高次元臨界高階重力

Critical Higher Order Gravities in Higher Dimensions

Physical Review D 88 (2013) 044035
arxiv:1306.5059

岐阜工業高専　菅 菜穂美
山口大院理工　小林 孝一朗
山口大院理工　白石 清

基研研究会「場の理論と弦理論」2013.8.21(水)

§1　Introduction

- Einstein重力
  → ユニタリー性〇　繰り込み可能性×
- Einstein重力+高階微分（曲率）項
  →ユニタリー性×　繰り込み可能性〇
  （massive spin 2 mode が出現するため）
- Critical gravity (Lu&Pope 2011)
  高階微分（曲率）項を含む。AdS時空でパラメータ間の調整を行うとmassive spin 2 mode を削除できる。

The main object of our study

高次元で

<u>任意の</u>高階微分項を含み

Critical gravity を導く作用を

Meissner-Olechowski gravity

（と Lovelock tensor）

を基に構成する。

§ 2　Meissner-Olechowski Gravity

- Meissner-Olechowski gravity (Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 3708)

$$L_{MO}^{(n)} = -\delta^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_n} S^{\nu_1}_{\mu_1}\cdots S^{\nu_n}_{\mu_n}$$

（D次元時空　$\mu,\nu = 0,1,\cdots,D-1$）

ここで

一般化クロネッカーデルタ:

$$\delta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_p} \equiv \begin{vmatrix} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} & \delta^{\mu_1}_{\nu_2} & \cdots & \delta^{\mu_1}_{\nu_p} \\ \delta^{\mu_2}_{\nu_1} & \delta^{\mu_2}_{\nu_2} & \cdots & \delta^{\mu_2}_{\nu_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{\mu_p}_{\nu_1} & \delta^{\mu_p}_{\nu_2} & \cdots & \delta^{\mu_p}_{\nu_p} \end{vmatrix}$$

Schouten tensor:
（本来の定義と
係数が異なる）

$$S^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2(D-1)} R g^{\mu\nu}$$

n=2,1,0
のとき

$$L_{MO}^{(2)} = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{D}{4(D-1)}R^2 \quad L_{MO}^{(1)} = -\frac{D-2}{2(D-1)}R \quad L_{MO}^{(0)} \equiv -1$$

§ 3 Analysis on metric fluctuation

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

背景場＋量子場

（以下、barのついたものは背景場からつくられたものを示す。
添え字の上げ下げは$\bar{g}_{\mu\nu}$で行う。$h \equiv \bar{g}_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$ ）

The background geometry $$\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \Lambda(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha})$$

$$S_0(\Lambda) = \int d^D x \sqrt{-g}\,[R - (D-1)(D-2)\Lambda]$$

Einstein eq.の解

Λは定数（ Λ<0 : AdS時空）

Schouten tensor:
の摂動項

$$S_{\Lambda}{}^{\mu}_{\alpha} \equiv S^{\mu}_{\alpha} - \bar{S}^{\mu}_{\alpha} = R^{\mu}_{\alpha} - \frac{1}{2(D-1)} R\delta^{\mu}_{\alpha} - \frac{D-2}{2}\Lambda\delta^{\mu}_{\alpha}$$

これをMO ラグランジアンに用いる

$$L^{(2)}_{MO\Lambda} \equiv -\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} S_{\Lambda}{}^{\mu}_{\alpha} S_{\Lambda}{}^{\nu}_{\beta}$$
$$= L^{(2)}_{MO} + \frac{(D-2)^2}{2}\Lambda R - \frac{D(D-1)(D-2)^2}{4}\Lambda^2$$

action: $S = S_0(\Lambda) + \alpha \int d^D x \sqrt{-g}\, L^{(2)}_{MO\Lambda}$

$$= \int d^D x \sqrt{-g} \left[\left\{ 1 + \frac{(D-2)^2}{2} \alpha \Lambda \right\} R - (D-1)(D-2) \left\{ 1 + \frac{D(D-2)}{4} \alpha \Lambda \right\} \Lambda + \alpha L^{(2)}_{MO} \right],$$

ここで $L^{(2)}_{MO} = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{D}{4(D-1)} R^2$

Newton定数と宇宙項を再定義すれば、Critical Gravity の作用を得る。（H. Lu & C. N. Pope, PRL 106 (2011) 181302）

ゲージ条件: $\bar{\nabla}_\nu h^{\nu\mu} - \bar{\nabla}^\mu h = 0$ → 運動方程式より $h = 0$

$h^{\mu\nu}$(transverse & traceless)の運動方程式

$$\alpha \left(\bar{\nabla}^2 - 2\Lambda \right) \left(\bar{\nabla}^2 - 2\Lambda + \frac{1}{\alpha} \right) h_{\mu\nu} = 0$$

massless & massive spin-2 mode (ghost mode)

Critical coupling ($\alpha \to \infty$)

action: $$S \sim \int d^D x \sqrt{-g}\, L^{(2)}_{MO\Lambda}$$

運動方程式: $$\left(\bar{\nabla}^2 - 2\Lambda\right)^2 h_{\mu\nu} = 0$$

$\downarrow$

massless graviton (log mode)

§ 4 Critical higher order gravity

ラグランジアン:
(0≦n≦D-2)

$$L^{(n+2)}_{MO}{}_{\Lambda} \equiv -\delta^{\mu_1\cdots\mu_n\alpha\beta}_{\nu_1\cdots\nu_n\mu\nu} S^{\nu_1}_{\mu_1}\cdots S^{\nu_n}_{\mu_n} S_{\Lambda}{}^{\mu}_{\alpha} S_{\Lambda}{}^{\nu}_{\beta}$$

$$= -\delta^{\mu_1\cdots\mu_n\alpha\beta}_{\nu_1\cdots\nu_n\mu\nu}\left(\bar{R}^{\nu_1}_{\mu_1} - \frac{1}{2(D-1)}\bar{R}\delta^{\nu_1}_{\mu_1}\right)\cdots\left(\bar{R}^{\nu_n}_{\mu_n} - \frac{1}{2(D-1)}\bar{R}\delta^{\nu_n}_{\mu_n}\right) S_{\Lambda}{}^{\mu}_{\alpha} S_{\Lambda}{}^{\nu}_{\beta} + O(h^3)$$

$$= -(D-2)(D-3)\cdots(D-n-1)\left(\frac{D-2}{2}\Lambda\right)^n \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} S_{\Lambda}{}^{\mu}_{\alpha} S_{\Lambda}{}^{\nu}_{\beta} + O(h^3)$$

$$= \frac{(D-2)!}{(D-n-2)!}\left(\frac{D-2}{2}\Lambda\right)^n \underline{L^{(2)}_{MO\Lambda}} + O(h^3)$$

したがって、高階重力作用:

$$\boxed{S_{crit} = \int d^D x\sqrt{-g}\sum_{n=2}^{D}\alpha_n L^{(n)}_{MO\Lambda}}$$

は Critical gravity を導く。

（運動方程式から background $\bar{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \Lambda(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha})$ を解に持つ
ことを確認できる。）

恒等式 (0≦n≦D-2):

$$
\boxed{\begin{aligned}
L_{MO}^{(n+2)}{}_{\Lambda} &= -\delta^{\mu_1\cdots\mu_n\alpha\beta}_{\nu_1\cdots\nu_n\mu\nu} S^{\nu_1}_{\mu_1}\cdots S^{\nu_n}_{\mu_n} S_{\Lambda}{}^{\mu}_{\alpha} S_{\Lambda}{}^{\nu}_{\beta} \\
&= L_{MO}^{(n+2)} - (D-n-1)(D-2)\Lambda L_{MO}^{(n+1)} + (D-n)(D-n-1)\left(\frac{D-2}{2}\right)^2 \Lambda^2 L_{MO}^{(n)}
\end{aligned}}
$$

$$
L_{MO}^{(n+2)}{}_{\Lambda} = (D-2)(D-3)\cdots(D-n-1)\left(\frac{D-2}{2}\Lambda\right)^n L_{MO\Lambda}^{(2)} + O(h^3)
$$

$$
L_{MO\Lambda}^{(2)} = L_{MO}^{(2)} + \frac{(D-2)^2}{2}\Lambda R - \frac{D(D-1)(D-2)^2}{4}\Lambda^2
$$

を用いて漸化式を解くと

$$
\begin{aligned}
L_{MO}^{(n)} = \frac{(D-2)!}{(D-n)!}\left(\frac{D-2}{2}\right)^n \Bigg\{ &-D(D-1)\Lambda^n - n\Lambda^{n-1}\left[\frac{D-2}{2}\Lambda h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + \frac{1}{4}h_{\mu\nu}\bar{\nabla}^2 h^{\mu\nu}\right] \\
&+ \frac{n(n-1)}{2}\Lambda^{n-2}\left[\Lambda^2 h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - \Lambda h_{\mu\nu}\bar{\nabla}^2 h^{\mu\nu} + \frac{1}{4}h_{\mu\nu}\bar{\nabla}^2\bar{\nabla}^2 h^{\mu\nu}\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

+ unphysical mode

§ 5　More higher order gravity

§ 4では最高次はR^D。さらに高次の項を含むには？

Lovelock tensor

$$G^{(n)\mu}{}_{\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\int d^D x\sqrt{-g}L_L^{(n)})}{\delta g_{\rho\mu}}g_{\nu\rho} = -2^{-(n+1)}\delta^{\mu\sigma_1\tau_1\cdots\sigma_n\tau_n}_{\nu\lambda_1\rho_1\cdots\lambda_n\rho_n}R^{\lambda_1\rho_1}{}_{\sigma_1\tau_1}\cdots R^{\lambda_n\rho_n}{}_{\sigma_n\tau_n}$$

ここで $L_L^{(n)}$ は Euler density　$L_L^{(n)} = 2^{-n}\delta^{\sigma_1\tau_1\cdots\sigma_n\tau_n}_{\lambda_1\rho_1\cdots\lambda_n\rho_n}R^{\lambda_1\rho_1}{}_{\sigma_1\tau_1}\cdots R^{\lambda_n\rho_n}{}_{\sigma_n\tau_n}$

Lovelock tensor を用いて
Shouten tensorを拡張　$\longrightarrow$　$S^{\mu\nu}_{(n)} \equiv G^{(n)\mu\nu} - \frac{1}{D-1}G^{(n)}g^{\mu\nu}$

一般化した Shouten tensor により構成されたラグランジアン

$$L_{MO}^{(n\cdot m)} = -\delta^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_n}S_{(m)}{}^{\nu_1}_{\mu_1}\cdots S_{(m)}{}^{\nu_n}_{\mu_n}$$

は同様にcritical gravityを導く。
（N.Kan, K.Kobayashi & K. Shiraishi, ISRN Mathematical Physics 2013）

§6　Summary & outlook

Summary

Critical gravity を導く

高次元高階重力理論の作用を構成した。

Outlook

- 様々な古典解（BHなど）と物理量（質量、エントロピーなど）
- 他の古典解（真空）の存在とその物理について
- 物質場を含む場合

等々