

$$\mathcal{Z} = \int dX\,dY\, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X)+V_2(Y)-XY]}$$

“Yを先に積分” “Xを先に積分”

$\boxed{\text{X-system}}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{\text{Y-system}}$

spectral (p-q) dual

ここでは簡単のため、$V_2(Y)$をgaussianにする

非摂動論（completion）

$$\mathcal{Z} = \int dX\,dY\; e^{-N\mathrm{tr}\left[V_1(X)+\frac{Y^2}{2}-XY\right]}$$

“Yを先に積分”　　　　“Xを先に積分”

X-system ⟷ Y-system

非摂動論（completion）

gaussian

$$\mathcal{Z} = \int dX dY \, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X) + \frac{Y^2}{2} - XY]}$$

"Yを先に積分"

"Xを先に積分"

X-system

Y-system

非摂動論（completion）

gaussian

$$\mathcal{Z} = \int dX dY \, e^{-N \mathrm{tr}[V_1(X) + \frac{Y^2}{2} - XY]}$$

実行できる！

“Yを先に積分”

“Xを先に積分”

X-system

Y-system

非摂動論（completion）

gaussian

$$\mathcal{Z} = \int dX dY\, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X) + \frac{Y^2}{2} - XY]}$$

実行できる！

“Yを先に積分”

“Xを先に積分”

X-system

Y-system

$$\mathcal{Z} = \int dX e^{-N\mathrm{tr}V(X)}$$

one-matrix model

非摂動論（completion）

gaussian

$$\mathcal{Z} = \int dX dY \, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X) + \frac{Y^2}{2} - XY]}$$

実行できる！

“Yを先に積分”

“Xを先に積分”

X-system

Y-system

$$\mathcal{Z} = \int dX e^{-N\mathrm{tr}V(X)}$$

one-matrix model

（よく分かっている）

非摂動論 in one-matrix

$$\mathcal{Z} = \int dX e^{-N\mathrm{tr}V(X)}$$

非摂動論 in one-matrix

$$\mathcal{Z} = \int dX e^{-N\mathrm{tr}V(X)}$$

ポテンシャルの情報（平均場近似[David '91]）

非摂動論 in one-matrix

$$\mathcal{Z} = \int dX e^{-N\mathrm{tr}V(X)}$$

ポテンシャルの情報（平均場近似[David '91]）

$$\mathcal{Z} \simeq \int \underbrace{dx e^{-NV_{\mathrm{eff}}(x)}}_{\text{１体固有値の有効理論}} = \int dx \left\langle \det(x-X)^2 \right\rangle e^{-NV(x)}$$

非摂動論 in one-matrix

$$\boxed{\mathcal{Z} = \int dX e^{-N\mathrm{tr}V(X)}}$$

ポテンシャルの情報（平均場近似[David '91]）

$$\mathcal{Z} \simeq \int dx e^{-NV_{\mathrm{eff}}(x)} = \int dx \boxed{\left\langle \det(x - X)^2 \right\rangle} e^{-NV(x)}$$

１体固有値の有効理論

非摂動論 in one-matrix

$$\mathcal{Z} = \int dX e^{-N\mathrm{tr}V(X)}$$

ポテンシャルの情報（平均場近似[David '91]）

$$\mathcal{Z} \simeq \int dx e^{-NV_{\mathrm{eff}}(x)} = \int dx \boxed{\left\langle \det(x-X)^2 \right\rangle} e^{-NV(x)}$$

１体固有値の有効理論

$\boxed{}$ は、ラージN でレゾルベントとなる：

$$\boxed{2N \int dx R(x)}$$

$$\left\langle \det(x-X)^2 \right\rangle = \left\langle e^{2\mathrm{tr}\ln(x-X)} \right\rangle \simeq e^{\boxed{2N \int^x dx' \left\langle \frac{1}{N} \frac{1}{x'-X} \right\rangle}}$$

非摂動論 in one-matrix

$$\mathcal{Z}=\int dX e^{-N\mathrm{tr}V(X)}$$

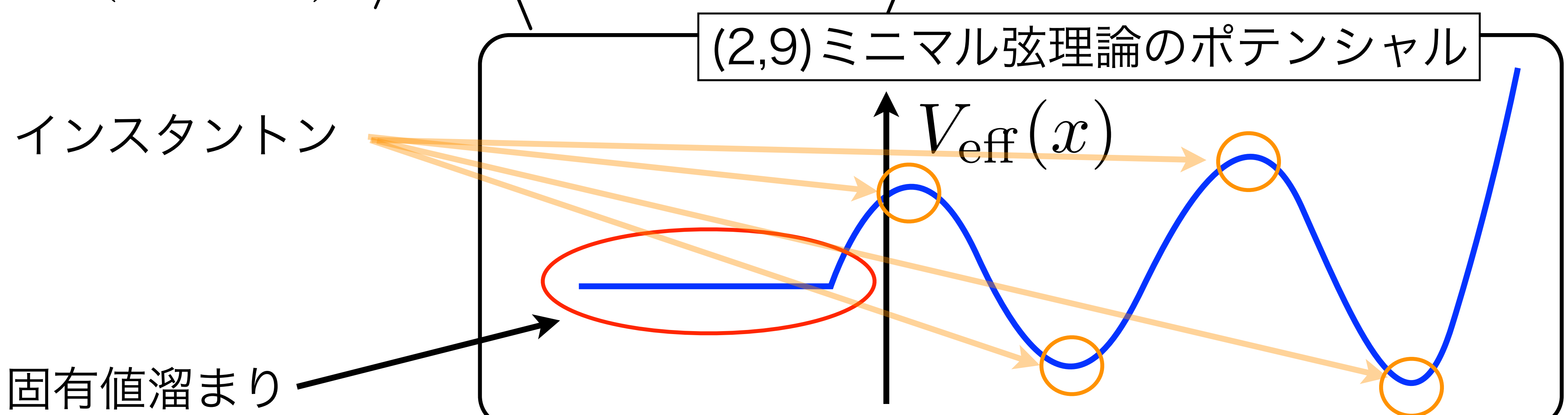
<u>ポテンシャルの情報（平均場近似[David '91]）</u>

$$\mathcal{Z}\simeq\underbrace{\int dx e^{-NV_{\mathrm{eff}}(x)}}_{\text{１体固有値の有効理論}}=\int dx\,\boxed{\left\langle\det(x-X)^2\right\rangle}e^{-NV(x)}$$

$\boxed{}$ は、ラージN でレゾルベントとなる：

$$2N\int dx R(x)$$

$$\left\langle\det(x-X)^2\right\rangle=\left\langle e^{2\mathrm{tr}\ln(x-X)}\right\rangle\simeq e^{\boxed{2N\int^x dx'\left\langle\frac{1}{N}\frac{1}{x'-X}\right\rangle}}$$



非摂動論 in one-matrix

<u>鞍点（インスタントン）の選別</u>

非摂動論 in one-matrix

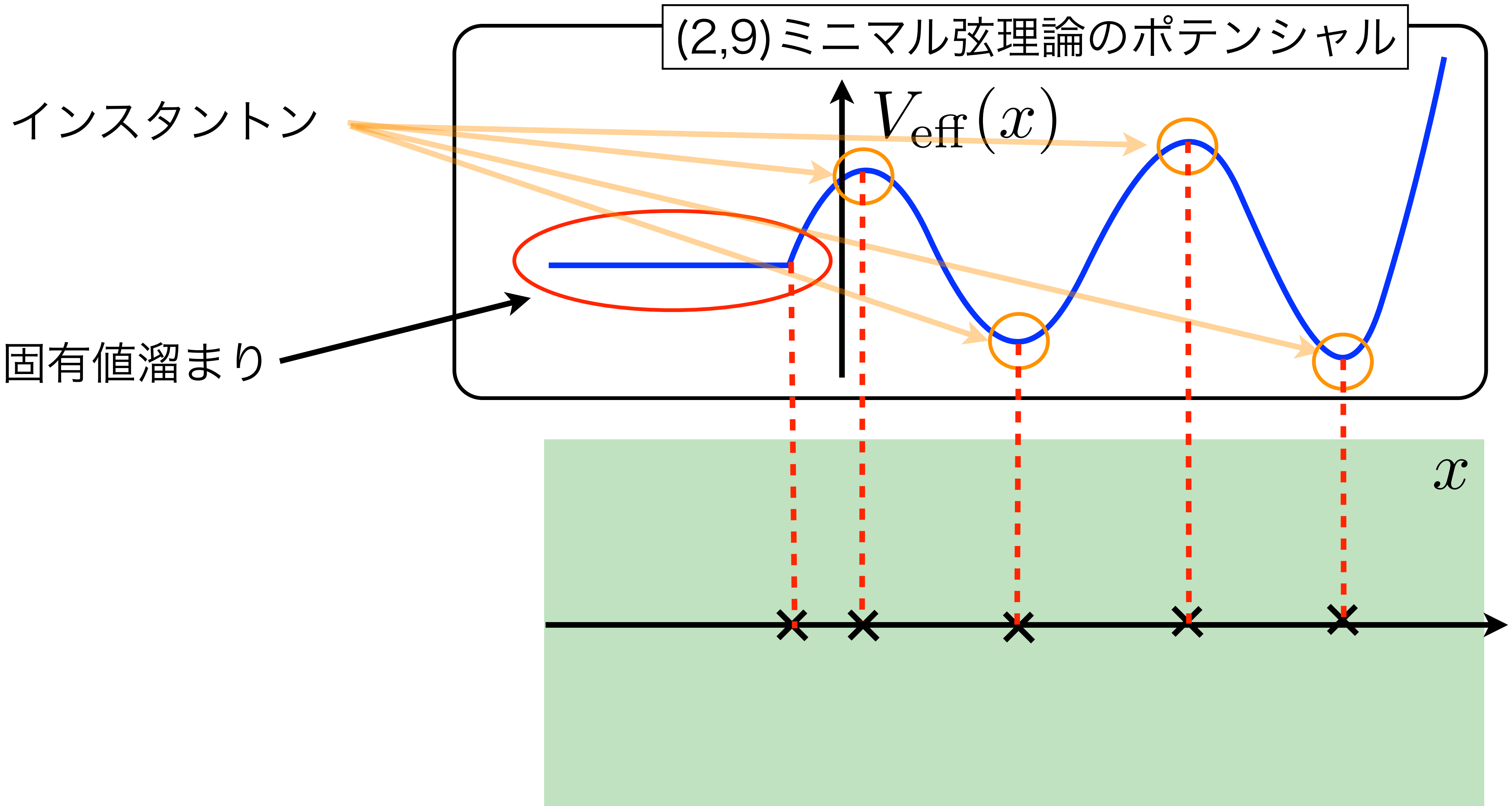
<u>鞍点（インスタントン）の選別</u>

理論は、行列模型の積分路（contour）を決めて定める

非摂動論 in one-matrix

鞍点（インスタントン）の選別

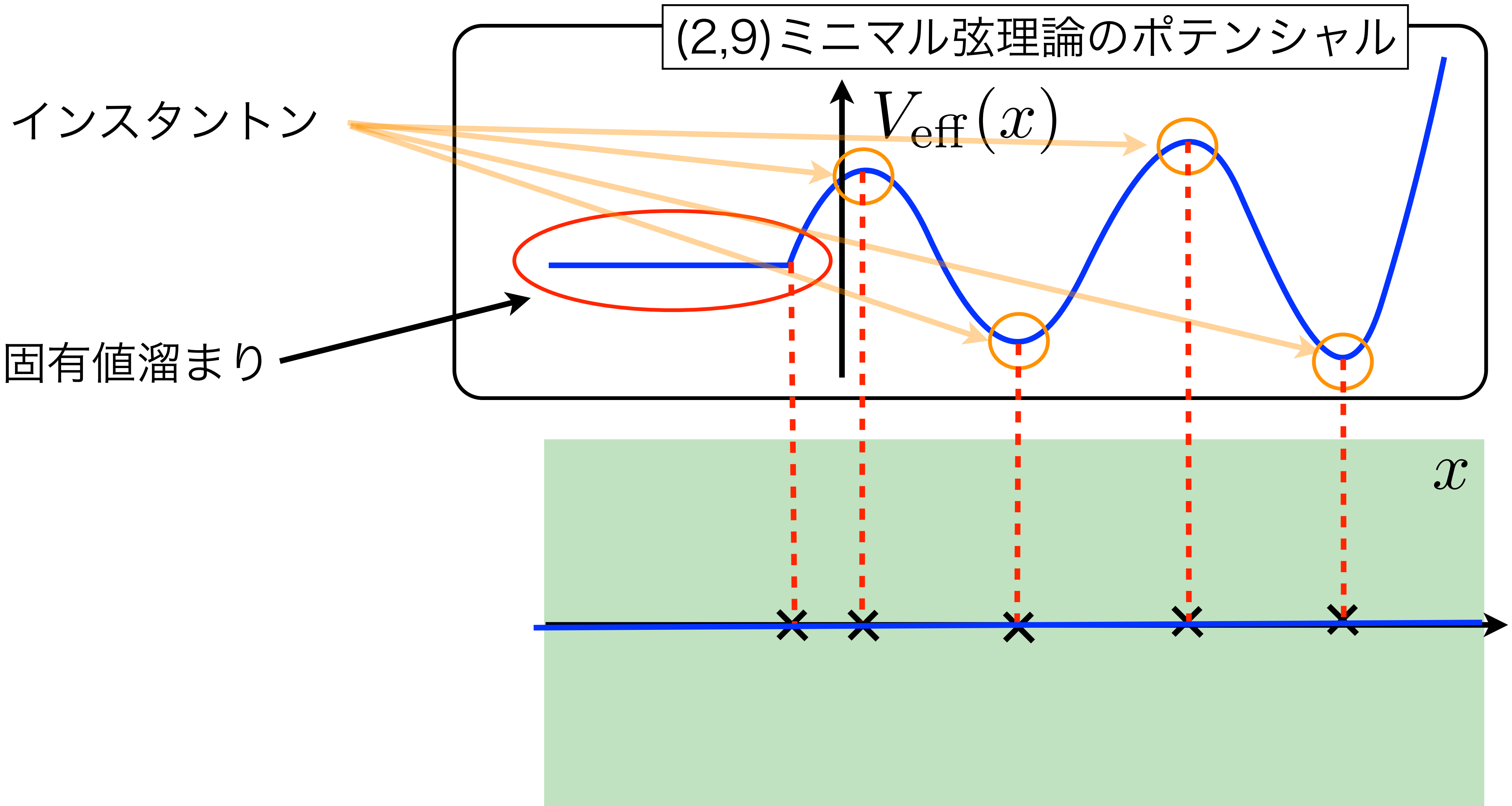
理論は、行列模型の積分路（contour）を決めて定める



非摂動論 in one-matrix

鞍点（インスタントン）の選別

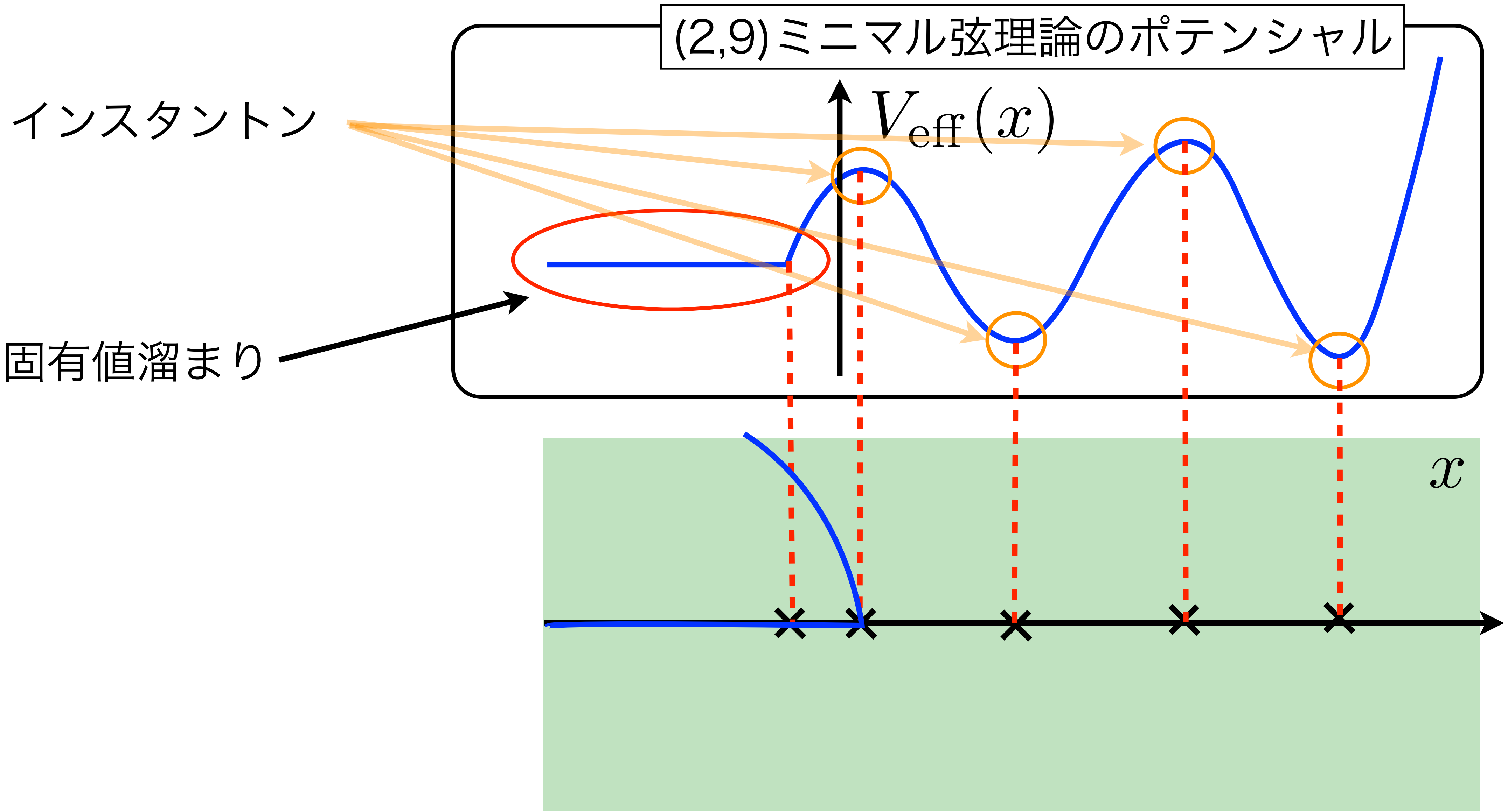
理論は、行列模型の積分路（contour）を決めて定める



非摂動論 in one-matrix

<u>鞍点（インスタントン）の選別</u>

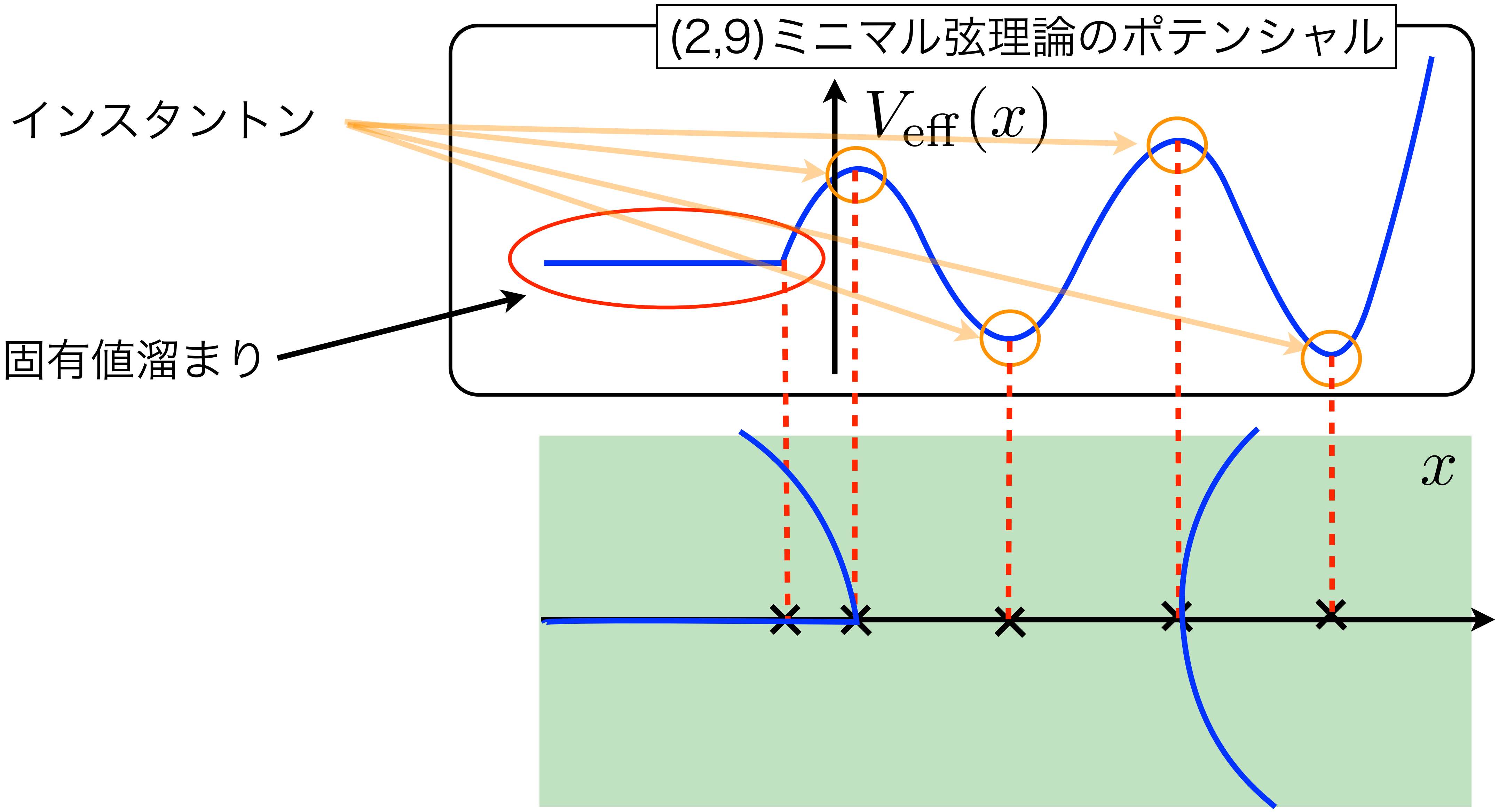
理論は、行列模型の積分路（contour）を決めて定める



非摂動論 in one-matrix

鞍点（インスタントン）の選別

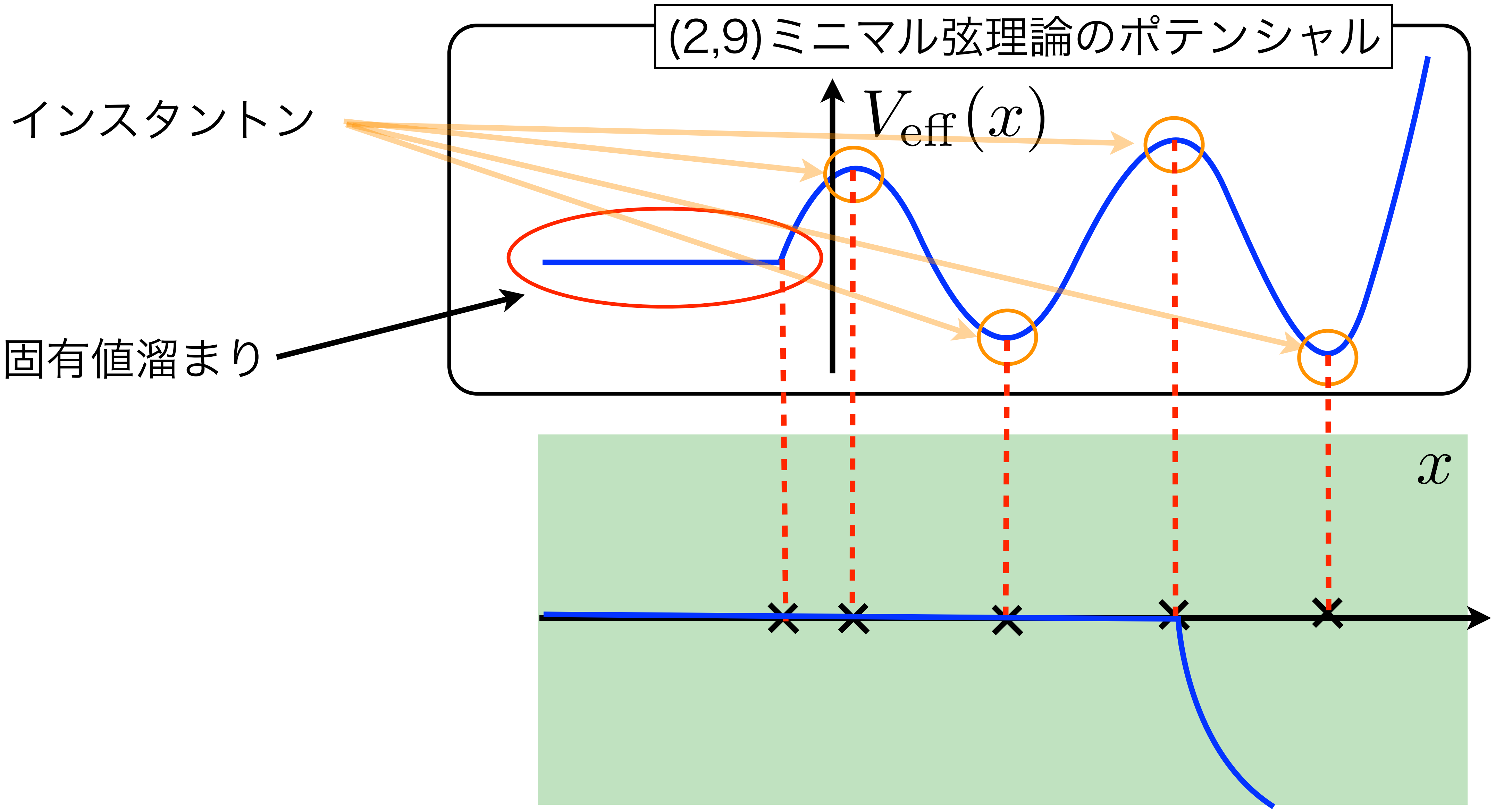
理論は、行列模型の積分路（contour）を決めて定める



非摂動論 in one-matrix

鞍点（インスタントン）の選別

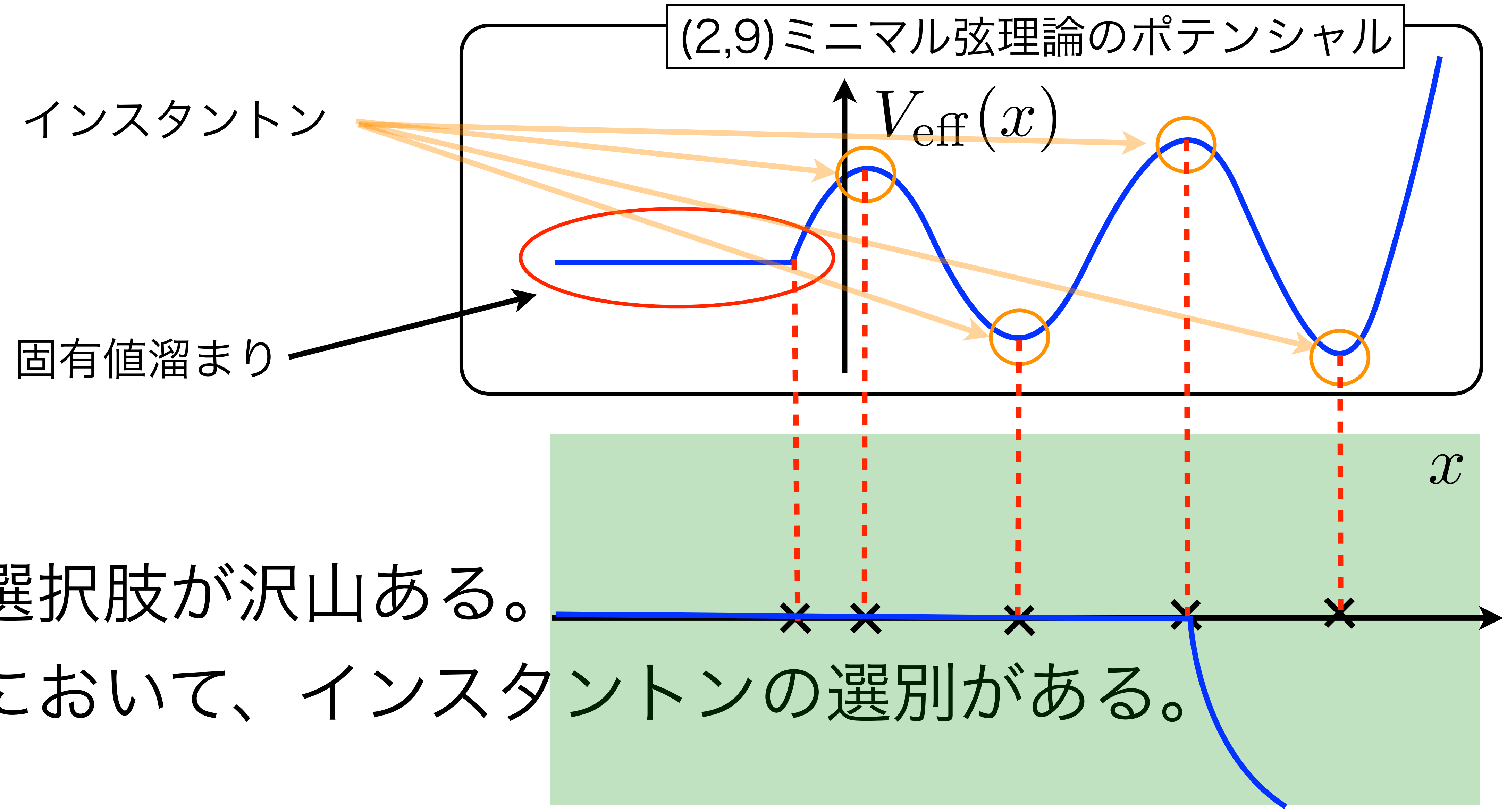
理論は、行列模型の積分路（contour）を決めて定める



非摂動論 in one-matrix

鞍点（インスタントン）の選別

理論は、行列模型の積分路（contour）を決める



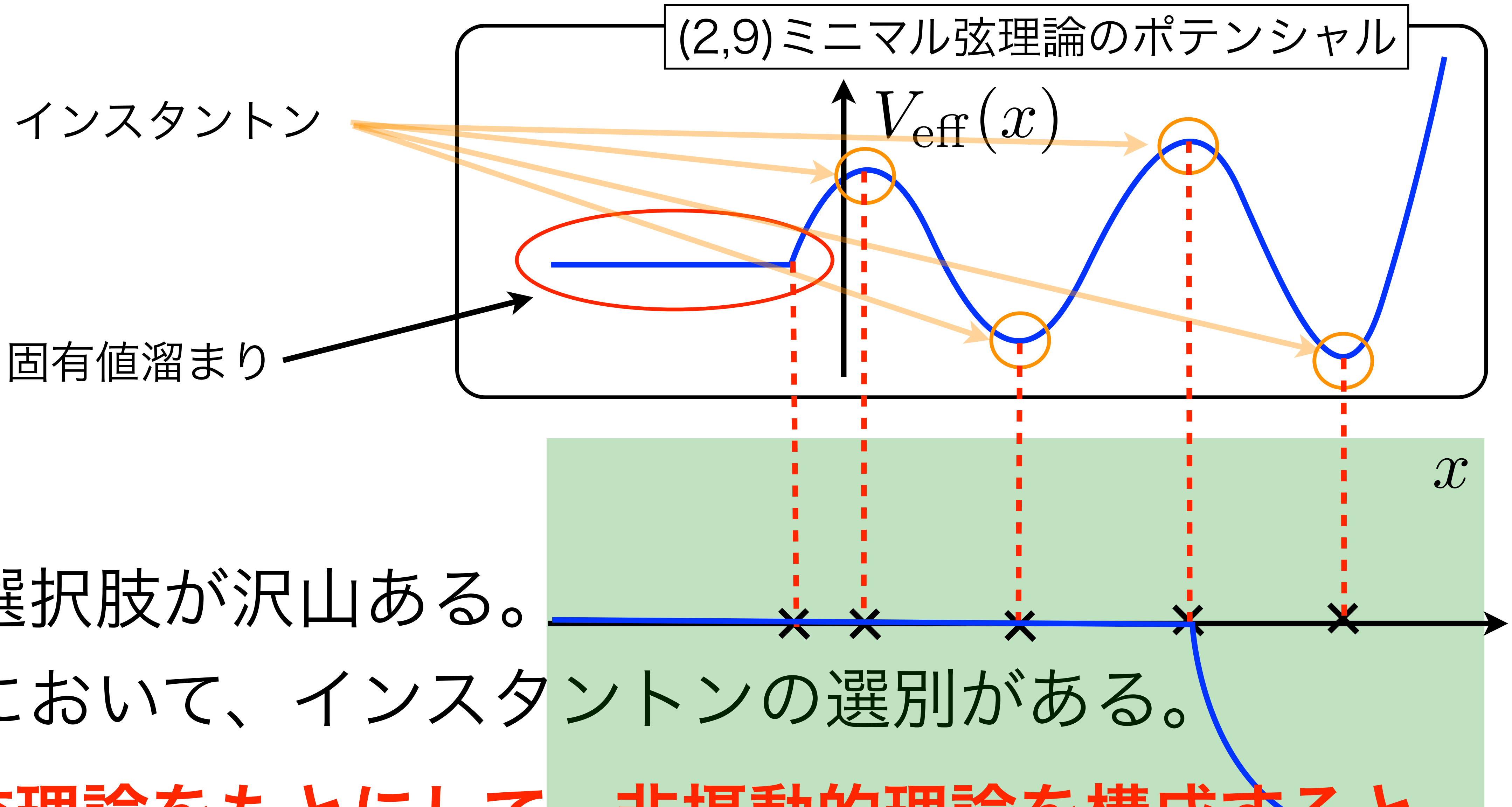
積分路の選択肢が沢山ある。

それぞれにおいて、インスタントンの選別がある。

非摂動論 in one-matrix

<u>鞍点（インスタントン）の選別</u>

理論は、行列模型の積分路（contour）を決めて定める



積分路の選択肢が沢山ある。

それぞれにおいて、インスタントンの選別がある。

摂動的弦理論をもとにして、非摂動的理論を構成すると

(Non-perturbative) contour ambiguity が生じる

次の2つの系は同じか？

gaussian

$$\mathcal{Z} = \int dX dY\, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X) + \frac{Y^2}{2} - XY]}$$

“Yを先に積分”

“Xを先に積分”

X-system

Y-system

$$\mathcal{Z} = \int dX e^{-N\mathrm{tr}V(X)}$$

one-matrix model

次の2つの系は同じか？

gaussian

$$\mathcal{Z} = \int dXdY\, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X)+\frac{Y^2}{2}-XY]}$$

“Yを先に積分” “Xを先に積分”

X-system Y-system

$$\mathcal{Z} = \int dX e^{-N\mathrm{tr}V(X)}$$

one-matrix model

今度はこっち

非摂動論 in Y-system

<u>ポテンシャルの構築（平均場近似[Kazakov-Kostov'04]）</u>

非摂動論 in Y-system

ポテンシャルの構築（平均場近似[Kazakov-Kostov'04]）

$$\mathcal{Z} = \int dX dY \, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X) + \frac{Y^2}{2} - XY]}$$

$$\simeq \int dx dy \, \langle \det(x - X) \det(y - Y) \rangle \, e^{-N[V_1(x) + V_2(y) - xy]}$$

非摂動論 in Y-system

ポテンシャルの構築（平均場近似[Kazakov-Kostov'04]）

$$\mathcal{Z} = \int dXdY\, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X)+\frac{Y^2}{2}-XY]}$$

$$\simeq \int dxdy \boxed{\langle \det(x-X)\det(y-Y)\rangle\, e^{-N[V_1(x)+V_2(y)-xy]}}$$

これをラージNで評価して、

$$\simeq e^{-N[\Phi_1(x)+\Phi_2(y)-xy]}$$

非摂動論 in Y-system

ポテンシャルの構築（平均場近似[Kazakov-Kostov'04]）

$$\mathcal{Z} = \int dX dY \, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X) + \frac{Y^2}{2} - XY]}$$

$$\simeq \int dx dy \boxed{\langle \det(x - X) \det(y - Y) \rangle \, e^{-N[V_1(x) + V_2(y) - xy]}}$$

これをラージNで評価して、

$$\simeq e^{-N[\Phi_1(x) + \Phi_2(y) - xy]}$$

xに関して積分する

非摂動論 in Y-system

ポテンシャルの構築（平均場近似[Kazakov-Kostov'04]）

$$\mathcal{Z} = \int dX dY \, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X) + \frac{Y^2}{2} - XY]}$$

$$\simeq \int dx dy \boxed{\langle \det(x - X) \det(y - Y) \rangle \, e^{-N[V_1(x) + V_2(y) - xy]}}$$

これをラージNで評価して、

$$\boxed{} \simeq e^{-N[\Phi_1(x) + \Phi_2(y) - xy]}$$

xに関して積分する $\int dx e^{-N[\Phi_1(x) - xy]}$ ：Airy 関数もどき

非摂動論 in Y-system

ポテンシャルの構築（平均場近似[Kazakov-Kostov'04]）

$$\mathcal{Z} = \int dX dY \, e^{-N \mathrm{tr}[V_1(X) + \frac{Y^2}{2} - XY]}$$

$$\simeq \int dx dy \, \boxed{\langle \det(x - X) \det(y - Y) \rangle \, e^{-N[V_1(x) + V_2(y) - xy]}}$$

これをラージNで評価して、

$$\boxed{} \simeq e^{-N[\Phi_1(x) + \Phi_2(y) - xy]}$$

xに関して積分する $\int dx e^{-N[\Phi_1(x) - xy]}$ ：Airy 関数もどき

- 摂動論の範囲内なら、鞍点方程式を解いて代入

（→各鞍点の独立寄与のみが計算できる）

非摂動論 in Y-system

<u>ポテンシャルの構築（平均場近似[Kazakov-Kostov'04]）</u>

$$\mathcal{Z} = \int dX dY\, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X)+\frac{Y^2}{2}-XY]}$$

$$\simeq \int dx dy \boxed{\langle \det(x-X)\det(y-Y)\rangle\, e^{-N[V_1(x)+V_2(y)-xy]}}$$

これをラージNで評価して、

$$\simeq e^{-N[\Phi_1(x)+\Phi_2(y)-xy]}$$

xに関して積分する $\int dx e^{-N[\Phi_1(x)-xy]}$ ：Airy 関数もどき

- 摂動論の範囲内なら、鞍点方程式を解いて代入
  （→各鞍点の独立寄与のみが計算できる）
- **非摂動論をならば、ストークス現象の計算が必要 [CIY5]**

ポテンシャルのストークス現象（結果）

[CIY5]

ポテンシャルのストークス現象（結果）

[CIY5]

一般に：

$$\boxed{e^{-N\widetilde{V}_{\mathrm{eff}}(y)} = \sum_{j,l} (*)_{j,l} \times e^{\varphi^{(j,l)}(y)}}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \varphi^{(j,l)}(y) = \int dy [R^{(j)}(y) - R^{(l)}(y)] & \\ R^{(j)}(y) = R(e^{-2\pi i (j-1)} y) & F(R^{(j)}(y), y) = 0 \end{array} \right)$$

ポテンシャルのストークス現象（結果）

[CIY5]

一般に：

$$e^{-N\widetilde{V}_{\rm eff}(y)} = \sum_{j,l} \boxed{(*)_{j,l}} \times e^{\varphi^{(j,l)}(y)}$$

ストークス係数
(yに応じて値が飛ぶ)

$$\left(\begin{array}{l} \varphi^{(j,l)}(y) = \int dy[R^{(j)}(y) - R^{(l)}(y)] \\ R^{(j)}(y) = R(e^{-2\pi i(j-1)}y) \qquad F(R^{(j)}(y), y) = 0 \end{array} \right)$$

ポテンシャルのストークス現象（結果）

[CIY5]

一般に：

$$e^{-N\widetilde{V}_{\rm eff}(y)} = \sum_{j,l} \boxed{(*)_{j,l}} \times e^{\varphi^{(j,l)}(y)}$$

ストークス係数
(yに応じて値が飛ぶ)

$$\left(\begin{array}{l} \varphi^{(j,l)}(y) = \int dy [R^{(j)}(y) - R^{(l)}(y)] \\ R^{(j)}(y) = R(e^{-2\pi i (j-1)} y) \qquad F(R^{(j)}(y), y) = 0 \end{array} \right)$$

<u>(5,2) ↔ (2,5) 模型</u>

ポテンシャルのストークス現象（結果）

[CIY5]

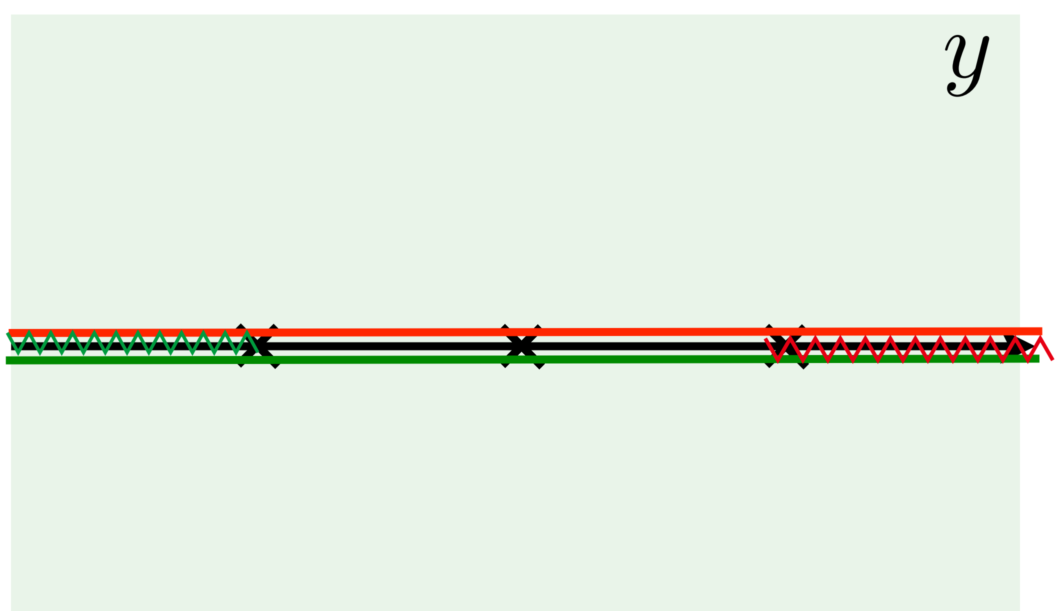
一般に：

$$e^{-N\widetilde{V}_{\text{eff}}(y)} = \sum_{j,l} \boxed{(*)_{j,l}} \times e^{\varphi^{(j,l)}(y)}$$

ストークス係数
(yに応じて値が飛ぶ)

$$\left(\begin{array}{l} \varphi^{(j,l)}(y) = \int dy [R^{(j)}(y) - R^{(l)}(y)] \\ R^{(j)}(y) = R(e^{-2\pi i (j-1)} y) \qquad F(R^{(j)}(y), y) = 0 \end{array} \right)$$

(5,2) ↔ (2,5) 模型



ポテンシャルのストークス現象（結果）

[CIY5]

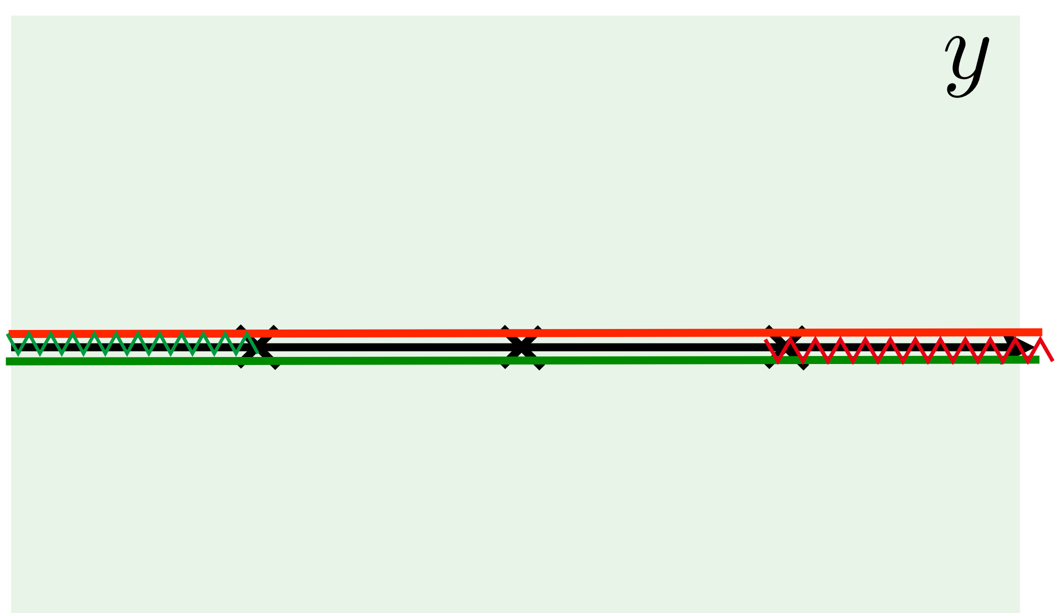
一般に：

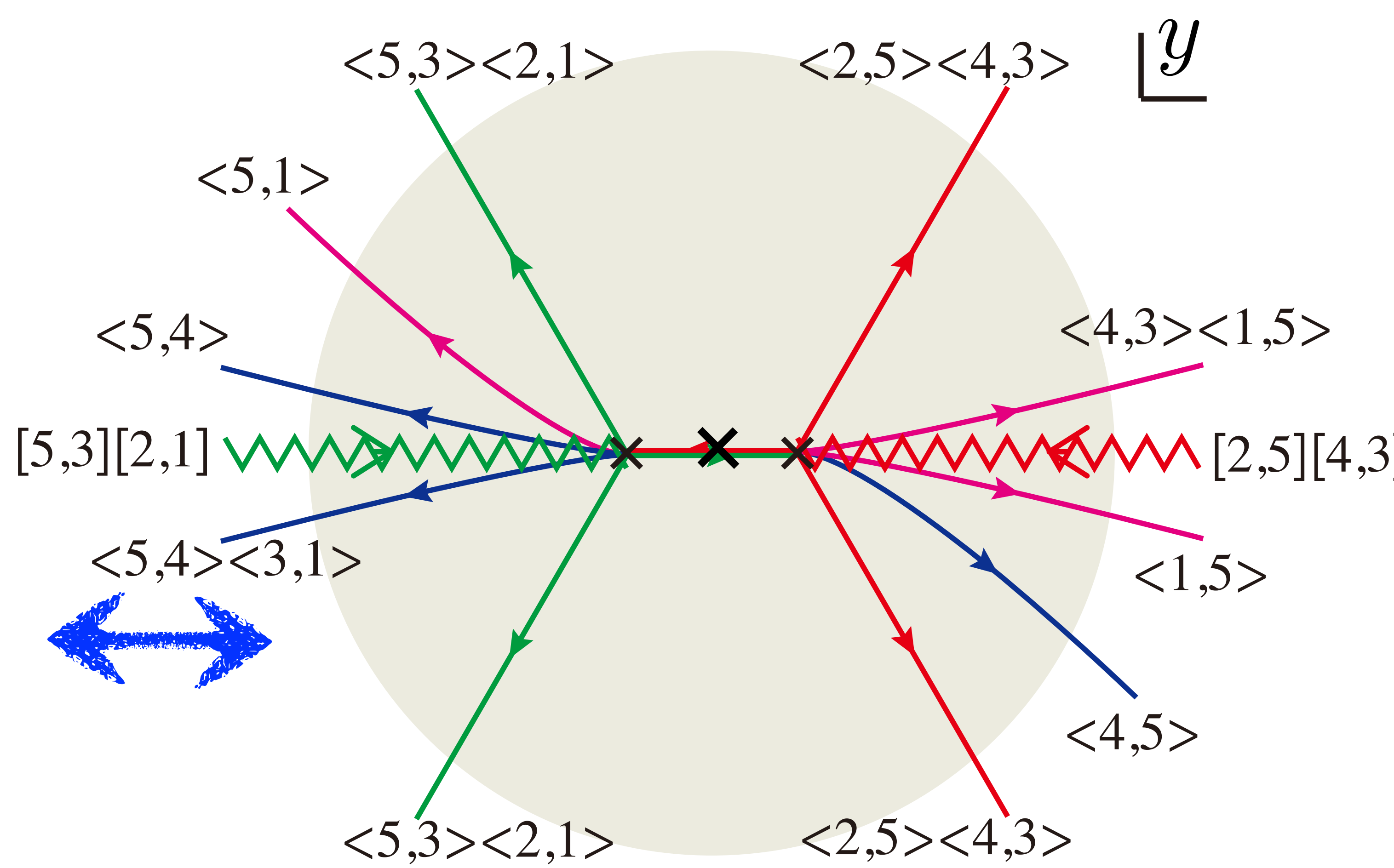
$$e^{-N\widetilde{V}_{\rm eff}(y)} = \sum_{j,l} \boxed{(*)_{j,l}} \times e^{\varphi^{(j,l)}(y)}$$

ストークス係数
(yに応じて値が飛ぶ)

$$\left(\begin{array}{l} \varphi^{(j,l)}(y) = \int dy [R^{(j)}(y) - R^{(l)}(y)] \\ R^{(j)}(y) = R(e^{-2\pi i (j-1)}y) \qquad F(R^{(j)}(y), y) = 0 \end{array} \right)$$

(5,2) ↔ (2,5) 模型





steepest descent

ポテンシャルのストークス現象（結果）

[CIY5]

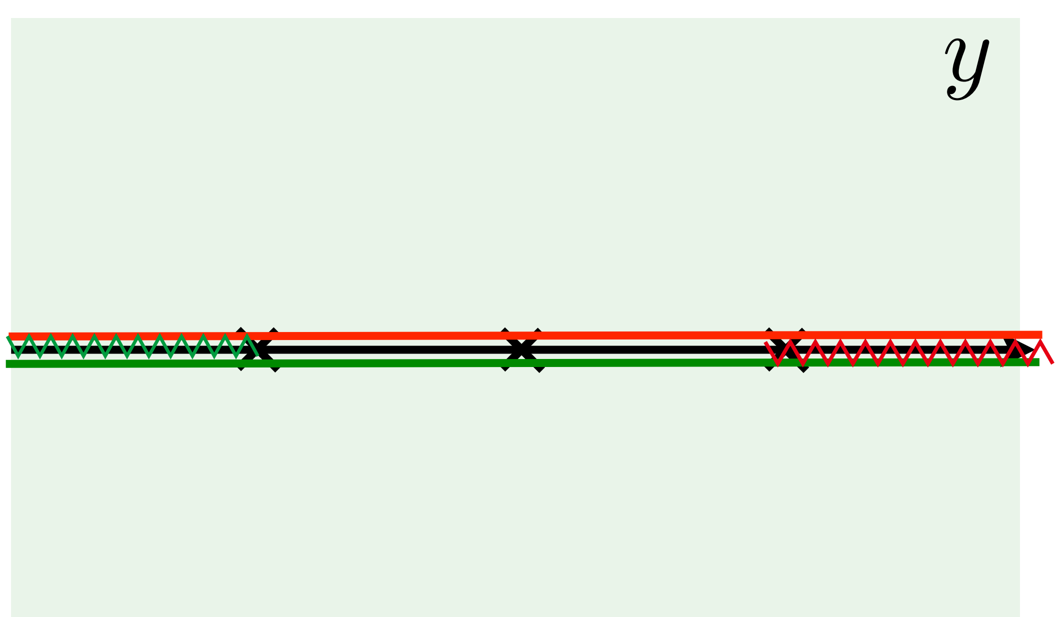
一般に：

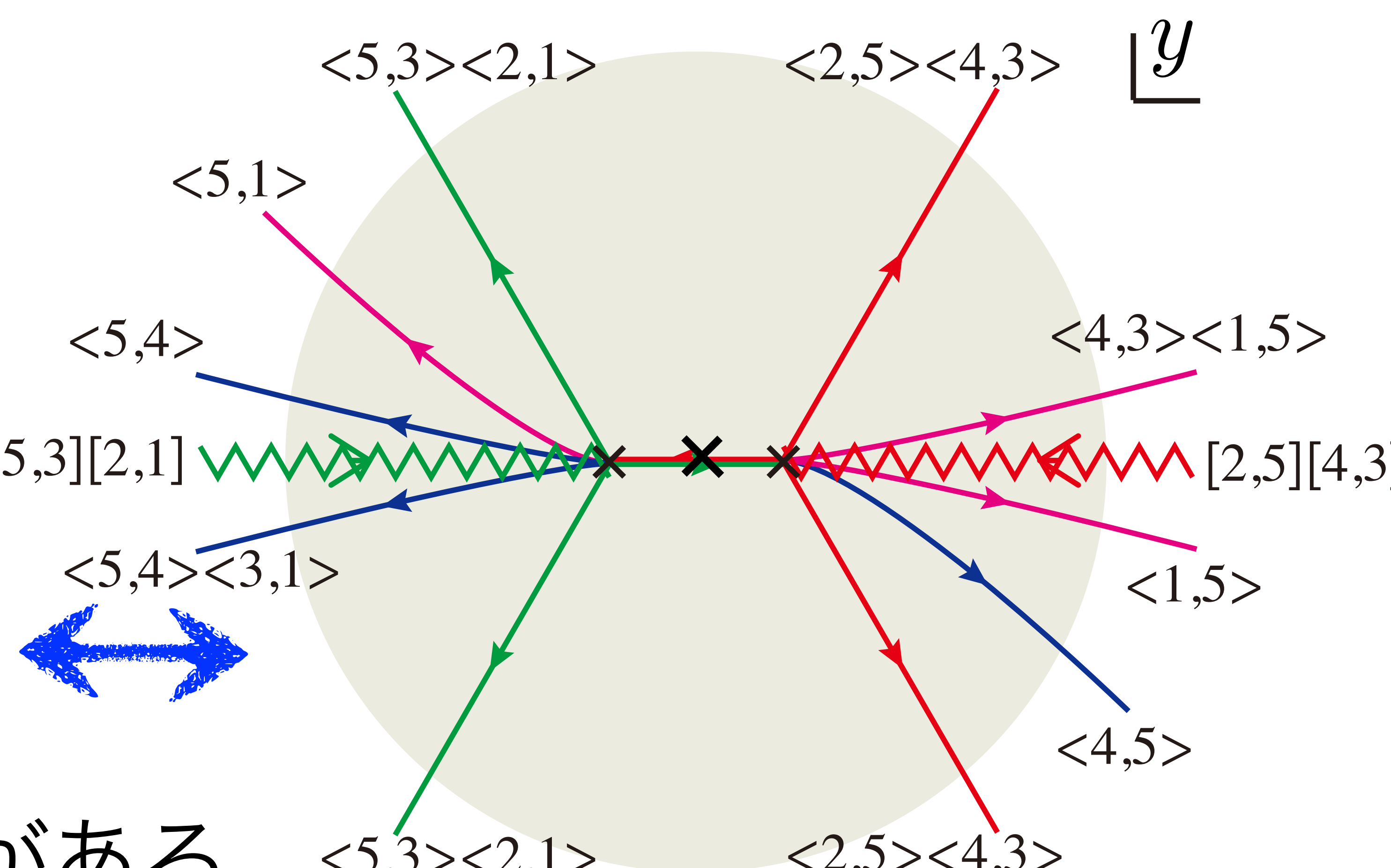
$$e^{-N\widetilde{V}_{\rm eff}(y)}=\sum_{j,l}\boxed{(*)_{j,l}}\times e^{\varphi^{(j,l)}(y)}$$

ストークス係数
(yに応じて値が飛ぶ)

$$\left(\begin{array}{ll}\varphi^{(j,l)}(y)=\int dy[R^{(j)}(y)-R^{(l)}(y)] & \\ R^{(j)}(y)=R(e^{-2\pi i(j-1)}y) & F(R^{(j)}(y),y)=0\end{array}\right)$$

<u>(5,2) ↔ (2,5) 模型</u>





更に積分路追加の自由度がある

steepest descent

次の2つの系は同じか？

gaussian

$$\mathcal{Z} = \int dX dY \, e^{-N\mathrm{tr}[V_1(X) + \frac{Y^2}{2} - XY]}$$

“Yを先に積分”

“Xを先に積分”

$\boxed{\text{X-system}}$ ⟷ $\boxed{\text{Y-system}}$

$$\mathcal{Z} = \int dX e^{-N\mathrm{tr}V(X)}$$

one-matrix model

ghost instanton modes

$\bar{\times}$

ghost instanton modes

$$\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_{\mathrm{pert}} + e^{\cancel{-}\frac{1}{g}S_I} + \cdots \qquad S_I = -\mathcal{F}_0^{(I)} < 0$$

[Okuda-Takayanagi]

ghost instanton modes

$$\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_{\rm pert} + e^{\cancel{-}\frac{1}{g}S_I} + \cdots \qquad S_I = -\mathcal{F}_0^{(I)} < 0$$

[Okuda-Takayanagi]

大きなインスタントンなので、両サイドで同様に見える

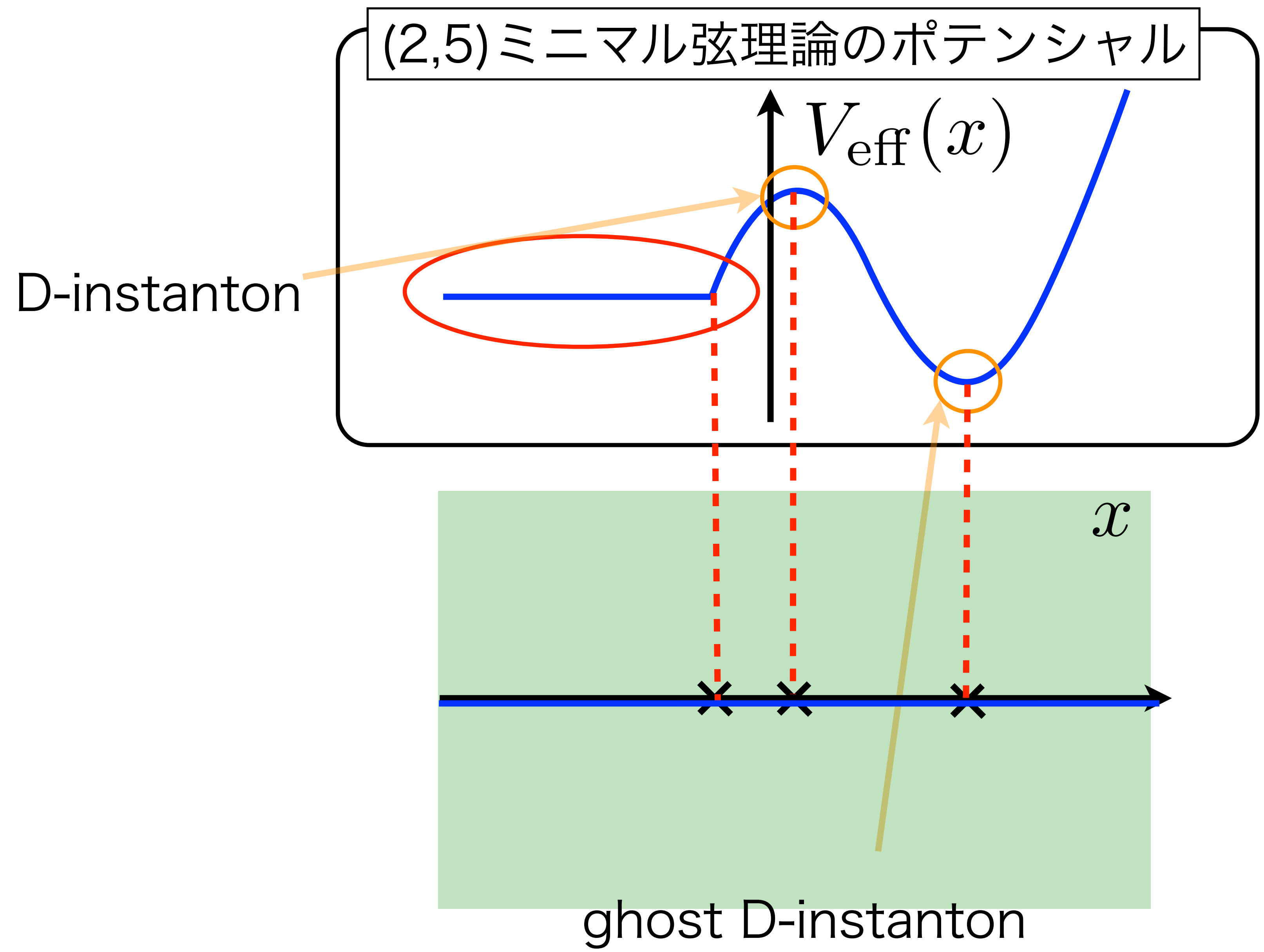
ghost instanton modes

$$\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_{\mathrm{pert}} + e^{\ast\frac{1}{g}S_I} + \cdots \qquad S_I = -\mathcal{F}_0^{(I)} < 0$$

[Okuda-Takayanagi]

大きなインスタントンなので、両サイドで同様に見える

<u>(5,2) ↔ (2,5) 模型</u>



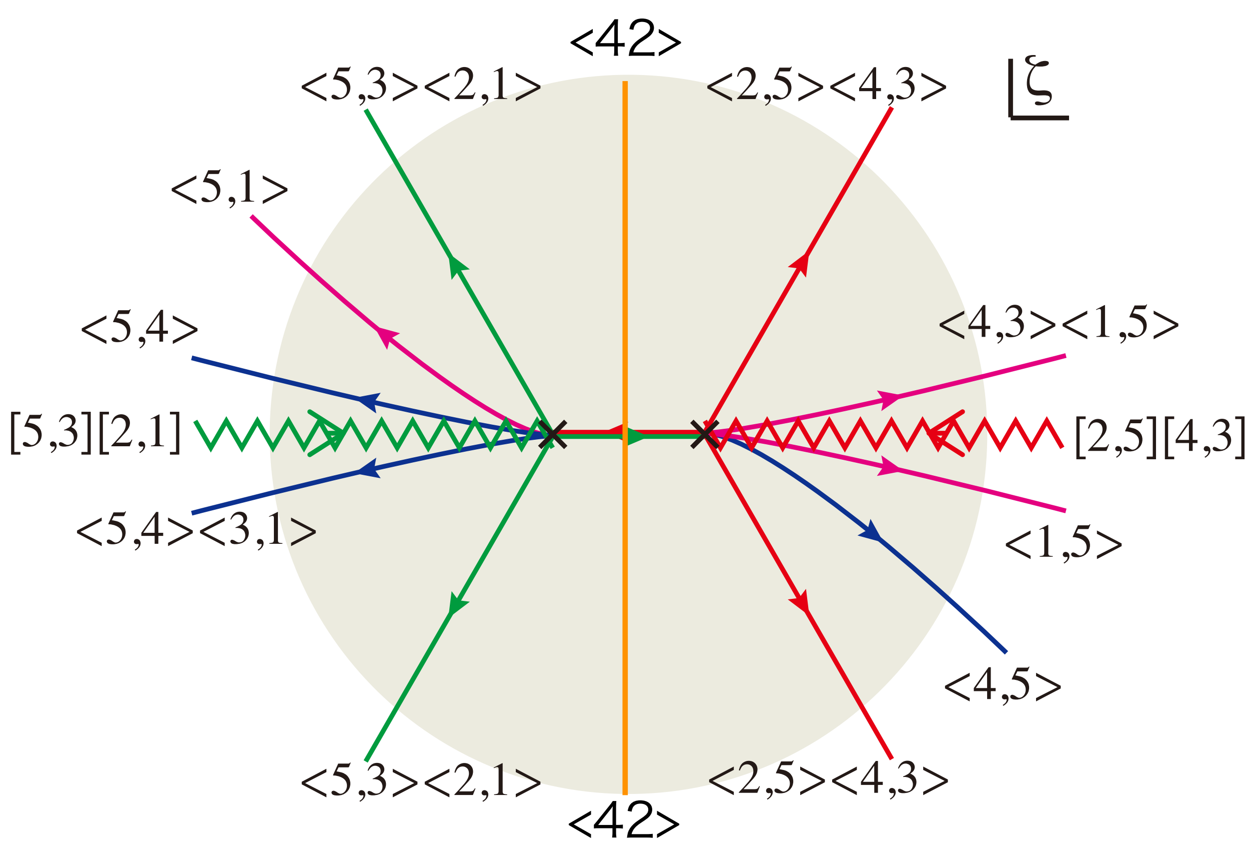
ghost instanton modes

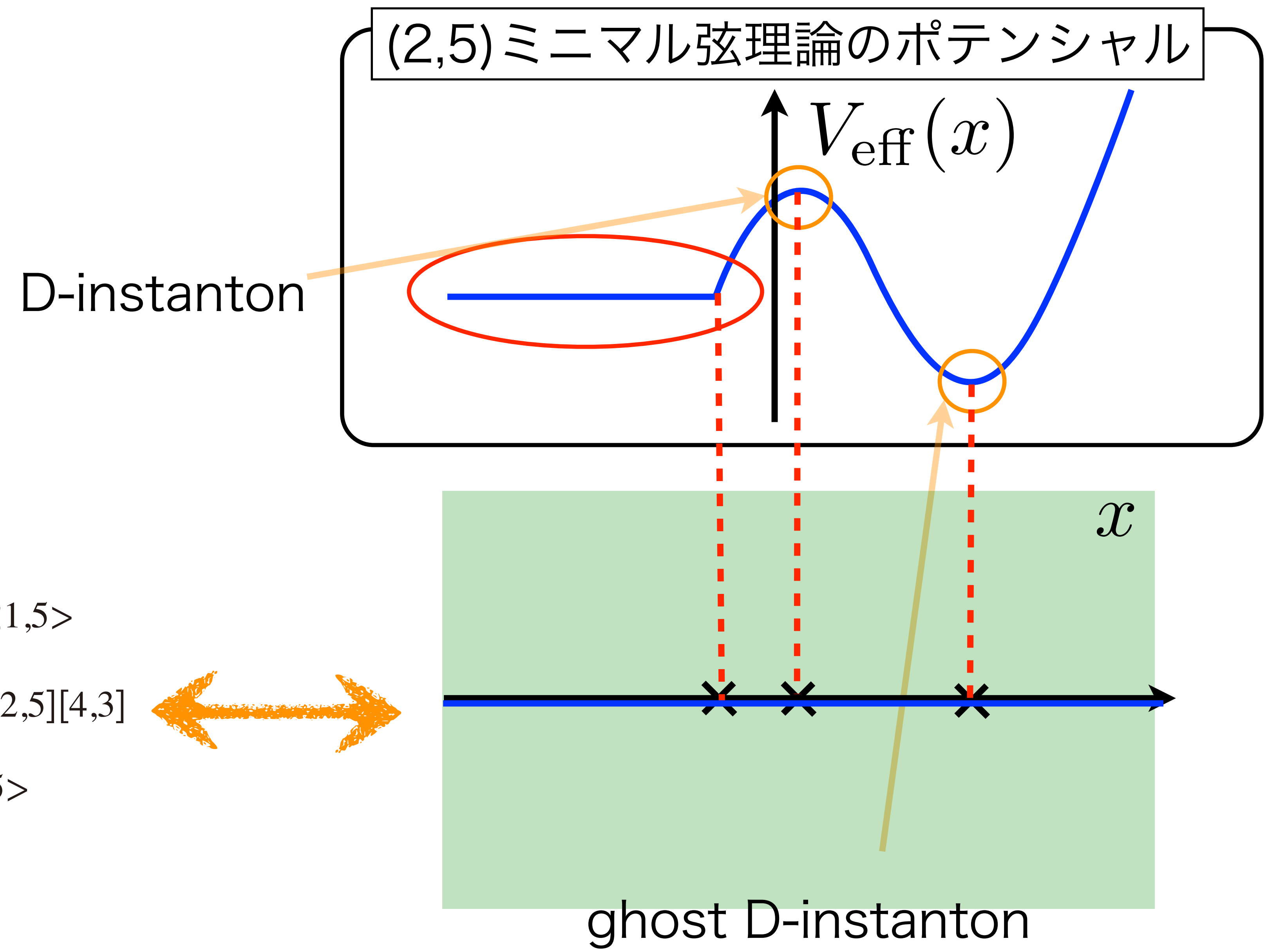
$$\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_{\mathrm{pert}} + e^{\overset{-}{\ast}\frac{1}{g}S_I} + \cdots \qquad S_I = -\mathcal{F}_0^{(I)} < 0$$

[Okuda-Takayanagi]

大きなインスタントンなので、両サイドで同様に見える

(5,2) ↔ (2,5) 模型





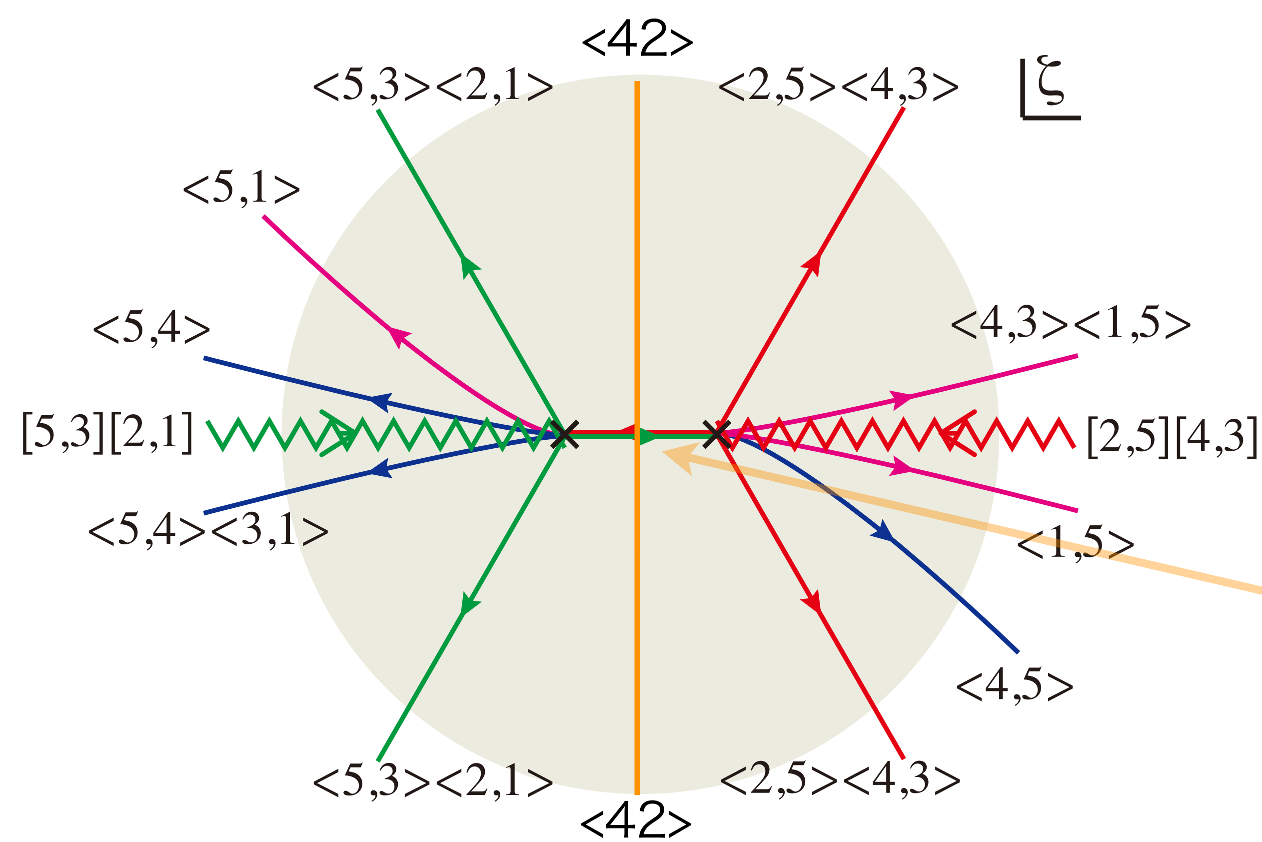
ghost instanton modes

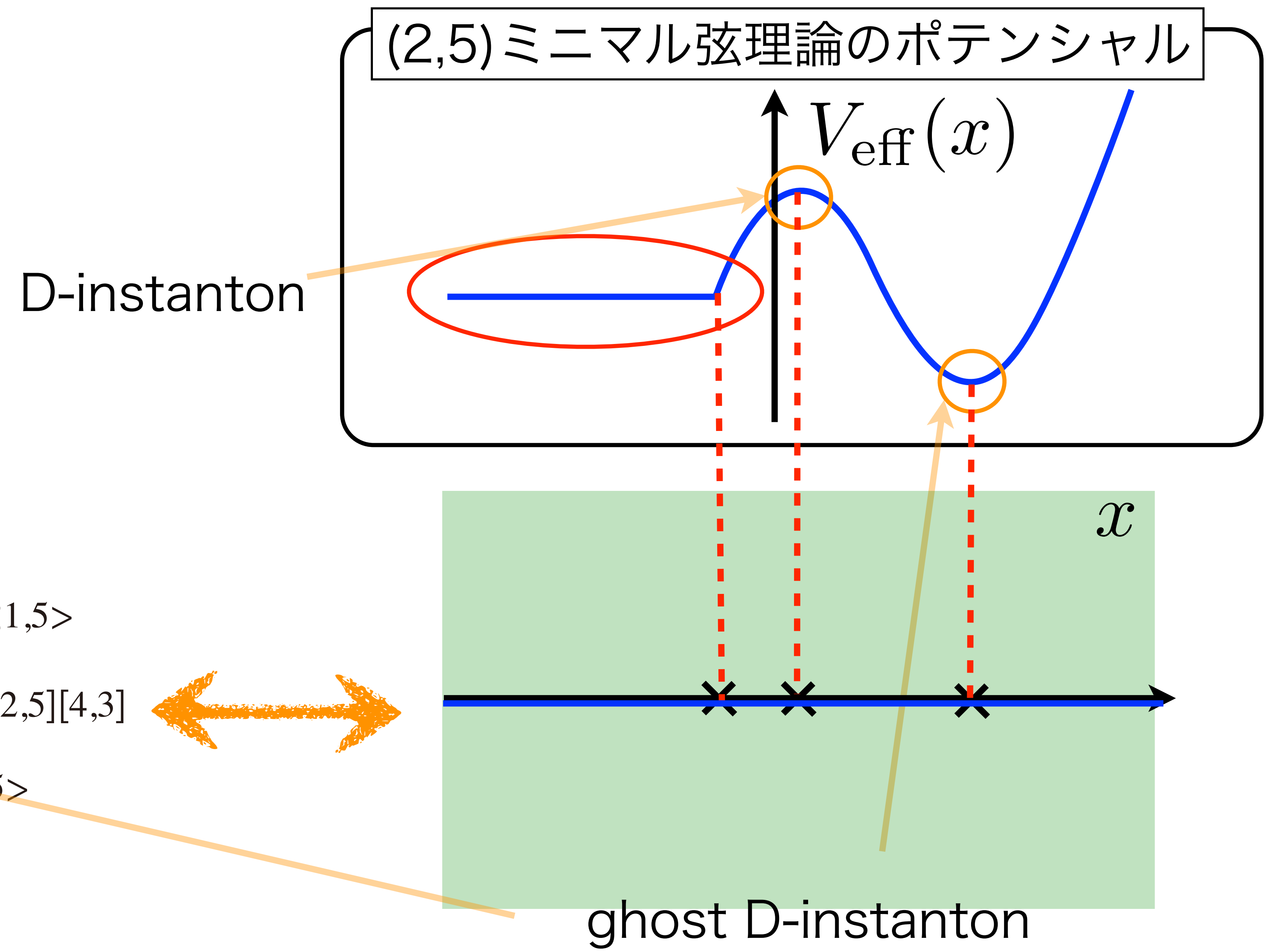
$$\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_{\mathrm{pert}} + e^{\overline{\ast}\frac{1}{g}S_I} + \cdots \qquad S_I = -\mathcal{F}_0^{(I)} < 0$$

[Okuda-Takayanagi]

大きなインスタントンなので、両サイドで同様に見える

(5,2) ↔ (2,5) 模型





ghost instanton modes

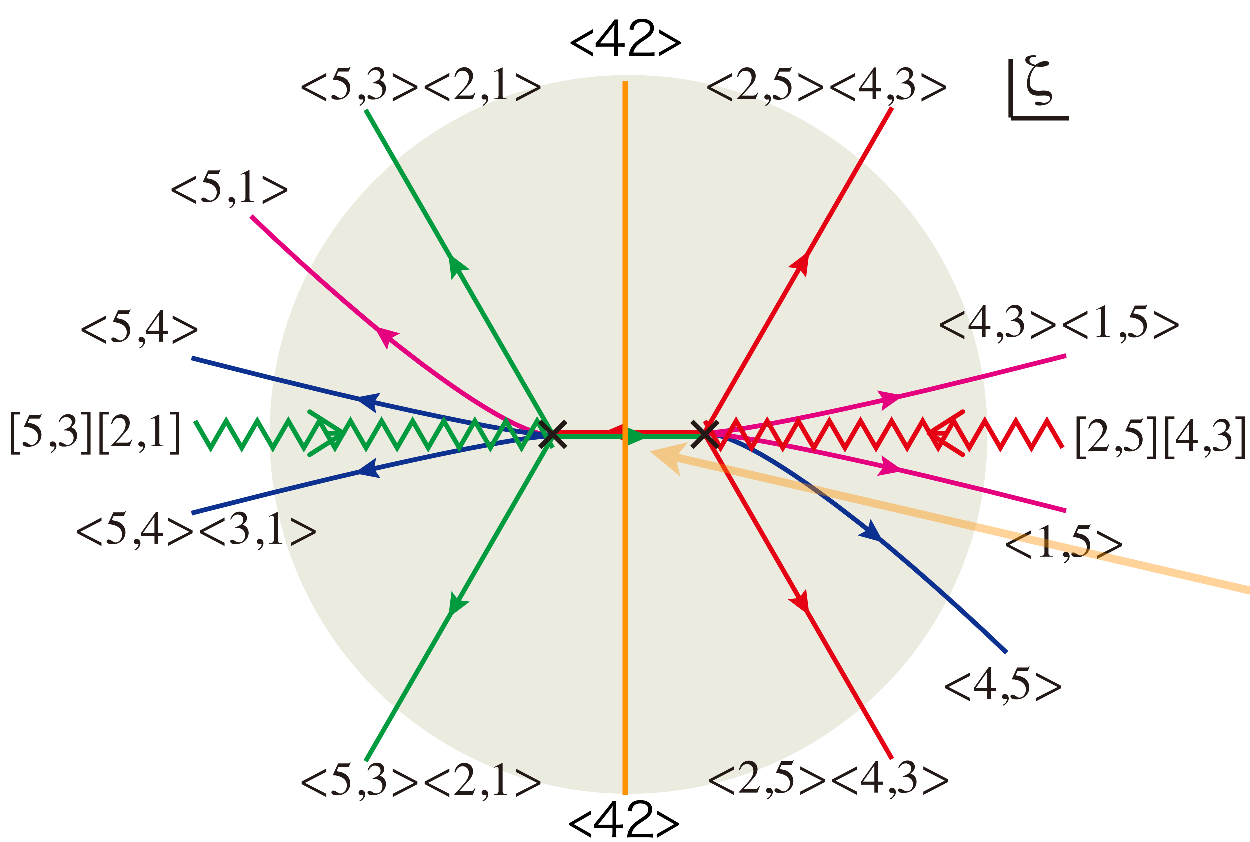
$$\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_{\mathrm{pert}} + e^{-\frac{1}{g}S_I} + \cdots \qquad S_I = -\mathcal{F}_0^{(I)} < 0$$

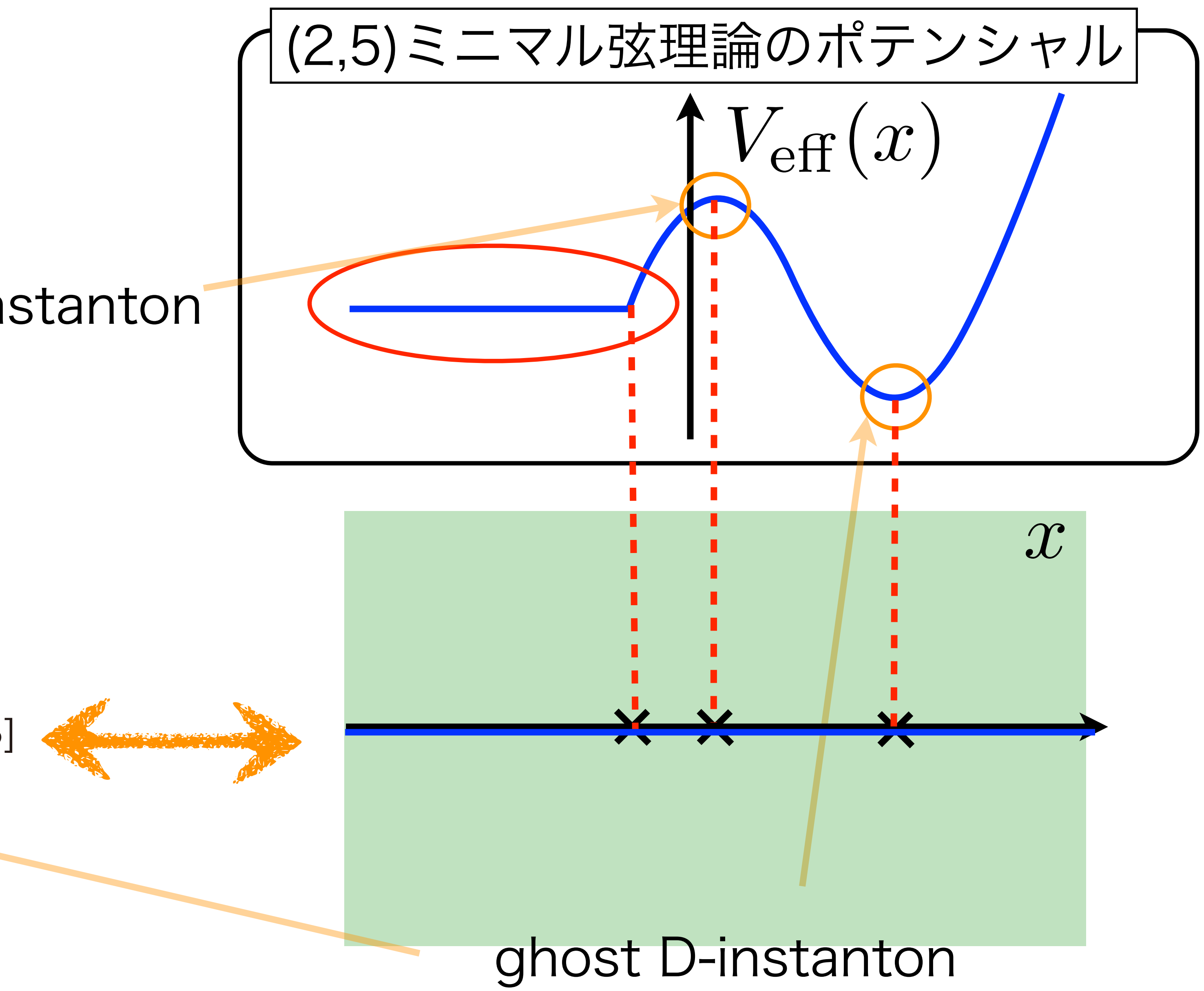
[Okuda-Takayanagi]

大きなインスタントンなので、両サイドで同様に見える

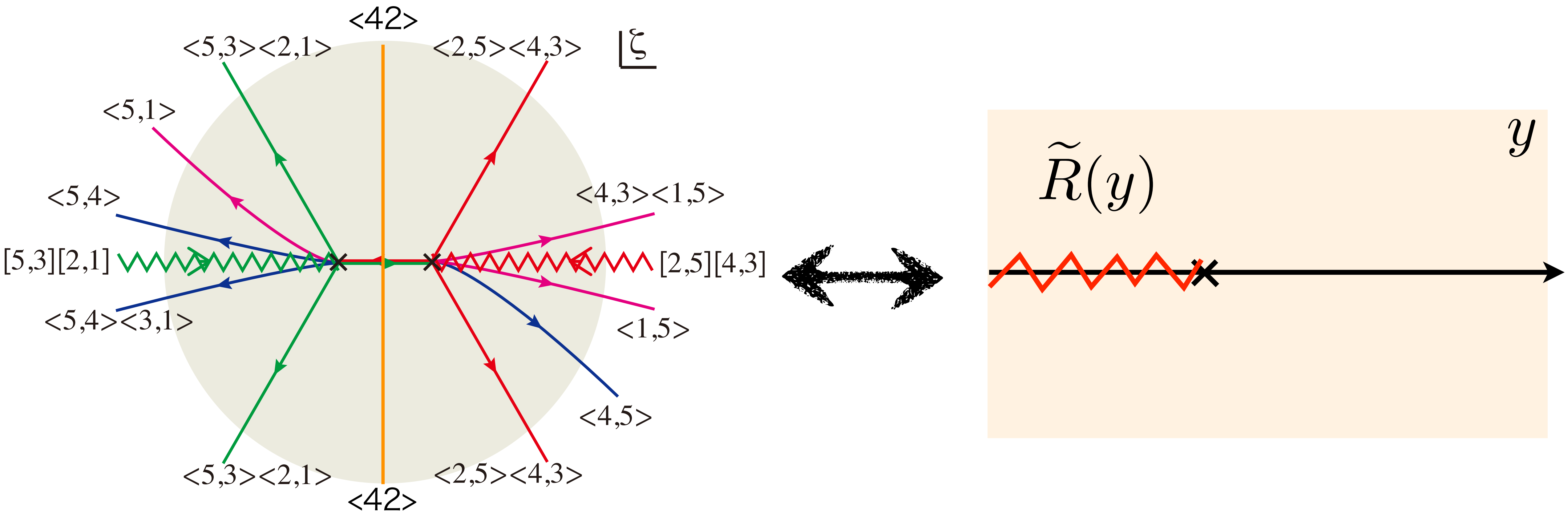
(5,2) ↔ (2,5) 模型

これは行列模型では
実現できない

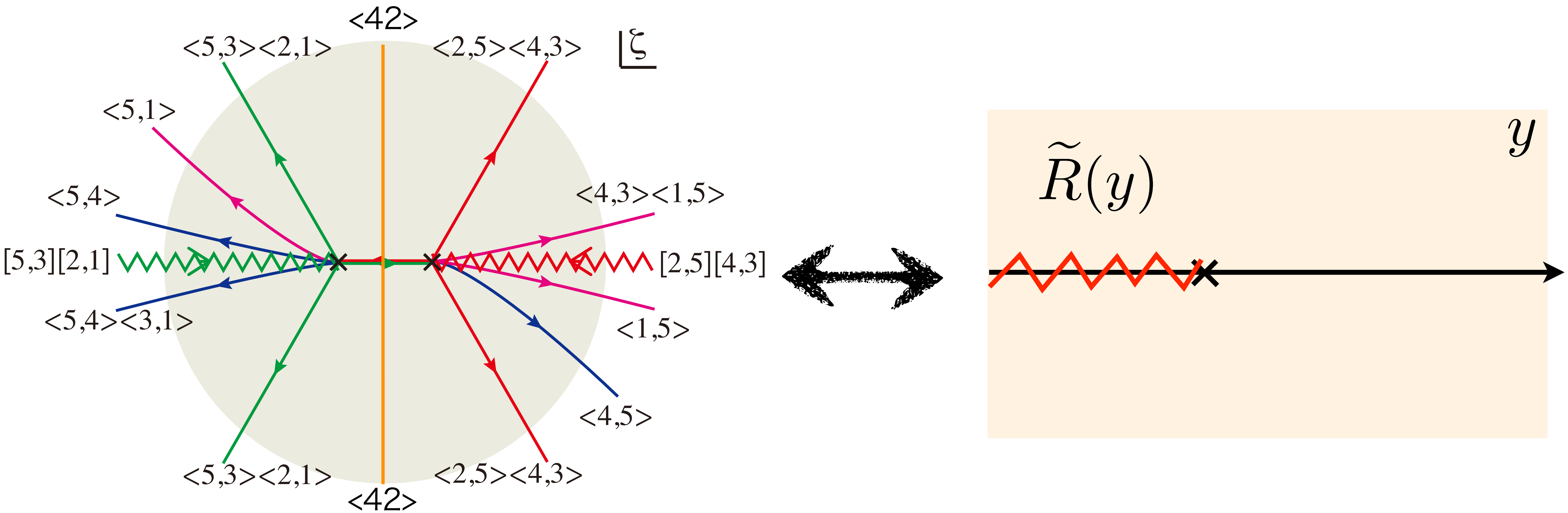




One-cut Boundary condition

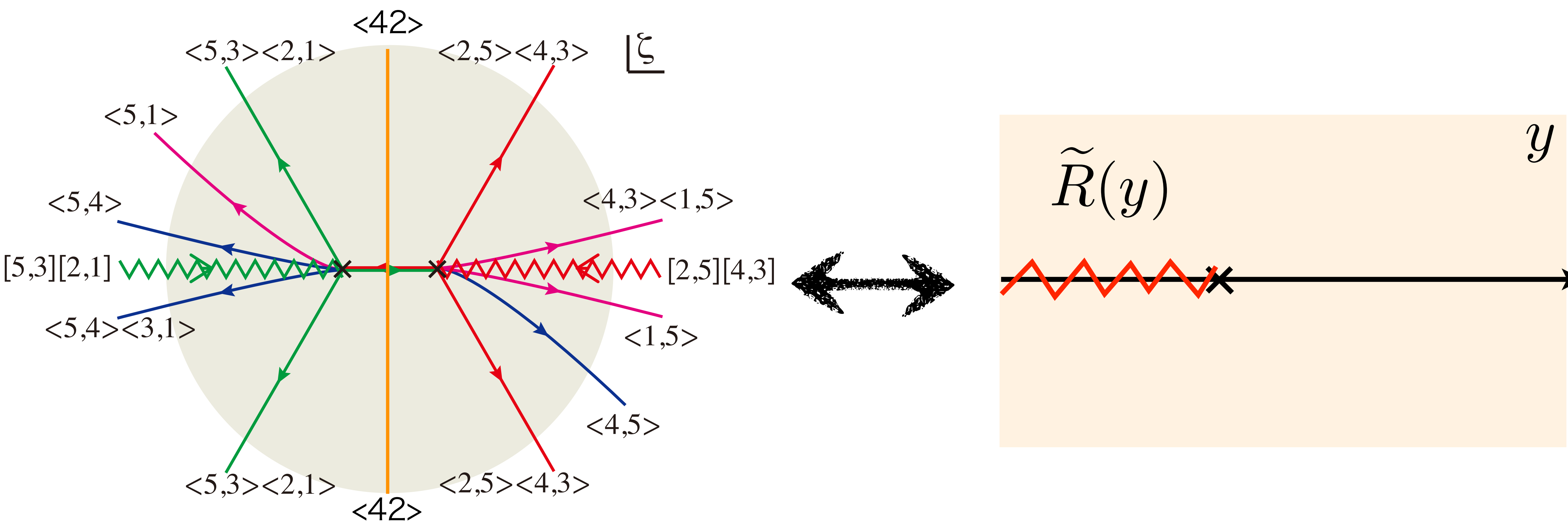


One-cut Boundary condition



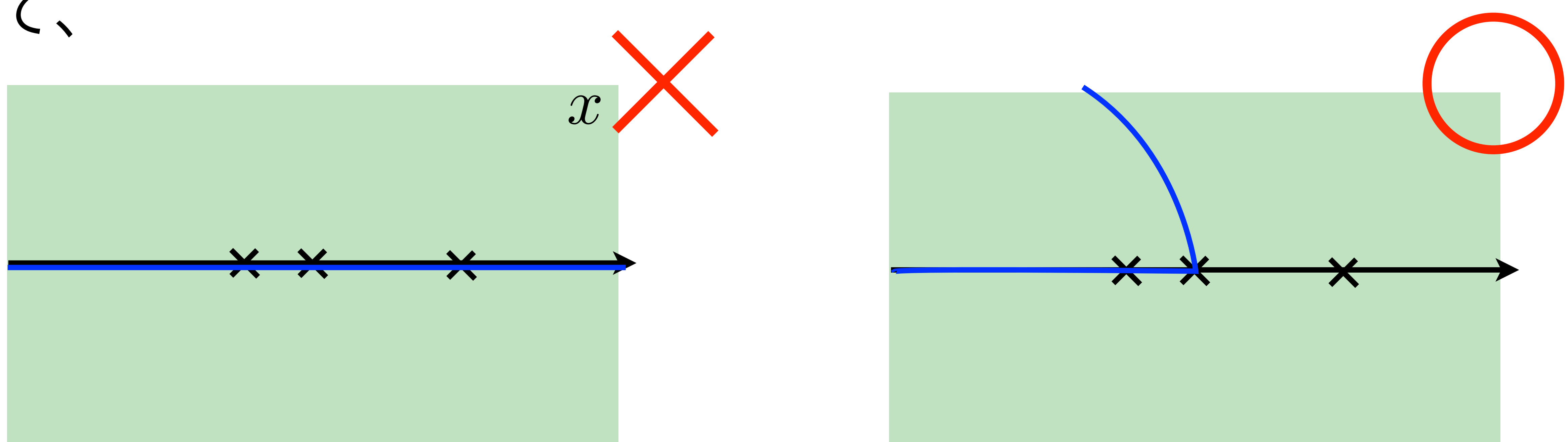
これが両立しない

One-cut Boundary condition



これが両立しない

従って、



まとめ

- 摂動論（ラージN）で双対性が見える
  v.s. 非摂動論で双対性が実現される
- 非摂動的定式化が非摂動的不定性（Non-perturbative [contour] ambiguity）を持ちうること
- 双対性を非摂動論的に捉えることができれば、非摂動論的不定性が制限される

New Technique

Stokes Phenomena + Topological Recursion

= All-order Riemann-Hilbert analysis [CIY5]

ご清聴ありがとうございました