

Time evolution of matrix quantum mechanics:
equilibration to Generalized Gibbs Ensemble
and entropy production

森田 健

KEK → Kentucky (10月から)

Reference

1302.0859 with G. Mandal (TIFR, India)

超弦理論から現実世界を理解するためには
乗り越えなければいけない問題がいくつもある。

非摂動効果

String Pheno/摂動論

初期条件

時間発展

→ 今日のトーク:

String理論に特有な時間発展は存在するのか考える。

超弦理論の様々な側面:

- (超対称性)場の理論
- 重力理論
- Large-N ゲージ理論
- etc.

特に重力理論は非自明な時間発展を示す。

- ブラックホール (情報喪失)
- 宇宙検定仮説 (裸の特異点)
- インフレーション、…… [昨日の午前のセッション]

→ Large-N ゲージ理論も非自明な時間発展を示さないか?

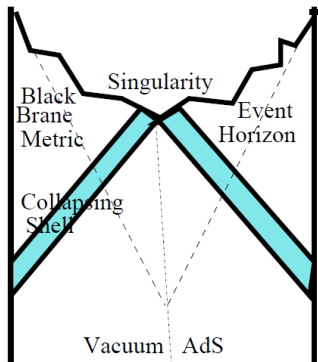
今日のトーク:

様々なLarge-N ゲージ理論の様々な時間発展を紹介する。

- $N=4$ SYM \longleftrightarrow SUGRA in AdS5
- 3-dim $O(N)$ vector model \longleftrightarrow Vasiliev理論
- Unitary matrix model \longleftrightarrow $c=1$ non-critical string

例1) N=4 SYM on $R_{1,3} \longleftrightarrow$ SUGRA in AdS5 ($\lambda \gg 1$)

(注) この例ではSUGRAの解析を用いる。



(ポアンカレ) AdS時空に摂動を加えると
Black braneが即座に形成される。

[Bhattacharyya-Minwalla 2009]

[Heller-Janik-Witaszczyk 2011]

AdS/CFTの予言

Black brane \longleftrightarrow SYMの(非閉じ込め)有限温度状態

SUGRAの解析は、N=4 SYMが即座に熱平衡化されることを示唆する。

例2) $O(N)$ vector model on $R_{1,2} \longleftrightarrow$ Higher Spin theory (Vasiliev theory)

[横山さん、宇賀神さんのトーク]

$$S = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial\phi_i \partial\phi_i - \frac{\lambda}{N} (\phi_i \phi_i)^2 \right)$$

$\phi_i : (i = 1, \dots, N)$

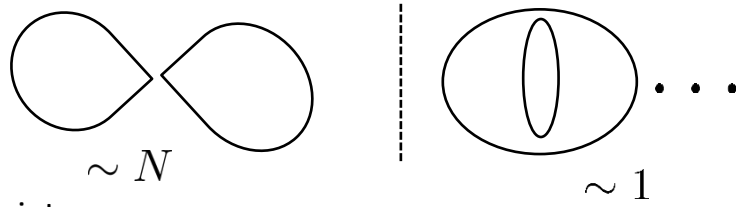
in AdS4
 $\{\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}\}$

$O(N)$ vector modelは $N \rightarrow \infty$ で、Thermalizationが起こらない。

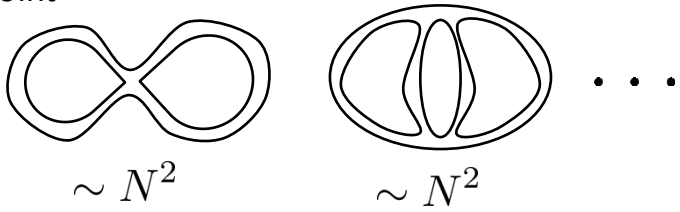
[Berges et al 2002-]

- 2PI diagram (時間発展を調べる場合に重要) の $1/N$ 展開

$O(N)$ vector



cf) $U(N)$ adjoint



→ $1/N$ 展開のLeadingのダイアグラムの数が全く異なる。

例2) $O(N)$ vector model on $R_{1,2} \longleftrightarrow$ Higher Spin theory
[横山さん、宇賀神さんのトーク] (Vasiliev theory)

$$S = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial\phi_i \partial\phi_i - \frac{\lambda}{N} (\phi_i \phi_i)^2 \right)$$

$$\phi_i : (i = 1, \dots, N)$$

in AdS4
 $\{\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}\}$

$O(N)$ vector modelは $N \rightarrow \infty$ で可積分になり、Thermalizationが起こらない。

[Berges et al 2002-]

可積分 \rightarrow 無限個の保存量 \longleftrightarrow 無限個のHS対称性のgenerator

- 「 $O(N)$ vector modelの熱平衡状態」は「自由場の熱平衡状態」のように、**dynamicalには決して到達しない状態**。
- $1/N$ の効果**を通してのみThermalizationが起こる。
- CSMやABJ理論(Vasiliev limit)でも同様に熱平衡化しない可能性。

[Mandal, Minwalla, T.M. private discussion]

\rightarrow 仮にVasiliev theoryにblack brane解(熱平衡状態)が存在したとしても、dynamicalには決して形成されない。

$O(N)$ 模型はHS理論が重力と全く異なるdynamicsを示すことを予言。

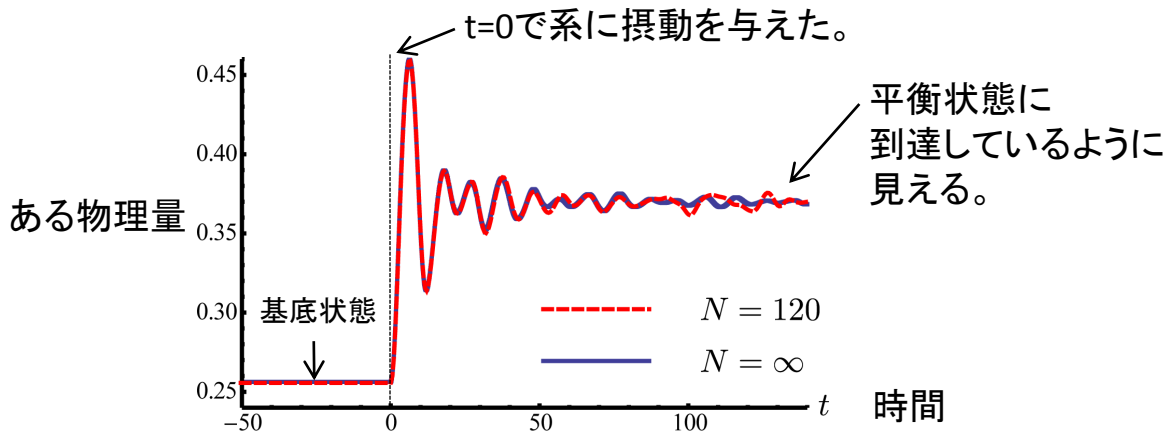
例3) 1dim Unitary matrix model \longleftrightarrow $c=1$ 非臨界弦

$$S/N^2 = \int dt \left\{ \frac{1}{2N} \text{Tr} (|D_t U|^2) - \frac{a}{2N} (\text{Tr} U + \text{Tr} U^\dagger) \right\} \quad [\text{Mandal, T.M. 2013}]$$

$U(t)$: $N \times N$ unitary matrix (行列量子力学)

この模型は任意の N で可積分。解析的に時間発展が解ける。

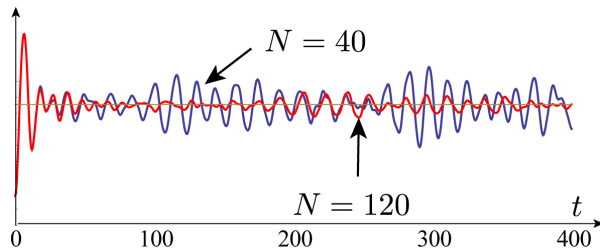
例) この模型の基底状態に $t=0$ で摂動を加えたときの物理量の時間発展。



例3) 1dim Unitary matrix model \longleftrightarrow $c=1$ 非臨界弦

$$S/N^2 = \int dt \left\{ \frac{1}{2N} \text{Tr} (|D_t U|^2) - \frac{a}{2N} (\text{Tr} U + \text{Tr} U^\dagger) \right\} \quad [\text{Mandal, T.M. 2013}]$$

本当に平衡化が起きているのかN依存性を調べてみる。

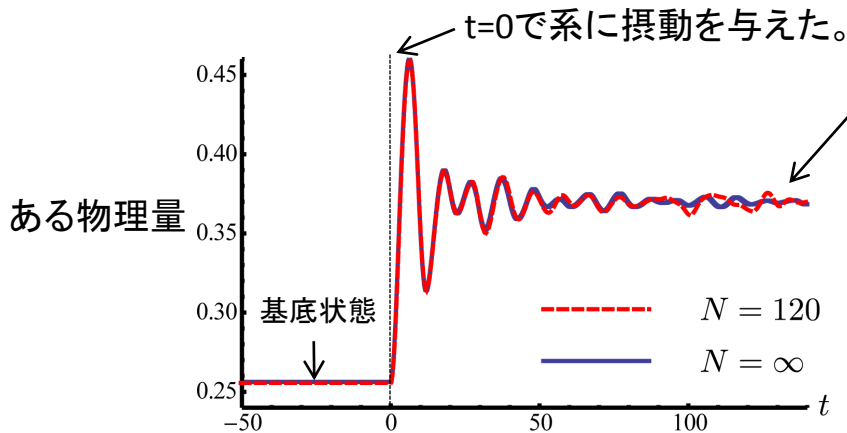


← $N=40$ vs. $N=120$

N が小さいと大きく振動し続ける。

→ N が有限では定常でない。

→ $N=\infty$ でのみ平衡化。



$t=0$ で系に摂動を与えた。

平衡状態に到達しているように見える。

ある物理量

基底状態

時間

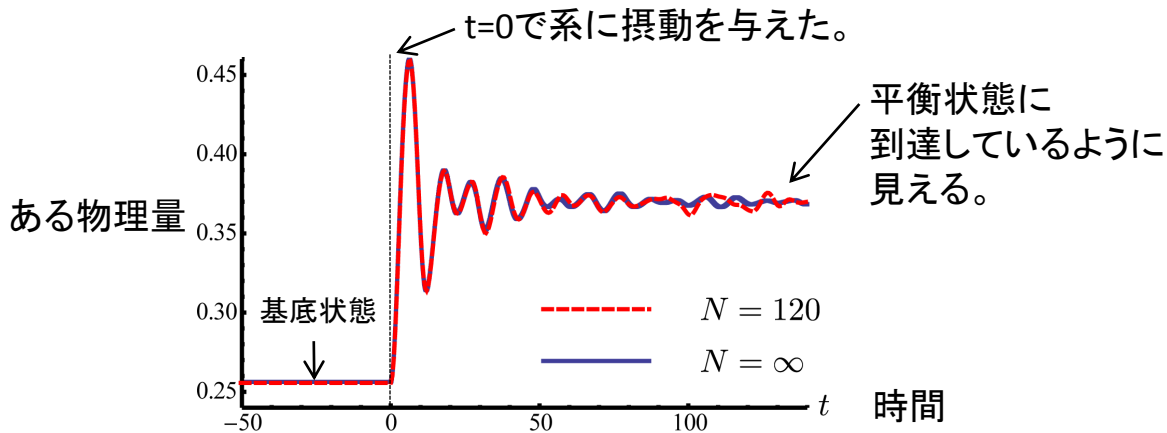
例3) 1dim Unitary matrix model \longleftrightarrow $c=1$ 非臨界弦

$$S/N^2 = \int dt \left\{ \frac{1}{2N} \text{Tr} (|D_t U|^2) - \frac{a}{2N} (\text{Tr} U + \text{Tr} U^\dagger) \right\} \quad [\text{Mandal, T.M. 2013}]$$

この模型は任意の N で可積分。
しかし、 $N=\infty$ でのみある種の「平衡化」を起こす。

Q. $N=\infty$ の終状態は何か? 何らかの熱分布に従うのか?

A. **Generalized Gibbs ensemble**



例3) 1dim Unitary matrix model \longleftrightarrow $c=1$ 非臨界弦

$$S/N^2 = \int dt \left\{ \frac{1}{2N} \text{Tr} (|D_t U|^2) - \frac{a}{2N} (\text{Tr} U + \text{Tr} U^\dagger) \right\} \quad [\text{Mandal, T.M. 2013}]$$

◆ Generalized Gibbs Ensemble (GGE)

→ 可積分系特有の熱状態 (近年物性理論で注目)

通常系 (有限個の保存量)

$$E, N_i \quad (i : \text{finite number})$$

通常系熱分布関数

$$\hat{\rho}_{TH} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(-\beta (\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i) \right)$$

可積分系 (無限個保存量がある)

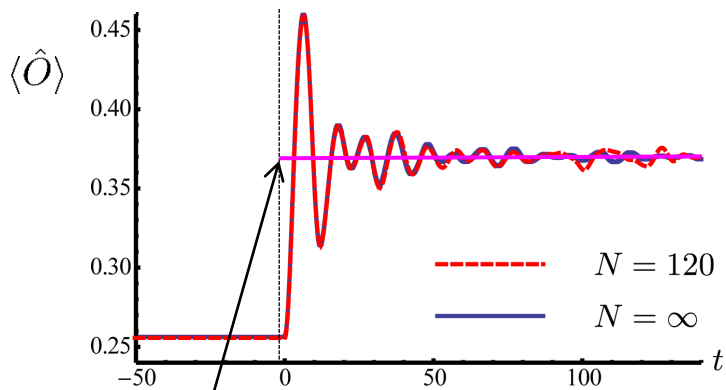
$$Q_m \quad (m = 1, \dots, \infty)$$

GGE分布関数

$$\hat{\rho}_{GGE} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \hat{Q}_m \right)$$

μ_m : 無限個の化学ポテンシャル

◆ GGEを用いた物理量の評価



GGEを用いた計算

保存量:作用から決まる。

$$\langle \hat{\rho}_{GGE} \hat{O} \rangle \quad \hat{O} : \text{観測量} \downarrow$$

$$\hat{\rho}_{GGE} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \hat{Q}_m \right)$$

μ_m :無限個の化学ポテンシャル。

$Q_m = \langle \hat{\rho}_{GGE} \hat{Q}_m \rangle$ を満たすように決める。

例) 系にどれだけのenergy,粒子数があるか?

$N \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$

で実際の時間発展が
 $\hat{\rho}_{GGE}$ から予言される
 物理量に一致する。

◆ GGEとエントロピー生成

$N \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ で系が $\hat{\rho}_{GGE}$ で記述出来るように見える。

ここでGGEのエントロピーは有限

$$S = - \langle \log \hat{\rho}_{GGE} \rangle_{GGE} \neq 0$$

$t \rightarrow \infty$ で有限のエントロピーの状態 $\hat{\rho}_{GGE}$ に到達したように見える。

→ エントロピー生成と見なせる。

(注意) 実際には **pure state** の時間発展なので常に (エントロピー) = 0

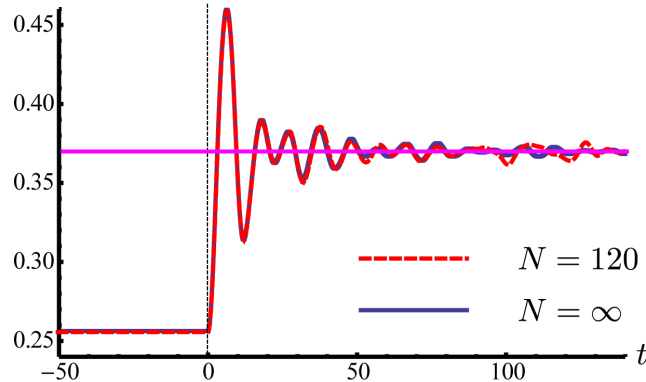
「**エントロピー生成**」を正確に言うと、**マクロな観測量** \hat{O} に関して

$\hat{\rho}_{GGE}$ で計算したものと良い一致が見られるという意味。

例3) 1dim Unitary matrix modelのまとめ

$$S/N^2 = \int dt \left\{ \frac{1}{2N} \text{Tr} (|D_t U|^2) - \frac{a}{2N} (\text{Tr} U + \text{Tr} U^\dagger) \right\}$$

[Mandal, T.M. 2013]



- 有限のNと無限のNの時間発展の違い
- GGEへの熱平衡化過程
- 量子論におけるエントロピー生成

これらを**解析的**に議論出来るおもしろい例となっている。

◆ まとめ

Large-Nゲージ理論は様々な時間発展を示す。

- Thermalizationは起こるか？

	finite N	N=∞
N=4 SYM	起こる。	起こる。
O(N) vector/CSM	起こる。	起こらない。(GGE?)
c=1 unitary matrix model	起こらない。	GGEへと起こる。

⇒ Nが**無限**か**有限**によって定性的に時間発展が異なる。

(注意) 可積分でも模型が自明すぎるとGGEへの熱平衡化は起こらない。

(例) ガウス型行列模型 → 単なる振動を繰り返す。

$$S = \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (\partial_t M(t))^2 - \frac{1}{2} M(t)^2 \right)$$

◆ 今後の課題

- 可積分は超弦理論で重要。
→ 他にもGGEが重要になる例が存在する可能性がある。

$$\hat{\rho}_{GGE} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \hat{Q}_m \right)$$

Vasiliev BHはGGE BH?

- Unitary matrix modelのdouble scaling limit
→ 行列模型の時間発展に対応するc=1 非臨界弦の dynamicsを調べる。
- Large-Nゲージ理論における「宇宙検定仮説」はあるか？
Dynamicalな相転移と関係？

Large-N ゲージ理論の時間発展は
ほとんど未開の分野で豊富な物理がありそう。