String theories on warped AdS backgrounds and integrable deformations of spin chains

京大理　亀山尚史　　吉田健太郎氏 、川口維男氏 (京大理)との共同研究に基づく

参考文献 : JHEP **1305** (2013) 146 + α

1. イントロダクション

AdS/CFT対応の可積分変形 → 新たなゲージ・重力対応の実現とその可積分構造の理解

背後に可積分構造が存在

アプローチ : 弦理論の背景時空の変形　e.g. AdS時空 → warped AdS時空

3種類のwarped AdS₃時空 (space-like, time-like, null変形)

結論

弦理論　null warped AdS₃×S¹ subspace 上の弦のシグマ模型の作用の書き換え

fast-moving極限　作用レベルの一致

null変形(XXN) Landau-Lifshitz シグマ模型 → (Lax対をゲージ変換) SL(2) Yangian 対称性

連続極限

スピン鎖　Jordanian変形sl(2)スピン鎖Hamiltonianのコヒーレント状態に対する期待値

2. Null warped AdS₃上の弦理論

群多様体sl(2)としてのnull warped AdS₃

$$ds^2 = \frac{R^2}{2}\left[\mathrm{Tr}(JJ) - \underline{2C\mathrm{Tr}(T^-J)\mathrm{Tr}(T^-J)}\right]$$

null deformation

left-invariant one form : $J \equiv g^{-1}dg$　群要素: $g \in sl(2)$

sl(2)生成子の基本表現 : $T^0 = \frac{i}{2}\sigma_2,\ T^1 = \frac{1}{2}\sigma_1,\ T^2 = \frac{1}{2}\sigma_3,\ T^{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(T^0 \pm T^1)$

null warped AdS₃×S¹

群要素: $g = \mathrm{e}^{-(\phi+t)T^0}\mathrm{e}^{2\rho T^1}\mathrm{e}^{(\phi-t)T^0}$と採る

$$\Rightarrow\ ds^2 = R^2\Big[\underbrace{d\rho^2 - \cosh^2\rho dt^2 + \sinh^2\rho d\phi^2}_{\mathrm{AdS_3}} + \underbrace{d\varphi^2}_{\mathrm{S^1}} \underbrace{- \frac{C}{2}\big[\cosh\rho(\cosh\rho + \sin(\phi - t)\sinh\rho)dt + \sinh\rho(\sinh\rho + \sin(\phi-t)\cosh\rho)d\phi - \cos(\phi-t)d\rho\big]^2}_{\text{null deformation項}}\Big]$$

t, ρ, ϕ : AdS₃ global座標, φ : S¹の角変数　※) C=0で通常のAdS₃×S¹に

弦のシグマ模型

弦の作用 : $$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma\, \eta^{\mu\nu}\left[\partial_\mu X^M \partial_\nu X^N G_{MN}\right]$$

$$\text{with } \eta_{\mu\nu} = (-1, +1), \quad X^M(\tau, \sigma + 2\pi) = X^M(\tau, \sigma)$$

Virasoro条件 : $G_{MN}\partial_\tau X^M \partial_\sigma X^N = 0, \quad G_{MN}(\partial_\tau X^M \partial_\tau X^N + \partial_\sigma X^M \partial_\sigma X^N) = 0$

※) 系を Landau-Lifshitz シグマ模型に帰着させるのに重要

弦のfast-moving極限

座標変換 : $\phi = \tilde{\phi} + t \quad \varphi = \tilde{\varphi} + t \quad \rho = \frac{1}{2}\tilde{\rho}$

ゲージ : $t = \kappa\tau$

fast-moving極限　$\kappa \to \infty$ with $\underline{\kappa^2 C}$, $\kappa\partial_\tau\tilde{\phi}$, $\kappa\partial_\tau\tilde{\varphi}$, $\kappa\partial_\tau\tilde{\rho}$: fixed.

相対論的な作用 → 非相対論的な作用に

スピン鎖のHamiltonianにLorentz対称性がないことに対応

非常に大きいスピン: $S_1 \in \mathrm{AdS_3}$, $J_3 \in \mathrm{S^1} \gg 1$を持つ弦を表す

スピン鎖のコヒーレント状態に対応

※) Cに対する条件 → 変形項は作用にnon-derivative項として寄与

null warped AdS₃×S¹上の作用

$$\Rightarrow\ S = \frac{R^2}{4\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma\left[-\kappa^2\frac{C}{2}(\cosh\tilde{\rho} + \sin\tilde{\phi}\sinh\tilde{\rho})^2 + \kappa[(\cosh\tilde{\rho} - 1)\partial_\tau\tilde{\phi} + 2\partial_\tau\tilde{\varphi}] - \frac{1}{4}[(\partial_\sigma\tilde{\rho})^2 + 2(\cosh\tilde{\rho} - 1)(\partial_\sigma\tilde{\phi})^2] - (\partial_\sigma\tilde{\varphi})^2\right]$$

Virasoro条件

$$\Rightarrow\ 0 = \kappa[(\cosh\tilde{\rho} - 1)\partial_\sigma\tilde{\phi} + 2\partial_\sigma\tilde{\varphi}]$$

これを用いて$\partial_\sigma\tilde{\varphi}$を解く

→ XXN Landau-Lifshitz シグマ模型

$$S = \frac{R^2}{4\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma\Big[\underbrace{-\frac{\kappa^2 C}{2}(\cosh\tilde{\rho} + \sin\tilde{\phi}\sinh\tilde{\rho})^2}_{\text{変形項}} + \underbrace{\kappa[(\cosh\tilde{\rho} - 1)\partial_\tau\tilde{\phi} + 2\partial_\tau\tilde{\varphi}] - \frac{1}{4}[(\partial_\sigma\tilde{\rho})^2 + \sinh^2\tilde{\rho}(\partial_\sigma\tilde{\phi})^2]}_{\text{XXX Landau-Lifshitz (AdS₃×S¹)}}\Big]$$

※) 非相対論的な作用 : 世界面の時間τについて1階微分のみ

3. スピン鎖のJordanian変形

Jordanian変形 sl(2) スピン鎖のHamiltonian

$$H = \underbrace{\frac{\lambda}{8\pi^2}\sum_{k=1}^{L} H_{k\,k+1}}_{\text{sl(2)スピン鎖の最近接相互作用}} + \underbrace{\frac{\xi}{2}\sum_{k=1}^{L}(S_{0,k} + S_{1,k}) \otimes (S_{0,k+1} + S_{1,k+1})}_{\text{Jordanian変形項}}$$

L : スピン鎖のサイト数

$\mathcal{N} = 4$ SYM の$sl(2)$ セクター 1-loopのplanar 異常次元行列を記述

$S_{a,k}$: k番目のサイト上に定義された無限次元表現のsl(2)生成子

※) スピン鎖のHamiltonianにLorentz対称性はない

スピン鎖の各サイト上に コヒーレント状態$|\vec{n}_k\rangle$ を定義

双曲面上の単位ベクトル n^a により記述 $n^0 = -\cosh\rho,\ n^1 = \sinh\rho\sin\phi,\ n^2 = \sinh\rho\cos\phi$

スピン鎖全体に対するコヒーレント状態に拡張 : $|\vec{n}\rangle \equiv \prod_{k=1}^{L}|\vec{n}_k\rangle$

スピン鎖の連続極限 : $L \to \infty$ with $\lambda/L^2 = \mathrm{fixed}$

各サイト上のベクトル $\vec{n}_k$ → $\vec{n}(\sigma) = \vec{n}\left(\frac{k}{L}\right)$

Hamiltonianの期待値 :

$$\langle\vec{n}|H|\vec{n}\rangle \Rightarrow L\int d\sigma\Big[\underbrace{\frac{\lambda}{32\pi^2L^2}[(\partial_\sigma\rho)^2 + \sinh^2\rho(\partial_\sigma\phi)^2]}_{\text{最近接相互作用の期待値の連続極限}} + \underbrace{\frac{\xi}{8}(\cosh\rho + \sin\phi\sinh\rho)^2}_{\text{変形項の期待値の連続極限}}\Big]$$

有効作用 : $$S = \frac{L}{2}\int dt d\sigma\Big[\underbrace{-\frac{C}{2}(\cosh\rho + \sin\phi\sinh\rho)^2}_{\text{非等方変形項}} + \underbrace{\underbrace{(\cosh\rho - 1)\partial_t\phi}_{\text{Wess-Zumino項 (Legendre変換に対応)}} - \frac{\lambda}{16\pi^2L^2}[(\partial_\sigma\rho)^2 + \sinh^2\rho(\partial_\sigma\phi)^2]}_{\text{XXX Landau-Lifshitz}}\Big]$$

※) $\xi = 2C, \quad L \equiv \frac{R^2\kappa}{2\pi\alpha'}, \quad \lambda \equiv \frac{R^4}{\alpha'^2}$ の同一視の下、弦理論側と一致

4. XXN Landau-Lifshitz シグマ模型の可積分構造

Lax対

$$U(t,x;z) = \frac{\alpha}{z}\left\{-\left[n^+ - \frac{Cz^2}{2}n^-\right]T^- + n^2T^2 - n^-T^+\right\}$$

$$V(t,x;z) = \frac{\beta}{z}\Big\{-\left[(n^2\partial_x n^+ - n^+\partial_x n^2) - \frac{Cz^2}{2}(n^-\partial_x n^2 - n^2\partial_x n^-)\right]T^- + (n^-\partial_x n^+ - n^+\partial_x n^-)T^2 - (n^-\partial_x n^2 - n^2\partial_x n^-)T^+\Big\}$$
$$+\frac{\alpha\beta}{z^2}\left\{-\left[n^+ + \frac{Cz^2}{2}n^-\right]T^- + n^2T^2 - n^-T^+\right\}$$

非等方的なLax対

E.O.M : $\left[\partial_t - V(t,x;z), \partial_x - U(t,x;z)\right] = 0$

$n^{\pm} = \frac{n^0 \pm n^1}{\sqrt{2}}$,　スペクトラル パラメータ : z ,　$\alpha \equiv 4\pi L\sqrt{\lambda}$, $\beta \equiv -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi L}$

モノドロミー行列 : $M(z) = \mathrm{P}\exp\left[\int_{-\infty}^{\infty}dx\, U(t,x;z)\right]$ ← zで展開すると無限個の保存chargeが得られる

C=0の場合 $z = \infty$で展開 → Yangian対称性

※) C≠0の場合 Lax対は $z = \infty$ で発散

non-localなゲージ変換

sl(2)代数のisomorphism :

$$T^- \to T^-, \quad T^2 \to T^2 \mp \sqrt{C}zT^-, \quad T^+ \to T^+ \mp \sqrt{C}zT^2 + \frac{Cz^2}{2}T^-$$

変換されたLax対は $z = \infty$ で発散しない

non-localな関数を導入 : $\mathcal{F}(t,x) = \mathrm{P}\exp\left[\int_{-\infty}^{x}dy\, U(t,y;z=\infty)\right]K, \quad K = \exp\left[\frac{2\sqrt{C}\alpha}{L}Q^-T^2\right]$

non-localなゲージ変換 :

$$\mathcal{U}(z) = (\mathcal{F})^{-1}U(z)\mathcal{F} - (\mathcal{F})^{-1}\partial_x\mathcal{F}$$
$$\mathcal{V}(z) = (\mathcal{F})^{-1}V(z)\mathcal{F} - (\mathcal{F})^{-1}\partial_t\mathcal{F}$$

等方的なLax対

$$\mathcal{U}(z) = \frac{\alpha}{z}\left[-\mathcal{N}^-T^+ + \mathcal{N}^2T^2 - \mathcal{N}^+T^-\right]$$

$$\mathcal{V}(z) = \frac{\beta}{z}\left\{-(\mathcal{N}^-\partial_x\mathcal{N}^2 - \mathcal{N}^2\partial_x\mathcal{N}^-)T^+ + (\mathcal{N}^-\partial_x\mathcal{N}^+ - \mathcal{N}^+\partial_x\mathcal{N}^-)T^2 - (\mathcal{N}^2\partial_x\mathcal{N}^+ - \mathcal{N}^+\partial_x\mathcal{N}^2)T^-\right\}$$
$$+\frac{\alpha\beta}{z^2}\left\{-\mathcal{N}^-T^+ + \mathcal{N}^2T^2 - \mathcal{N}^+T^-\right\}$$

古典r-行列は有理型として記述できる

※) モノドロミー行列 : $M(z) = \mathrm{P}\exp\left[\int_{-\infty}^{\infty}dx\, \mathcal{U}(z)\right]$ を $z = \infty$ で展開

→ 無限個のnon-local chargeが生成

XXN Landau-Lifshitzシグマ模型でSL(2)Yangian対称性が実現