

# Worksheet Instanton Corrections to $5_2^2$ -brane Geometry

[arXiv:1304.4061 \[hep-th\]](#) (to appear in NPB),  
[arXiv:1305.4439 \[hep-th\]](#) (to appear in JHEP).

Shin Sasaki  
(Kitasato University)

with Tetsuji Kimura (Rikkyo University)

21 Aug. 2013 @ YITP

# Introduction

# Exotic branes

## T 双対性

- 弦理論に存在する広がった objects (brane 等) を結びつける

Type II 弦理論の T-duality chain に着目

T-duality chain [de Boer-Shigemori (2010,2012)]

# Exotic branes

## T 双対性

- 弦理論に存在する広がった objects (brane 等) を結びつける

Type II 弦理論の T-duality chain に着目

T-duality chain [de Boer-Shigemori (2010,2012)]

H-monopole

# Exotic branes

## T 双対性

- 弦理論に存在する広がった objects (brane 等) を結びつける

Type II 弦理論の T-duality chain に着目

T-duality chain [de Boer-Shigemori (2010,2012)]

$$\text{H-monopole} \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \text{T-dual} \end{array} \text{KK-monopole}$$

# Exotic branes

## T 双対性

- 弦理論に存在する広がった objects (brane 等) を結びつける

Type II 弦理論の T-duality chain に着目

T-duality chain [de Boer-Shigemori (2010,2012)]

$$\text{H-monopole} \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \text{T-dual} \end{array} \text{KK-monopole} \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \text{T-dual} \end{array} 5_2^2\text{-brane}$$

# Exotic branes

## T 双対性

- 弦理論に存在する広がった objects (brane 等) を結びつける

Type II 弦理論の T-duality chain に着目

T-duality chain [de Boer-Shigemori (2010,2012)]

$$\text{H-monopole} \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \text{T-dual} \end{array} \text{KK-monopole} \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \text{T-dual} \end{array} 5_2^2\text{-brane}$$

## Exotic brane

SUGRA 場：局所的に一価、しかしグローバルに一価でない

モノドロミー = コンパクト化された弦理論の T-dual 対称性変換

This talk

$5\frac{1}{2}$ -brane geometry への弦理論インスタントン補正



# Geometries

# H-monopole and KK-monopole

NS5-brane 解 [Callan-Harvey-Strominger (1991)]

$$ds_{\text{NS5}}^2 = dx_{034567}^2 + H(\vec{R}) dx_{1289}^2, \quad e^{2\phi} = H(\vec{R}),$$
$$H_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho}{}^\lambda \partial_\lambda \log H(\vec{R}), \quad H(\vec{R}) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q}{|\vec{R}|^2}, \quad \vec{R} \in \mathbb{R}_{1289}^4$$

## H-monopole and KK-monopole

NS5-brane 解 [Callan-Harvey-Strominger (1991)]

$$ds_{\text{NS5}}^2 = dx_{034567}^2 + H(\vec{R}) dx_{1289}^2, \quad e^{2\phi} = H(\vec{R}),$$

$$H_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho}{}^\lambda \partial_\lambda \log H(\vec{R}), \quad H(\vec{R}) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q}{|\vec{R}|^2}, \quad \vec{R} \in \mathbb{R}_{1289}^4$$

$X^9$  方向をコンパクト化 – 周期的に並べた NS5-brane

$$H(r, X^9) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q}{2r} \frac{\sinh r}{\cosh r - \cos X^9}$$

## H-monopole and KK-monopole

NS5-brane 解 [Callan-Harvey-Strominger (1991)]

$$ds_{\text{NS5}}^2 = dx_{034567}^2 + H(\vec{R}) dx_{1289}^2, \quad e^{2\phi} = H(\vec{R}),$$

$$H_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho}{}^\lambda \partial_\lambda \log H(\vec{R}), \quad H(\vec{R}) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q}{|\vec{R}|^2}, \quad \vec{R} \in \mathbb{R}_{1289}^4$$

$X^9$  方向をコンパクト化 – 周期的に並べた NS5-brane

$$H(r, X^9) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q}{2r} \frac{\sinh r}{\cosh r - \cos X^9} \longrightarrow \frac{1}{g^2} + \frac{Q}{2r}, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}_{128}^3$$

$X^9$  方向平均化 – H-monopole (smeared NS5-brane)

## H-monopole を $X^9$ 方向へ T-dual = Kaluza-Klein monopole

$$ds_{\text{KKM}}^2 = dx_{034567}^2 + H(r) dx_{128}^2 + H^{-1}(r) (d\tilde{X}^9 + \frac{1}{2}\omega_i dX^i)^2, \quad (i = 1, 2, 8),$$

$$d\omega = *_3 dH, \quad \phi = 0, \quad H(r) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q'}{2r}, \quad \text{rot}\vec{\omega} = -2\vec{\nabla}H$$

## KK-monopole を $X^8$ 方向へ T-dual = $5_2^2$ -brane

$$ds_{5_2^2}^2 = dx_{034567}^2 + H dx_{12}^2 + HK^{-1} ((d\tilde{X}^8)^2 + (d\tilde{X}^9)^2),$$

$$B_{89} = \frac{1}{2}K^{-1}\omega_8, \quad K = H^2 + \frac{1}{4}\omega_8^2, \quad e^{2\phi} = HK^{-1},$$

$$\omega_8 = \frac{1}{\pi\alpha'} \arctan\left(\frac{X^2}{X^1}\right), \quad H(\varrho) = h_0 + \frac{1}{2\pi\alpha'} \log \frac{\mu}{\varrho}, \quad \vec{\varrho} \in \mathbb{R}_{12}^2$$

$(\tilde{X}^8, \tilde{X}^9)$ :  $(X^8, X^9)$  の双対座標

# World-sheet viewpoint

## 非線形シグマ模型 (NLSM)

Brane geometry 上を伝搬する弦 = (1+1) 次元非線形シグマ模型

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_m X^\mu \partial^m X^\nu + \frac{1}{2} B_{\mu\nu} \varepsilon^{mn} \partial_m X^\mu \partial_n X^\nu \right. \\ \left. + \frac{i}{2} g_{\mu\nu} \Psi_-^\mu D_+ \Psi_-^\nu + \frac{i}{2} g_{\mu\nu} \Psi_+^\mu D_- \Psi_+^\nu + \frac{1}{4} R_{\mu\nu\rho\sigma} \Psi_+^\mu \Psi_+^\nu \Psi_-^\rho \Psi_-^\sigma \right]$$

## 非線形シグマ模型 (NLSM)

Brane geometry 上を伝搬する弦 = (1+1) 次元非線形シグマ模型

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_m X^\mu \partial^m X^\nu + \frac{1}{2} B_{\mu\nu} \varepsilon^{mn} \partial_m X^\mu \partial_n X^\nu \right. \\ \left. + \frac{i}{2} g_{\mu\nu} \Psi_-^\mu D_+ \Psi_-^\nu + \frac{i}{2} g_{\mu\nu} \Psi_+^\mu D_- \Psi_+^\nu + \frac{1}{4} R_{\mu\nu\rho\sigma} \Psi_+^\mu \Psi_+^\nu \Psi_-^\rho \Psi_-^\sigma \right]$$

## UV completion

Gauged linear sigma model (GLSM)  $\xrightarrow[\text{IR limit}]{} \text{String NLSM}$

2次元ゲージ理論インスタントン = 世界面インスタントン  
[Witten (1993), Morrison-Plesser (1994), Schroers (1996)]



# インスタントン補正 (H-monopole)

GLSM インスタントン補正 (H-monopole) [Tong (2002)]

$$H(r) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q}{2r}$$

# インスタントン補正 (H-monopole)

GLSM インスタントン補正 (H-monopole) [Tong (2002)]

$$H(r) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q}{2r} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{g^2} + \frac{Q}{2r} \frac{\sinh r}{\cosh r - \cos X^9}$$

# インスタントン補正 (H-monopole)

GLSM インスタントン補正 (H-monopole) [Tong (2002)]

$$H(r) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q}{2r} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{g^2} + \frac{Q}{2r} \frac{\sinh r}{\cosh r - \cos X^9}$$

$X^9$  方向の isometry を壊す – H-monopole は  $X^9$  方向に局在化

H-monopole  $\longrightarrow$  localized H-monopole  $\longrightarrow$  NS5-brane

# インスタントン補正 (KK-monopole)

GLSM インスタントン補正 (KK-monopole) [Harvey-Jensen (2005)]

$$H(r) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q'}{2r}$$

# インスタントン補正 (KK-monopole)

GLSM インスタントン補正 (KK-monopole) [Harvey-Jensen (2005)]

$$H(r) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q'}{2r} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{g^2} + \frac{Q'}{2r} \frac{\sinh r}{\cosh r - \cos X^9}$$

## インスタントン補正 (KK-monopole)

GLSM インスタントン補正 (KK-monopole) [Harvey-Jensen (2005)]

$$H(r) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q'}{2r} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{g^2} + \frac{Q'}{2r} \frac{\sinh r}{\cosh r - \cos X^9}$$

Geometrical coordinate  $\tilde{X}^9$  の補正ではない  $\implies$  winding mode 補正

## インスタントン補正 (KK-monopole)

GLSM インスタントン補正 (KK-monopole) [Harvey-Jensen (2005)]

$$H(r) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q'}{2r} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{g^2} + \frac{Q'}{2r} \frac{\sinh r}{\cosh r - \cos X^9}$$

Geometrical coordinate  $\tilde{X}^9$  の補正ではない  $\implies$  winding mode 補正

弦理論に特徴的な側面

弦は KK-momentum だけでなく、winding momentum でも時空を見ている  
cf. [Gregory-Harvey-Moore (1997)]

## インスタントン補正 (KK-monopole)

GLSM インスタントン補正 (KK-monopole) [Harvey-Jensen (2005)]

$$H(r) = \frac{1}{g^2} + \frac{Q'}{2r} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{g^2} + \frac{Q'}{2r} \frac{\sinh r}{\cosh r - \cos X^9}$$

Geometrical coordinate  $\tilde{X}^9$  の補正ではない  $\implies$  winding mode 補正

弦理論に特徴的な側面

弦は KK-momentum だけでなく、winding momentum でも時空を見ている  
cf. [Gregory-Harvey-Moore (1997)]

では non-geometric background はどのように見えているのか？



# インスタントン補正 ( $5_2^2$ -brane) [Kimura-S.S (2013)]

- 1 Defect KK-monopole へのインスタントン補正を T-dual

# インスタントン補正 ( $5_2^2$ -brane) [Kimura-S.S (2013)]

- 1 Defect KK-monopole へのインスタントン補正を T-dual
- 2 GLSM からの直接計算

# インスタントン補正された KK-monopole

インスタントン補正された KK-monopole をコンパクト化

$$H = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + (X^8 - 2\pi l)^2}} \left[ \frac{\sinh \sqrt{\varrho^2 + (X^8 - 2\pi l)^2}}{\cosh \sqrt{\varrho^2 + (X^8 - 2\pi l)^2} - \cos(X^9)} \right], \quad \vec{\varrho} \in \mathbb{R}_{12}^2$$

Smearred defect KK-monopole –  $X^8$  方向に T-dual 可能

## インスタントン補正された KK-monopole

インスタントン補正された KK-monopole をコンパクト化

$$H = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + (X^8 - 2\pi l)^2}} \left[ \frac{\sinh \sqrt{\varrho^2 + (X^8 - 2\pi l)^2}}{\cosh \sqrt{\varrho^2 + (X^8 - 2\pi l)^2} - \cos(X^9)} \right], \quad \vec{\varrho} \in \mathbb{R}_{12}^2$$

Smearred defect KK-monopole –  $X^8$  方向に T-dual 可能

インスタントン補正された  $5_2^2$ -brane geometry

$$H = h_0 + \frac{1}{2\pi\alpha'} \log \frac{\mu}{\varrho} + \frac{1}{2\pi\alpha'} \sum_{n \neq 0} e^{inX^9} K_0(|n|\varrho)$$

$K_0(x)$  : modified Bessel function

KK-monopole と同様に winding mode 補正が見える

## GLSM からの直接計算

$\mathcal{N} = (4, 4)$  GLSM for  $5_2^2$ -brane [T.Kimura's talk]

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \sum_{a=1}^k \frac{1}{e_a^2} \left\{ \frac{1}{2} (F_{01,a})^2 - |\partial_m \sigma_a|^2 - 4 |\partial_m M_{c,a}|^2 \right\} \\
 & - \frac{1}{2g^2} \left\{ (\partial_m r^1)^2 + (\partial_m r^3)^2 \right\} - \frac{g^2}{2} \left\{ (\partial_m y^2)^2 + (D_m \gamma^4)^2 \right\} \\
 & - \sum_{a=1}^k \left\{ |D_m q_a|^2 + |D_m \tilde{q}_a|^2 \right\} - \sqrt{2} \varepsilon^{mn} \sum_{a=1}^k \partial_m ((\vartheta - t_{2,a}) A_{n,a}) \\
 & - 2g^2 \sum_{a,b=1}^k \left( \sigma_a \bar{\sigma}_b + 4M_{c,a} \bar{M}_{c,b} \right) - 2 \sum_{a=1}^k (|\sigma_a|^2 + 4|M_{c,a}|^2) (|q_a|^2 + |\tilde{q}_a|^2) \\
 & - \sum_{a=1}^k \frac{e_a^2}{2} \left( |q_a|^2 - |\tilde{q}_a|^2 - \sqrt{2} (r^3 - t_{1,a})^2 \right)^2 - \sum_{a=1}^k e_a^2 \left| \sqrt{2} q_a \tilde{q}_a - ((r^1 - s_{1,a}) + i(r^2 - s_{2,a})) \right|^2 \\
 & + \frac{g^2}{2} \sum_{a,b=1}^k \left( A_{c=,a} + \bar{A}_{c=,a} \right) \left( B_{c++,b} + \bar{B}_{c++,b} \right)
 \end{aligned}$$

## Small- $g$ 極限

$g \rightarrow 0$  で BPS 解が存在 [Tong (2002), Harvey-Jensen (2005)]

Analog of “constrained instantons” [Affleck (1981)]

- Fields  $r^1, r^3$  frozen ( $\langle r^3 \rangle \equiv \zeta_a$ )
- Kinetic terms of  $y^2, \gamma^4$  vanish
- $A_{m,a}, q_a$  are dynamical
- The others stay in the vacua

## Small- $g$ 極限

$g \rightarrow 0$  で BPS 解が存在 [Tong (2002), Harvey-Jensen (2005)]

Analog of “constrained instantons” [Affleck (1981)]

- Fields  $r^1, r^3$  frozen ( $\langle r^3 \rangle \equiv \zeta_a$ )
- Kinetic terms of  $y^2, \gamma^4$  vanish
- $A_{m,a}, q_a$  are dynamical
- The others stay in the vacua

(Wick rotated) Abelian-Higgs model

$$\mathcal{L}_E = \sum_{a=1}^k \left[ \frac{1}{2e_a^2} \left( F_{12,a} \pm e_a^2 (|q_a|^2 - \sqrt{2}\zeta_a)^2 + |(D_1 \pm iD_2)q_a|^2 \pm \sqrt{2}(\zeta_a + i\theta)F_{12,a} \right) \right]$$

BPS instantons in GLSM = Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO) vortices

$$F_{12,a} = \mp e_a^2 (|q_a|^2 - \sqrt{2}\zeta_a), \quad n_a = -\frac{1}{2\pi} \int d^2x F_{12,a},$$

$$(D_1 \pm iD_2)q_a = 0 \quad (a = 1, \dots, k)$$

Four-point function in instanton background

$$G_4^{(n_a)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle \bar{\psi}_{a+}(x_1) \psi_{a-}(x_2) \tilde{\psi}_{a+}(x_3) \bar{\tilde{\psi}}_{a-}(x_4) \rangle_{n_a\text{-instantons}}$$

IR で geometry への補正

$$S_{\text{NLMS}} \sim \int d^2x R_{\mu\nu\rho\sigma} \Psi_+^\mu \Psi_+^\nu \Psi_-^\rho \Psi_-^\sigma$$



## Riemann テンソルへの補正

$$\delta R_{1313}|_a = \delta R_{2323}|_a = -\frac{\mathcal{N}}{4R_a} \sum_{n_a=1}^{\infty} n_a^2 e^{-n_a R_a} (e^{in_a X^9} + e^{-in_a X^9}),$$
$$\delta R_{1323}|_a = -\delta R_{2313}|_a = -\frac{\mathcal{N}}{4R_a} \sum_{n_a=1}^{\infty} n_a^2 e^{-n_a R_a} (e^{in_a X^9} - e^{-in_a X^9})$$

## Riemann テンソルへの補正

$$\delta R_{1313}|_a = \delta R_{2323}|_a = -\frac{\mathcal{N}}{4R_a} \sum_{n_a=1}^{\infty} n_a^2 e^{-n_a R_a} (e^{in_a X^9} + e^{-in_a X^9}),$$

$$\delta R_{1323}|_a = -\delta R_{2313}|_a = -\frac{\mathcal{N}}{4R_a} \sum_{n_a=1}^{\infty} n_a^2 e^{-n_a R_a} (e^{in_a X^9} - e^{-in_a X^9})$$

## 計量 (harmonic function) への補正

$$H = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^k \sum_{n_a=1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}}{R_a} \left( e^{-n_a R_a + in_a X^9} + e^{-n_a R_a - in_a X^9} \right)$$

$\mathcal{N}$  : volume of centered moduli space of instantons

最後に  $\text{codim}=2$  への reduction ( $k \rightarrow \infty$ ) すると

最後に codim=2 への reduction ( $k \rightarrow \infty$ ) すると

GLSM インスタントン補正された  $5_2^2$ -brane

$$H = h_0 + \frac{\mathcal{N}}{2\pi} \log \frac{\mu}{\varrho} + \frac{\mathcal{N}}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inX^9} K_0(|n|\varrho)$$

最後に codim=2 への reduction ( $k \rightarrow \infty$ ) すると

GLSM インスタントン補正された  $5_2^2$ -brane

$$H = h_0 + \frac{\mathcal{N}}{2\pi} \log \frac{\mu}{\varrho} + \frac{\mathcal{N}}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inX^9} K_0(|n|\varrho)$$

一方

T-dual of defect KK-monopole

$$H = h_0 + \frac{1}{2\pi} \log \frac{\mu}{\varrho} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inX^9} K_0(|n|\varrho)$$

最後に codim=2 への reduction ( $k \rightarrow \infty$ ) すると

GLSM インスタントン補正された  $5_2^2$ -brane

$$H = h_0 + \frac{\mathcal{N}}{2\pi} \log \frac{\mu}{\varrho} + \frac{\mathcal{N}}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inX^9} K_0(|n|\varrho)$$

一方

T-dual of defect KK-monopole

$$H = h_0 + \frac{1}{2\pi} \log \frac{\mu}{\varrho} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inX^9} K_0(|n|\varrho)$$

$\mathcal{N} = 1$  とすると defect KK-monopole instanton 補正から得られた結果と一致

# まとめ

# Summary and future directions

まとめ



# Summary and future directions

## まとめ

- Exotic brane の一つである  $5\frac{1}{2}$ -brane geometry への world-sheet インスタントン補正を調べた

# Summary and future directions

## まとめ

- Exotic brane の一つである  $5\frac{1}{2}$ -brane geometry への world-sheet インスタントン補正を調べた
- Defect KK-monopole へのインスタントン補正を T-dual

# Summary and future directions

## まとめ

- Exotic brane の一つである  $5\frac{1}{2}$ -brane geometry への world-sheet インスタントン補正を調べた
- Defect KK-monopole へのインスタントン補正を T-dual
- 新しく見つけた GLSM を用いてインスタントンを計算

# Summary and future directions

## まとめ

- Exotic brane の一つである  $5\frac{1}{2}$ -brane geometry への world-sheet インスタントン補正を調べた
- Defect KK-monopole へのインスタントン補正を T-dual
- 新しく見つけた GLSM を用いてインスタントンを計算
- 両者は一致し、winding 座標での局在化が見られた

# Summary and future directions

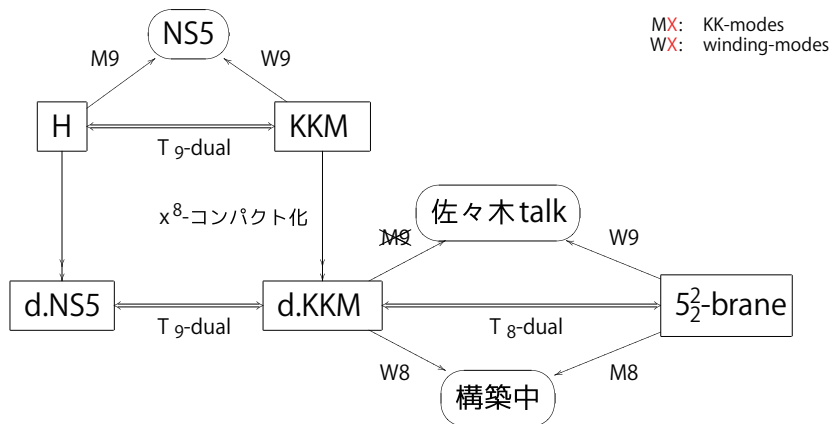
## まとめ

- Exotic brane の一つである  $5\frac{1}{2}$ -brane geometry への world-sheet インスタントン補正を調べた
- Defect KK-monopole へのインスタントン補正を T-dual
- 新しく見つけた GLSM を用いてインスタントンを計算
- 両者は一致し、winding 座標での局在化が見られた

## 今後の展望

## 今後の展望

- もう一つの T-dual circle への局在化は (work in progress)



- Exotic brane 世界体積理論 (work in progress)



- Exotic brane 世界体積理論 (work in progress)
- Double field theory [[Hull-Zwiebach \(2009\), etc.](#)] での取り扱い

$$\Phi(x)$$

- Exotic brane 世界体積理論 (work in progress)
- Double field theory [Hull-Zwiebach (2009), etc.] での取り扱い

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi(x, \tilde{x})$$

- Exotic brane 世界体積理論 (work in progress)
- Double field theory [Hull-Zwiebach (2009), etc.] での取り扱い

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi(x, \tilde{x})$$

- などなど

ご清聴ありがとうございました。