弦理論の可積分性と三角圏構造

○弓林　司、齋藤　暁、脇本　佑紀

首都大学東京　高エネルギー理論研究室　D 2

2013 年 8 月 23 日

研究の目的と概要

- 本研究の目的は String 理論の相関函数 Φ を用いて Soliton 理論の τ 函数の零点や不定点の持つ構造について調べる事である。

$$\tau(\mathbf{p}, \mathbf{z}, G) := \frac{\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, G)}{\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, 0)} \tag{1}$$

- KP 階層が持つ八面体構造から τ 函数に三角圏の構造を見出し可積分性を圏論的視点から調べた。

結果

- τ 函数の零点や不定点（集合）の $\Lambda(\infty)$ は相関函数 Φ の零点により生成される。
- $\Lambda(\infty)$ は、τ 函数の成す "三角圏" の Null System と同定され、三角圏を局所化する。
- また、$\Lambda(\infty)$ は、"特異点閉じ込め" により Projective/Injective Resolution を起こし、不変周期点多様体 (IVPP) の列と同一視される。
- 特に、系の可積分性と IVPP の生成との間には関係が知られており、この結果と合わせると、"圏論的な可積分性" の条件が明らかになってきた（と考えている）。

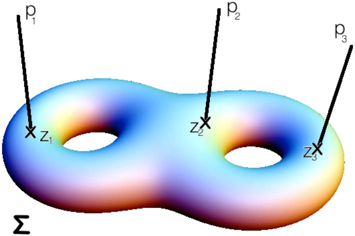
目次

第一部　：　String/Soliton 対応と τ 函数の成す "三角圏"

String/Soliton 対応：

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, G) :=< 0| \prod_{i=1}^{4} V(p_i, z_i)|G > \Longleftrightarrow \tau(\mathbf{p}, \mathbf{z}, G) := \frac{\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, G)}{\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, 0)} \qquad (2)$$

- $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, G)$： Tachyon 相関函数
- $\tau(\mathbf{p}, \mathbf{z}, G)$：KP 階層の解
- $V(p, z) := :e^{ipX(z)}$：Vertex Operator
- $|G>$：佐藤 Grassmann 多様体
- $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4), \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$



Vertex Operator Algebra (VOA)：

$$V(p,z)V(p',z') = (-1)^{pp'}V(p',z')V(p,z) \tag{3}$$

$$\Longrightarrow \psi_{\pm}(z) := V(\pm 1, z), \quad \psi_{\pm} : \text{Fermionic operator} \tag{4}$$

VOA と、Soliton 理論の解の間の変換（auto-Bäcklund 変換）$e^{\psi_{\pm}(z)}$ より、

$$e^{\psi_{\pm}(z)} = 1 + \psi_{\pm}(z) \Rightarrow \psi_{\pm}(z) = e^{\psi_{\pm}(z)} - 1 \tag{5}$$

を満たす。つまり $\hat{\mathrm{D}}_j^{\pm} \sim \psi_{\pm}(z_j)$ をある種の差分（変換後-変換前）と考える事が出来る。

この発表ではこの差分 $\hat{\mathrm{D}}_j^{\pm}$ を Bäcklund 差分と呼ぶ事にする。

Bäcklund 差分 $\hat{\mathrm{D}}_j^{\pm}$ の作用

String Amplitude：

$$\Phi_j(\mathbf{p},\mathbf{z},G) := \hat{\mathrm{D}}_j^{\pm}\Phi(\mathbf{p},\mathbf{z},G) :=< 0|\prod_{i=1}^{4} V(p_i,z_i)\psi_{\pm}(z_j)|G> \tag{6}$$

$$\Phi_{ij}(\mathbf{p},\mathbf{z},G) = -\Phi_{ji}(\mathbf{p},\mathbf{z},G) \Longrightarrow \Phi_{ii}(\mathbf{p},\mathbf{z},G) = 0 \tag{7}$$

τ 函数：

$$\tau_j(\mathbf{p},\mathbf{z},G) := \hat{\mathrm{D}}_j^{\pm}\tau(\mathbf{p},\mathbf{z},G) = \tau(\mathbf{p}+\mathbf{e}_j,\mathbf{z},G) \tag{8}$$

$$\tau_{ij}(\mathbf{p},\mathbf{z},G) = \tau_{ji}(\mathbf{p},\mathbf{z},G) \Longrightarrow \tau_{ii}(\mathbf{p},\mathbf{z},G) = \frac{\Phi_{ii}(\mathbf{p},\mathbf{z},G)}{\Phi_{ii}(\mathbf{p},\mathbf{z},0)} = \frac{0}{0} =? \tag{9}$$

つまり、String Amplitude は Bäcklund 差分の作用で “複体” を成し、τ 函数は Bäcklund 差分の作用で “Shift” する。

しかし、τ 函数を Bäcklund 差分で二回 Shift したものは、“不定点” に行ってしまい、どのように扱うべきか解らない⋯！

Bäcklund 外差分

Bäcklund 差分による "外差分"：

$$\mathrm{d}_B F(\mathbf{p}) := \sum_{i=1}^{4} \hat{\mathrm{D}}_j F(\mathbf{p}) \wedge \mathrm{d}p_i \tag{10}$$

Bäcklund 外差分は $\tau(\mathbf{p})$ を $\mathrm{D}\tau(\mathbf{p})$ に shift する。

ここで、

$$\Xi_4^n := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^4 \middle| \sum_{i=1}^{4} p_i = n \right\} \subset \mathbb{Z}^3 \tag{11}$$

と定義すると Bäcklund 外差分は、

$$\tau^{-1}\mathrm{d}_B\tau : \Xi_4^n \to \Xi_4^{n+1} \tag{12}$$

と作用する。

記法のまとめ

以降で用いる記法をまとめておく。

- 4 次元空間：

$$\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^4, \quad \Xi_4^n := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^4 \middle| \sum_{i=1}^{4} p_i = n \right\}, \quad \tau^{-1}\mathrm{d}_B\tau : \Xi_4^n \to \Xi_4^{n+1}, \tag{13}$$

- 3 次元空間（n を固定）：

$$\Xi_3^{(t,n)} := \left\{ \mathbf{p} \in \Xi_4^n \middle| \sum_{i=1}^{3} p_i = t \right\}, \quad \tau^{-1}\mathrm{d}_T\tau : \Xi_3^{(t,n)} \to \Xi_3^{(t+1,n)} \tag{14}$$

- 2 次元空間　1（n, t を固定）：

$$\Xi_2^{(q,t,n)} := \left\{ \mathbf{p} \in \Xi_3^{(t,n)} \middle| \sum_{i=1}^{2} p_i = q \right\}, \quad \tau^{-1}\mathrm{d}_Q\tau : \Xi_2^{(q,t,n)} \to \Xi_2^{(q+1,t,n)} \tag{15}$$

- 2 次元空間　2（n, p_3 を固定）：

$$\tau^{-1}\mathrm{d}_Q\tau = \tau^{-1}\mathrm{d}_T\tau \tag{16}$$

KP 階層 $\sim$ 広田三輪方程式

KP 階層を記述する広田三輪方程式（HM eq）は $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^4$ を変数とする方程式で、

$$a_{12}a_{34}\tau_{12}(\mathbf{p})\tau_{34}(\mathbf{p}) - a_{13}a_{24}\tau_{13}(\mathbf{p})\tau_{24}(\mathbf{p}) + a_{23}a_{14}\tau_{23}(\mathbf{p})\tau_{14}(\mathbf{p}) = 0 \tag{17}$$

で与えられる可積分系である。但し、

- $a_{ij} = -a_{ji}$
- $\tau(\mathbf{p}) := \tau(\mathbf{p}, \mathbf{z}, G)$

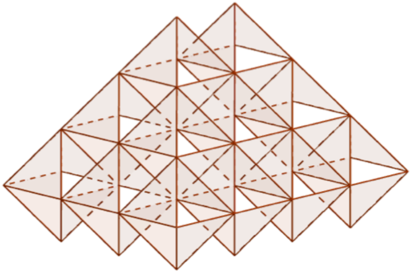
とおいた。

特に “1 つの HM eq” は $n = \sum_{i=1}^{4} p_i$ と置くと Ξ_4^{n+2} の上で定義されている事が解る。

八面体空間

HM eq が定める空間 Ξ_4^{n+2} は適当な座標変換 $\mathbf{p} \to (n, \mathbf{k})$ で３次元格子空間内の八面体埋め尽くし空間を成す。

以降では $n+2$ を固定することにする。



HM eq と Bäcklund 外差分

HM eq の成分 $F(\mathbf{p}) := a_{ij}\tau_{ij}(\mathbf{p})$ は Bäcklund 外差分形式を使って、

$$F(\mathbf{p}) := \sum_{i,j=1}^{4} F_{ij}(\mathbf{p})\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}p_j \tag{18}$$

とまとめて書いておくと便利である。

この式を "3 次元空間 $\{\mathrm{d}p_i\}_{i=1..3}$ に制限" し、

$$F(\mathbf{p}) \quad = \quad \mathrm{d}_T\left(F_4(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{3} F_i(\mathbf{p})\mathrm{d}p_i\right) \tag{19}$$

を分けると、3 次元 Bäcklund 外差分 d_T は、

$$\mathrm{d}_T\left(F_4(\mathbf{p})\right) = \sum_{i=1}^{3} F_{i4}(\mathbf{p})\mathrm{d}p_i \tag{20}$$

$$\mathrm{d}_T\left(\sum_{i=1}^{3} F_i(\mathbf{p})\mathrm{d}p_i\right) = \sum_{i,j=1}^{3} F_{ij}(\mathbf{p})\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}p_j \tag{21}$$

と作用する。この操作は相対論で電場と磁場を分ける操作と同様である。

HM eq と三角形と八面体

- 八面体空間に制限された Shift：

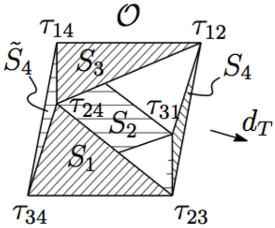
$$\tau^{-1}\mathrm{d}_T\tau : \Xi_3^{(t,n)} \to \Xi_3^{(t+1,n)}, \quad \tau^{-1}\mathrm{d}_T\tau : p_4 \to p_4 - 1, \quad \Xi_3^{(t,n)} := \left\{ \mathbf{p} \in \Xi_4^n \middle| t := \sum_{i=1}^{3} p_i \right\} \tag{22}$$

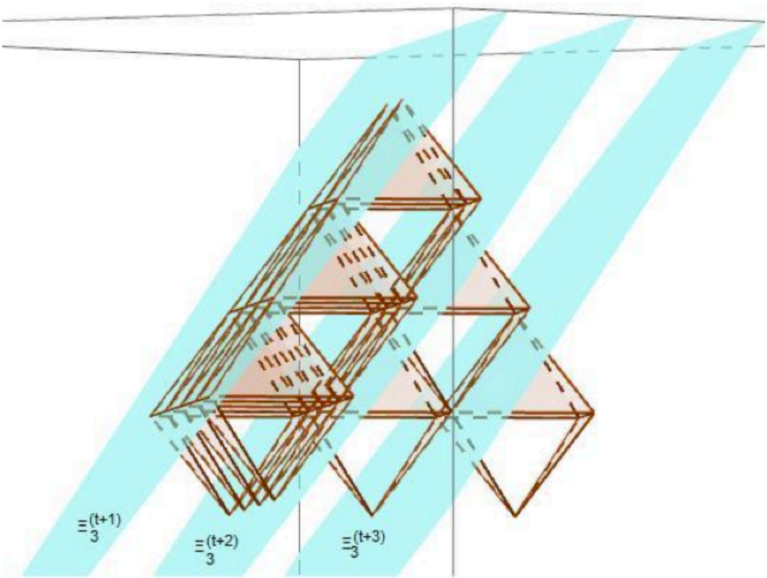
- 三角形：HM eq の成分は二つの三角形、

$$\tilde{S}_4[t+1] := (\tau_{14}[t+1], \tau_{24}[t+1], \tau_{34}[t+1]) \tag{23}$$

$$S_4[t+2] := (\tau_{23}[t+2], \tau_{13}[t+2], \tau_{12}[t+2]) \tag{24}$$

  より成る。
- 八面体：$O[t] := (\tilde{S}_4[t+2], S_4[t+1])$ は Ξ_4^{n+2} の中の一つの八面体になる。特に八面体の中心は $\tau(\mathbf{p})$ である。





$\Xi_3^{(t+1)}$
$\Xi_3^{(t+2)}$
$\Xi_3^{(t+3)}$

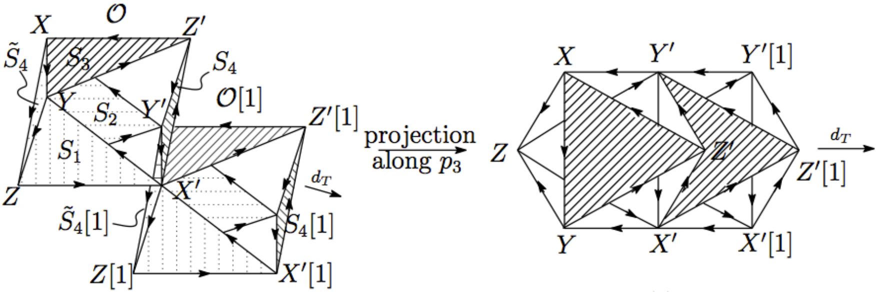
接続条件

d_T の作用で八面体は隣の八面体に移る：

$$\mathrm{d}_T : O[t] \to O[t+1] \tag{25}$$

八面体の情報の流れがつながっていく為には以下の接続条件が必要である：

$$\tau_{14}[t+1] = \tau_{13}[t], \quad \tau_{24}[t+1] = \tau_{23}[t] \tag{26}$$



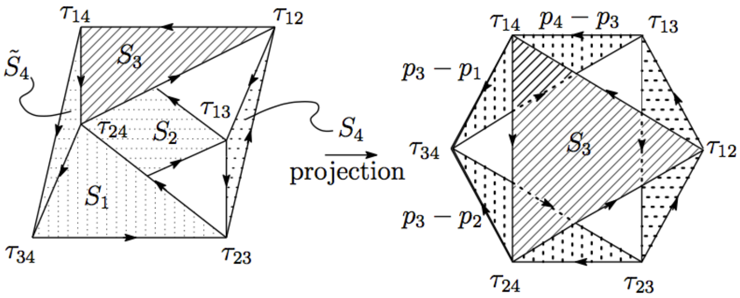
八面体上の情報の流れ

τ 函数の移動：

$$\mathrm{D}(ij,kl) := \hat{\mathrm{D}}_i \hat{\mathrm{D}}_j \hat{\mathrm{D}}_l^{-1} \hat{\mathrm{D}}_k^{-1} : \tau_{ij} \to \tau_{kl} \tag{27}$$

八面体上の τ 函数に以下のような順序付けられた流れを定義する：

$$\mathrm{D}(ij,ik) := \hat{\mathrm{D}}_k \hat{\mathrm{D}}_j^{-1} : \tau_{ij} \to \tau_{ik} \text{ iff } k < i < j \tag{28}$$



これまでの議論から、

$$\mathcal{HM} := (\tau_{ij}, \mathrm{D}(ij, ik), \mathrm{d}_T) \tag{29}$$

- 対象：$\tau_{ij} : \Xi_4^{n+2} \to \mathbb{C}$
- 射：$\mathrm{D}(ij, kl) : \tau_{ij} \to \tau_{kl}$
- Shift 函手：$\mathrm{d}_T : \tilde{S}[t] \to \tilde{S}[t+1], \quad \mathrm{d}_T : S[t] \to S[t+1]$
- 八面体公理：八面体上の順序付けられた流れ

は特別三角形の公理を満たす三角系列を持つ "圏" となる。従って "三角圏" となる。

注意：広田三輪方程式は非線形方程式なのでそのまま加法圏になるか不明である。その意味で $\mathcal{HM}$ は三角圏と同じ三角形構造を持つ、という言い方が厳密である。

第二部　：　HM eq の写像化と “三角圏” の局所化

2次元への Reduction　1

ここからは今までの議論を具体的に扱うべく得られた3次元八面体空間を2次元に Reduction する。

まず $n = \sum_{i=1}^{4} p_i$, $t = \sum_{i=1}^{3} p_i$ を固定する。つまり $n - t = p_4$ が固定される。

今度は、

$$q := p_1 + p_2, \quad j := p_1 - p_2 \tag{30}$$

を定義する。このとき2次元に制限した Bäcklund 外差分、

$$\mathrm{d}_Q F(\mathbf{p}) := D_1 F(\mathbf{p}) \wedge \mathrm{d}p_1 + D_2 F(\mathbf{p}) \wedge \mathrm{d}p_2 \tag{31}$$

を定義すると τ 函数は、

$$\tau^{-1}\mathrm{d}_Q\tau : \Xi_2^{(q,t,n)} \to \Xi_2^{(q+1,t,n)}, \quad \Xi_2^{(q,t,n)} := \left\{ \mathbf{p} \in \Xi_3^{(t,n)} | q = \sum_{i=1}^{2} p_i \right\} \tag{32}$$

$$p_1 \to p_1 + 1 \Rightarrow j \to j + 1, \quad p_2 \to p_2 + 1 \Rightarrow j \to j - 1 \tag{33}$$

と移動する。

$t = q + p_3$ より t の代わりに p_3 を固定すると q と t の変化が等しくなる。従って $\mathbf{p}$ の成分のうち Bäcklund 外差分で動くのは p_1, p_2 のみとなる。

$$\tau^{-1}\mathrm{d}_T\tau = \tau^{-1}\mathrm{d}_Q\tau : \Xi_2^{(q,t,n)} \to \Xi_2^{(q+1,t+1,n)} \tag{34}$$

$$p_1 \to p_1 + 1 \Rightarrow j \to j+1, \quad p_2 \to p_2 + 1 \Rightarrow j \to j-1 \tag{35}$$

このとき $\Xi_3^{(q+1,t+1,n)}$ の上に、

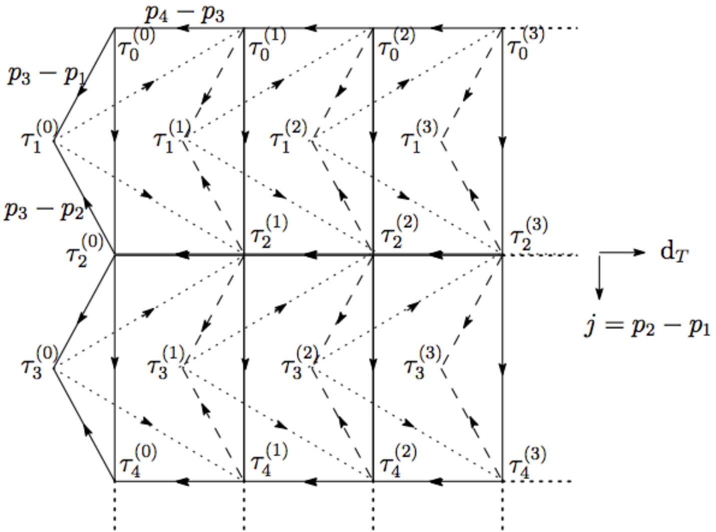
$$\left(\tau_{j-1}^{(t+1)}, \tau_j^{(t+1)}, \tau_{j+1}^{(t+1)}\right) = (\tau_{24}, \tau_{34}, \tau_{14}) \tag{36}$$

がくっ付く。

更に "写像化" の為、

$$\tau_{j+d}^{(t)} = \tau_j^{(t)}, \quad {}^{\forall}d \in \mathbb{N} \tag{37}$$

と周期的境界条件をおく。



$p_4 - p_3$
$p_3 - p_1$
$p_3 - p_2$
$\tau_0^{(0)}$ $\tau_0^{(1)}$ $\tau_0^{(2)}$ $\tau_0^{(3)}$
$\tau_1^{(0)}$ $\tau_1^{(1)}$ $\tau_1^{(2)}$ $\tau_1^{(3)}$
$\tau_2^{(0)}$ $\tau_2^{(1)}$ $\tau_2^{(2)}$ $\tau_2^{(3)}$
$\tau_3^{(0)}$ $\tau_3^{(1)}$ $\tau_3^{(2)}$ $\tau_3^{(3)}$
$\tau_4^{(0)}$ $\tau_4^{(1)}$ $\tau_4^{(2)}$ $\tau_4^{(3)}$
d_T
$j = p_2 - p_1$

三角圏の局所化と Null System

三角圏 $\mathcal{T}$ は Null system $\mathcal{N}$ から定義される積閉系 $\mathcal{S}(\mathcal{N})$ により局所化される。その議論をこれまでに得た "三角圏" $\mathcal{HM}$ に適用したい。

実は、始めに出てきた不定点（集合）を、

$$\lambda(\mathbf{p}) := \left\{ \frac{\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, G)}{\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, 0)} \mid \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, G) = \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, 0) = 0 \right\} \tag{38}$$

と定義すると、今から見ていくように $\lambda(\mathbf{p})$ は 0 を含み、かつ、"Gauge 変換" の軌道 $\Lambda(\infty)$ を生成する。そしてこの $\Lambda(\infty)$ が Null System の定義を満たす。

$$\Lambda(\infty) := \{\lambda(\mathbf{p})\} \tag{39}$$

写像化と “Gauge 対称性”

天下り的ではあるが、以下のような函数変換、

$$x_j^{(t)} = \frac{\tau_{j+\epsilon+1}^{(t)}\tau_{j-\epsilon}^{(t+1)}}{\tau_{j+1}^{(t)}\tau_j^{(t+1)}} \tag{40}$$

を行う。この変換において分母と分子それぞれの τ 函数の t の和と j の和がそれぞれ等しい。従って、ϕ で書かれた τ 函数の定義を思い出すと真空相関函数 $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}, 0)$ が打ち消し合い、

$$x_j^{(t)} = \frac{\Phi_{j+\epsilon+1}^{(t)}\Phi_{j-\epsilon}^{(t+1)}}{\Phi_{j+1}^{(t)}\Phi_j^{(t+1)}} \tag{41}$$

と書ける。つまり函数変換後の世界では τ 函数と相関函数 Φ は $\lambda(\mathbf{p})$ を除き区別されない。

より一般にはこの函数変換は以下の “Local Gauge 変換” で不変となる。

$$g : \tau_j^{(t)} \to e^{\int^t \mathrm{d}t' \nu(t') + \int^j \mathrm{d}j' \mu(j')} \tau_j^{(t)}, \quad {}^\forall \nu(t), \mu(j) \tag{42}$$

函数変換 $\tau_j^{(t)} \to x_j^{(t)}$ を HM eq に代入すると $d=3$ のとき以下の 3 次元（可積分）Lotka-Volterra 写像（LV 写像）を得る。

LV 写像：

$$
\begin{cases}
x_1^{(t+1)} = x_1^{(t)} \dfrac{1 - x_2^{(t)} + x_2^{(t)} x_3^{(t)}}{1 - x_3^{(t)} + x_3^{(t)} x_1^{(t)}} \\
x_2^{(t+1)} = x_2^{(t)} \dfrac{1 - x_3^{(t)} + x_3^{(t)} x_1^{(t)}}{1 - x_1^{(t)} + x_1^{(t)} x_2^{(t)}} \\
x_3^{(t+1)} = x_2^{(t)} \dfrac{1 - x_1^{(t)} + x_1^{(t)} x_2^{(t)}}{1 - x_2^{(t)} + x_2^{(t)} x_3^{(t)}}
\end{cases}
\tag{43}
$$

不変量：

$$
\begin{cases}
r = x_1^{(t)} x_2^{(t)} x_3^{(t)} \\
s = \left(1 - x_1^{(t)}\right)\left(1 - x_2^{(t)}\right)\left(1 - x_3^{(t)}\right)
\end{cases}
\tag{44}
$$

$\Lambda(\infty)$ の LV 写像に依る振る舞いを見るべく "初期点"$\mathbf{x}^{(1)} := (\infty, 0, 1)$ を選ぶ。

LV 写像は二つの不変量を持つので初期点の条件と合わせると初期点（-1 の点）を不変量だけで書く事が出来る。

$$\mathbf{x}^{(0)} := \left(\frac{r-s}{r+1}, r\frac{s+1}{r-s}, \frac{r+1}{s+1}\right) \tag{45}$$

この点は LV 写像で、

$$\mathbf{x}^{(0)} = \left(\frac{r-s}{r+1}, r\frac{s+1}{r-s}, \frac{r+1}{s+1}\right) \to \mathbf{x}^{(1)} = (\infty, 0, 1) \to \mathbf{x}^{(2)} = (1, 0, \infty) \to \mathbf{x}^{(3)} \to \dots \tag{46}$$

と振る舞う。但し、$\mathbf{x}^{(3)}$ は、

$$\mathbf{x}^{(3)} = \left(\frac{r+1}{s+1}, r\frac{s+1}{r-s}, \frac{r-s}{r+1}\right) \tag{47}$$

と初期点の情報に依存した有限の値となる。

つまり一度無限大に発散した点が発散する前の点の情報を持って有限の点に返って来たのである。この現象を "特異点閉じ込め" と呼ぶ。

以上の話は、Gauge 対称な函数 $\mathbf{x}^{(t)}$ で見たが、同様の事を τ 函数の立場で見ると、不定点と出会うことになる。

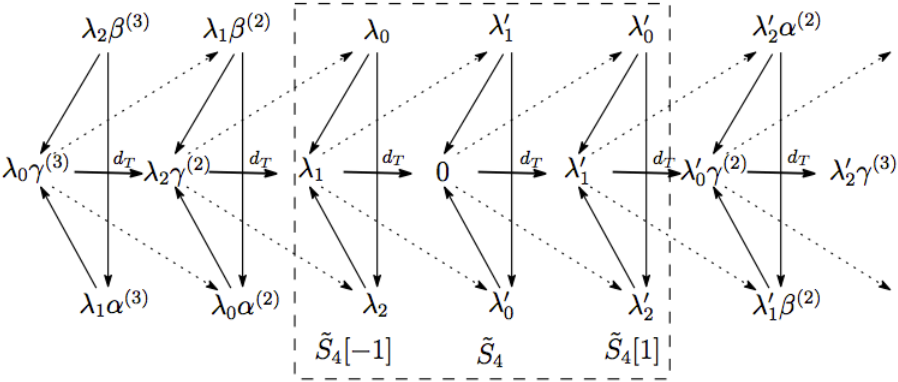
$\mathbf{x}^{(0)}$ を定める事で $\boldsymbol{\tau}^{(0)}$ が求まる。しかし $\mathbf{x}^{(0)}$ は $\boldsymbol{\tau}^{(0)}, \boldsymbol{\tau}^{(1)}$ で構成されているものの $\boldsymbol{\tau}^{(1)}$ は決まらない。

また、$\boldsymbol{\tau}^{(0)}$ が定まれば、写像を解いていくことで、次々$\boldsymbol{\tau}^{(t)}$ が求まるが、ある式を 0 に置いてしまうと、式が足らず、解く事が出来ない。つまり、更に不定な $\boldsymbol{\tau}$ が発生する。

$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = (\lambda_1\beta^{(0)}, \lambda_2\gamma^{(0)}, \lambda_0\alpha^{(0)}), \tau^{(1)} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ と置くと、

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = (\lambda_1\beta^{(0)}, \lambda_2\gamma^{(0)}, \lambda_0\alpha^{(0)}) \to (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \to (\lambda_2, 0, \lambda_1) \to (\lambda_0', \lambda_1', \lambda_2') \to \dots \quad (48)$$

λ だけで書かれる部分が不定部分である。



$$\tilde{S}_4[-1], \tilde{S}_4[0], \tilde{S}_4[1] \subset \Lambda(\infty) \tag{49}$$

特に今得た図式から以下のような図式を読み取る事が出来る：

$$
\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, dotted, "u"] & & \\
\lambda'_1 \arrow[rr, "\pi"] & & \lambda'_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \lambda'_0 \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, dotted, "u"'] & & \lambda'_2 \arrow[dl, dotted] \\
& & I &
\end{tikzcd}
$$

ここで P, I はそれぞれ、

$$P := \cdots \lambda_0 \gamma^{(3)} \to \lambda_2 \gamma^{(2)} \to \lambda_1 \tag{50}$$

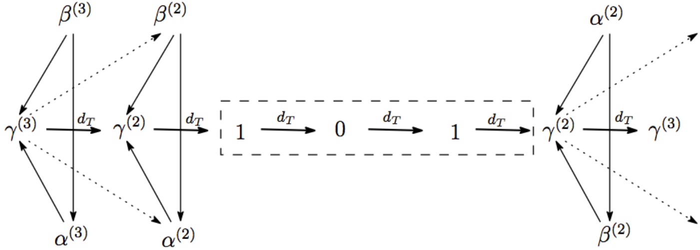
$$I := \lambda'_1 \to \lambda'_0 \gamma^{(2)} \to \lambda'_2 \gamma^{(3)} \to \cdots \tag{51}$$

である。

このことから P, I はそれぞれ "射影的対象"、"入射的対象" であり、λ'_0 の "Projective/Injective Resolution" を与える。

局所化

“三角圏”$\mathcal{HM}$ を Null set$\Lambda(\infty)$ から得られる積閉系 $\mathcal{S}(\mathcal{N})$（$\Lambda(\infty)$ を不変にする Gauge 変換）で局所化した圏 $\mathcal{HM}/\mathcal{S}(\mathcal{N})$ において先ほどの系列を見ると、



となる。以前の図と比べて解るように局所化によって λ の不定性がなくなっている。

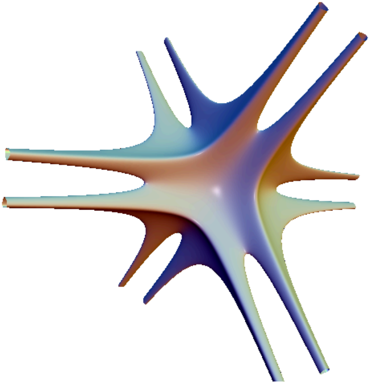
可積分性との関係

問：Projective/Injective resolution で得た $\gamma^{(n)}$ 達は一体何者なのか？

答え：不変周期点多様体（IVPP）を生成する多項式

特に IVPP を持つ有理写像に対し以下が成り立つ：

- IVPP 定理：ある条件を満たす有理写像は IVPP を持つとき可積分である



まとめ

- τ 函数は、4、3、2次元の Bäcklund 外差分の作用で、“三角圏構造” を持つ。
- τ 函数は、佐藤 Grassmann 多様体上の Plücker 関係式を満たし、零点を持たない。しかし、τ 函数が定める不定点集合 $\Lambda(\infty)$ が、Gauge 対称性を持つ写像化を通して、“三角圏”$\mathcal{HM}$ の Null system となった。つまり、写像化を通して “三角圏”$\mathcal{HM}$ は局所化される。
- $\Lambda(\infty)$ は Projective/Injective Resolution を持ち、写像の周期点多様体を定める多項式列と同一視される。
- 周期点多様体の存在と系の可積分性は密な関係にあると考えられている。従って圏論的な可積分性の公理として、“三角圏”、“接続条件”、“Projective/Injective Resolution を持つ” と取る事が良いと予想される。

ありがとうございました