カイラル対称性の力学的破れと
非摂動くりこみ群方程式の弱解の構成法

金沢大学　自然科学研究科　熊本真一郎
共同研究者：金沢大学　青木健一, 藤井康弘, 佐藤大輔

基研研究会　場の理論と弦理論
2013年8月20日　@京都大学 基礎物理学研究所

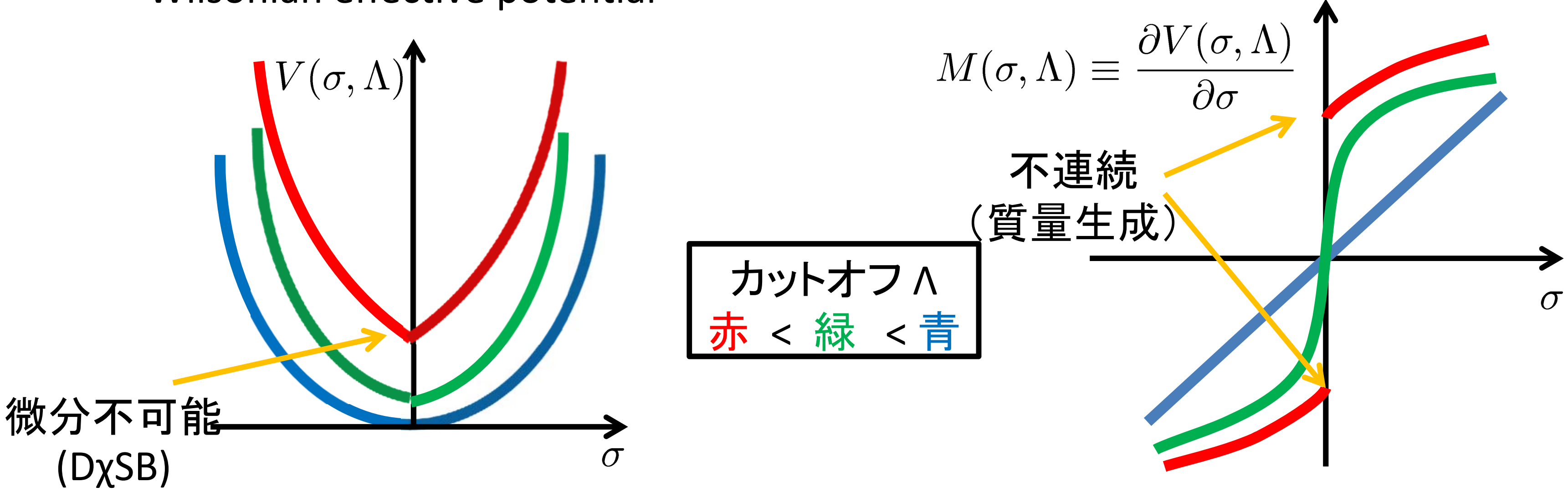
Contents

1. 導入

カイラル対称性の自発的破れの非摂動くりこみ群による解析

解析方法：Wilsonian effective potentialを解とする非摂動くりこみ群方程式を解いて、
　　　　　その解からLegendre effective potentialを計算する。

Wilsonian effective potential　　　　　　　　　　　　mass function



$\mathrm{V}(\sigma,\Lambda)$, $M(\sigma,\Lambda)$ は微分不可能な点（傾き無限大を含む）をもつので、非摂動くりこみ群方程式の大域的古典解ではない（すべての点で偏微分方程式を満たす解ではない）。

⇒ $\mathrm{V}(\sigma,\Lambda)$, $M(\sigma,\Lambda)$を非摂動くりこみ群方程式の成立条件を緩めた「弱方程式」の解である「弱解」というものと解釈し、その弱解の構成法と物理的意味を説明する。

K-I. Aoki, S-I. Kumamoto and D. Sato arXiv:1304.3289

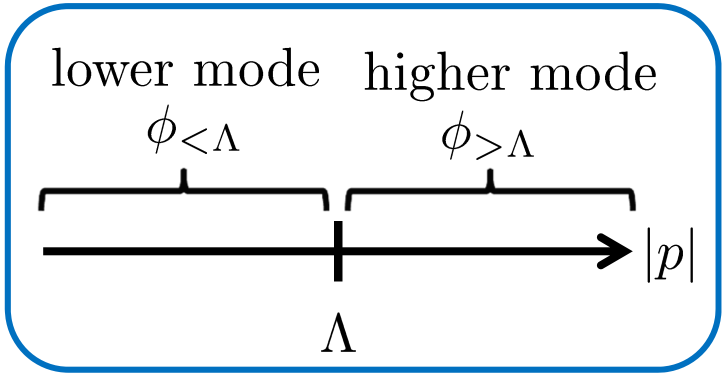
2. 非摂動くりこみ群方程式

Partition function

$$Z \equiv \int_{0\le|p|\le\Lambda_0} \mathcal{D}\phi \quad \exp(-S) \qquad (\ S\ ;\ \text{初期値})$$

$$= \int \mathcal{D}\phi_{<\Lambda}\ \mathcal{D}\phi_{>\Lambda}\ \ \exp(-S[\phi_{<\Lambda},\phi_{>\Lambda};\Lambda_0])$$

$$= \int \mathcal{D}\phi_{<\Lambda}\ \ \exp(-S_{\text{eff}}[\phi_{<\Lambda};\Lambda])$$



$S_{\text{eff}}[\phi_{<\Lambda};\Lambda]$; Wilsonian effective action

残った積分変数　　micro な情報 ($|p|>\Lambda$) が含まれている

$$\Lambda \equiv \exp(-t)\Lambda_0$$

Wegner-Houghton equation （非摂動くりこみ群方程式）

$$\frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial t} = -\frac{1}{2\delta t}\int_p^{\prime}\left[-\mathrm{Tr}\ln\left(\frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta\phi_p\delta\phi_{-p}}\right) + \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta\phi_p}\left(\frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta\phi_p\delta\phi_{-p}}\right)^{-1}\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta\phi_{-p}}\right]$$

➡ 無限次元汎関数微分方程式は解けないので近似が必要

local potential approximation (fermion) ; $S_{\rm eff} = \int d^4x \left[\bar{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi - \underline{V(\bar{\psi}\psi)}\right]$

Wilsonian effective potential

非摂動くりこみ群方程式（有限密度）

Wilsonian effective potential

$$V_t(x,t) + f(M,t) = 0 \ ,$$

mass function

$$M_t(x,t) + \left[f(M,t)\right]_x = 0$$

$$x \equiv \bar{\psi}\psi, \quad \Lambda \equiv \exp(-t)\Lambda_0, \quad O_x \equiv \frac{\partial O}{\partial x}, \quad M(x,t) \equiv V_x(x,t)$$

$$f(M,t) = -\frac{e^{-3t}}{\pi^2}\left[\theta\left(e^{-2t} + M^2 - \mu^2\right)\sqrt{e^{-2t} + M^2} + \theta\left(-e^{-2t} - M^2 + \mu^2\right)\mu\right]$$

初期条件：NJL model　$V(x,0) = 2\pi^2 g x^2 \ , M(x,0) = 4\pi^2 g x,$

$$\mu = 0.7, \ \ g = 1.7 \times g_c$$

➡ 偏微分方程式を連立常微分方程式にして解く (特性曲線の方法)

3. 特性曲線の方法（Lagrange-Charpit method）

general 1st order PDE
(linear or nonlinear)

$$F(x,t,V,M,N)=0$$

$$\left(\quad V \equiv V(x,t), \quad M(x,t) \equiv V_x(x,t), \quad N(x,t) \equiv V_t(x,t) \quad \right)$$

常微分方程式化

特性曲線方程式（Charpit's equations）

$$\frac{dx}{d\tau} = F_M, \qquad \frac{dt}{d\tau} = F_N, \qquad \frac{dV}{d\tau} = MF_M + NF_N$$

$$\frac{dM}{d\tau} = -(F_x + MF_V), \qquad \frac{dN}{d\tau} = -(F_t + NF_V)$$

NPRGEの特性曲線方程式 ($\frac{\mathrm{dt}}{d\tau} = 1 \rightarrow (x, V, M, N)$の4連立常微分方程式)

非摂動くりこみ群方程式とHamilton-Jacobi方程式

NPRGE

$$V_t(x,t) + f\left(x, \underbrace{V_x}_{=M}, t\right) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial M} \\[2ex] \dfrac{dV}{dt} = M\dfrac{\partial f}{\partial M} + N \\[2ex] \dfrac{dM}{dt} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{dN}{dt} = -\dfrac{\partial f}{\partial t} \quad (N = -f) \end{array}\right.$$

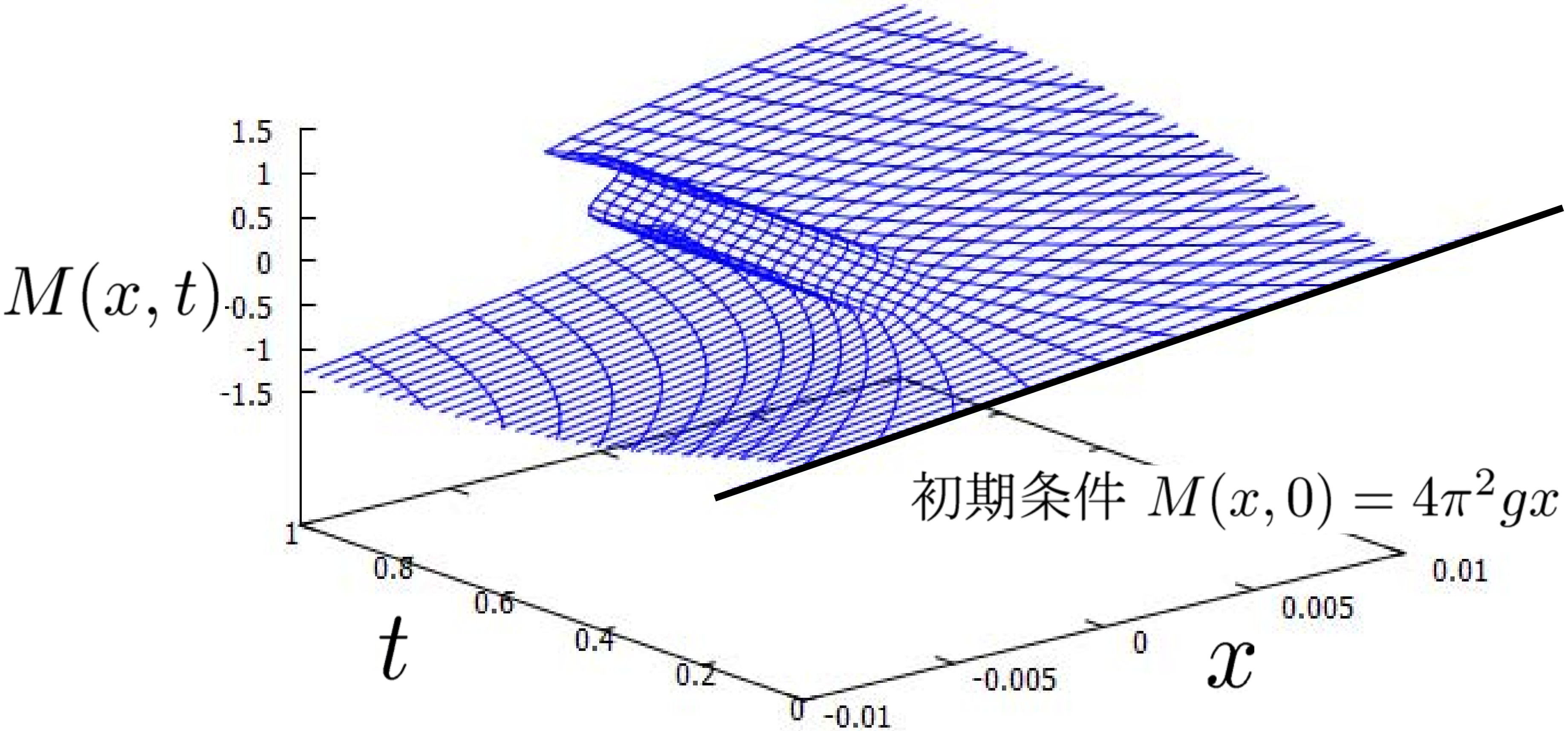
HJE

$$S_t(q,t) + H\left(q, \underbrace{S_q}_{=p}, t\right) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\[2ex] \dfrac{dS}{dt} = p\dfrac{\partial H}{\partial p} + N \ (= p\dot{q} - H) \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\[2ex] \dfrac{dN}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial t} \quad (N = -H) \end{array}\right.$$

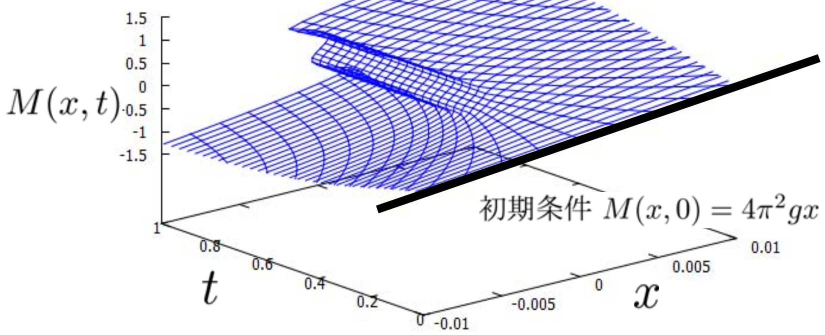
$(t, x, M, V, f) \Leftrightarrow (t, q, p, S, H)$，特性曲線方程式 $\Leftrightarrow$ 正準方程式

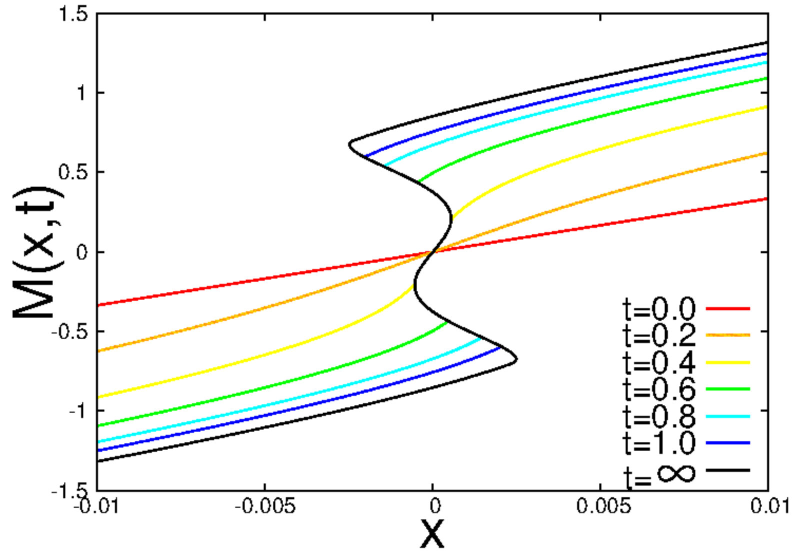
正準方程式： $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial M}, \quad \dfrac{dM}{dt} = -\dfrac{\partial f}{\partial x}$



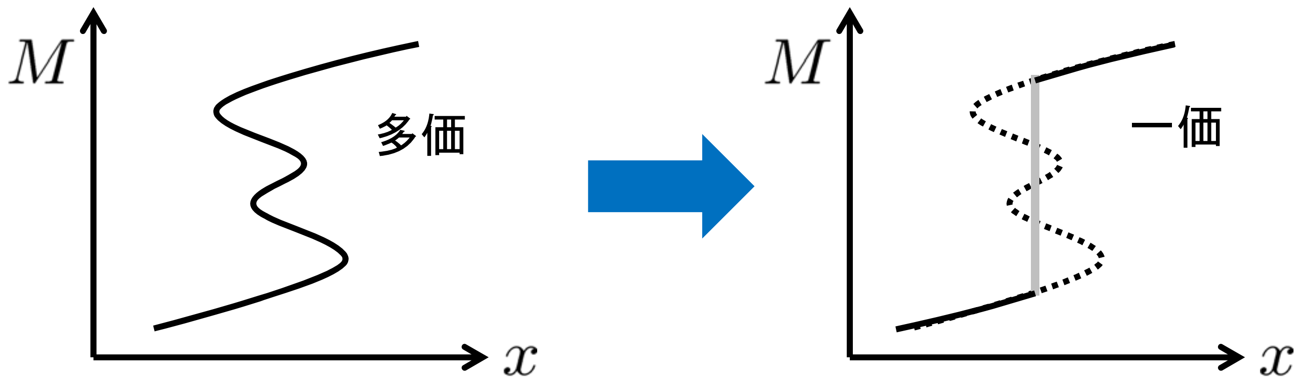
特性曲線方程式（正準方程式）を解くと多価関数$M(x,t)$を得る。

$t = 0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1.0,\ 10$の時の$M(x,t)$



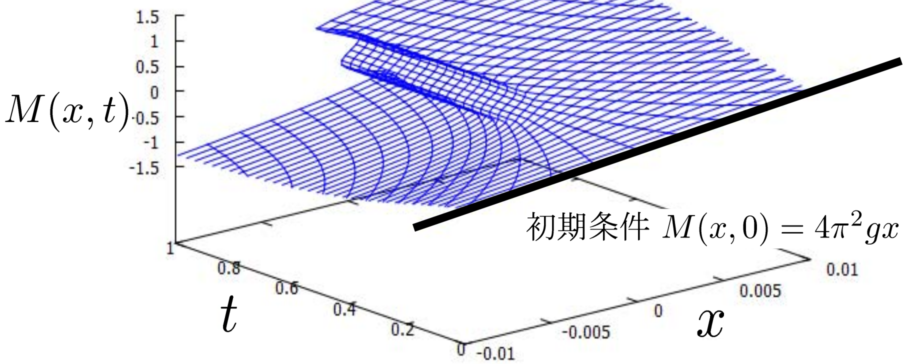


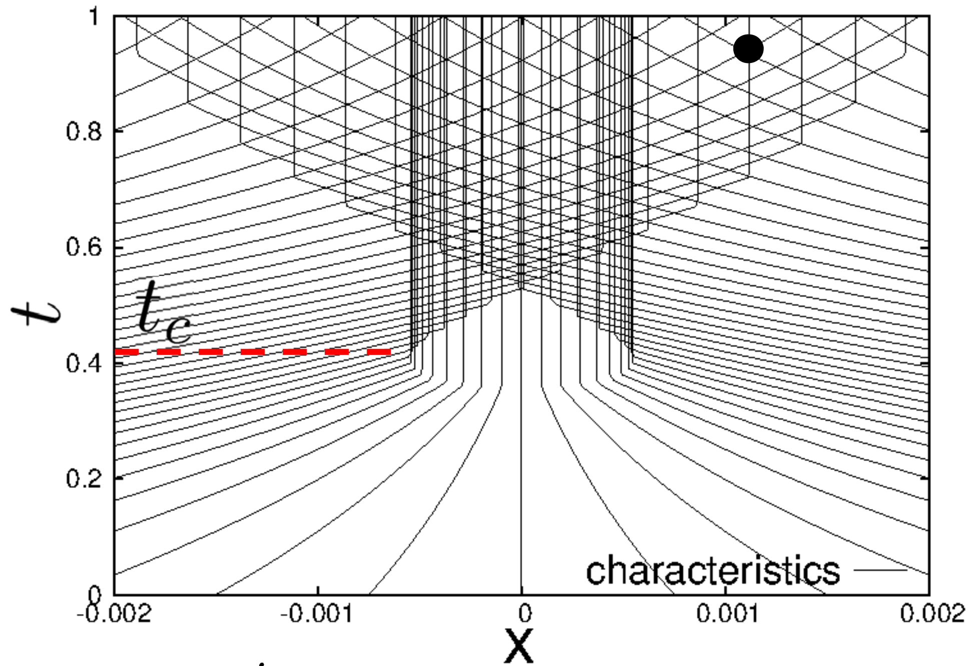
非摂動くりこみ群方程式は、有効作用を追いかけているので、解は本質的に一価の関数でなければならない

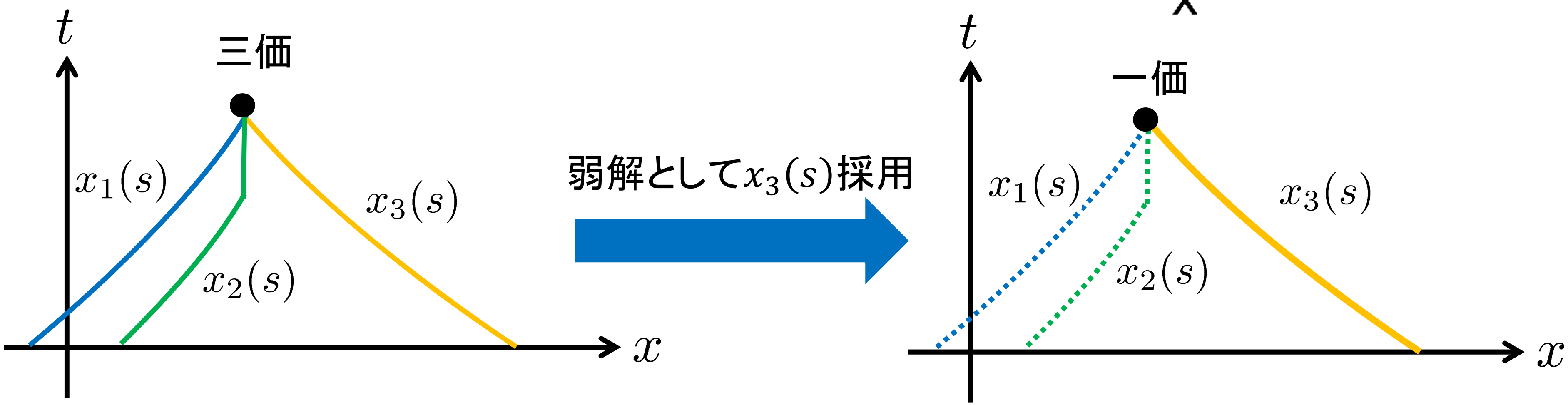


不連続点で偏微分方程式を満たさないので、方程式の成立条件を緩めて「弱解」という概念を導入する。

特性曲線の(x, t)平面への射影







弱解は採用する点の境界線与え、その境界線上で$M(x,t)$は不連続となる。

4. 弱解

強方程式 : $$\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \left[\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial f(M,t)}{\partial x} \right] \varphi(x,t) = 0$$

［1 階微分可能で (x,t) 平面の遠方で 0 となる任意のテスト関数 $\varphi(x,t)$］

部分積分
（φに偏微分をおしつける）
⇓ ○　⇑ ✕

弱方程式 : $$\int_{-\infty}^\infty dx \left[(M\varphi)_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty dt\ M \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] + \int_0^\infty dt \left[(\varphi f(M,t))_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^\infty dx\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(M,t) \right] = 0$$

$$\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \left[M \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(M;t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \int_{-\infty}^\infty dx\ M(x,0)\varphi(x,0) = 0$$

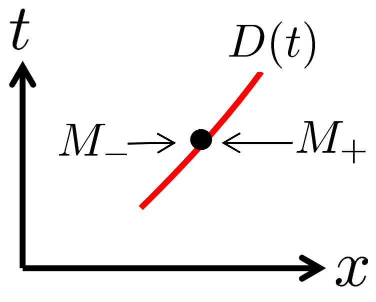
1 階微分可能で (x,t) 平面の遠方で 0 となるすべての $\varphi(x,t)$ について
この方程式を満たす $M(x,t)$ を偏微分方程式の「（超関数的）弱解」という。

J. Leray , Acta. Math. **63** (1934)

Rankine-Hugoniot conditon (不連続点の条件)

$$\frac{dD(t)}{dt}[M_+ - M_-] = f(M_+, t) - f(M_-, t)$$

($D(t)$:不連続点の x 座標 , $M_+ \equiv M(D(t)_+, t)$, $M_- \equiv M(D(t)_-, t)$)



RH condition の直観的説明

$$M_t + [f(M,t)]_x = 0 \text{ (保存則型方程式)}$$

$M \equiv \rho$（電荷密度）, $f \equiv j$ （電流） と解釈すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0 \text{ （電荷保存則）}$$

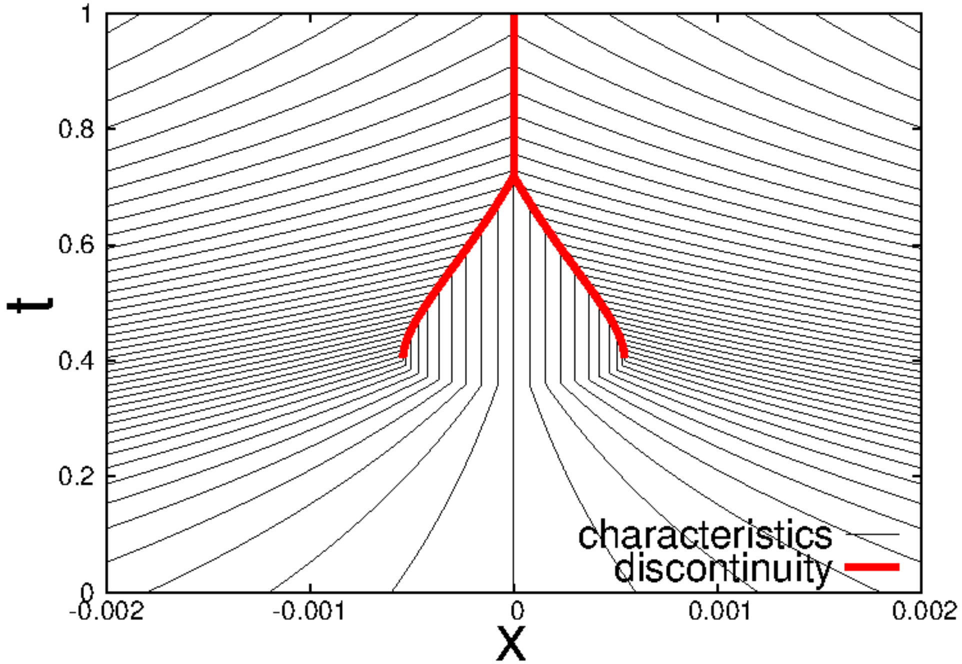
ある点を微小時間 dt の間に、不連続な電荷密度が
距離 dD だけ通り過ぎた時、以下の等式が成立する。

$$[\rho_+ - \rho_-]dD = [j_+ - j_-]dt$$

RH condition of NPRGE

$$\frac{dD(t)}{dt}[M_+ - M_-] = f(M_+, t) - f(M_-, t)$$

$M(x,t)$ の特性曲線



赤線：shock

shock の左右で $M(x,t)$ が違い、
不連続点となっている。

計算する物理量

1. mass function $M(x,t)$

2. Wilsonian effective potential $V(x,t)$

3. Legendre effective potential $V_{\rm L}(x,t)$

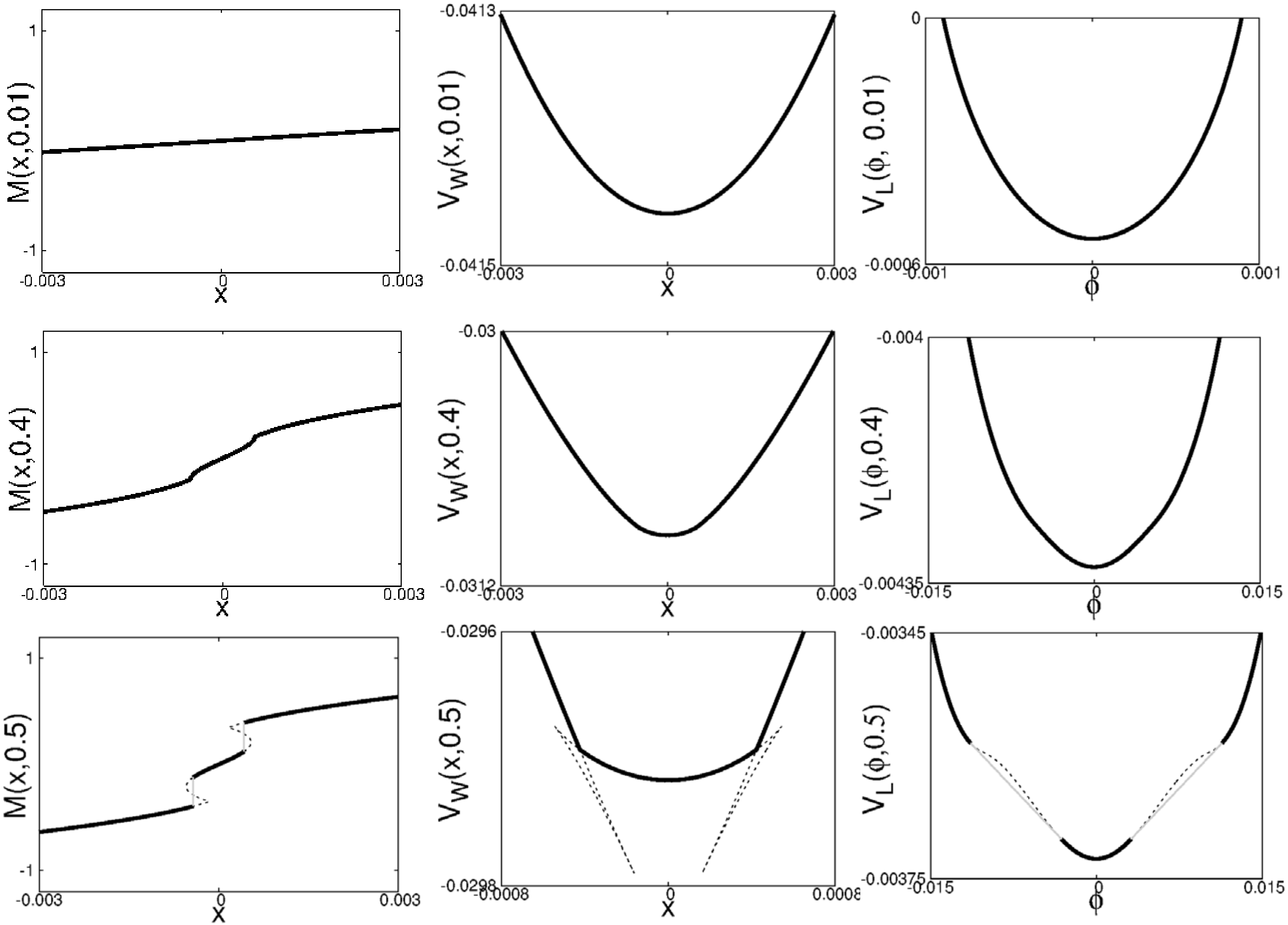
$$Z(m_0) \equiv \exp[\int d^4x \; w(m_0)] \qquad (\; m_0 \;:\; \text{bare mass})$$

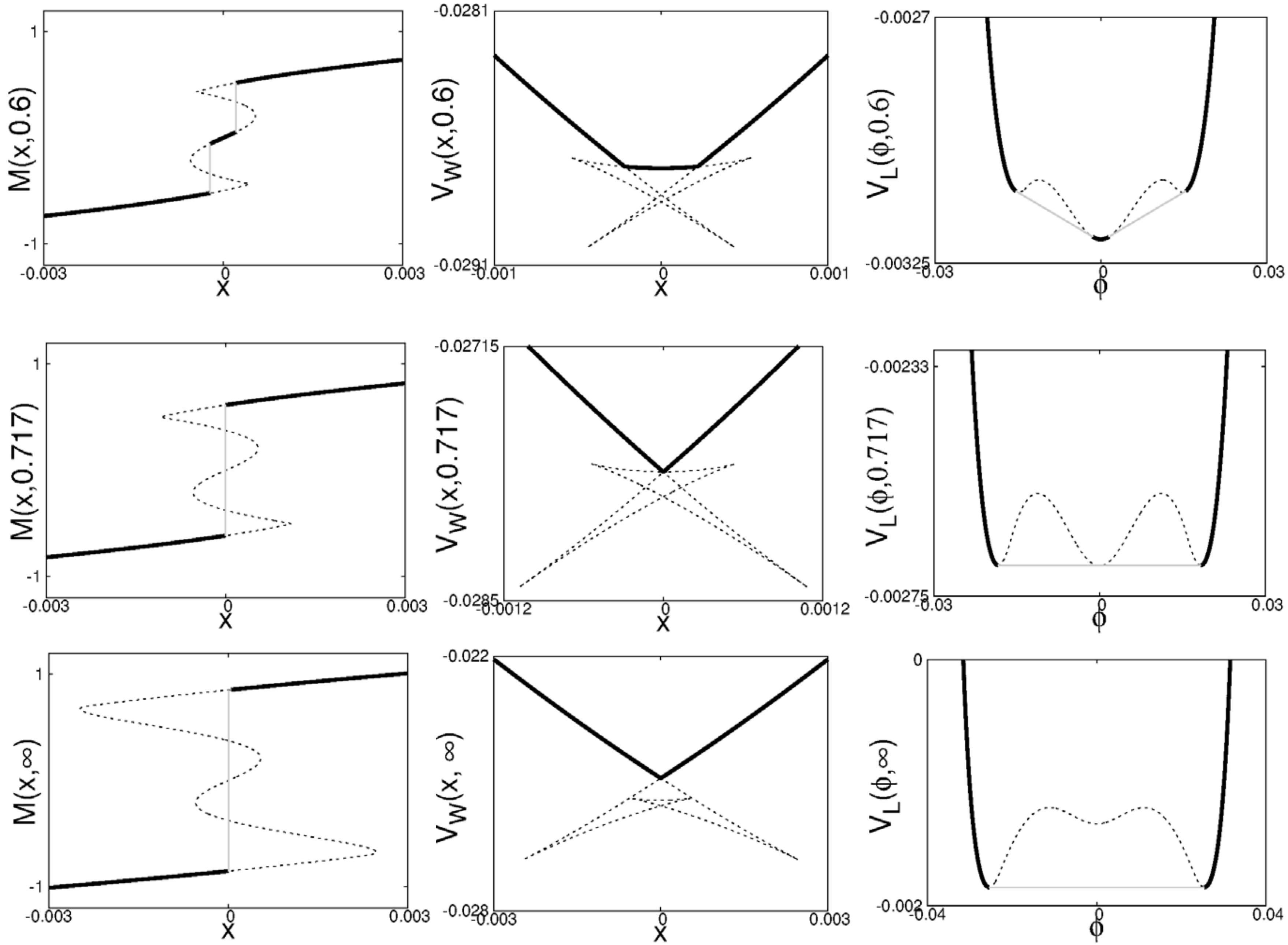
$$w(m_0) = V(0,\infty) - V(0,0)$$

$$\varphi \equiv \langle \bar{\psi}\psi \rangle$$

$$V_{\rm L}(\varphi) \equiv -w(m_0) + m_0\varphi \quad , \quad \frac{\partial V_{\rm L}(\varphi)}{\partial \varphi} = m_0$$

$$M(x,t),\ V(x,t),\ V_{\rm L}(x,t) \quad (t = 0.01,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.717,\ \infty)$$

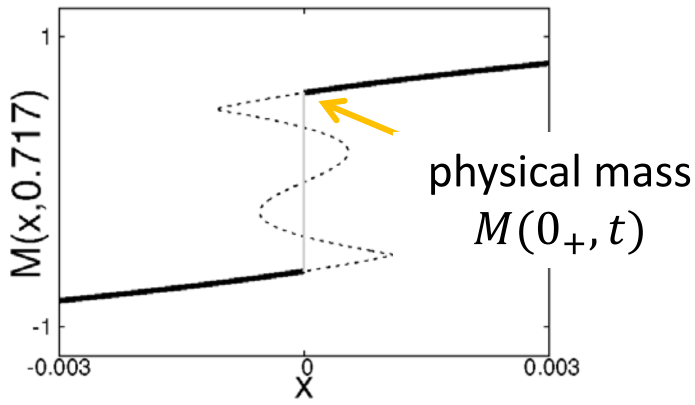




NPRGEの弱解から、凸化されたLegendre effective potentialが得られた。

外場(bare mass)による原点のsingularityの変化

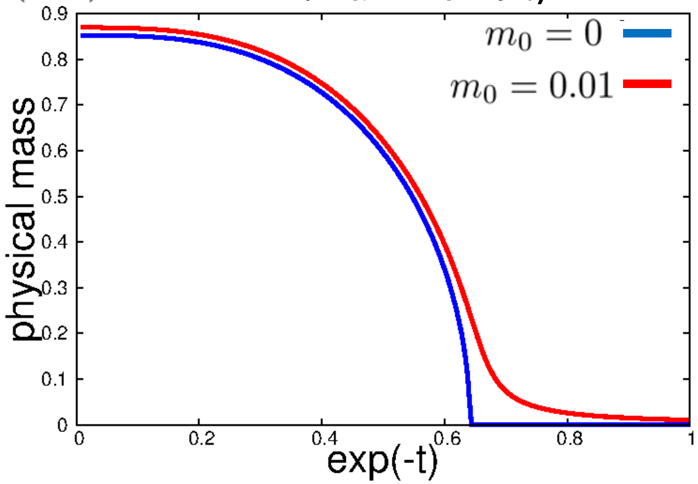
mass function



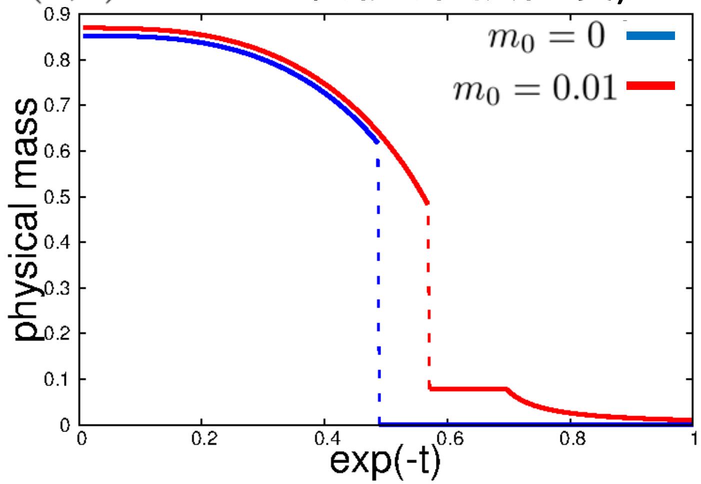
$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\rm NJL} \to \mathcal{L}_{\rm NJL} + m_0(\bar{\psi}\psi) \\ V(x,0) = 2\pi^2 g x^2 \to 2\pi^2 g x^2 + m_0 x \\ M(x,0) = 4\pi^2 g x \to 4\pi^2 g x + m_0 \end{cases}$$

$\boxed{m_0 \to 0 \text{ 極限を取る}}$

$M(0,t)$ 二次転移(0密度)



$M(0,t)$ 一次転移(有限密度)



二次転移の場合はmass functionのsingularityはbare massを入れることにより原点からずれるが、一次転移の場合は、bare mass を入れてもsingularity が原点に残る。いずれの場合もくりこみ群方程式は 弱方程式に拡張する必要がある。

5. 粘性解（Hamilton-Jacobi方程式の弱解）

非摂動くりこみ群方程式

$$V_t(x,t) + f(M,t) = 0 \quad (f(M,t)\text{: } M \text{ に関して上に凸})$$

$$f(M,t) = -\frac{e^{-3t}}{\pi^2}\left[\theta\left(e^{-2t}+M^2-\mu^2\right)\sqrt{e^{-2t}+M^2} + \theta\left(-e^{-2t}-M^2+\mu^2\right)\mu\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} S(x,t) \equiv -V(x,t) \\ p \equiv U_x = -V_x = -M \\ H(x,p,t) \equiv -f(M,t) \end{array}\right.$$

Hamilton-Jacobi方程式

$$S_t(x,t) + H(x,p,t) = 0 \quad (H(x,p,t)\text{: } p \text{ に関して下に凸})$$

Hamilton-Jacobi方程式はmass functionの方程式（ $M_t(x,t) + [f(M,t)]_x = 0$ ）
のように発散型ではないので部分積分でテスト関数に偏微分を押し付けられない。

新たな弱解の概念である「粘性解」というものを導入する。

粘性解の定義

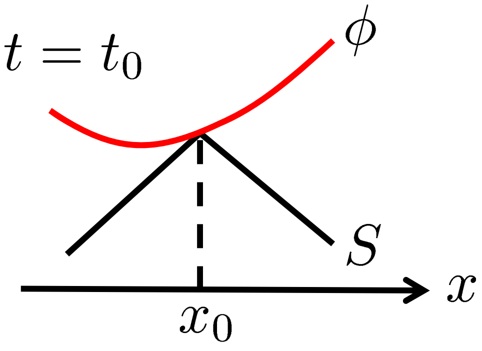
粘性劣解かつ粘性優解である $S(x,t)$ を「粘性解」という。

M.G. Crandall and P.-L. Lions, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math* (1981)

各点 (x_0, t_0) に対して、上から接する
どんな微分可能なテスト関数 $\phi(x,t)$ をとっても

$$\phi_t + H(x_0, \phi_x, t_0) \leq 0$$

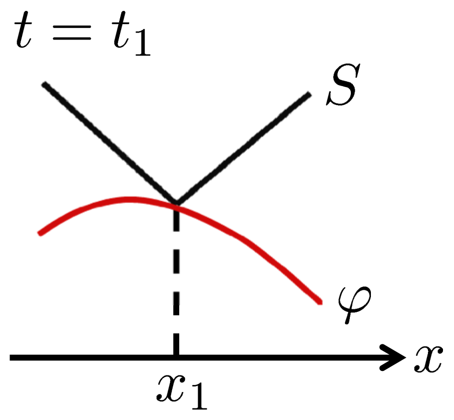
が成立するとき、$S(x,t)$ を「粘性劣解」という。
(テスト関数 ϕ が空集合の時、自動的に満たされる)



各点 (x_1, t_1) に対して、下から接する
どんな微分可能なテスト関数 $\varphi(x,t)$ をとっても

$$\varphi_t + H(x_1, \varphi_x, t_1) \geq 0$$

が成立するとき、$S(x,t)$ を「粘性優解」という。
(テスト関数 φ が空集合の時、自動的に満たされる)



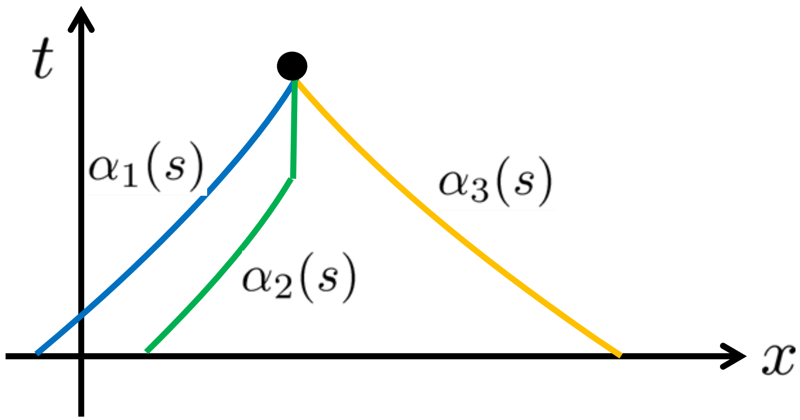
粘性解の構成法

最適制御問題

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = G\big(x(s), \alpha(s), s\big) & (0 < s < t) \\ x(t) = x \quad \text{(terminal value)} \end{cases}$$

$$\text{cost function}: \quad J_{x,t}[\alpha] \equiv \int_0^t ds \ L(x(s), \alpha(s), s) + S_0(x)$$

最適制御問題 : cost functionを最小にするように制御 $\alpha(s)$ を決める。



$$\text{value function}: \quad S(x,t) \equiv \inf_{\alpha} \left[\int_0^t ds \ L(x(s), \alpha(s), s) + S_0(x) \right]$$

$$G\big(x(s),\alpha(s),s\big)=\alpha(s)\quad\Big(\ \dot{x}(s)=G\big(x(s),\alpha(s),s\big)=\alpha(s)\ \Big)$$

$$\text{value function}:\quad S(x,t)=\inf_{\dot{x}}\left[\int_0^t ds\ L(x(s),\dot{x}(s),s)+S_0(x)\right]$$

$$=\inf_{x}\left[\int_0^t ds\ L(x(s),\dot{x}(s),s)+S_0(x)\right]$$

value functionは、以下のHamilton-Jacobi方程式の粘性解であると知られている。

$$\begin{cases} S_t(x,t)+H(x,S_x,t)=0 \\ H(x,p,t)\equiv\sup\limits_{v}[vp-L(x,v,t)] \\ S(x,0)=S_0(x) \end{cases}$$

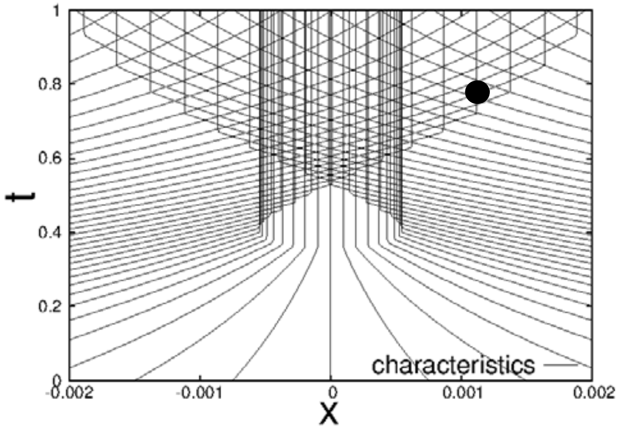
粘性解の構成法（＝最小作用の原理）

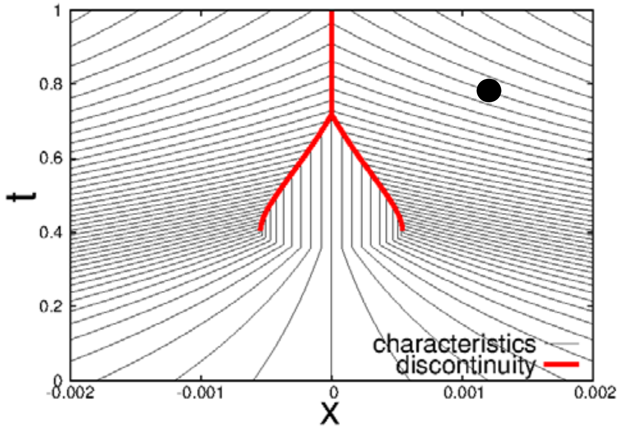
①NPRGEのHamiltonianからLagrangianにLegendre変換

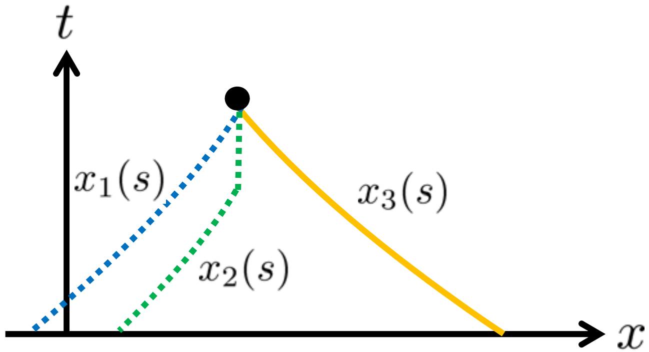
②作用が最小になる経路$x(s)$を見つける

③その最小の作用$S(x,t)$が粘性解

粘性解と特性曲線







特性曲線 (正準方程式)

$$\frac{dS(x_i(t),t)}{dt} = p_i(t)\dot{x}_i(t) - H(x_i(t),p_i(t),t) = L(x_i(t),\dot{x}_i(t),t)$$

⇨ $S_i(x,t) \equiv \int_0^t ds\ L(x_i(s),\dot{x}_i(s),s) + S_0(x) \qquad (i=1,2,3)$

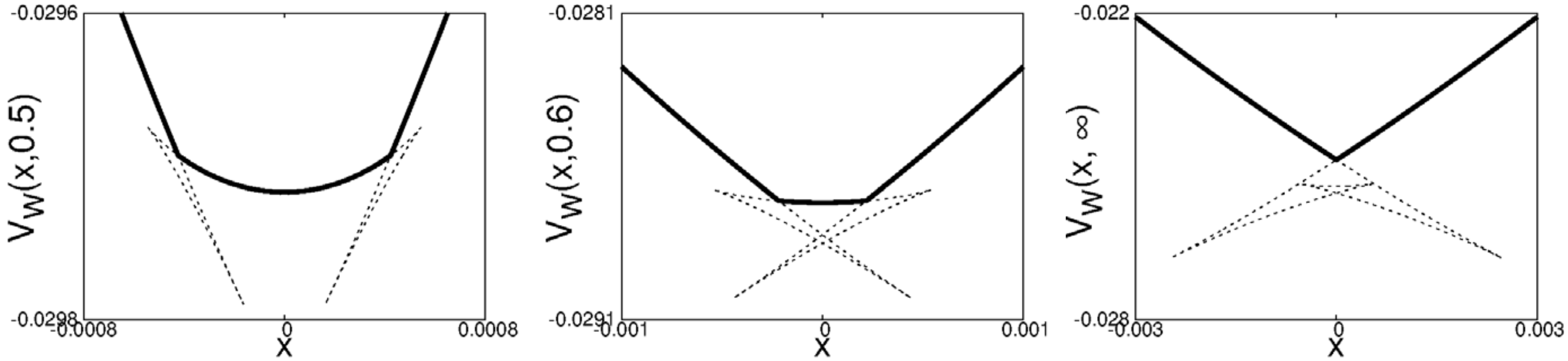
⇨ 変分原理：$\delta S_i = 0$（極小作用）

粘性解 （最小作用の原理）

$$S(x,t) = \inf_x \left[\int_0^t ds\ L(x(s),\dot{x}(s),s) + S_0(x) \right]$$

粘性解を得るには、作用に極小値を与える特性曲線
（停留曲線）から、作用が最小になるものを選べばいい。

超関数的弱解と粘性解



超関数的弱解は、特性曲線からWilsonian effective potentialを最大にするように選ばれている。

$$(\; S(x,t) \equiv -V(x,t) \;)$$

「Wilsonian effective potentialが最大」は「作用が最小」に対応するので、超関数的弱解は最小作用と等価である。

有限密度NJL模型のLPAをした非摂動くりこみ群方程式の超関数的弱解と粘性解は等価である。

6. まとめと課題

- mass function のスケール依存性を記述する非摂動くりこみ群方程式は、カイラル対称性が自発的に破れるスケールから下には大域解（すべての点でPDEを満たす解）を持つことができない。
- 非摂動くりこみ群方程式を弱方程式に拡張し、その弱解を特性曲線の方法とRH conditionにより構成した。
- 弱解は一意的に決まり、自動的に凸化されたLegendre有効ポテンシャルを与えることを示した。この事実から、弱解による自発的対称性の破れの記述はグローバルミニマムを自動的に選ぶことが保証され、一次相転移にも直接適用可能である。
- 非摂動くりこみ群方程式がHamilton-Jacobi方程式型であり、特性曲線方程式が正準方程式に対応することを説明した。
- 粘性解は最小作用の原理に対応し、Wilsonian effective potential最大化は超関数的弱解（エントロピー解）に対応する。
- NJL模型の二つの弱解は等価である。
- 有限温度・有限密度QCDに応用する。
- ２階偏微分方程式の粘性解を考える。