

# 時間とエネルギーの不確定性関係 II. — 非可換性の視点から

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報科学研究科

e-mail: tanimura[AT]is.nagoya-u.ac.jp

Uncertainty Relation between Time and Energy. II.  
From the Viewpoint of Noncommutativity

Shogo Tanimura

*Graduate School of Information Science, Nagoya University, Japan*

(2014年1月21日 受理)

## 概要

素粒子論研究・電子版 Vol. 16 (2014) No. 5 において堀田昌寛氏は私の前回の論文に対して批判的なコメントを寄せているが、それは堀田氏自身の誤解に基づくコメントと思われる。本稿では、堀田氏の誤解を解くべく、前論文よりも詳細な解説を述べる。また、対象系と測定系間の相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係にとっては、孤立系のハミルトニアンと相互作用ハミルトニアンの非可換性が本質的であることを強調しつつ、いくつかのモデルを詳述する。

## 1 序

私は素粒子論研究（電子版）に「時間とエネルギーの不確定性関係—腑に落ちない関係」と題する論文（以下では前回の論文または前論文と呼ぶ）を投稿した [1]。それに対して堀田昌寛氏は、私の結論の一部に対して異を唱え批判的なコメントを寄せている [2]。しかし、堀田氏は私の解説を誤解しており、氏の批判は的外れなものと思われる。本稿では堀田氏の誤解を解きつつ、時間とエネルギーの不確定性関係の内容を再考する。

一方で、いわゆる位置と運動量の不確定性関係は、それぞれの物理量を表す演算子の非可換性の帰結だと考えられているが、時間を表す演算子は数学的に存在しないと考えられており、時間とエネルギーの不確定性関係の起源をそれらに対応する演算子の非可換性に求めることは難しい。しかし、測定過程時間とエネルギー移動量の不確定性関係に限って言えば、対象系と測定系の無摂動ハミルトニアンと相互作用ハミルトニアンの非可換性が時間・エネルギーの不確定性関係の成因と考えられる。本稿ではその点も論ずる。

また，光子箱の思考実験をめぐる議論で批判的になりやすい時計やシャッター機構に関しても，シャッターと光子の間のエネルギーのやりとりを顕わに記述できるモデルを定式化する．しかし，結局，時計やシャッター機構ははじめから測定系の一部に取り込めていたものだったことがわかるし，そうしたところで，ハミルトニアンの非可換性とエネルギー値の不確定性は回避できないことが示される．

## 2 前回の議論

前回の論文 [1] で私が書いた問題の定式化と結論をほぼそのままもう一度書く．観測される対象系 (object system) 自体のハミルトニアンを  $\hat{H}_s$ ，観測する測定器 (apparatus) のハミルトニアンを  $\hat{H}_a$  とし，両者の相互作用ハミルトニアンを  $\hat{V}$  とする．対象系と測定器を合わせた合成系は全ハミルトニアン

$$\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_a + \hat{V} \quad (1)$$

に従って時間発展する．無摂動ハミルトニアン (孤立部分系のハミルトニアンと呼んでもよい) の固有状態を

$$\begin{aligned} \hat{H}_s|\psi_s^i\rangle &= E_s^i|\psi_s^i\rangle, & \hat{H}_a|\psi_a^i\rangle &= E_a^i|\psi_a^i\rangle \\ \hat{H}_s|\psi_s^f\rangle &= E_s^f|\psi_s^f\rangle, & \hat{H}_a|\psi_a^f\rangle &= E_a^f|\psi_a^f\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

とし，合成系の初期状態がテンソル積状態  $|\psi_s^i\rangle \otimes |\psi_a^i\rangle$  だった場合，時間  $t$  が経過したのちに終状態  $|\psi_s^f\rangle \otimes |\psi_a^f\rangle$  へ遷移する確率は，摂動の 1 次近似で

$$P_{s,a}(t) = \left| \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \right|^2 \times \frac{4\pi t}{(2\hbar)^2} \times \frac{\sin^2 \left( t(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)/(2\hbar) \right)}{\pi t (E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i)^2 / (2\hbar)^2} \quad (3)$$

となる．遷移確率は時間とエネルギーの関数になり，その概形はプロファイル関数

$$F_t(x) = \frac{\sin^2(tx)}{\pi tx^2}, \quad x := \frac{1}{2\hbar}(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i) \quad (4)$$

で決まる．この関数は  $x = 0$  を最大値をとり， $tx = \pm\pi$  を最初のゼロ点に持つことから， $tx = \pm\pi$  程度の広がりを持っていると評価できる．このことは，対象系と測定器とが相互作用している時間が有限ならば

$$t(E_s^f + E_a^f - E_s^i - E_a^i) \simeq 2\pi\hbar = h \quad (5)$$

の程度の「エネルギー保存則の破れ」があってもよいという意味に解釈できる．もちろん全エネルギー  $\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_a + \hat{V}$  は真の保存量であるが，いまは無摂動ハミルトニアン  $\hat{H}_s + \hat{H}_a$  だけの固有値に注目したので，保存則が破れるように見えている．また，この結果は，

$$E_s^f - E_s^i \pm \frac{h}{t} \simeq -(E_a^f - E_a^i) \quad (6)$$

とも書ける．つまり，対象系と測定系の相互作用が働く前後の時刻に測定器のエネルギーを正確に読み取ったとしても，対象系のエネルギー変化は正確に測れず，ボケて見える．これを相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係と呼ぶのは適当そうである．

ここまでの議論は、実質的にランダウとパイエルスによる議論 [3, 4] の再現である。

アインシュタインとボーアの論争に登場した光子箱の場合は、箱の外に出た光子のエネルギーを、箱の重量計測で推定しようとしているので、「箱の外の電磁場」が間接的にエネルギーを推定される対象系であり、「箱・ばね秤・重力源としての地球および箱内部の電磁場」が直接に目盛りを読み取られる測定器である。シャッターの開閉が箱の内外の相互作用のスイッチのオンオフに相当する。従って、この場合、(3) 式中の  $t$  はシャッターの開放時間に等しい。

シャッターの開閉前後で箱のエネルギーをいかなる方法で測ってもよいが、箱のエネルギー損失  $E_a^i - E_a^f$  と、光子が持ち去るエネルギー  $E_s^f - E_s^i$  は必ずしも一致しないことを (3) や (6) 式は物語っている。シャッターの開放時間が短ければ短いほど、この不一致は大きくなる。アインシュタインは箱の重さ（すなわち  $E_a^i$  と  $E_a^f$ ）を正確に測れると仮定したが、そうしたところで、出た光子のエネルギーを正確に測ったことにはならないのである。

### 3 堀田氏の論点

以上の議論に対して堀田氏は次のような疑義を提示された。以下、堀田氏の記述 [2] を原文のまま引用する：

Web 掲載アブストラクトより引用【谷村氏による記事に対するコメント。アインシュタインの光子箱の思考実験から相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係が導かれるという谷村氏の主張は、誤解を招く表現になっている。】

本文より引用【谷村氏の解析では、箱に備え付けられている可動窓の開閉を行う装置は別扱いにし、その相互作用  $V$  はある時間  $t$  の間だけ摂動的に  $a$  と  $s$  の間に働くという扱いを行っている。一方、谷村氏はこの相互作用項まで入れた全エネルギーは保存することも認めている。アインシュタインの基本的アイデアの中でも当然この時間的に保存する全エネルギーの保存則を重視していたと考えるのが自然であろう。彼は議論を簡略化して、出ていく光子と光子箱だけでエネルギーが保存すると仮定しただけであって、光子とそれ以外の系の間のエネルギー保存則が重要であると言いたかったのではないが。そうであればアインシュタインの主張通り、相互作用時間と対象系のエネルギー増加量の誤差の間には不確定性関係は現れない。図 1 にこの設定を表した（引用では図は省略）。「箱・ばね秤・重力源としての地球および箱内部の電磁場」に加えて、窓の開閉を行う機器、そのエネルギー源であるバッテリー及びバネ振動の緩和の熱を吸収する空気まで入れて合成系を作り、それを測定器系  $A$  としてある。また対象系  $S$  は可動窓との電磁相互作用が十分に無視できるようになる波動帯領域にまで達した自由光子としてある。谷村氏の設定と同様に、窓開閉装置はある一定時間  $t$  だけ窓が開くようにプログラミングされている。全エネルギー保存則から、測定器系のエネルギー  $E_A$  と対象系のエネルギー  $E_S$  の合計は任意の時刻で保存する。各始状態でのエネルギー期待値を  $E_A^i, E_S^i$  とし、時刻  $t$  での各終状態でのエネルギー期待値を  $E_A^f, E_S^f$  とすれば

$$E_S^f - E_S^i = -(E_A^f - E_A^i) \quad (7)$$

が正確に成り立ち、不確定性関係による誤差は確かに現れない。

谷村氏は「相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係」という名前で、無摂動ハミルトニアンでの関係式 (6) を論じたが、これは誤解を与える呼称かと思われる。例えば、相互作用をする 2 粒子 A と B を衝突させてエネルギー交換をさせる場合、相互作用時間  $t$  は A から B に移動するエネルギー移動量  $\Delta E_{A \rightarrow B} = E_B^f - E_B^i$  の誤差とは全く関係がない。通常エネルギー移動量は、 $t$  とは無関係に十分時間が経って相互作用が切れる段階で測定されているためである。仮に強い相互作用を考えると典型的に  $t = O(10^{-23})$  秒の相互作用時間でエネルギー交換をするわけだが、 $\Delta E_{A \rightarrow B}$  は  $O(\hbar/t)$  から評価される GeV オーダーの量でも、その誤差は GeV よりはるかに小さくできる。一方、相互作用中の A と B の個々の単体エネルギー自身には、自然で一意的な定義は存在しない。全ハミルトニアンを無摂動項部分と相互作用項部分に分けることも摂動論的取り扱いができる範囲で自由にできるため、特定の無摂動ハミルトニアンを選択する理由はない。また繰り込み的視点から相互作用項を適当に半分に分割して A と B の単体エネルギーへの寄与に割り当てることさえも可能である。この設定で定義されるエネルギー移動量には、上の議論と同様に、相互作用をしている間でも  $O(\hbar/t)$  の不確定さは現れない。従って、光子箱の思考実験から相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係が導かれるという谷村氏の主張は、誤解を招く表現になっている。】(引用終わり)

#### 4 堀田氏が誤解している点

堀田氏は、いくつかの点で思い違いをしている。

第 1 に、堀田氏の論文の web 掲載アブストラクトおよび本文に【光子箱の思考実験から相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係が導かれるという谷村氏の主張】と書かれているが、そのような主張を私はどこにも書いていない。前論文において私は、相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係をかなり一般的なモデルの摂動近似計算によって導き、これを適用すれば光子箱の思考実験が合理的に解釈できるという旨を主張したのである。

第 2 に、私の論点を確認する。対象系と測定器系は、物理的意味がわかりやすいように、また、エネルギーの漏れを見落とさないように設定すべきだが、対象系と測定系の境目をどこに設定しても、部分系のハミルトニアン  $\hat{H}_s$  と  $\hat{H}_a$  は相互作用ハミルトニアン  $\hat{V}$  と可換ではない。だからこそ相互作用の結果として対象系のエネルギーや測定系のエネルギーが変化するのである。ゆえに、一般的なモデルでは (たまたま  $[\hat{H}_s, \hat{V}] = -[\hat{H}_a, \hat{V}]$  となるのでなければ)、部分系のハミルトニアンの和  $\hat{H}_s + \hat{H}_a$  は全ハミルトニアン  $\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_a + \hat{V}$  と可換ではない。だから  $\hat{H}_s + \hat{H}_a$  は保存量ではない。このことは前論文でも述べていることである。例として、質量  $m_1$ 、電荷  $e_1$  のアルファ粒子 (粒子 1) と質量  $m_2$ 、電荷  $e_2$  の原子核 (粒子 2) がクーロン相互作用する系を想定すれば、各部分系のハミルトニアンと相互作用ハミルトニアンは

$$\hat{H}_s = \hat{H}_1 = \frac{1}{2m_1}(\hat{\boldsymbol{p}}_1)^2 \quad (8)$$

$$\hat{H}_a = \hat{H}_2 = \frac{1}{2m_2}(\hat{\boldsymbol{p}}_2)^2 \quad (9)$$

$$\hat{V} = \frac{e_1 e_2}{\|\hat{\boldsymbol{r}}_1 - \hat{\boldsymbol{r}}_2\|} \quad (10)$$

であり,  $[\hat{H}_s, \hat{H}_a] = 0$  であるが,  $[\hat{H}_s, \hat{V}] \neq 0$  かつ  $[\hat{H}_a, \hat{V}] \neq 0$  であり,  $[\hat{H}_s + \hat{H}_a, \hat{V}] \neq 0$  でもある. また, どんな状態においても, この  $\hat{V}$  の期待値は正である:  $\langle \hat{V} \rangle > 0$ . 別の例として, Dirac 電子を系 1, 光子を系 2 とすれば, クーロンゲージにおけるハミルトニアンは

$$\hat{H}_s = \hat{H}_1 = \int \hat{\psi}^\dagger (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m\beta) \hat{\psi} d^3r, \quad (11)$$

$$\hat{H}_a = \hat{H}_2 = \frac{1}{2} \int (\hat{\mathbf{E}}_T^2 + \hat{\mathbf{B}}^2) d^3r, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \hat{V} = & -e \int \hat{\psi}^\dagger \boldsymbol{\alpha} \hat{\psi} \cdot \hat{\mathbf{A}}_T d^3r \\ & + \frac{e^2}{2} \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \frac{1}{\|\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2\|} \hat{\psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_1) d^3r_1 d^3r_2 \end{aligned} \quad (13)$$

であり, このモデルでも  $[\hat{H}_s, \hat{V}] \neq 0$ ,  $[\hat{H}_a, \hat{V}] \neq 0$ ,  $[\hat{H}_s + \hat{H}_a, \hat{V}] \neq 0$  であることに変わりはない. また,  $\hat{V}$  の期待値が必ずゼロになるわけでもない.

第 3 に, 堀田氏の論点を確認し, それが見当違いの意見であることを示そう. 堀田氏は, 部分系のエネルギーを無摂動ハミルトニアンだけを用いて定義するのは誤りであると考えたらしい. 堀田氏はハミルトニアンを書いて示してはいないが, 氏は, 対象系のハミルトニアンは  $\hat{H}_S = \hat{H}_s$  のままでよいが, 測定系のハミルトニアンを拡張して

$$\hat{H}_A = \hat{H}_a + \hat{V} \quad (14)$$

と定めるべきだと考えているようだ. たしかに

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_A \quad (15)$$

は全ハミルトニアンに一致し, 保存量になる. しかし, 上に挙げたような理由により, 問題の設定からして  $\hat{H}_S = \hat{H}_s$  と  $\hat{H}_A = \hat{H}_a + \hat{V}$  は可換ではない. 対象系の状態ベクトルを  $|\psi_s\rangle$  と測定系の状態ベクトルを  $|\psi_a\rangle$  とし, 合成系の状態ベクトルをテンソル積  $|\psi_s\rangle \otimes |\psi_a\rangle$  と書くならば, 合成系のハミルトニアンは正確には

$$\hat{H} = \hat{H}_s \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \hat{H}_a + \hat{V} \quad (16)$$

と書かれるべきものである. つまり, 相互作用ハミルトニアン  $\hat{V}$  は対象系と測定系の両方のヒルベルト空間にまたがって作用しており, それゆえに  $\hat{V}$  は  $\hat{H}_s \otimes \hat{1}$  と  $\hat{1} \otimes \hat{H}_a$  と可換ではない. したがって, 堀田氏の言わんとするところの対象系ハミルトニアン  $\hat{H}_S = \hat{H}_s$  と測定系ハミルトニアン  $\hat{H}_A = \hat{H}_a + \hat{V}$  は可換ではない. ゆえに両者は同時対角化できない. ゆえに, おのおののエネルギー固有値  $E_S, E_A$  を同時に指定することは, 一般にはできない. また, 全体系のハミルトニアン (15) の固有値  $E$  は, 各部分系のハミルトニアンの固有値の和に等しくない. 標語的に書くと,

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_A \text{ の固有値に関しては, 一般には } E \neq E_S + E_A. \quad (17)$$

非可換演算子の固有値の和が, 演算子の和の固有値に必ずしも等しくないことは, 調和振動子ハミルトニアン

$$\hat{H}_{\text{h.o.}} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{q}^2 \quad (18)$$

の例を見ても明らかだろう．右辺の 2 項は非可換であり，おのおの連続スペクトル  $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$  を持つが，左辺の  $\hat{H}_{\text{h.o.}}$  の固有値は  $\{\hbar\omega(n + \frac{1}{2}) | n = 0, 1, 2, \dots\}$  という離散スペクトルである．また，パウリ行列  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z$  は非可換であり，固有値はどちらも  $\pm 1$  だが，

$$\hat{T} = \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z \quad (19)$$

の固有値は  $\pm\sqrt{2}$  である．これらの例は，非可換演算子の固有値は，単純な加法性が成り立たないことを示している．

しかも非可換性は，さらに微妙な問題を引き起こす．拡張された測定系ハミルトニアン  $\hat{H}_A$  は対象系ハミルトニアン  $\hat{H}_S$  と可換ではないため，測定系のエネルギー値  $E_A$  を読み取る行為は，不可避的に対象系のエネルギー値  $E_S$  に擾乱を与える．そうすると，系全体のエネルギーが保存量だとしても，測定系のエネルギー初期値  $E_A^i$  を読み取った時点で，対象系のエネルギーは確定値  $E_S^i = E - E_A^i$  だとは言えなくなってしまふ．パウリ行列の例 (19) では， $\hat{T}$  の固有値  $\sqrt{2}$  の状態において  $\hat{\sigma}_z$  を測って測定値 1 を得たからといって， $\hat{\sigma}_x$  の値が  $\sqrt{2}-1$  とは言えないのと同じ理屈である．そうすると，堀田氏の言うところの全エネルギー保存の式 (7) を使って対象系のエネルギー変化を正確に決めようという試みは意味を失ってしまう．このことは，部分系のエネルギー  $E_A^i, E_S^i$  に対する同時固有ベクトルが存在しないという問題に根差している．

第 4 に，堀田氏は，関係式 (7) は測定するたびに得られる測定値（固有値）について成り立つ関係式ではなく，期待値（平均値）について正確に成立する関係式だと言っている．なぜここで急に期待値のみに主張を限定したのかわからないが，たしかに非可換物理量についても  $\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_A$  の期待値の加法性

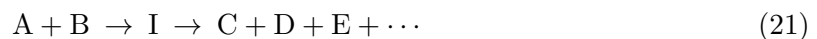
$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \hat{H}_S \rangle + \langle \hat{H}_A \rangle \quad (20)$$

は成立する．しかし，そもそもアインシュタインは量子力学が出来事確率しか予測できないこと不満とし，量子論が導くところの物理量の値の不確定性を覆そうとして，あれこれ思考実験を考案して論争していたのである．アインシュタインは「物理量の期待値が不確定であるのはおかしい」と言っていたのではなく，「一回ごとの測定値が原理的に不確定であるのはおかしい」と言いたくて，「光子箱を使えば一つ一つの光子のエネルギーを正確に決められるはずではないか」と言いたかったのではないだろうか．また，私が示した (6) 式は，一回一回の測定値のばらつきの程度を表すものであり，堀田氏が言わんとしたところの期待値についての式 (20) と矛盾しているわけではない．ケナード・ロバートソン [5, 6] による位置と運動量の不確定性関係  $\Delta Q \cdot \Delta P \geq \frac{1}{2}\hbar$  にしても，位置と運動量の同時固有状態は存在しないことを主張しているが，位置と運動量のおおのの期待値が確定しないと言っているわけではない．以上の理由により，堀田氏が示したエネルギー期待値保存則 (7) は不確定性関係を覆すものではないと判断せざるを得ない．

第 5 に，私の問題定式化に立ち戻って，どうしてこのような定式化をしたのか吟味しよう．全体系のハミルトニアンが  $\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_A + \hat{V}$  という形をしているならば，部分系のエネルギーを定めるには  $\hat{H}_S$  と  $\hat{H}_A + \hat{V}$  を各部分系のハミルトニアンとすべきだと思いたくなるのはわかるが， $\hat{H}_S = \hat{H}_S$  と  $\hat{H}_A = \hat{H}_A + \hat{V}$  とは可換でないため，各部分系のエネルギー固有値  $E_S^i, E_A^i$  を同時に指定することができず，エネルギー固有値に関しては (7) のような式を書

きたくても書けないのである．それに対して， $\hat{H}_s$  と  $\hat{H}_a$  は可換なので，エネルギー固有値  $E_s^i$  と  $E_a^i$  とを同時に指定することができて，式 (6) のようにこれらの値を比較することができる．そもそも (10) の例を見てもわかるように，相互作用ハミルトニアン  $\hat{V}$  は粒子 1 か粒子 2 のどちらか一方が所有するエネルギーとは見なせないものである．(13) の例にしても， $\hat{V}$  は各電子が持つエネルギーとは言い難いし，光子のエネルギーとも言い難いだろう．それでもまだ古典論なら，すべての物理量が可換なので，便宜的に相互作用エネルギーをどちらか一方の部分系のエネルギーであるかのように扱うことが許されるが，量子論では非可換性のために， $\hat{H}_1$  の値を確定させると， $\hat{H}_2 + \hat{V}$  の値が不確定にならざるを得なくなってしまう．これこそまさにエネルギーの不確定性関係と言うべきかもしれないが，一応，エネルギーの不確定性は時間の不確定性と関連付けて考えるならわしになっているので，いまはなるべくその線で考えているのである．以上が，保存量ではない無摂動ハミルトニアン  $\hat{H}_s + \hat{H}_a$  を考察の対象とした理由である．何を無摂動ハミルトニアンとするかという選択には任意性があるが，私の議論は，各系の無摂動ハミルトニアンをうまく選べて摂動論が適用できるなら，始状態・終状態のエネルギー固有値に関してこれこれの関係式が成立すると言っているだけである．無摂動ハミルトニアンを一意的に選ぶ原理があるとは言っていないし，つねに摂動論が適用できるとも言っていない．むしろ前論文では摂動論の適用に疑問を投げかけているくらいである．また，なぜ無摂動ハミルトニアンを使わなければならないのか，と問われるかもしれないが，私に言えることは，部分系の可換なハミルトニアンの固有値に関してなら不確定性関係が導出できるというだけのことである．非可換な部分系ハミルトニアンの固有値の和に関してはあまり実のあることが言えないので，その点に関しては私は何も言わなかった．

第 6 に，堀田氏は，強い相互作用をする粒子の衝突は  $10^{-23}$  秒程度の時間スケールで起こるので，もし谷村の主張が正しければ GeV オーダーのエネルギー値の誤差が生じるはずだが，現実にはそんなふうになっていないという趣旨の批判をしているが，これは誤解に基づく批判である．私の定式化では，相互作用時間  $t$  とはミクロ対象系とマクロ測定器とが相互作用する時間であって，ミクロ対象系自体のダイナミクスの時間スケールではない．また，私が注目したのはミクロ対象系とマクロ測定器の間で移動するエネルギーであって，ミクロ対象系自体のダイナミクスのエネルギースケールではない．もし素粒子衝突の例を引き合いに出すなら，



のように，粒子 A と B が衝突して，励起状態や共鳴状態などさまざまな中間状態 I を経て，粒子 C, D, E などが飛び散るといった過程を想定するのが適切ではなからうか．不確定性関係の議論で私が問題にしているのは，これらの生成物 C, D, E などのエネルギーを測る測定器と粒子系の相互作用の時間である．この問題を扱った前論文 7.1 から 7.3 節では，はじめから「相互作用」と言えば対象系と測定系の相互作用のことを指しているし，「相互作用時間」と言えば対象系と測定系の相互作用がオンになっている時間のことを指している．素粒子の反応においては，粒子の合体・消滅・生成・壊変が頻繁に起こるので，粒子 A, 粒子 B という identity は保たれない．むしろ，A, B, C, D などの粒子系を量子場として捉え，それらが対象系をなしていると考えるのが普通である．対象系内部の状態変化の時間スケールは

$10^{-23}$  秒程度かもしれないが、それは測定器と対象系の相互作用の時間スケールとは何の関係もない。また、素粒子間の相互作用ハミルトニアンを  $10^{-23}$  秒間隔でオンオフ切り替えているわけでもない。

実際の加速器実験における素粒子のエネルギー測定方法は複雑であり、私も完全に理解しているわけではないが、おおざっぱに言えば、粒子系自体のダイナミクスによって作り出された  $C + D + E + \dots$  などの反応生成物がエネルギーを測られるべき対象系の始状態であり、これら生成物が検出器と相互作用し、検出器の状態変化から各粒子のエネルギーを推定するのが粒子のエネルギー計測の手続きであろう。この場合、「エネルギー測定のための相互作用時間」という言葉は、反応生成物であるところの粒子群が検出器に飛び込んでから、検出シグナルを発生させて、粒子群が検出器を通り抜けるか無反応物に崩壊するかまでの時間を指すと考えるのが適当だろう。その時間スケールは  $10^{-23}$  秒よりもはるかに長く、GeV オーダーのエネルギー不確定性を伴うものではない。

堀田氏は【谷村氏は「相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係」という名前で、無摂動ハミルトニアンでの関係式 (6) を論じたが、これは誤解を与える呼称かと思われる】と論じておられるが、たしかに堀田氏自身が誤解を呈してくださったように、「相互作用時間」を「測定される対象系内部の相互作用の時間」だと思われたのは誤解である。問題定式化のはじめから示しているように、私が「相互作用時間」と呼んでいるものは「対象系と測定系の相互作用の時間」のことである。前論文を書いているときに「測定時間」と呼んだ方がよいだろうかとも思ったが、私の定式化を文字通りに読めば、初期時刻 0 にエネルギー値  $E_A^i$  を定め、後の時刻  $t$  にエネルギー値  $E_A^f$  を測ることになっているので、そのような経過時間  $t$  なら、「測定過程時間」という言い回しの方が適切だったかもしれない。

また、堀田氏は「エネルギー移動量」を「測定される対象系内部のエネルギー移動量」だと思っているようだが、それも誤解である。これも定式化から明らかだろうと私は思っていたのだが、私が「エネルギー移動量」と呼んでいるものは「対象系と測定系の間のエネルギー移動量」のことである。「相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係」という呼称が誤解を与えていると言われるなら、堀田氏の誤解しているとおりで、ごもつともである。「対象系と測定系の間の相互作用時間とエネルギー移動量の不確定性関係」と呼べば、より正確になるかと思う。

第 7 に、この粒子散乱の問題に関連して堀田氏は【相互作用項を適当に半分に分割して A と B の単体エネルギーへの寄与に割り当てることさえも可能である】と述べている。これも堀田氏はちゃんと式を書いていない話なので、当方で式を補って考えるしかないが、相互作用しても identity を保つような粒子 A, B が従うハミルトニアン  $\hat{H}_1, \hat{H}_2$  があるとして、粒子間の相互作用ハミルトニアン  $\hat{V}$  があり、全体系のハミルトニアン  $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{V}$  が定まっている状況を考えよう。このとき、相互作用ハミルトニアン  $\hat{V}$  を適当に  $\hat{V} = \hat{V}_1 + \hat{V}_2$  という形に分割して、各部分系のハミルトニアンを  $\hat{H}_A = \hat{H}_1 + \hat{V}_1$  と  $\hat{H}_B = \hat{H}_2 + \hat{V}_2$  で定めれば、全体系のハミルトニアンは  $\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B$  と書かれ、たしかにこれは保存量であるが、そうしたところで、 $\hat{H}_A$  と  $\hat{H}_B$  は可換ではないので、両方のエネルギー固有値を同時に指定することはできず、前述の問題は回避できない。

以上まとめると、堀田氏は量子論における演算子の非可換性の効果を完全に見落としており、また、私が述べている文脈での相互作用時間とエネルギー移動量の定義を取り違えてお



り，堀田氏による批判は的外れであると結論せざるを得ない．

## 5 不確定性関係にとって何が本質的か？

前論文では議論を整理しようと努めたが，時間とエネルギーの不確定性関係は多義的であり，普遍的な定式化が定まっていない．それでも「測定過程時間と測定器へのエネルギー移動量の不確定性関係」にとって何が本質的であるか考え直してみたいと思う．

結局，この不確定性関係 (6) の出どころは，遷移確率の摂動計算 (3) において，エネルギー固有値の和の保存則が成り立たず，

$$E_s^f + E_a^f \neq E_s^i + E_a^i \quad (22)$$

であるような始状態と終状態に関して相互作用ハミルトニアン  $\hat{V}$  の行列要素がゼロでない

$$\langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \neq 0 \quad (23)$$

というところにある．そうになってしまうのは，無摂動ハミルトニアン  $\hat{H}_s + \hat{H}_a$  が  $\hat{V}$  と可換ではないからである． $\hat{H}_s + \hat{H}_a$  と  $\hat{V}$  が可換であったら，それらは同時対角化可能であり，(23) のような非対角項はゼロになる．このことは簡単に証明できる：

$$\begin{aligned} [\hat{H}_s + \hat{H}_a, \hat{V}] &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | [\hat{H}_s + \hat{H}_a, \hat{V}] | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \\ &= \{ (E_s^f + E_a^f) - (E_s^i + E_a^i) \} \langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle \end{aligned} \quad (24)$$

ゆえに  $[\hat{H}_s + \hat{H}_a, \hat{V}] = 0$  ならば  $(E_s^f + E_a^f) - (E_s^i + E_a^i) = 0$  または  $\langle \psi_s^f \otimes \psi_a^f | \hat{V} | \psi_s^i \otimes \psi_a^i \rangle = 0$  でなければならない．この対偶として，(22) と (23) の両方が成立するならば  $[\hat{H}_s + \hat{H}_a, \hat{V}] \neq 0$  である．つまり，(6) のような「見かけのエネルギー非保存」は，相互作用ハミルトニアンと無摂動ハミルトニアンの非可換性に根ざしていると言える．

位置と運動量の不確定性関係は両者の演算子の非可換性に根ざしているが，時間を表す演算子は素朴な意味では存在しないので，時間とエネルギーの不確定性関係は単純に時間とエネルギーの非可換性に起因しているとは言えない．しかし，前節でも繰り返し目についたように，測定過程時間と対象系・測定器間のエネルギー移動量の不確定性関係にとっては，相互作用ハミルトニアンと無摂動ハミルトニアンの非可換性が本質的であるように思われる．

なお，非可換物理量  $\hat{A}, \hat{B}$  の不確定性関係についてはケナード・ロバートソンによる定式化

$$\sigma(A) \cdot \sigma(B) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|, \quad (25)$$

$$\sigma(A)^2 := \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle, \quad \sigma(B)^2 := \langle (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)^2 \rangle \quad (26)$$

をはじめとして，曖昧さのない，厳密かつ一般的な定式化が何通りか知られている [5]-[12]．それに対して，前論文でも反省したことであるが，測定過程時間とエネルギー移動量の不確定性関係 (6) は，ちゃんとした不等式になっておらず，不確定さの大きさのおおよその目安を語っているだけだし，一次の摂動近似計算に物理的解釈を与えただけの頼りない議論であることは否めない．

何かと何かの非可換性から，定量的かつ曖昧さのない形で，近似やモデルに依存することなく，時間とエネルギーの不確定性関係が導出されることが望ましい．ところで，細谷暁夫氏は，小澤氏による位置と運動量の不確定性関係式を使ってボーアの光子箱に関する回答を定量的に修正する議論を提示している [13]．時間とエネルギーの不確定性関係の定量的定式化の方向性を示すものの一つとして注目したい．

## 6 無摂動エネルギーが保存するモデル

一般的なモデルでは，対象系ハミルトニアン  $\hat{H}_s$ ，測定系ハミルトニアン  $\hat{H}_a$ ，無摂動ハミルトニアン  $\hat{H}_s + \hat{H}_a$  は，いずれも相互作用ハミルトニアン  $\hat{V}$  と可換ではない．しかし，無摂動ハミルトニアン  $\hat{H}_s + \hat{H}_a$  が  $\hat{V}$  と可換であるようなモデルは作ろうと思えば作れる．

例えば，系 1 は 2 状態系，系 2 は振動子として，各ハミルトニアンを

$$\hat{H}_s = \hat{H}_1 = \frac{1}{2} \varepsilon \hat{\sigma}_z \quad (27)$$

$$\hat{H}_a = \hat{H}_2 = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (28)$$

$$\hat{V} = g(\hat{\sigma}_+ \otimes \hat{a} + \hat{\sigma}_- \otimes \hat{a}^\dagger) \quad (29)$$

とする．ここで  $\hat{\sigma}_z$  は 2 状態系ヒルベルト空間に作用するパウリ行列であり， $\hat{\sigma}_\pm = (\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)/2$  である．また， $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$  はボソンの生成・消滅演算子である．系 1 (原子と呼ぶことにする) はエネルギーが  $\pm \frac{1}{2}\varepsilon$  の 2 状態を持ち，系 2 (ボソンと呼ぶ) はエネルギー間隔  $\hbar\omega$  の励起状態を持つ．両者の相互作用は，原子がボソンを 1 個吸収して励起状態になったり，原子がボソンを 1 個放出して基底状態に遷移したりする変化をもたらす．このモデルでは， $[\hat{H}_s, \hat{V}] \neq 0$  かつ  $[\hat{H}_a, \hat{V}] \neq 0$  であるが， $\varepsilon = \hbar\omega$  の場合には， $[\hat{H}_s + \hat{H}_a, \hat{V}] = 0$  が成立する．つまり，この系では， $\varepsilon = \hbar\omega$  の場合は無摂動ハミルトニアンのエネルギー固有値の和の保存則

$$E_s^f + E_a^f = E_s^i + E_a^i \quad (30)$$

が厳密に成り立つ．しかし，このモデルはたいへんわざとらしい不自然なモデルであり，しかも  $\varepsilon \neq \hbar\omega$  の場合でも厳密に解けるモデルである．したがって，このモデルは物理的には相互作用のない trivial なモデルと見なすべきであろう．

相互作用ハミルトニアンを

$$\hat{V}' = g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \otimes (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (31)$$

で置き換えると， $[\hat{H}_s + \hat{H}_a, \hat{V}'] \neq 0$  となり，もう少し nontrivial なモデルになる．

これらの例から一般的な法則性を引き出すつもりはない．むしろ，これらの例は，「モデルに依存しないやり方で，時間とエネルギーの不確定性関係を普遍的な形で述べるのは難しい」という教訓を示していると受け止めた方がよさそうである．

## 7 時計・スイッチ系のモデル

堀田氏の批判文にも見られたことだが，アインシュタイン・ボーアの光子箱の議論を数学的に定式化するとき問題になるのは，箱の窓を開閉する機構をどのように理論記述するの

が適切かという点である．箱に備え付けられた時計やシャッター機構は，測定系のハミルトニアン  $\hat{H}_a$  で記述されるのか，それとも相互作用ハミルトニアン  $\hat{V}$  で記述されるのか，といった疑問は当然生じると思う．エネルギー保存則を問題にするなら，シャッター機構の動力源やシャッター機構がする仕事が気になるからだ．また，時計の理論位置付けを明らかにしておかないと，測定過程の時間の定義も曖昧になってしまう．

前論文 7.1 から 7.4 節では，対象系と測定系の相互作用ハミルトニアンは恒常的に存在していて，始状態を準備した時刻と，終状態を定めた時刻の差を測定過程の時間と定義した．ここではシャッターの開閉は相互作用の開始時刻と停止時刻を定めるものと考えた．前論文 7.5, 7.6 節では，対象系と測定系の相互作用ハミルトニアンの係数を，時間に陽に依存させて制御できるケースを考えた．

ここでは，時計とシャッターの役割・位置付けがもう少し明瞭になるような理論定式化を考えよう．そこで，対象系と測定系の他に，時計スイッチ系とでも呼ぶべき第 3 の部分系を考える．結果的には，この時計スイッチ系は測定系の一部に取り込めることが，のちほどわかる．時計スイッチ系 (clock and switch) は，独自のハミルトニアン  $\hat{H}_c$  に従って運動しているとする．また，この系は運動方程式

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{x}, \hat{H}_c] = \hat{1} \quad (32)$$

を満たす物理量  $\hat{x}$  を持っているとする．物理量  $\hat{x}$  は「時計変数」とでも呼ぶべきものであり，時間とともに推移する時計の針の位置を表すものと解釈できる．ただし，このような時計変数の仮定には若干問題があり，この点については後ほど再検討する．

さらに，c-number の関数として

$$g(x) = \begin{cases} 1, & t_0 \leq x \leq t_1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (33)$$

を導入する．関数  $g(x)$  を「スイッチ関数」と呼ぶ．そして対象系・測定系・時計系からなる全体はハミルトニアン

$$\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_a + \hat{H}_c + g(\hat{x})\hat{V}_{sa} \quad (34)$$

に従うとする．この系では，時計変数は  $\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + t\hat{1}$  に従って時間発展する． $\hat{x}(0)$  の固有値 0 の固有状態を初期状態とすれば (連続スペクトルに対する固有ベクトルは数学的には存在しないが，適当に固有状態に近い状態は定義できる)，時刻  $t$  が  $t_0 \leq t \leq t_1$  の間にあるときだけ対象系と測定系の相互作用ハミルトニアン  $\hat{V}_{sa}$  が作用する．いわば， $g(x)$  は相互作用のオンオフを切り替えるスイッチの役割を果たす．

狭い意味での測定系と時計系を合わせたものを改めて測定系と定め，ハミルトニアン  $\hat{H}_{a+c} = \hat{H}_a + \hat{H}_c$  に従うものとし， $\hat{V} = g(\hat{x})\hat{V}_{sa}$  を改めて対象系と測定系の相互作用ハミルトニアンと呼ぶことにすれば，全体系のハミルトニアンは  $\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_{a+c} + \hat{V}$  と書かれる．測定過程の開始時刻を  $t_0$ ，停止時刻を  $t_1$  と定めれば，前述の (1) に基づいたモデル分析に帰着する．

このように時計やシャッター機構を測定器の一部として記述することは可能である．シャッターの開閉が  $g(x)\hat{V}_{sa}$  という相互作用ハミルトニアンのスカラー倍だけで表現できるかとい

う点は疑問だが，それならこの項をもっと複雑な演算子関数  $\hat{V}_{\text{sa}}(\hat{x})$  で置き換えたモデルを考えればよい．

ところで，運動方程式 (32) を満たす時計変数  $\hat{x}$  の存在仮定には若干問題があると述べたが，この点について検討しよう．じつはこの式は前論文の (5) 式とまったく同じものである．前論文 4.1 節でも指摘したことだが，交換関係  $[\hat{x}, \hat{H}_c] = i\hbar\hat{1}$  を満たす自己共役演算子  $\hat{x}, \hat{H}_c$  があれば，それらは実数全体の連続スペクトルを持たなければならない． $\hat{H}_c$  を時計系のハミルトニアンとするなら，これは通常の量子力学系のエネルギースペクトルとしては異常であるように見える．ゆえに  $[\hat{x}, \hat{H}_c] = i\hbar\hat{1}$  を満たす時計変数  $\hat{x}$  の存在は物理的に受け入れがたいとするのが既存の議論であった．

しかし，このような欠陥は回避できる．現実に時計として使われる力学系が，無限の過去から無限の未来まで運動方程式 (32) を満たすとは考えにくい．そう考えれば，運動方程式 (32) は適当な初期状態に対して適当な有限の時間にわたって近似的に成立していればよい．

また，時計の方程式 (32) を

$$\hat{H}_c = \frac{1}{2M} \hat{p}_x^2, \quad \frac{d}{dt} \hat{x} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}, \hat{H}_c] = \frac{1}{M} \hat{p}_x \quad (35)$$

で置き換えれば，時計変数  $\hat{x}$  が一定速度で動くような時計系のモデルができる．ここで  $\hat{p}_x$  は  $\hat{x}$  に正準共役な運動量である．こうすると，時計系のハミルトニアン  $\hat{H}_c = \frac{1}{2M} \hat{p}_x^2$  は対象系との相互作用ハミルトニアン  $g(\hat{x})\hat{V}_{\text{sa}}$  と非可換になり，シャッターの開閉によって時計スイッチ系が受ける反作用も記述できる．もちろん，時計・スイッチ・シャッターを測定系の一部とすることに何の問題もない．

堀田氏が言うところの【窓の開閉を行う機器、そのエネルギー源であるバッテリー及びバネ振動の緩和の熱を吸収する空気まで】を含めた系を測定系として理論モデルを定めることは可能だし，とくに私が示したモデルで不足があるとは思えない．また，そのように測定系を定義しても，相互作用ハミルトニアンと無摂動ハミルトニアンの非可換性は回避できず，エネルギー値の不確定性はつきまとう．

## 8 あとがき

前回の論文を書いたとき，摂動計算の式に見かけのエネルギー非保存をもたらす相互作用ハミルトニアンの行列要素 (23) が現れるのは，無摂動ハミルトニアンと相互作用ハミルトニアンの非可換性の顕れであることに気づいてはいたのだが，それだけなら当たり前のことのような気がして，とくにコメントはしなかった．しかし，この非可換性があるからこそ，対象系と測定系の間でエネルギーの移動が起きたり，エネルギー値の不確定性が生じるという点はやはり強調した方がよいと思い，今回の論文を書いた．また，堀田氏の誤解を解くためにも，この点を強調する必要があった．

念のために申し上げておくが，私は，是が非でも時間とエネルギーの不確定性関係が成立すべきだと考えているのではない．人々が「時間とエネルギーの不確定性関係」と呼んでいるところのものはけっきょく何なのだろうか？と問うて文献を調べたり自分で考えたりしただけである．もしも「時間とエネルギーの不確定性関係」などというものはないということがはっきりしたなら，それはそれでかまわない．もしも「時間とエネルギーの不確定性関

係」が多義的ならば、多義的なありように応じた定式化と意味を知りたい、というのが私の姿勢である。

アインシュタインとボーアの論争で取り上げられた光子箱を理論的に分析するためのモデルを私は書いたわけだが、それは粗雑なモデルにすぎない。光子を扱うなら本当は量子電磁力学を使って分析すべきかもしれない。光子を閉じ込める機構や時計やバッテリーやシャッター機構についても現実世界に忠実な記述モデルを定式化するべきかもしれない。しかし、この種の思考実験は、モデルの詳細な作り込みを気にせずに、普遍的な本質を浮き上がらせるために考えるものではなからうか。例えば、現実のシャッターは閉と開、0と1の2値状態だけをとるものではないだろう。そういう種類の、モデル化の際に捨象される部分を咎めても、物理学の議論としては実があるとは思えない。ディテールを捨象しつつ本質をすくいあげるのが思考実験を議論する者の腕の見せ所であると思う。光子一個分のエネルギー変化を正確に検知することは原理的に可能なのかという点は本当に懸念すべき本質であり、その点を追究したときに不確定性関係という限界に突き当たるかどうか見極めようという課題が、光子箱という題材が投げかけている問いなのだろう。

そういう意味では、アインシュタインはものごとの本質を突いた well-posed な問題提起をしていたと思われるのだが、ボーアは一般相対論を持ち出してゲームのルールを変更してしまった気がするし、ボーアの論点すりかえによって、何の時間と何のエネルギーの不確定性を問題にしていたのかという肝心の点が見失われてしまったと思う。軌道を外れてしまった議論を何とか軌道修正しようという試みが私の前論文と本論文だったつもりである。

前回の拙論に対して堀田昌寛氏からご批判をいただいたが、明らかに誤解に基づいてご批判されているようであったので、誤解を解くべく詳細な解説を本論文で提示した。そうすることによって私としては最大限の誠意をもってお答えしたつもりである。

私も研究者のはしくれとして、物理学上の問題を解明するための討論には誠意をもって応じるべきだと思っているが、素粒子論研究という学術誌の場では節度ある議論をすべきだと思う。物理学者であればどちらの言っていることが正しいかただちにわかるようなご意見や、無理に仕掛けてこられる論争に対しては、いちいち応えないことがあるかもしれない。その点ご容赦願いたい。

## 参考文献

- [1] 谷村省吾「時間とエネルギーの不確定性関係 — 腑に落ちない関係」素粒子論研究・電子版 Vol. 16 (2014) No. 3.
- [2] 堀田昌寛「素粒子論研究 Vol. 16 「時間とエネルギーの不確定性 — 腑に落ちない関係」に対するコメント」素粒子論研究・電子版 Vol. 16 (2014) No. 5.
- [3] L. Landau and R. Peierls, “Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die relativistische Quantentheorie”, Z. Phys. **69**, 56-69 (1931).
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz (translated by J. B. Sykes and J. S. Bell), *Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory)*, 3rd edition (Pergamon Press, 1977). Section 44.

- [5] E. H. Kennard, “Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen”, *Z. Phys*, **44**, 326-352 (1927).
- [6] H. P. Robertson, “The uncertainty principle”, *Phys. Rev.* **34**, 163-164 (1929).
- [7] E. Arthurs and J. L. Kelly, Jr., “On the simultaneous measurement of a pair of conjugate observables”, *Bell Sys. Tech. J.* **44**, 725-729 (1965).
- [8] E. Arthurs and M. S. Goodman, “Quantum correlations: A generalized Heisenberg uncertainty relation”, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2447-2449 (1988).
- [9] M. Ozawa, “Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement”, *Phys. Rev. A* **67**, 042105 (2003).
- [10] Y. Watanabe, T. Sagawa, and M. Ueda “Uncertainty relation revisited from quantum estimation theory”, *Phys. Rev. A* **84**, 042121 (2011). arXiv: 1010.3571.
- [11] C. Branciard, “Error-tradeoff and error-disturbance relations for incompatible quantum measurements”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **110**, 6742-6747 (2013). arXiv: 1304.2071.
- [12] C. Branciard, “Deriving tight error-trade-off relations for approximate joint measurements of incompatible quantum observables”, arXiv: 1312.1857.
- [13] 細谷暁夫「量子力学をめぐるアインシュタインとボーアの論争—光子箱とEPRの思考実験」*数理科学* 2003年10月号 pp.46-51.