

Instantons and monopoles in terms of ADHM/Nahm construction

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科
村中大地

2014年4月

概要

Yang-Mills 理論のラグランジアンからはインスタントンやモノポールといった様々なソリトン解が導かれる。それらは当初、自己双対/Bogomolny 方程式にアンザッツを課すことで場当たりに解かれていたが、後に発表された ADHM/Nahm 構成法によって系統的に求められるようになった。ADHM/Nahm 構成法ではインスタントンやモノポールの持つ情報はすべて ADHM/Nahm データに集約される。また、特に Nahm 構成法からは TP_1 と呼ばれる空間に住むスペクトル曲線の概念が導かれ、それらの対称性を考察することで正多面体の対称性を持つ高度なモノポールを構成することもできる。さらに、ADHM/Nahm 構成法は周期性を持つインスタントンである caloron にも応用され、いくつかの新たな解が発見されつつある。この記事では、そのような ADHM/Nahm 構成法に関する基礎的な知識について、初学者向けに解説する。

目次

第 1 章 Introduction	1
第 2 章 自己双対 Yang-Mills とインスタントン	3
2.1 4次元ユークリッド空間と双対	3
2.1.1 4次元ユークリッド空間	3
2.1.2 4次元球座標	4
2.1.3 双対と Bianchi の恒等式	5
2.2 自己双対 Yang-Mills	6
2.2.1 4次元 pure Yang-Mills 理論	6
2.2.2 ピュアゲージ	7
2.2.3 境界条件とトポロジカルチャージ	8
2.2.4 自己双対条件	13
2.3 't Hooft インスタントン	14
2.3.1 't Hooft アンザッツと't Hooft 解	15
2.3.2 't Hooft 1-インスタントン	16
2.3.3 't Hooft 解のゲージ変換と BPST 解	18
2.3.4 't Hooft N -インスタントン	20
2.4 Witten の Liouville 解	22
2.4.1 コーシー・リーマンの定理	22
2.4.2 Witten のアンザッツ	22
2.4.3 Liouville 解	25
2.4.4 Liouville 解の性質	28
第 3 章 BPS モノポールとモジュライ空間	31
3.1 SU(2) Georgi-Glashow モデル	31
3.2 線形化とトポロジカルチャージ	35
3.3 't Hooft-Polyakov モノポール	40
3.4 BPS 極限とモジュライ空間	42
3.5 Julia-Zee dyon と時間に依存するゲージ変換	46
3.6 Well-separated モノポールと Gibbons-Manton 計量	51
第 4 章 ADHM/Nahm 構成法	57
4.1 ADHM/Nahm 構成法の原理	57
4.2 ADHM 構成法	58
4.2.1 ADHM 方程式	58

4.2.2	ADHM \rightarrow ASD	61
4.2.3	ADHM 構成法の諸性質	65
4.2.4	ADHM 構成法の例	66
4.3	Nahm 構成法	67
4.3.1	Nahm 方程式	67
4.3.2	Bogomolny \rightarrow Nahm	70
4.3.3	Prasad-Sommerfield 解の Nahm 構成	73
4.3.4	2-モノポールの Nahm 構成	74
4.3.5	数値 Nahm 変換	76
4.4	スペクトル曲線と対称性	80
4.4.1	Lax 形式とスペクトル曲線	81
4.4.2	TP_1 とメビウス変換	83
4.4.3	対称性を持つスペクトル曲線	86
4.4.4	不変 2 元形式と正多面体の対称性	87
4.4.5	正多面体の対称性を持つモノポールの Nahm 構成	90
第 5 章	caloron とその Nahm 構成法	97
5.1	caloron の定義	97
5.2	caloron の Nahm 構成法とその例	99
5.2.1	caloron の Nahm 構成法	100
5.2.2	Ward の 2, 3, 4-symmetric caloron	105
第 6 章	Conclusion	107
付録 A	テンソルと行列	109
A.1	添え字についての注意	109
A.2	クロネッカーのデルタ	109
A.3	完全反対称テンソル	110
A.3.1	2 階の完全反対称テンソル	112
A.3.2	3 階の完全反対称テンソル	113
A.3.3	4 階の完全反対称テンソル	114
A.4	't Hooft の η 記号	114
A.5	トレース	117
A.6	行列ノルム	118
A.7	指数行列	118
A.8	パウリ行列	121
A.9	't Hooft 行列	122
付録 B	四元数	123
B.1	四元数	123
B.2	2 次複素行列表現	126

付録 C	有限群と正多面体回転群	129
C.1	群の定義	129
C.2	対称群と交代群	131
C.3	正多面体回転群	134
付録 D	リー群とリー代数	137
D.1	リー群とリー代数	137
D.2	$SL(N)$	138
D.3	$U(N)$ と $SU(N)$	139
D.4	$SU(2)$ と $su(2)$ のパラメーター表示	140
付録 E	数値計算の手法	141
E.1	多次元配列	141
E.2	数値微分	142
E.3	数値積分	143
E.4	同次方程式の解法	145
E.5	常微分方程式の解法	145

第1章 Introduction

原子核の理論や QCD(Quantum ChromoDynamics, 量子色力学) などの基礎となる Yang-Mills 理論のラグランジアンからは, インスタントンやモノポールといった様々なソリトン解が導かれる. インスタントンやモノポールは, 当初, SU(2) Yang-Mills 理論に特有の自己双対条件や Bogomolny 条件と呼ばれる条件下で, 場当たりのアンザッツによって見出された. しかし, インスタントンは, 1978 年に Atiyah, Drinfeld, Hitchin, Manin らによって発表された ADHM 構成法 [24] によって, 系統的に求められるようになった. また, モノポールも, その後に発表された, ADHM 構成法をモノポールに応用した Nahm 構成法 [25, 26] によって, 系統的に求められるようになった. 解を得るための手法である ADHM/Nahm 構成法は, インスタントンやモノポールの存在を保証するという意味でも重要である. また, その中に現れる ADHM データや Nahm データ, Nahm データから示唆されるモノポールのスペクトル曲線も重要な意味を持つ.

ADHM/Nahm 構成法の原理は, インスタントンやモノポールの住む空間とは別の次元において対応する方程式系が存在し, それぞれの解空間から定義されるモジュライ空間と呼ばれる空間が 1 対 1 に対応していることにある. それにより, インスタントンやモノポールが満たすべき条件とは別の方程式を解き, その解を変換することでインスタントンやモノポールを構成することができる. このとき, インスタントンやモノポールの持つ情報はすべて, 対応する方程式の解である ADHM データ, Nahm データにそれぞれ集約される. また, 特に Nahm データには, TP_1 という空間上の曲線であるスペクトル曲線が対応する. ADHM/Nahm 構成法を用いる利点は, これらの量の方がインスタントンやモノポールのゲージ場よりも扱いやすいことにある. 特に, ADHM/Nahm 構成法に現れる方程式は, それぞれ代数方程式と 1 階の微分方程式である.

ADHM/Nahm 構成法の応用として, ADHM データや Nahm データに対称性を課すことで, 対称性を持つインスタントンやモノポールを構成することができる. 対称性の種類には様々なものがあるが, 特に興味深いのは元の空間における幾何学的な対称性である. モノポールの場合, そのような対称性はモノポールの持つ位相不変量であるトポロジカルチャージ N によって異なり, $N = 1, 2, 3, 4, 7$ ではそれぞれ球, トーラス, 正 4 面体, 正 8 面体, 正 20 面体の対称性となる [29]. そのようなモノポールを実際に構成するには, まずスペクトル曲線に対称性を課し, 次にそのスペクトル曲線から Nahm データを見出し, 最後に Nahm データから対応するモノポールを Nahm 構成法によって構成する. このとき, Nahm データを見つけるまでは, 困難であるが, 解析的な範囲で可能である. しかし, それらより full のモノポールを Nahm 構成法により構成することは, 解析的な範囲ではほとんど不可能であり, 数値計算に頼らなければならない [30]. とはいえ, 数値計算を用いれば, Nahm データがわかっている様々なモノポールのエネルギー密度やその散乱の様子を図示することができる.

Yang-Mills 理論のラグランジアンからは, インスタントンやモノポールの他に caloron と呼ばれるソリトン解が導かれる. caloron は, 一言でいえば時間に関して周期的なインスタントンであり, 4 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 の 1 方向がコンパクト化された空間 $\mathbb{R}^3 \times S^1$ に住むとされる. caloron

はいくつかの重要な性質を持つ。まず, caloron には長周期極限, 長スケール極限と呼ばれる 2 つの極限があり, それぞれにおいてインスタントン, モノポールに帰着する, すなわち, caloron はインスタントンとモノポールを繋ぐ解となっている。また, caloron は周期 β を持つが, これは物理的には $\beta = 1/k_B T$ と解釈でき, caloron が応用される物理現象に有限温度の知見を与えることができる。例えば, インスタントンのホロノミーからスキルミオンを構成する Atiyah-Manton 構成法という手法が知られているが [33], caloron もインスタントンの一種であり, caloron からスキルミオンを構成することができる。その場合, そのスキルミオンは有限温度を持ち, スキルミオンによる有限温度の場の理論を議論することができる [36]。さらに, $SU(2)$ における caloron は一般に 2 つのモノポール成分を持ち, そのような caloron は非自明なホロノミーを持ち得る。そのような機構は, QCD において磁氣的モノポールからクォークの閉じ込めを議論する分野においては, confinement-deconfinement の相転移の機構に関わると期待されている [37, 38]。

インスタントンやモノポールは ADHM/Nahm 構成法により系統的に得られるが, それらは caloron に対しても適用できる [25]。ADHM/Nahm 構成法において, caloron の ADHM データは一種のフーリエ変換と見なされ, その構成法はデルタ関数型の不純物項を持つ Nahm 構成法へと拡張される。そのような構成法に現れる Nahm 方程式, Weyl 方程式の解法としては, グリーン関数を用いるものと, 方程式を定義域内と境界に分けて解くものがある。Nahm 方程式については, モノポールの Nahm データに新たに境界条件を課すことでいくつかの解が得られている (例えば [40, 41, 43])。また, Weyl 方程式に関しては, グリーン関数を用いて解く手法が既に見つかっている [42]。さらに, 近年, インスタントンチャージ $k = 2$ を持つ caloron の一般解の Nahm データが発見され [43], その特別な場合における数値的 Nahm 変換も行われている [44]。

第 2 章では, $SU(2)$ Yang-Mills 理論におけるインスタントンについてトポロジカルチャージや自己双対条件などの基本的な事柄について述べた後, インスタントンの例として 't Hooft インスタントンと Witten による Liouville 解について述べた。この章の内容は筆者が卒業研究のゼミで担当した箇所であり, 主に [1] を参考にしている。第 3 章では, $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs 理論におけるモノポールについて 't Hooft-Polyakov モノポールや Bogomolny 条件について述べた後, well-separated なマルチ-モノポールに対するモジュライ空間の計量である Gibbons-Manton 計量について述べた。この章の内容は主に [2, 3] を参考にしている。ADHM/Nahm 構成法については第 4 章で詳しく述べた。ADHM 構成法に関してはその原理を詳しく述べ, 実際に 't Hooft インスタントンの構成を行った。Nahm 構成法に関してはその原理に加え, TP_1 におけるスペクトル曲線と対称性を持つモノポールの Nahm データについて述べ, それらの数値 Nahm 変換の手順についても詳しく紹介した。この章の内容は ADHM/Nahm 構成法に関する国内大学での集中講義, [2] やいくつかの論文に加え, [45]などを参考にしている。さらに, 第 5 章では caloron の Nahm 構成法についての基本的な知識について述べた。

この記事は, 主に筆者の卒業論文をもとにしている。

第2章 自己双対 Yang-Mills とインスタントン

本章では、自己双対 Yang-Mills におけるインスタントンの基本的な知識について述べる。2.1 節では 4 次元ユークリッド空間と双対について、2.2 節では 4 次元ユークリッド空間における pure Yang-Mills 理論と自己双対条件について、2.3 節では自己双対 Yang-Mills における応用上重要な 't Hooft 解について、2.4 節では円柱対称性を持つ Liouville 解について述べた。

2.1 4次元ユークリッド空間と双対

本章で扱う 4 次元ユークリッド空間について述べておく。4 次元ユークリッド空間は 4 次元ミンコフスキー空間と同じく 4 次元の空間であるが、すべての変数が空間変数であり、内積は単に和をとればよい。4 次元ユークリッド空間においても、3 次元の場合と同様の球座標が定義できる。また、4 次元ユークリッド空間においては双対と呼ばれる量が重要な意味を持つ。

2.1.1 4次元ユークリッド空間

4 つの実数の組全体の集合 \mathbb{R}^4 に計量

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ O & & & 1 \end{pmatrix} = \delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (2.1)$$

を定めた空間を 4 次元ユークリッド空間 (4-dimensional Euclidean space) という。このとき、任意のテンソル T_μ に対して

$$T_\mu = g_{\mu\nu} T^\nu = \delta_{\mu\nu} T^\nu = T^\mu, \quad (2.2)$$

すなわち、4 次元ユークリッド空間では添え字の上下に区別がないことに注意。また、定義より、座標 $x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ に対する内積は

$$x_\mu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (2.3)$$

となり、これは $T = (T_{\mu\nu}) = {}^t(T^{-1}) \in O(4)$ による直交変換に対して

$$x_\mu x_\mu \mapsto T_{\mu\nu} x_\nu T_{\mu\sigma} x_\sigma = T_{\nu\mu}^{-1} T_{\mu\sigma} x_\nu x_\sigma = \delta_{\nu\sigma} x_\nu x_\sigma = x_\nu x_\nu \quad (2.4)$$

のように不変となることに注意。

2.1.2 4次元球座標

4次元ユークリッド空間における座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) に対して

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \alpha_1, \\ x_2 = r \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ x_3 = r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3, \\ x_4 = r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \end{cases} \quad (2.5)$$

となる座標 $(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ($0 \leq r < \infty, 0 \leq \alpha_1 < \pi, 0 \leq \alpha_2 < \pi, 0 \leq \alpha_3 < 2\pi$) を4次元球座標という。また, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を特に角座標という。定義を逆に解けば, 以下が得られる。

$$\begin{cases} r = |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, \\ \alpha_1 = \tan^{-1}\{(x_4^2 + x_3^2 + x_2^2)/x_1^2\}, \\ \alpha_2 = \tan^{-1}\{(x_4^2 + x_3^2)/x_2^2\}, \\ \alpha_3 = \tan^{-1}(x_4/x_3). \end{cases} \quad (2.6)$$

また, ヤコビアンを計算すると,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & -r \sin \alpha_1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & r \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & -r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & 0 \\ \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 & r \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 & r \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & -r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \\ \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & r \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & r \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \end{vmatrix} \\ &= r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & -r \sin \alpha_1 & 0 \\ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & r \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & -r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & r \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 & r \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{vmatrix} \\ &= r^2 \sin^2 \alpha_1 \sin \alpha_2 \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & -r \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & r \cos \alpha_1 \end{vmatrix} = r^3 \sin^2 \alpha_1 \sin \alpha_2 \end{aligned}$$

($i = 3, 2, 1$ に対し, $\sin \alpha_i \cos \alpha_i \neq 0$ として最下行から $1/\sin \alpha_i$, その1つ上の行から $1/\cos \alpha_i$ をそれぞれ括り出し, 最下行をその1つ上の行に足し, 右下の要素について余因子展開すればよい。また, $\sin \alpha_i = 0$ のときは $\cos \alpha_i = 1$, $\cos \alpha_i = 0$ のときは $\sin \alpha_i = 1$ なので, 右下かその1つ上の要素についてそのまま余因子展開すればよい) となり, 4次元球座標における体積素は

$$d^4x = r^3 \sin^2 \alpha_1 \sin \alpha_2 dr d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = r^3 dr d\Omega \quad (2.7)$$

となることがわかる。ただし,

$$d\Omega = \sin^2 \alpha_1 \sin \alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \quad (2.8)$$

は4次元球座標における立体角であり, その全立体角は以下のようなになる。

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2 \alpha_1 \sin \alpha_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = 2\pi^2. \quad (2.9)$$

14:39, 25th Apr, 2014

また, 4次元球座標における面積素ベクトルは, 単位ベクトル $x_\mu/|x|$ を用いて以下のように表せる.

$$d\sigma_\mu = |x|^3 d\Omega \cdot \frac{x_\mu}{|x|} = x_\mu |x|^2 d\Omega. \quad (2.10)$$

2.1.3 双対と Bianchi の恒等式

4次元ユークリッド空間において, テンソル $T_{\mu\nu}$ に対する以下の量を $T_{\mu\nu}$ の双対 (dual) という^{*)}.

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T_{\rho\sigma}. \quad (2.11)$$

反対称テンソル $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ に対して以下が成り立つ.

$$\tilde{\tilde{A}}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

$$\because \tilde{\tilde{A}}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\tau\kappa} A_{\tau\kappa} = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\tau} \delta_{\nu\kappa} - \delta_{\mu\kappa} \delta_{\nu\tau}) A_{\tau\kappa} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) = A_{\mu\nu}.$$

また, テンソル $T_{\mu\nu}$ の $T_{\mu\nu} \mapsto g T_{\mu\nu} g^{-1}$ という変換に対し, 双対は以下のように変換される.

$$\tilde{T}_{\mu\nu} \mapsto g \tilde{T}_{\mu\nu} g^{-1}. \quad (2.13)$$

$$\because \tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T_{\rho\sigma} \mapsto \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} g T_{\rho\sigma} g^{-1} = g \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} T_{\rho\sigma} \right) g^{-1} = g \tilde{T}_{\mu\nu} g^{-1}.$$

さらに, テンソル A_μ に対し, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ は以下の関係を満たす.

$$D_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} + [A_\mu, \tilde{F}_{\mu\nu}] = 0. \quad (2.14)$$

これを Bianchi の恒等式という. これを示すには, まず, $\tilde{F}_{\mu\nu}$ を計算する. すると,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho + [A_\rho, A_\sigma]) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma) - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\sigma A_\rho + A_\sigma A_\rho) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma) - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} (\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma) \quad (\rho \leftrightarrow \sigma) \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma). \quad (\text{完全反対称テンソルの反対称性}) \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} D_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \{ \partial_\mu (\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma) + [A_\mu, \partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma] \} \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu \partial_\rho A_\sigma + \partial_\mu A_\rho A_\sigma + A_\rho \partial_\mu A_\sigma \\ &\quad + A_\mu \partial_\rho A_\sigma + A_\mu A_\rho A_\sigma - \partial_\rho A_\sigma A_\mu - A_\rho A_\sigma A_\mu) \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\rho A_\sigma + A_\mu A_\rho A_\sigma - \partial_\rho A_\sigma A_\mu - A_\rho A_\sigma A_\mu) \\ &\quad (\text{第1項と第3項 + 第4項はそれぞれ } \mu \text{ と } \rho \text{ について対称}) \\ &= 0. \quad (\mu \rightarrow \rho \rightarrow \sigma \rightarrow \mu) \end{aligned}$$

^{*)} $*T_{\mu\nu}$, $^*T_{\mu\nu}$ などとも書かれる.

2.2 自己双対 Yang-Mills

4次元ユークリッド空間では, ゲージ群 $SU(2)$ に対する pure Yang-Mills 理論を考えることに意味がある. その作用が有限となるための境界条件を考えると, \mathbb{R}^4 の無限遠方としての3次元球面と $SU(2)$ ゲージの内部空間としての3次元球面との間にトポロジーが定義でき, 場の方程式である Yang-Mills 方程式の解はトポロジカルチャージにより分類できることがわかる. また, 4次元ユークリッド空間における Bianchi の恒等式と Yang-Mills 方程式を見比べれば, 解となるための十分条件である自己双対条件が得られる.

2.2.1 4次元 pure Yang-Mills 理論

4次元ユークリッド空間において, ゲージ場 (gauge field, Yang-Mills field) $A_\mu(x) \in \mathfrak{su}(2)$ に対する局所ゲージ変換 (local gauge transformation) を以下のように定義する*).

$$A_\mu \mapsto gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}. \quad (2.15)$$

ただし, $g(x) \in SU(2)$ であり, $\partial_\mu(gg^{-1}) = \partial_\mu gg^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} = 0$ より以下となることに注意.

$$\partial_\mu gg^{-1} = -g\partial_\mu g^{-1}. \quad (2.16)$$

ゲージ場 $A_\mu(x)$ に対し, 場の強さ (field strength) $F_{\mu\nu}(x)$ は以下のように定義される.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (2.17)$$

定義より, 場の強さは反対称, すなわち, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ となることに注意. また, $A_\mu \in \mathfrak{su}(2)$ より,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^\dagger &= \partial_\mu A_\nu^\dagger - \partial_\nu A_\mu^\dagger + A_\nu^\dagger A_\mu^\dagger - A_\mu^\dagger A_\nu^\dagger \\ &= -\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + A_\nu A_\mu - A_\mu A_\nu = -F_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

すなわち, $F_{\mu\nu} \in \mathfrak{su}(2)$ であることに注意. さらに, $g(x) \in SU(2)$ に対する場の強さのゲージ変換は以下ようになる.

$$F_{\mu\nu} \mapsto gF_{\mu\nu}g^{-1}. \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \because F_{\mu\nu} &\mapsto \partial_\mu(gA_\nu g^{-1} + g\partial_\nu g^{-1}) - \partial_\nu(gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}) \\ &\quad + [gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}, gA_\nu g^{-1} + g\partial_\nu g^{-1}] \\ &= \partial_\mu gA_\nu g^{-1} + g\partial_\mu A_\nu g^{-1} + gA_\nu \partial_\mu g^{-1} + \partial_\mu g\partial_\nu g^{-1} + g\partial_\mu \partial_\nu g^{-1} \\ &\quad - \partial_\nu gA_\mu g^{-1} - g\partial_\nu A_\mu g^{-1} - gA_\mu \partial_\nu g^{-1} - \partial_\nu g\partial_\mu g^{-1} - g\partial_\nu \partial_\mu g^{-1} \\ &\quad + gA_\mu A_\nu g^{-1} + gA_\mu \partial_\nu g^{-1} - \partial_\mu gA_\nu g^{-1} - \partial_\mu g\partial_\nu g^{-1} \\ &\quad - gA_\nu A_\mu g^{-1} - gA_\nu \partial_\mu g^{-1} + \partial_\nu gA_\mu g^{-1} + \partial_\nu g\partial_\mu g^{-1} \\ &= g(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])g^{-1} = gF_{\mu\nu}g^{-1}. \end{aligned}$$

*)各演算の優先順位は「 $^{-1}$ 」 $>$ 「 ∂ 」 $>$ 「 \cdot 」などとする.

14:39, 25th Apr, 2014

以上のように定義された場に対し，4次元ユークリッド空間における pure Yang-Mills 理論の作用 (action) S_{YM} は以下のように定義される．

$$S_{\text{YM}} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2. \quad (2.19)$$

ただし， g は結合定数 (coupling constant) と呼ばれる実数であり，積分は4次元ユークリッド空間の全空間で行うものとする．場の強さのゲージ変換とトレースの循環律より， S_{YM} は明らかにゲージ変換に対して不変である．

S_{YM} に対する場の方程式は以下ようになる．

$$D_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0. \quad (2.20)$$

これを Yang-Mills 方程式という．Yang-Mills 方程式はゲージ変換に対して不変である．

$$\begin{aligned} \because \partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0 &\mapsto \partial_\mu (g F_{\mu\nu} g^{-1}) + [g A_\mu g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1}, g F_{\mu\nu} g^{-1}] \\ &= \partial_\mu g F_{\mu\nu} g^{-1} + g \partial_\mu F_{\mu\nu} g^{-1} + g F_{\mu\nu} \partial_\mu g^{-1} \\ &\quad + g A_\mu F_{\mu\nu} g^{-1} - \partial_\mu g F_{\mu\nu} g^{-1} - g F_{\mu\nu} A_\mu g^{-1} - g F_{\mu\nu} \partial_\mu g^{-1} \\ &= g(\partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}])g^{-1} = 0. \end{aligned}$$

本来，ゲージ場はこの方程式を解いて求められるべきであるが，full の Yang-Mills 方程式の解はほとんど見つかっておらず，主に後に見る自己双対条件を用いて求められる．

2.2.2 ピュアゲージ

場の強さ $F_{\mu\nu}$ は反エルミートなので， $F_{\mu\nu}$ の 2×2 行列としての成分 f_{ij} ($i, j = 1, 2$) に対して $f_{ji}^* = (F_{\mu\nu}^\dagger)_{ij} = (F_{\mu\nu})_{ij} = -f_{ij}$ が成り立つ．すると，

$$-\text{Tr} F_{\mu\nu}^2 = -\sum_{i,j} f_{ij} f_{ji} = \sum_{i,j} |f_{ij}|^2 \geq 0$$

より $S_{\text{YM}} \geq 0$ ，すなわち，4次元ユークリッド空間における pure Yang-Mills 理論の作用は常に正であることがわかる．このとき，等号成立条件は明らかに $F_{\mu\nu} = 0$ であり，これが Yang-Mills 方程式の解を与える条件であることがわかる．そのようなゲージ場として $A_\mu = 0$ が考えられるが， $F_{\mu\nu} = 0$ は明らかにゲージ不変なので， $A_\mu = 0$ を任意のゲージ $g(x) \in \text{SU}(2)$ で変換した

$$A_\mu \mapsto g A_\mu g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1} = g \partial_\mu g^{-1} \quad (2.21)$$

も $F_{\mu\nu} = 0$ を満たすことがわかる．実際，このとき，

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu (g \partial_\nu g^{-1}) - \partial_\nu (g \partial_\mu g^{-1}) + [g \partial_\mu g^{-1}, g \partial_\nu g^{-1}] \\ &= \partial_\mu g \partial_\nu g^{-1} + g \partial_\mu \partial_\nu g^{-1} - \partial_\nu g \partial_\mu g^{-1} - g \partial_\nu \partial_\mu g^{-1} - \partial_\mu g \partial_\nu g^{-1} + \partial_\nu g \partial_\mu g^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり，逆に任意の A_μ に対して A_μ を $A_\mu = 0$ に変換するゲージ $g^{-1}(x) \in \text{SU}(2)$ が存在し，

$$A_\mu \mapsto g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g = 0 \iff A_\mu = -\partial_\mu g g^{-1} = g \partial_\mu g^{-1},$$

すなわち, $F_{\mu\nu} = 0$ を満たす解はすべて $A_\mu = g\partial_\mu g^{-1}$ という形で表されることがわかる. このような解をピュアゲージ (pure gauge) という. このとき, $F_{\mu\nu} = 0$ はゲージ不変であるが, ピュアゲージはゲージ不変でないことに注意. ピュアゲージ $A_\mu = g\partial_\mu g^{-1}$ の $g \in \text{SU}(2)$ によるゲージ変換は, 以下より単に $g \mapsto g'g$ とすればよいことがわかる.

$$\begin{aligned} g\partial_\mu g^{-1} &\mapsto g'g\partial_\mu g^{-1}g'^{-1} + g'\partial_\mu g'^{-1} = g'g(\partial_\mu g^{-1}g'^{-1} + g^{-1}\partial_\mu g'^{-1}) \\ &= g'g\partial_\mu(g^{-1}g'^{-1}) = g'g\partial_\mu(g'g)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.2.3 境界条件とトポロジカルチャージ

Yang-Mills 方程式において興味のある解は, 作用が有限で局所的となるような解である. そのような解に課される境界条件は無限遠方において作用が 0 となることであるが, そのような条件は前小節で見たようにゲージ場 $A_\mu(x)$ がピュアゲージとなることであった, すなわち,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} A_\mu(x) = g(\infty)\partial_\mu g^{-1}(\infty), \quad g(\infty) \in \text{SU}(2) \quad (2.23)$$

となるような関数 $g(x)$ が存在すればよい (無限遠方以外の場所では必ずしも $g(x) \in \text{SU}(2)$ である必要はないことに注意). このような極限を考えるには, $A_\mu(x)$ を 4 次元球座標 $(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ で表し, 無限遠方ではその角座標 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ のみを考えるのが便利である. ところが, そのとき $A_\mu(x)$ は一般に動径方向成分 $A_r(x)$ を含むので, 無限遠方において動径方向への微分が定義できなくなるように思われる. これを回避するには, 与えられたゲージ場を以下のゲージで変換したものを考えればよい.

$$g(x) = \mathcal{P} \exp \left(\int_0^r dr' A_r(x') \right).$$

すると, r 成分の変換は以下のように 0 となり, 動径方向の微分を考える必要はなくなる.

$$A_r \mapsto gA_r g^{-1} - \partial_r \mathcal{P} \exp \left(\int_0^r dr' A_r \right) g^{-1} = gA_r g^{-1} - gA_r g^{-1} = 0.$$

このとき, 境界条件は以下のようになる.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A'_r = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\partial_\mu g^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

式 (2.23) の $g(\infty) \in \text{SU}(2)$ は, 極限をとることにより自由度が 1 つ減り, 4 次元ユークリッド空間の無限遠方としての 3 次元球面 S_∞^3 上で定義されるような関数である. 一方, $\text{SU}(2)$ の任意の元は $a_\mu a_\mu = 1$ を満たす 4 つのパラメータ a_1, a_2, a_3, a_4 を用いて

$$\begin{pmatrix} a_4 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_4 - ia_3 \end{pmatrix} = a_4 + ia_i \sigma_i = a_\mu e_\mu^\dagger \quad (2.24)$$

のように表せる. すると, $g(\infty)$ は S_∞^3 を $a_\mu a_\mu = 1$ が表す 3 次元球面 S^3 へ写す写像, すなわち,

$$g : S_\infty^3 \rightarrow S^3$$

14:39, 25th Apr, 2014

と見なせるが，このような連続写像はある整数 $Q \in \mathbb{Z}$ によって一意に分類できることが知られている．そのような Q をトポロジカルチャージ (topological charge) という^{*)}．境界条件より，有限の作用を持つ任意の解に対してこのような $g(\infty)$ が存在するので，作用が有限となる任意の解もまたトポロジカルチャージによって分類できることがわかる．そのようなトポロジカルチャージは与えられたゲージ場から直接計算でき，その表式は以下ようになる．

$$Q = -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}). \quad (2.25)$$

ただし， $F_{\mu\nu}$ は解に対する場の強さ， $\tilde{F}_{\mu\nu}$ はその双対であり，積分は4次元ユークリッド空間の全空間について行うものとする．この表式について以下で見てみる．

まず，式(2.25)の体積積分を面積分に変換することを考える．そのためには，被積分関数を発散の形に変換すればよいが，トレースの循環律と2.1.3小節の

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma), \quad D_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} + [A_\mu, \tilde{F}_{\mu\nu}] = 0$$

などを思い出せば，ひとまず，

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) &= \operatorname{Tr}\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\tilde{F}_{\mu\nu} + (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)\tilde{F}_{\mu\nu}\} \\ &= \operatorname{Tr}\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\tilde{F}_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} - A_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} A_\mu\} \\ &= \operatorname{Tr}\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\tilde{F}_{\mu\nu} + A_\mu[A_\nu, \tilde{F}_{\mu\nu}]\} \\ &= \operatorname{Tr}\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\tilde{F}_{\mu\nu} - A_\mu \partial_\nu \tilde{F}_{\mu\nu}\} = \operatorname{Tr}\{\partial_\mu A_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} - \partial_\nu(A_\mu \tilde{F}_{\mu\nu})\} \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{Tr}\{\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \partial_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma - \partial_\nu(A_\mu \partial_\rho A_\sigma) - \partial_\nu(A_\mu A_\rho A_\sigma)\} \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{Tr}\{\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \partial_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma + \partial_\mu(A_\nu \partial_\rho A_\sigma) + \partial_\mu(A_\nu A_\rho A_\sigma)\} \end{aligned}$$

となる．すると，

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu(A_\nu \partial_\rho A_\sigma) &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + A_\nu \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma) = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma, \\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{Tr} \partial_\mu(A_\nu A_\rho A_\sigma) &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{Tr}(\partial_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma + A_\nu \partial_\mu A_\rho A_\sigma + A_\nu A_\rho \partial_\mu A_\sigma) \\ &= 3\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{Tr}(\partial_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma) \end{aligned}$$

より，結局，以下となることがわかる．

$$\operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) = \partial_\mu \left\{ 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{Tr} \left(A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{2}{3} A_\nu A_\rho A_\sigma \right) \right\}. \quad (2.26)$$

ここで， S_∞^3 上において $A_\mu = g\partial_\mu g^{-1}$ となる $g \in \operatorname{SU}(2)$ が存在することと，

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma) = 0 \iff \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A_\rho A_\sigma \quad (2.27)$$

が成り立つことに注意すれば，ストークスの定理より，

$$Q = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S_\infty^3} d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{Tr}(A_\nu A_\rho A_\sigma)$$

^{*)}Pontryagin index ということもある．

14:39, 25th Apr, 2014

$$= -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S_\infty^3} d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(\partial_\nu g g^{-1} \partial_\rho g g^{-1} \partial_\sigma g g^{-1}). \quad (2.28)$$

ただし, $d\sigma_\mu$ は 4次元ユークリッド空間における面積素ベクトルであり, ゲージ場が全空間で特異点を持たないと仮定していることに注意. このとき, S_∞^3 の座標を (x_1, x_2, x_3) , S^3 の座標を (ξ_1, ξ_2, ξ_3) とすると, S^3 上の任意の $g(x) \in \text{SU}(2)$ は ξ_1, ξ_2, ξ_3 を用いて $g = g(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ のようにも表されるので, S_∞^3 と S^3 の 2つの座標は $g(x)$ を介して連鎖律 (chain rule)

$$\frac{\partial g}{\partial x_\ell} = \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\ell}$$

で関連づけられ, 式 (2.28) の表面積分は以下のように書き換えられることがわかる.

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S_\infty^3} dx_\ell dx_m dx_n \varepsilon_{\ell mn} \text{Tr} \left(\frac{\partial g}{\partial x_\ell} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_m} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_n} g^{-1} \right) \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} dx_\ell dx_m dx_n \varepsilon_{\ell mn} \text{Tr} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi_i} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_k} g^{-1} \right) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_m} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_n} \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} d\xi_i d\xi_j d\xi_k \varepsilon_{ijk} \text{Tr} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi_i} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_k} g^{-1} \right) \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} d\mu(g). \end{aligned} \quad (2.29)$$

ただし,

$$d\mu(g) := \rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad \rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3) := \varepsilon_{ijk} \text{Tr} \left(g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_k} \right)$$

である. ここで, $\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ の $\tilde{g} \in \text{SU}(2)$ によるゲージ変換を考えてみる. それには, 2.2.2 小節の議論より, $\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ の中の g を以下で置き換えればよいのであった.

$$g'(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) = \tilde{g} g(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

すると,

$$g = \tilde{g}^{-1} g', \quad g^{-1} = (\tilde{g}^{-1} g')^{-1} = g'^{-1} (\tilde{g}^{-1})^{-1} = g'^{-1} \tilde{g}$$

(g と \tilde{g} が $\text{SU}(2)$ の元であるためにこのような変換が許される) に注意して,

$$\begin{aligned} \rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &\mapsto \varepsilon_{ijk} \text{Tr} \left(g'^{-1} \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_p} \frac{\partial \xi'_p}{\partial \xi_i} g'^{-1} \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_q} \frac{\partial \xi'_q}{\partial \xi_j} g'^{-1} \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_r} \frac{\partial \xi'_r}{\partial \xi_k} \right) \\ &= \text{Tr} \left(g'^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_p} g'^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_q} g'^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_r} \right) \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \xi'_p}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi'_q}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi'_r}{\partial \xi_k} \\ &= \text{Tr} \left(g'^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_p} g'^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_q} g'^{-1} \frac{\partial g'}{\partial \xi'_r} \right) \varepsilon_{pqr} \det \left| \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \right| = \rho(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) \det \left| \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \right| \end{aligned}$$

であることがわかり, $d\mu(g)$ の変換は以下のようにして不変となることがわかる.

$$d\mu(g) \mapsto \rho(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) \det \left| \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \right| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \rho(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3) d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3 = d\mu(g'). \quad (2.30)$$

14:39, 25th Apr, 2014

これより, $d\mu(g)$ は S^3 の座標に依らない微分, すなわち, S^3 の面積素であることがわかり, 式 (2.25) は $g(x)$ の巻き数 (winding number) を与える積分であることがわかる.

最後に, 式 (2.25) の係数が実際に $Q \in \mathbb{Z}$ となるようにとられていることを確認する. それには, 以下のゲージを用いて計算を行えばよい.

$$g_1(x) = \frac{1}{|x|} x_\alpha e_\alpha^\dagger = \frac{1}{|x|} (x_4 \mathbf{1}_2 + i x_i \sigma_i). \quad (2.31)$$

ただし, $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$ である. ここで, $g_1(x)$ は $x = 0$ で特異となっているが, 今は表面積分のみを見るので気にしなくてよい. また, $g_1(x)$ は $x \neq 0$ で明らかに $SU(2)$ の元であり, 式 (2.24) より明らかに S_∞^3 から S^3 への全単射なので巻き数 1 であることに注意. さらに, $g_1(x) \in SU(2)$ ($x \neq 0$) より, 以下となることに注意.

$$g_1^{-1} = g_1^\dagger = \frac{1}{|x|} x_\alpha e_\alpha = \frac{1}{|x|} (x_4 \mathbf{1}_2 - i x_i \sigma_i). \quad (x \neq 0) \quad (2.32)$$

これより,

$$\begin{aligned} \partial_\nu g_1 &= \frac{1}{|x|} \partial_\nu x_\alpha e_\alpha^\dagger + \partial_\nu \frac{1}{|x|} x_\alpha e_\alpha^\dagger = \frac{e_\nu^\dagger}{|x|} - \frac{x_\nu}{|x|^3} x_\alpha e_\alpha^\dagger = \frac{e_\nu^\dagger}{|x|} - \frac{x_\nu}{|x|^2} g_1, \\ \partial_\nu g_1 g_1^{-1} &= \frac{e_\nu^\dagger}{|x|} g_1^{-1} - \frac{x_\nu}{|x|^2} = \frac{1}{|x|} \left(e_\nu^\dagger g_1^{-1} - \frac{x_\nu}{|x|} \right) \end{aligned}$$

などとなり, ひとまず, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(\partial_\nu g g^{-1} \partial_\rho g g^{-1} \partial_\sigma g g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|x|^3} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} \left\{ \left(e_\nu^\dagger g_1^{-1} - \frac{x_\nu}{|x|} \right) \left(e_\rho^\dagger g_1^{-1} - \frac{x_\rho}{|x|} \right) \left(e_\sigma^\dagger g_1^{-1} - \frac{x_\sigma}{|x|} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{|x|^3} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(e_\nu^\dagger g_1^{-1} e_\rho^\dagger g_1^{-1} e_\sigma^\dagger g_1^{-1}). \end{aligned}$$

この先は場合分けをして考える. まず, $\mu = 4$ の場合は,

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{4\nu\rho\sigma} \text{Tr}(e_\nu^\dagger g_1^{-1} e_\rho^\dagger g_1^{-1} e_\sigma^\dagger g_1^{-1}) = i \varepsilon_{abc} \text{Tr}(\sigma_a g_1^{-1} \sigma_b g_1^{-1} \sigma_c g_1^{-1}) \\ &= \frac{i}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{Tr}\{\sigma_a (x_4 - i x_i \sigma_i) \sigma_b (x_4 - i x_j \sigma_j) \sigma_c (x_4 - i x_k \sigma_k)\} \\ &= \frac{i}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{Tr}\{\sigma_a x_4 - i x_i (\delta_{ai} + i \varepsilon_{ail} \sigma_\ell)\} \{\sigma_b x_4 - i x_j (\delta_{bj} + i \varepsilon_{bjm} \sigma_m)\} \\ &\quad \cdot \{\sigma_c x_4 - i x_k (\delta_{ck} + i \varepsilon_{ckn} \sigma_n)\} \\ &= \frac{i}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{Tr}\{(\sigma_a x_4 + \varepsilon_{ail} x_i \sigma_\ell) (\sigma_b x_4 + \varepsilon_{bjm} x_j \sigma_m) (\sigma_c x_4 + \varepsilon_{ckn} x_k \sigma_n)\} \\ &= \frac{i}{|x|^3} \varepsilon_{abc} \text{Tr}(x_4^3 \sigma_a \sigma_b \sigma_c + 3 \varepsilon_{bjm} \varepsilon_{ckn} x_4 x_j x_k \sigma_a \sigma_m \sigma_n + 3 x_4^2 \varepsilon_{ckn} x_k \sigma_a \sigma_b \sigma_n \\ &\quad + \varepsilon_{ail} \varepsilon_{bkm} \varepsilon_{ckn} x_i x_j x_k \sigma_\ell \sigma_m \sigma_n) \\ &= -\frac{2}{|x|^3} (x_4^3 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{abc} + 3 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{bjm} \varepsilon_{ckn} \varepsilon_{amn} x_4 x_j x_k + 3 x_4^2 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ckn} \varepsilon_{abn} x_k \\ &\quad + \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ail} \varepsilon_{bkm} \varepsilon_{ckn} \varepsilon_{lmn} x_i x_j x_k) \end{aligned}$$

14:39, 25th Apr, 2014

となるが，括弧内の各項は，

$$\begin{aligned}
\text{第 1 項} &= 6x_4^3, \\
\text{第 2 項} &= -3(\delta_{aj}\delta_{cm} - \delta_{am}\delta_{cj})(\delta_{ca}\delta_{km} - \delta_{cm}\delta_{ka})x_4x_jx_k \\
&= -3(\delta_{jk} - 3\delta_{jk} - \delta_{jk} + \delta_{jk})x_4x_jx_k = 6x_4x_k^2, \\
\text{第 3 項} &= 6x_4^2\varepsilon_{ckn}\delta_{cn} = 0, \\
\text{第 4 項} &= (\delta_{bi}\delta_{cl} - \delta_{bl}\delta_{ci})\varepsilon_{bkm}(\delta_{cl}\delta_{km} - \delta_{cm}\delta_{kl})x_ix_jx_k \\
&= (3\delta_{bi}\delta_{km} - \delta_{bi}\delta_{km} - \delta_{bi}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{bk})\varepsilon_{bkm}x_ix_jx_k = 0
\end{aligned}$$

となるので，

$$\varepsilon_{4\nu\rho\sigma}\text{Tr}(\partial_\nu g_1 g_1^{-1} \partial_\rho g_1 g_1^{-1} \partial_\sigma g_1 g_1^{-1}) = -\frac{12}{|x|^6}x_4(x_4^2 + x_k^2) = -\frac{12}{|x|^4}x_4$$

となる．また， $\mu = a = 1, 2, 3$ の場合は，

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{4\nu\rho\sigma}\text{Tr}(e_\nu^\dagger g_1^{-1} e_\rho^\dagger g_1^{-1} e_\sigma^\dagger g_1^{-1}) \\
&= \varepsilon_{4\rho\sigma}\text{Tr}(g_1^{-1} e_\rho^\dagger g_1^{-1} e_\sigma^\dagger g_1^{-1}) + \varepsilon_{4\nu\sigma}\text{Tr}(e_\nu^\dagger g_1^{-1} g_1^{-1} e_\sigma^\dagger g_1^{-1}) + \varepsilon_{4\nu\rho}\text{Tr}(e_\nu^\dagger g_1^{-1} e_\rho^\dagger g_1^{-1} g_1^{-1}) \\
&= 3\varepsilon_{4\rho\sigma}\text{Tr}(g_1^{-1} e_\rho^\dagger g_1^{-1} e_\sigma^\dagger g_1^{-1}) = -3\varepsilon_{abc}\text{Tr}(g_1^{-1} \sigma_b g_1^{-1} \sigma_c g_1^{-1}) \\
&= -\frac{3}{|x|^3}\varepsilon_{abc}\text{Tr}\{(x_4 - ix_i\sigma_i)\sigma_b(x_4 - ix_j\sigma_j)\sigma_c(x_4 - ix_k\sigma_k)\} \\
&= \frac{3i}{|x|^3}\varepsilon_{abc}\text{Tr}\{x_i\sigma_i\sigma_b(x_4 - ix_j\sigma_j)\sigma_c(x_4 - ix_k\sigma_k)\} \\
&= \frac{3i}{|x|^3}\varepsilon_{abc}\text{Tr}[x_i\sigma_i\{x_4\sigma_b - ix_j(i\varepsilon_{bjm}\sigma_m + \delta_{bj})\}\{x_4\sigma_c - ix_k(i\varepsilon_{ckn}\sigma_n + \delta_{ck})\}] \\
&= \frac{3i}{|x|^3}\varepsilon_{abc}\text{Tr}\{x_i\sigma_i(x_4\sigma_b + \varepsilon_{bjm}x_j\sigma_m)(x_4\sigma_c + \varepsilon_{ckn}x_k\sigma_n)\} \\
&= \frac{3i}{|x|^3}\varepsilon_{abc}\text{Tr}\{x_4^2x_i\sigma_i\sigma_b\sigma_c + x_4x_i\sigma_i(\varepsilon_{ckn}x_k\sigma_b\sigma_n + \varepsilon_{bjm}x_j\sigma_m\sigma_c) + \varepsilon_{bjm}\varepsilon_{ckn}x_ix_jx_k\sigma_i\sigma_m\sigma_n\} \\
&= -\frac{6}{|x|^3}\{x_4^2\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ibc}x_i + x_4\varepsilon_{abc}(\varepsilon_{ckn}\varepsilon_{ibn}x_ix_k + \varepsilon_{bjm}\varepsilon_{imc}x_ix_j) + \varepsilon_{abc}\varepsilon_{bjm}\varepsilon_{ckn}\varepsilon_{imn}x_ix_jx_k\}
\end{aligned}$$

となるが，括弧内の各項は，

$$\begin{aligned}
\text{第 1 項} &= 2x_4^2\delta_{ai}x_i = 2x_ax_4^2, \\
\text{第 2 項} &= x_4\{(\delta_{ak}\delta_{bn} - \delta_{an}\delta_{bk})\varepsilon_{ibn}x_ix_k + (\delta_{ai}\delta_{bm} - \delta_{am}\delta_{bi})\varepsilon_{bjm}x_ix_j\} \\
&= -\varepsilon_{iba}x_bx_i - \varepsilon_{bja}x_bx_j = -\varepsilon_{iba}x_bx_i + \varepsilon_{jba}x_bx_j = 0, \\
\text{第 3 項} &= -(\delta_{aj}\delta_{cm} - \delta_{am}\delta_{cj})(\delta_{ci}\delta_{km} - \delta_{cm}\delta_{ki})x_ix_jx_k \\
&= -(\delta_{aj}\delta_{ik} - 3\delta_{aj}\delta_{ki} - \delta_{ij}\delta_{ak} + \delta_{aj}\delta_{ki})x_ix_jx_k = 2x_ax_k^2
\end{aligned}$$

となるので，

$$\varepsilon_{4\nu\rho\sigma}\text{Tr}(\partial_\nu g_1 g_1^{-1} \partial_\rho g_1 g_1^{-1} \partial_\sigma g_1 g_1^{-1}) = -\frac{12}{|x|^6}x_a(x_4^2 + x_k^2) = -\frac{12}{|x|^4}x_a$$

14:39, 25th Apr, 2014

となる．これらの μ の場合を合わせると，結局，以下となることになる．

$$Q = \frac{1}{2\pi^2} \int d\sigma_\mu \frac{x_\mu}{|x|^4} = \frac{1}{2\pi^2} \int d\Omega = \frac{1}{2\pi^2} \cdot 2\pi^2 = 1. \quad (2.33)$$

ただし， $d\sigma_\mu = x_\mu |x|^2 d\Omega$ ， $\int d\Omega = 2\pi^2$ を用いた．

以上より，式 (2.25) が実際にゲージ場に対するトポロジカルチャージを与えることが示せた．そのようなトポロジカルチャージは，境界条件を満たす Yang-Mills 方程式の解を一意に分類する．それらの解のうち， $|Q| = k$ のものを k -インスタントン (k -instanton)， $|Q| > 1$ のものをマルチインスタントン (multi-instanton)， $|Q| < 0$ のものをアンチインスタントン (anti-instanton) などという．また， $k = |Q|$ をインスタントン数 (instanton number) という．

2.2.4 自己双対条件

Yang-Mills 方程式と Bianchi の恒等式を見比べると，以下の条件を満たす場合は自動的に Yang-Mills 方程式を満たすことがわかる．

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \pm F_{\mu\nu} \quad (2.34)$$

この条件を (反) 自己双対条件 ((Anti-)Self-Dual condition) または (A)SD 条件という^{*)}．ここで，場の強さとその双対の変換性より，自己双対条件は明らかにゲージ不変であることに注意．また，自己双対条件は与えられたゲージ場が Yang-Mills 方程式の解であるための十分条件であるが，必要十分条件ではないことに注意．自己双対条件は，以下のようにして作用の表式からも導かれる．場の強さの反対称性を思い出すと，

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\rho\alpha} \delta_{\sigma\beta} - \delta_{\rho\beta} \delta_{\sigma\alpha}) F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} F_{\rho\sigma} (F_{\rho\sigma} - F_{\sigma\rho}) = F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.35)$$

となるので，式 (2.19) は以下のように平方完成できる．

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}} &= -\frac{1}{4g^2} \int d^4x \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4g^2} \int d^4x \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu})^2 \mp \frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

このとき，第 1 項は先と同様に正となることがわかる．また，第 2 項はトポロジカルチャージ Q を用いて以下のように書ける．

$$\mp \frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}) = \pm \frac{8\pi^2}{g^2} \left\{ -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}) \right\} = \frac{8\pi^2}{g^2} |Q|.$$

これより，4次元ユークリッド空間における pure Yang-Mills 理論の作用は正であるだけでなく，以下のような不等式を満たすことがわかる．

$$S_{\text{YM}} \geq \frac{8\pi^2}{g^2} |Q|. \quad (2.37)$$

^{*)} 式 (2.34) の符号が正の場合が self-dual，負の場合が anti-self-dual．

14:39, 25th Apr, 2014

自己双対条件はこの不等式の等号成立条件であり，作用の極小を与える条件であることがわかる．また，これより，自己双対条件を満たす解の作用は常にトポロジカルチャージの $8\pi/g$ 倍に等しいことに注意．

自己双対なテンソルと自己双対条件について考えてみる．まず，テンソル $F_{\mu\nu}$ が自己双対ならば，

$$F_{\mu\nu} = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \mp \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -F_{\nu\mu}$$

より $F_{\mu\nu}$ は反対称テンソルである．すると， $F_{\mu\nu}$ の成分は

$$\begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

と書け，独立な成分は6つであることがわかる．これにさらに自己双対条件が課されると独立な成分は3つとなり，それらを定める自己双対条件のトリビアルでない成分はたかだか3つであることがわかる．それらを書き下すと，

$$\begin{cases} \tilde{F}_{12} = \frac{1}{2} \varepsilon_{12\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (F_{34} - F_{43}) = F_{34} = \pm F_{12}, \\ \tilde{F}_{13} = \frac{1}{2} \varepsilon_{13\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (F_{42} - F_{24}) = F_{42} = \pm F_{13}, \\ \tilde{F}_{14} = \frac{1}{2} \varepsilon_{14\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (F_{23} - F_{23}) = F_{23} = \pm F_{14}, \end{cases}$$

改めて書いて，以下ようになる．

$$F_{12} = \pm F_{34}, \quad F_{13} = \pm F_{42}, \quad F_{14} = \pm F_{23}. \quad (2.38)$$

自己双対なテンソルは反対称性を持つので添え字の順番に注意．自己双対なテンソルとしては，以下の't Hooft の η 記号が重要である (付録 A.4)．

$$\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)} = \varepsilon_{a\mu\nu 4} \pm (\delta_{a\mu} \delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu} \delta_{\mu 4}), \quad \tilde{\eta}_{\mu\nu}^{a(\pm)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \eta_{\rho\sigma}^{a(\pm)} = \pm \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}.$$

また，'t Hooft 行列 $\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)} \sigma_a$ も同様に自己双対である (付録 A.9)．

自己双対条件は与えられたゲージ場が Yang-Mills 方程式の解となるための十分条件であるが，それでも自己双対条件からは多くのインスタントンが導かれる (知られているインスタントンのほとんどは自己双対である)．4次元 pure Yang-Mills 理論において，自己双対インスタントンを扱う分野を自己双対 Yang-Mills (ASDYM) という．

2.3 't Hooft インスタントン

自己双対条件を用いて解を探すには，何かしらのアンザッツを仮定しなければならない．'t Hooft アンザッツに自己双対条件を課すと，自己双対 Yang-Mills における応用上重要なインスタントンである't Hooft 解が得られる．'t Hooft 解は任意個数の特異点を持つ解であるが，それらのうちのいくつかは特異なゲージ変換によって取り除くことができる．

14:39, 25th Apr, 2014

2.3.1 't Hooft アンザッツと't Hooft 解

以下のアンザッツを't Hooft アンザッツまたは CFtHW アンザッツという [4, 5, 6]*).

$$A_\mu(x) = \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}^{(-)}\partial_\nu \ln \phi(x). \quad (2.39)$$

ただし, $\phi(x)$ は実関数であり, アンザッツの未知関数である. また, $\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}$ は't Hooft 行列である. 't Hooft 行列についての性質をいくつか思い出しておく.

$$\begin{aligned} [\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}, \eta_{\rho\sigma}^{(\pm)}] &= 2i(\delta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}^{(\pm)} + \delta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho}^{(\pm)} - \delta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}^{(\pm)} - \delta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}^{(\pm)}), \\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{\tau\sigma}^{(\pm)} &= \pm(\delta_{\mu\tau}\eta_{\nu\rho}^{(\pm)} + \delta_{\nu\tau}\eta_{\rho\mu}^{(\pm)} + \delta_{\rho\tau}\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}), \\ \tilde{\eta}_{\mu\nu}^{(\pm)} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{\rho\sigma}^{(\pm)} = \pm\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}. \end{aligned}$$

自己双対条件を課すために, まず*, 't Hooft アンザッツから場の強さ $F_{\mu\nu}$ を求める. すると,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\eta_{\nu\rho}^{(-)}\partial_\mu\partial_\rho \ln \phi - \frac{i}{2}\eta_{\mu\rho}^{(-)}\partial_\nu\partial_\rho \ln \phi - \frac{1}{4}[\eta_{\mu\rho}^{(-)}, \eta_{\nu\sigma}^{(-)}](\partial_\rho \ln \phi)(\partial_\sigma \ln \phi) \\ &= \frac{i}{2}\eta_{\nu\rho}^{(-)}\partial_\mu\partial_\rho \ln \phi - \frac{i}{2}\eta_{\mu\rho}^{(-)}\partial_\nu\partial_\rho \ln \phi \\ &\quad - \frac{i}{2}(\delta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}^{(-)} + \delta_{\rho\sigma}\eta_{\mu\nu}^{(-)} - \delta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu}^{(-)} - \delta_{\rho\nu}\eta_{\mu\sigma}^{(-)})(\partial_\rho \ln \phi)(\partial_\sigma \ln \phi) \\ &= \frac{i}{2}\eta_{\nu\rho}^{(-)}\{\partial_\mu\partial_\rho \ln \phi - (\partial_\mu \ln \phi)(\partial_\rho \ln \phi)\} \\ &\quad - \frac{i}{2}\eta_{\mu\rho}^{(-)}\{\partial_\nu\partial_\rho \ln \phi - (\partial_\nu \ln \phi)(\partial_\rho \ln \phi)\} - \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}^{(-)}(\partial_\rho \ln \phi)^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

次に, $F_{\mu\nu}$ の双対 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ を求めると,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\beta\rho}^{(-)}\{\partial_\alpha\partial_\rho \ln \phi - (\partial_\alpha \ln \phi)(\partial_\rho \ln \phi)\} - \frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}^{(-)}(\partial_\rho \ln \phi)^2 \\ &= \frac{i}{2}(\delta_{\mu\rho}\eta_{\nu\alpha}^{(-)} + \delta_{\nu\rho}\eta_{\alpha\mu}^{(-)} + \delta_{\alpha\rho}\eta_{\mu\nu}^{(-)})\{\partial_\alpha\partial_\rho \ln \phi - (\partial_\alpha \ln \phi)(\partial_\rho \ln \phi)\} + \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}^{(-)}(\partial_\rho \ln \phi)^2 \\ &= \frac{i}{2}\eta_{\nu\alpha}^{(-)}\{\partial_\mu\partial_\alpha \ln \phi - (\partial_\mu \ln \phi)(\partial_\alpha \ln \phi)\} \\ &\quad - \frac{i}{2}\eta_{\mu\alpha}^{(-)}\{\partial_\nu\partial_\alpha \ln \phi - (\partial_\nu \ln \phi)(\partial_\alpha \ln \phi)\} + \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}^{(-)}\partial_\alpha(\partial_\alpha \ln \phi). \end{aligned} \quad (2.41)$$

これで自己双対条件を用いる準備が整った. まず*, 自己双対条件として $F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}$ を課すことにする. すると, $\eta_{\nu\rho}^{(-)}, \eta_{\mu\rho}^{(-)}$ の項は既に満たされているので,

$$\partial_\rho(\partial_\rho \ln \phi) + (\partial_\rho \ln \phi)^2 = \partial_\rho \left(\frac{\partial_\rho \phi}{\phi} \right) + \left(\frac{\partial_\rho \phi}{\phi} \right)^2 = \frac{\square\phi}{\phi} - \frac{\partial_\rho\phi}{\phi^2}\partial_\rho\phi + \left(\frac{\partial_\rho\phi}{\phi} \right)^2 = 0$$

すなわち,

$$\frac{\square\phi}{\phi} = 0 \quad (2.42)$$

*) アンザッツ (ansatz) とはドイツ語で処方箋という意味であり, 解の形の仮定を指す言葉として用いられる.

14:39, 25th Apr, 2014

がアンザッツの未知関数に課される条件であることがわかる．この解は，正則なものに限れば ϕ が一定となる自明なものしか存在しない．しかし，正則でないもの，例えば，以下のような解は $x = 0$ で特異な非自明解である．

$$\phi(x) = \frac{1}{|x|^2}. \quad (2.43)$$

Proof.....

$x \neq 0$ のとき， $\partial_\rho |x| = x_\rho/|x|$ と $\partial_\rho x_\rho = 4$ に注意して，

$$\frac{\square\phi}{\phi} = \frac{1}{\phi} \partial_\rho \left(-\frac{2x_\rho}{|x|^4} \right) = \frac{1}{\phi} \left(-\frac{8}{|x|^4} + \frac{8}{|x|^4} \right) = 0.$$

また， $d\sigma_\mu = x_\mu |x|^2 d\Omega$ ， $\int d\Omega = 2\pi^2$ であることを思い出すと，

$$\int \square\phi dx^4 = \int \partial_\rho \left(\frac{1}{|x|^2} \right) d\sigma_\rho = \int \left(-\frac{2x_\rho}{|x|^4} \right) x_\rho |x|^2 d\Omega = -4\pi^2.$$

故に， $\square\phi = -4\pi^2 \delta^4(x)$ であり，

$$\frac{1}{\phi} \square\phi = -4\pi^2 |x|^2 \delta^4(x) = 0.$$

..... *Q.E.D.*

この一般的な形として，定数項を含む以下の形が考えられる．

$$\phi(x) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{|x_\mu - a_{i\mu}|^2}. \quad (2.44)$$

ただし， λ_i は実定数であり， $a_{i\mu}$ は 4 次元ユークリッド空間内の位置である．これを 't Hooft 解という．また，定数項を含まない以下のような形も考えられる．

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\lambda_i^2}{|x_\mu - a_{i\mu}|^2}. \quad (2.45)$$

これを JNR 解 (Jackiw-Nohl-Rebbi solution) という [7]．JNR 解は， $\lambda_{N+1}^2/a_{N+1}^2 = 1$ を保ちながら極限 $a_{N+1}^2 \rightarrow \infty$ ， $\lambda_{N+1}^2 \rightarrow \infty$ をとることで 't Hooft 解に帰着する*).

式 (2.44) で $N = 0$ の場合， $\phi(x) = 1$ よりゲージ場は 0 となるので $Q = 0$ の真空解に対応することがわかる．以後， $N \geq 1$ の場合の 't Hooft 解について見ていく．

2.3.2 't Hooft 1-インスタントン

式 (2.44) で $N = 1$ の場合， $y_\mu = x_\mu - a_{1\mu}$ ， $y^2 = y_\mu y_\mu$ と置くと， $\phi(x)$ は以下のように書ける．

$$\phi(x) = 1 + \frac{\lambda_1^2}{y^2}. \quad (2.46)$$

*caloron においては，JNR 解が必ずしも 't Hooft 解の一般化であるとは限らない [40]．

14:39, 25th Apr, 2014

これを式 (2.39) に代入すれば, $\partial_\mu y_\rho = \delta_{\mu\rho}$, $\partial_\mu y = y_\mu/y$, $\partial_\mu y^2 = 2y_\mu$ などに注意して,

$$A_\mu(x) = \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}^{(-)}\partial_\nu\{\ln(y^2 + \lambda_1^2) - 2\ln y\} = i\eta_{\mu\nu}^{(-)}\left(\frac{y_\nu}{y^2 + \lambda_1^2} - \frac{y_\nu}{y^2}\right) = -i\eta_{\mu\nu}^{(-)}\frac{\lambda_1^2 y_\nu}{y^2(y^2 + \lambda_1^2)} \quad (2.47)$$

となることからわかる。すると, 場の強さは,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= -i\eta_{\nu\rho}^{(-)}\left\{\frac{\lambda_1^2\delta_{\mu\rho}}{y^4 + \lambda_1^2 y^2} - \frac{\lambda_1^2 y_\mu y_\rho}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2}(4y^2 + 2\lambda_1^2)\right\} \\ &\quad + i\eta_{\mu\rho}^{(-)}\left\{\frac{\lambda_1^2\delta_{\nu\rho}}{y^4 + \lambda_1^2 y^2} - \frac{\lambda_1^2 y_\nu y_\rho}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2}(4y^2 + 2\lambda_1^2)\right\} \\ &\quad - 2i\frac{\lambda_1^4 y_\rho y_\sigma}{(y^4 + \lambda_1^2 y^2)^2}(\delta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}^{(-)} + \delta_{\rho\sigma}\eta_{\mu\nu}^{(-)} - \delta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu}^{(-)} - \delta_{\rho\nu}\eta_{\mu\sigma}^{(-)}) \\ &= 2i\eta_{\mu\nu}^{(-)}\frac{\lambda_1^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} + 4i\eta_{\nu\rho}^{(-)}\frac{\lambda_1^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2}\frac{y_\mu y_\rho}{y^2} - 4i\eta_{\mu\rho}^{(-)}\frac{\lambda_1^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2}\frac{y_\nu y_\rho}{y^2} \\ &= 2i\frac{\lambda_1^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2}\left\{\eta_{\mu\nu}^{(-)} + \frac{2}{y^2}(\eta_{\nu\rho}^{(-)}y_\mu - \eta_{\mu\rho}^{(-)}y_\nu)y_\rho\right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

となり, これより作用も以下のようにして求められる。まず,

$$\begin{aligned} &\text{Tr}\left\{\eta_{\mu\nu}^{(-)} + \frac{2}{y^2}(\eta_{\nu\rho}^{(-)}y_\mu - \eta_{\mu\rho}^{(-)}y_\nu)y_\rho\right\}^2 \\ &= \text{Tr}\left\{\eta_{\mu\nu}^{(-)} + \frac{2}{y^2}(\eta_{\nu\rho}^{(-)}y_\mu - \eta_{\mu\rho}^{(-)}y_\nu)y_\rho\right\}\left\{\eta_{\mu\nu}^{(-)} + \frac{2}{y^2}(\eta_{\nu\sigma}^{(-)}y_\mu - \eta_{\mu\sigma}^{(-)}y_\nu)y_\sigma\right\} \\ &= \text{Tr}\left\{\eta_{\mu\nu}^{(-)}\eta_{\mu\nu}^{(-)} + \frac{2}{y^2}\eta_{\mu\nu}^{(-)}(\eta_{\nu\sigma}^{(-)}y_\mu - \eta_{\mu\sigma}^{(-)}y_\nu)y_\sigma + \frac{2}{y^2}(\eta_{\nu\rho}^{(-)}y_\mu - \eta_{\mu\rho}^{(-)}y_\nu)\eta_{\mu\nu}^{(-)}y_\rho \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{y^4}(\eta_{\nu\rho}^{(-)}y_\mu - \eta_{\mu\rho}^{(-)}y_\nu)(\eta_{\nu\sigma}^{(-)}y_\mu - \eta_{\mu\sigma}^{(-)}y_\nu)y_\rho y_\sigma\right\} \end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}\eta_{\alpha\beta}^{(\pm)}) &= 2(\pm\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}), \\ \text{Tr}(\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}\eta_{\mu\alpha}^{(\pm)}) &= 6\delta_{\nu\alpha}, \quad \text{Tr}(\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}) = 24 \end{aligned}$$

に注意すれば, トレース内の各項は,

$$\begin{aligned} \text{第 1 項} &= 24, \\ \text{第 2 項} &= \frac{2}{y^2}(-6\delta_{\mu\sigma}y_\mu - 6\delta_{\nu\sigma}y_\nu)y_\sigma = -24, \\ \text{第 3 項} &= \frac{2}{y^2}(-6\delta_{\rho\mu}y_\mu - 6\delta_{\rho\nu}y_\nu)y_\rho = -24, \\ \text{第 4 項} &= \frac{4}{y^4}\text{Tr}(\eta_{\nu\rho}^{(-)}\eta_{\nu\sigma}^{(-)}y^2 + \eta_{\mu\rho}^{(-)}\eta_{\mu\sigma}^{(-)}y^2 - \eta_{\nu\rho}^{(-)}\eta_{\mu\sigma}^{(-)}y_\mu y_\nu - \eta_{\mu\rho}^{(-)}\eta_{\nu\sigma}^{(-)}y_\nu y_\mu)y_\rho y_\sigma \\ &= \frac{4}{y^4}\{12\delta_{\rho\sigma}y^2 - 2(-\varepsilon_{\nu\rho\mu\sigma} + \delta_{\nu\mu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\nu\sigma}\delta_{\rho\mu})y_\mu y_\nu \\ &\quad - 2(-\varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma} + \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\rho\nu})y_\nu y_\mu\}y_\rho y_\sigma = 48, \end{aligned}$$

14:39, 25th Apr, 2014

となり,

$$\text{Tr} \left\{ \eta_{\mu\nu}^{(-)} + \frac{2}{y^2} (\eta_{\nu\rho}^{(-)} y_\mu - \eta_{\mu\rho}^{(-)} y_\nu) y_\rho \right\}^2 = 24 - 24 - 24 + 48 = 24$$

となつて, 以下が得られる.

$$S_{\text{YM}} = \frac{2\lambda_1^4}{g^2} \cdot 24 \int \frac{d^4x}{(y^2 + \lambda_1^2)^4}. \quad (2.49)$$

残りの積分は4次元球座標をとることで計算できる. $d^4x = y^3 dy d\Omega$, $\int d\Omega = 2\pi^2$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4x}{(y^2 + \lambda_1^2)^4} &= 2\pi^2 \int_0^\infty \frac{y^3 dy}{(y^2 + \lambda_1^2)^4} = 2\pi^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\lambda_1^8 \sec^8 \theta} \cdot \lambda_1^3 \tan^3 \theta \cdot \lambda_1 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi^2}{\lambda_1^4} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin^3 \theta d\theta \quad \left(\begin{array}{l} y = \lambda_1 \tan \theta \quad y \Big|_{0 \rightarrow \infty} \\ dy = \lambda_1 \sec^2 \theta d\theta \quad \theta \Big|_{0 \rightarrow \pi/2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 d\theta \\ &= -\frac{1}{64i} \int_0^{\pi/2} (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})^3 d\theta = -\frac{1}{64i} \int_0^{\pi/2} (e^{6i\theta} - 3e^{2i\theta} + 3e^{-2i\theta} - e^{-6i\theta}) d\theta \\ &= -\frac{1}{32} \int_0^{\pi/2} (\sin 6\theta - 3\sin 2\theta) d\theta = \frac{1}{32} \left[\frac{1}{6} \cos 6\theta - \frac{3}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{16} \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

なので, 結局, 以下となることわかる.

$$S_{\text{YM}} = \frac{2\lambda_1^4}{g^2} \cdot 24 \cdot \frac{2\pi^2}{\lambda_1^4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{8\pi^2}{g^2} \cdot (+1). \quad (2.50)$$

これと式(2.37)を比較すれば, 't Hooft 1-インスタントンはチャージ $Q = +1$ を持つ解であると見なせる. また, 't Hooft アンザッツの式(2.39)で $\eta_{\mu\nu}^{(-)}$ を $\eta_{\mu\nu}^{(+)}$ に置き換えたアンザッツ

$$A_\mu(x) = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(+)} \partial_\nu \ln \phi(x)$$

を用いると, $\eta_{\mu\nu}^{(-)}$ と $\eta_{\mu\nu}^{(+)}$ が入れ換わり, $Q = -1$ の場合となることわかる.

2.3.3 't Hooft 解のゲージ変換と BPST 解

前小節の式(2.46)は $y = 0$, すなわち $x_\mu = a_\mu$ で特異となっている. このように解が特異点を持っていると不便なので, 適当なゲージ変換を行って特異点を取り除くことを考える. それには, 2.2.3 小節で扱った以下のようなゲージを用いればよい.

$$g_1(y) = \frac{y_\nu}{|y|} e_\nu^\dagger. \quad (2.51)$$

14:39, 25th Apr, 2014

ただし, $y_\mu = x_\mu - a_{1\mu}$, $y^2 = y_\mu y_\mu$ である. ゲージ変換を行う前に, まず,

$$g_1^{-1} = g_1^\dagger = \frac{y_\nu}{|y|} e_\nu, \quad e_\mu e_\nu^\dagger = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(-)}$$

より

$$\begin{aligned} \partial_\mu g_1 &= \partial_\mu \frac{1}{|y|} y_\nu e_\nu^\dagger + \frac{1}{|y|} \partial_\mu y_\nu e_\nu^\dagger = -\frac{y_\mu}{|y|^3} y_\nu e_\nu^\dagger + \frac{1}{|y|} \delta_{\mu\nu} e_\nu^\dagger = -\frac{y_\mu}{|y|^2} g_1 + \frac{1}{|y|} e_\mu^\dagger, \\ g_1^{-1} \partial_\mu g_1 &= -\frac{y_\mu}{|y|^2} \mathbf{1}_2 + \frac{y_\nu}{|y|^2} (\delta_{\nu\mu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\nu\mu}^{(-)}) = -i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \frac{y_\nu}{|y|^2} \end{aligned}$$

となることを用いて, 式 (2.47) を以下のように変形しておく.

$$A_\mu(x) = g_1^{-1} \partial_\mu g_1 \frac{\lambda_1^2}{y^2 + \lambda_1^2}. \quad (2.52)$$

これを見ると, この時点で既に特異点を取り除かれているように見えるが, まだ g_1 の中に特異点が含まれる. ここで, 解は (無限遠方でなく) $y_\mu \rightarrow 0$, すなわち, $x_\mu \rightarrow a_\mu$ でピュアゲージ $g_1^{-1} \partial_\mu g_1$ に近づくことに注意. これを先のゲージで変換すれば, ひとまず, 以下ようになる.

$$\begin{aligned} A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) &= g_1 \left(g_1^{-1} \partial_\mu g_1 \frac{\lambda_1^2}{y^2 + \lambda_1^2} \right) g_1^{-1} + g_1 \partial_\mu g_1^{-1} \\ &= g_1 \partial_\mu g_1^{-1} \left(-\frac{\lambda_1^2}{y^2 + \lambda_1^2} + 1 \right) = g_1 \partial_\mu g_1^{-1} \frac{y^2}{y^2 + \lambda_1^2}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

これを見ると, $A'_\mu(x)$ が無限遠方でピュアゲージに近づくのは明らかである. また,

$$e_\mu^\dagger e_\nu = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(+)}$$

に注意すれば,

$$\begin{aligned} \partial_\mu g_1^{-1} &= \partial_\mu \frac{1}{|y|} y_\nu e_\nu + \frac{1}{|y|} \partial_\mu y_\nu e_\nu = -\frac{y_\mu}{|y|^3} y_\nu e_\nu + \frac{1}{|y|} \delta_{\mu\nu} e_\nu = -\frac{y_\mu}{|y|^2} g_1^{-1} + \frac{1}{|y|} e_\mu, \\ g_1 \partial_\mu g_1^{-1} &= -\frac{y_\mu}{|y|^2} \mathbf{1}_2 + \frac{y_\nu}{|y|^2} (\delta_{\nu\mu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\nu\mu}^{(+)}) = -i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{y_\nu}{|y|^2} \end{aligned}$$

となり, $A'_\mu(x)$ は以下のような特異点を持たない解であることがわかる.

$$A'_\mu(x) = -i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{y_\nu}{y^2 + \lambda_1^2} = -i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{(x - a_1)_\nu}{|x - a_1|^2 + \lambda_1^2} \quad (2.54)$$

(特異なゲージ場に対して特異なゲージ変換を行うことで, 特異でないゲージ場が得られたことに注意). この解を BPST 解 (Belavin-Polyakov-Schwartz-Tyupkin solution) という [8].

$A'_\mu(x)$ を用いて再び場の強さと作用を求めてみる. まず, 場の強さを求めると,

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= -i\eta_{\nu\rho}^{(+)} \left\{ \frac{\delta_{\mu\rho}}{y^2 + \lambda_1^2} - \frac{2y_\mu y_\rho}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} \right\} + i\eta_{\mu\rho}^{(+)} \left\{ \frac{\delta_{\nu\rho}}{y^2 + \lambda_1^2} - \frac{2y_\nu y_\rho}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} \right\} \\ &\quad - 2i(\delta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}^{(+)} + \delta_{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu}^{(+)} - \delta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\nu}^{(+)} - \delta_{\rho\nu} \eta_{\mu\sigma}^{(+)}) \frac{y_\rho y_\sigma}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{1}{y^2 + \lambda_1^2} - 2i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{y^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} \\
&= 2i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{\lambda_1^2}{(y^2 + \lambda_1^2)^2} = 2i\eta_{\mu\nu}^{(+)} \frac{\lambda_1^2}{(|x - a_1|^2 + \lambda_1^2)^2}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

となり，これも特異点を持たない．また， $\eta_{\mu\nu}^{(+)}$ が自己双対であることにより $F_{\mu\nu}$ は明らかに自己双対条件の解である．これより作用を求めると，

$$\begin{aligned}
S_{\text{YM}} &= -\frac{1}{2g^2} \int dx^4 \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 = \frac{2\lambda_1^4}{g^2} \text{Tr}(\eta_{\mu\nu}^{(+)} \eta_{\mu\nu}^{(+)}) \int \frac{d^4x}{(y^2 + \lambda_1^2)^4} \\
&= \frac{2\lambda_1^4}{g^2} \cdot 24 \int \frac{d^4x}{(y^2 + \lambda_1^2)^4}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

となって式 (2.49) に帰着し，BPST 解は $Q = 1$ を持つインスタントンであることがわかる．

2.3.4 't Hooft N -インスタントン

式 (2.44) で N が一般の場合を考える．まず，解をそのままアンザッツに代入すると，

$$A_\mu(x) = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(-)} \partial_\nu \ln \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{y_i^2} \right) = -i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2 y_{i\nu}}{y_i^4} \right) / \left(1 + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^2}{y_j^2} \right) \tag{2.57}$$

となる．ただし， $y_{i\mu} = (x - a_i)_\mu$ ， $y_i^2 = y_{i\mu} y_{i\mu}$ である．ここで，前小節と同様に

$$g_1^{-1}(y_i) \partial_\mu g_1(y_i) = -i\eta_{\mu\nu}^{(-)} \frac{y_{i\nu}}{y_i^2}$$

となるゲージを考えれば， $A_\mu(x)$ は以下のように書き換えられる．

$$A_\mu(x) = \sum_{i=1}^N g_1^{-1}(y_i) \partial_\mu g_1(y_i) f_i(x), \quad f_i(x) = \left(\frac{\lambda_i^2}{y_i^2} \right) / \left(1 + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^2}{y_j^2} \right). \tag{2.58}$$

ここで，極限 $x \rightarrow a_i$ を考えると， $f_j(x) \rightarrow \delta_{ij}$ より

$$A_\mu(x) \rightarrow g_1^{-1}(y_i) \partial_\mu g_1(y_i)$$

となるので，'t Hooft N -インスタントンは N 個の't Hooft 1-インスタントンがそれぞれ $x = a_i$ に配置されたような解と見なすことができる．

この解は N 個の特異点を持つので，前小節と同様に適当なゲージ変換を行って特異点を取り除くことを考える．それには，以下のようなゲージを考える．

$$g_N(x) = \frac{1}{|Z|} Z_\nu e_\nu^\dagger, \quad Z_\nu(x) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \left(\frac{y_{i\nu}}{y_i^2} \right). \tag{2.59}$$

ただし， γ_i は任意の実数である．このゲージにより，解は以下のように変換される．

$$A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = g_N(x) A_\mu g_N^{-1}(x) + g_N(x) \partial_\mu g_N^{-1}(x).$$

14:39, 25th Apr, 2014

すると、ある i に対して極限 $y_i \rightarrow 0$ を考えたとき、

$$Z_\nu \rightarrow \gamma_i \left(\frac{y_{i\nu}}{y_i^2} \right), \quad |Z|^2 \rightarrow \frac{\gamma_i^2}{y_i^2}$$

より

$$g_N(y_i) \rightarrow \frac{|y_i|}{\gamma_i} \cdot \gamma_i \left(\frac{y_{i\nu}}{y_i^2} \right) e_\nu^\dagger = \frac{y_{i\nu}}{|y_i|} e_\nu^\dagger = g_1(y_i)$$

となるので、始めにあった N 個の特異点は以下のようにすべて取り除かれることがわかる。

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &\xrightarrow{x \rightarrow a_i} g_1(y_i) \{g_1^{-1}(y_i) \partial_\mu g_1(y_i)\} g_1^{-1}(y_i) + g_1(y_i) \partial_\mu g_1^{-1}(y_i) + \cdots \\ &= -g_1(y_i) \partial_\mu g_1^{-1}(y_i) + g_1(y_i) \partial_\mu g_1^{-1}(y_i) + \cdots \\ &= 0 + \cdots \end{aligned} \quad (2.60)$$

ところが、 $N \geq 1$ の場合には、このゲージ変換によって新たな特異点が生じてしまうことがある。例えば、 $N = 2$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ としたとき、2 個の特異点の中点 $\bar{a}_\mu = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)_\mu$ において

$$Z_\mu = \frac{x_\mu - a_{1\mu}}{(x - a_1)^2} + \frac{x_\mu - a_{2\mu}}{(x - a_2)^2} = 0$$

となり、始めにあった特異点 $x_\mu = a_{1\mu}, a_{2\mu}$ が取り除かれる代わりに新たな特異点 $x_\mu = \bar{a}_\mu$ が生じてしまう。これについては、すべての特異点が 4 次元ユークリッド空間内の同一直線上に並んでいれば、適当な γ_i が存在し、特異点を持たない解へ変換できることが示されている [10]。例えば、今の $N = 2$ の場合は $\gamma_1 = -\gamma_2 = 1$ とすれば完全に特異点を取り除くことができる。

最後に、't Hooft N -インスタントンの作用が $8\pi^2 N/g^2$ となることを示しておく。't Hooft インスタントンは自己双対なので、作用は以下のように書ける。

$$S_{\text{YM}} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}). \quad (2.61)$$

このとき、被積分関数は Bianchi の恒等式などを用いて式 (2.26) のように書き換えられ、さらに解が特異点を持たなければ、ストークスの定理を用いて式 (2.28) のような S_∞^3 上での積分へ書き換えられるのであった。ところが、今の場合、解は無限遠方ではなく各極の近傍でピュアゲージに近づく。すると、各極を囲む微小球面 σ_i では式 (2.27) が成り立ち、ストークスの定理より、

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{24\pi^2} \int_{\sigma_i} d\sigma_\mu \text{Tr}\{g_1(y_i) \partial_\mu g_1^{-1}(y_i) g_1(y_i) \partial_\mu g_1^{-1}(y_i) g_1(y_i) \partial_\mu g_1^{-1}(y_i)\} \\ &= +\frac{1}{24\pi^2} \int_{\sigma_i} d\sigma_\mu \text{Tr}\{\partial_\mu g_1(y_i) g_1^{-1}(y_i) \partial_\mu g_1(y_i) g_1^{-1}(y_i) \partial_\mu g_1(y_i) g_1^{-1}(y_i)\} \\ &= -1. \end{aligned} \quad (2.62)$$

これと、今の場合は S_∞^3 上での寄与がないこと、微小球面の法線ベクトルが内向きであることに注意すれば、

$$S_{\text{YM}} = \frac{8\pi^2}{g^2} \{0 - (-1) - (-1) - \cdots - (-1)\} = \frac{8\pi^2}{g^2} N. \quad (2.63)$$

2.4 Witten の Liouville 解

't Hooft 解は、アンザッツより本質的に 4 次元球対称である。一方、Liouville 解は 4 次元円柱座標によって記述され、円柱対称性を持つ。Liouville 解は Witten によって発見され、その導出の過程には Liouville 方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式が登場する。

2.4.1 コーシー・リーマンの定理

Liouville 解についてみる前に、複素関数論におけるコーシー・リーマンの定理を復習しておく。複素平面 $z = x + iy$ 上で定義された複素関数

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2.64)$$

の微分が極限の取り方に依らず一意に決まるとき、 $w(z)$ は解析的であるといい、そのような性質を持つ関数を解析関数という。解析関数 $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の微分

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \quad (2.65)$$

を考えると、定義より $\Delta y = 0$ として $x \rightarrow 0$ としても $\Delta x = 0$ として $y \rightarrow 0$ としてもよいので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} = u_x + iv_x \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} = -iu_y + v_y, \end{aligned}$$

すなわち、任意の解析関数 $w(z)$ に対して以下が成り立つことがわかる。

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (2.66)$$

逆に、これらを満たす任意の関数は解析関数となることも示せる。これをコーシー・リーマンの定理といい、式 (2.66) をコーシー・リーマンの方程式という。複素関数 $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が解析的ならば、コーシー・リーマンの方程式より

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{yx} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = -u_{xy} + v_{yx} = 0$$

となるので、以下のようにして解析関数は常にラプラス方程式を満たすことがわかる。

$$\nabla^2 w(z) = u_{xx} + u_{yy} + i(v_{xx} + v_{yy}) = 0. \quad (2.67)$$

2.4.2 Witten のアンザッツ

4 次元円柱座標 (cylindrical coordinate)

$$\begin{cases} t = x_0 \\ r = (x_i x_i)^{1/2} \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (2.68)$$

14:39, 25th Apr, 2014

において，以下のようなアンザッツを考える [11] .

$$A_0^a = \frac{A_0}{r} x^a, \quad A_j^a = \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{jak} x_k + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{ja} r^2 - x_j x_a) + \frac{A_1}{r^2} x_j x_a. \quad (2.69)$$

ただし， $a = 1, 2, 3$ は内部空間の添え字であり， $\varphi_1, \varphi_2, A_0, A_1$ はアンザッツの未知関数である．これより，場の強さ $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ を求めてみる． $\partial_i = (\partial_i r) \partial_r = (x_i/r) \partial_r$ ， $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$ ， $x_i x_i = r^2$ などに注意すると，まず，

$$\begin{aligned} F_{0i}^a &= \partial_0 \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{iak} x_k + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{ia} r^2 - x_i x_a) + \frac{A_1}{r^2} x_i x_a \right\} - \partial_i \left(\frac{A_0}{r} x^a \right) \\ &\quad - \varepsilon_{abc} \frac{A_0}{r} \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{ick} x_b x_k + \frac{\varphi_1}{r^3} (x_b \delta_{ic} r^2 - x_i x_b x_c) + \frac{A_1}{r^2} x_i x_b x_c \right\} \\ &= \frac{\partial_0 \varphi_2}{r^2} \varepsilon_{iak} x_k + \frac{\partial_0 \varphi_1}{r^3} (\delta_{ia} r^2 - x_i x_a) + \frac{\partial_0 A_1}{r^2} x_i x_a - \frac{\partial_r A_0}{r^2} x_i x_a + \frac{A_0}{r^3} x_i x_a - \frac{A_0}{r} \delta_{ia} \\ &\quad - \frac{A_0 (\varphi_2 + 1)}{r^3} (-\delta_{ia} r^2 + x_i x_a) - \frac{A_0 \varphi_1}{r^2} \varepsilon_{iak} x_k \\ &= (\partial_0 \varphi_2 - A_0 \varphi_1) \frac{\varepsilon_{iak} x_k}{r^2} + (\partial_0 \varphi_1 + A_0 \varphi_2) \frac{(\delta_{ia} r^2 - x_i x_a)}{r^3} + r^2 (\partial_0 A_1 - \partial_r A_0) \frac{x_a x_i}{r^4} \end{aligned}$$

となる (添え字の上下は気にしなくてよい) . 次に， $(1/2) \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a$ は，ひとまず，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a &= \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k^a - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} A_j^b A_k^c \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{kal} x_l + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{ka} r^2 - x_k x_a) + \frac{A_1}{r^2} x_k x_a \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{jbl} x_l + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{jb} r^2 - x_j x_b) + \frac{A_1}{r^2} x_j x_b \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{kcm} x_l + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{kc} r^2 - x_k x_c) + \frac{A_1}{r^2} x_k x_c \right\} \end{aligned}$$

となるが，最右辺は，

第 1 項

$$\begin{aligned} &= \varepsilon_{ijk} \left\{ \frac{\partial_r \varphi_2}{r^3} \varepsilon_{kal} x_j x_l - 2 \frac{\varphi_2 + 1}{r^4} \varepsilon_{kal} x_j x_l + \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{kal} \delta_{jl} \right. \\ &\quad + \frac{\partial_r \varphi_1}{r^4} (\delta_{ka} x_j r^2 - x_j x_k x_a) - 3 \frac{\varphi_1}{r^5} (\delta_{ka} x_j r^2 - x_j x_k x_a) + \frac{\varphi_1}{r^3} (2 \delta_{ka} x_j - \delta_{jk} x_a - \delta_{ja} x_k) \\ &\quad \left. + \frac{\partial_r A_1}{r^3} x_j x_k x_a - 2 \frac{A_1}{r^4} x_j x_k x_a + \frac{A_1}{r^2} (\delta_{jk} x_a + \delta_{ja} x_k) \right\} \\ &= \varepsilon_{ijk} \left\{ \left(\frac{\partial_r \varphi_2}{r^3} - 2 \frac{\varphi_2 + 1}{r^4} \right) \varepsilon_{kal} x_j x_l + \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} \varepsilon_{kaj} + \left(\frac{\partial_r \varphi_1}{r^2} - \frac{\varphi_1}{r^3} \right) \delta_{ka} x_j - \left(\frac{\varphi_1}{r^3} - \frac{A_1}{r^2} \right) \delta_{ja} x_k \right\} \\ &= \left(\frac{\partial_r \varphi_2}{r^3} - 2 \frac{\varphi_2 + 1}{r^4} \right) (\delta_{ia} r^2 - x_i x_a) + \frac{\varphi_2 + 1}{r^2} 2 \delta_{ia} - \left(\frac{\partial_r \varphi_1}{r^2} - \frac{\varphi_1}{r^3} \right) \varepsilon_{ias} x_s - \left(\frac{\varphi_1}{r^3} - \frac{A_1}{r^2} \right) \varepsilon_{ias} x_s \\ &= \frac{\delta_{ia} r^2 - x_i x_a}{r^3} \partial_r \varphi_2 + 2 \frac{x_i x_a}{r^4} (\varphi_2 + 1) - \frac{\varepsilon_{ias} x_s}{r^2} (\partial_r \varphi_1 - A_1), \end{aligned}$$

第 2 項

14:39, 25th Apr, 2014

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}\left\{\frac{(\varphi_2+1)^2}{r^4}\varepsilon_{jbl}\varepsilon_{kcm}x_\ell x_m + \frac{\varphi_2+1}{r^3}\varphi_1(\varepsilon_{jbl}\delta_{kc}x_\ell + \varepsilon_{kcm}\delta_{jb}x_m)\right. \\
&\quad - \left(\frac{\varphi_2+1}{r^5}\varphi_1 - \frac{\varphi_2+1}{r^4}A_1\right)(\varepsilon_{jbl}x_\ell x_k x_c + \varepsilon_{kcm}x_m x_j x_b) \\
&\quad \left. - \left(\frac{\varphi_1^2}{r^4} - \frac{\varphi_1 A_1}{r^3}\right)(\delta_{jb}x_k x_c + \delta_{kc}x_j x_b) - \frac{\varphi_1^2}{r^2}\delta_{jb}\delta_{kc}\right\} \\
&= -\frac{(\varphi_2+1)^2}{r^4}x_i x_a - \frac{\varphi_2+1}{r^3}\varphi_1\varepsilon_{ias}x_s + \left(\frac{\varphi_2+1}{r^5}\varphi_1 - \frac{\varphi_2+1}{r^4}A_1\right)\varepsilon_{ias}x_s r^2 \\
&\quad + \left(\frac{\varphi_1^2}{r^4} - \frac{\varphi_1 A_1}{r^3}\right)(\delta_{ia}r^2 - x_i x_a) - \frac{\varphi_1^2}{r^2}\delta_{ia} \\
&= -\frac{x_i x_a}{r^4}(\varphi_2+1)^2 - \frac{\varepsilon_{ias}x_s}{r^2}(\varphi_2+1)A_1 + \frac{\delta_{ia}r^2 - x_i x_a}{r^4}\varphi_1^2 - \frac{\delta_{ia}r^2 - x_i x_a}{r^3}\varphi_1 A_1 - \frac{\delta_{ia}}{r^2}\varphi_1^2
\end{aligned}$$

となるので、以下となることわかる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}^a &= \frac{\delta_{ia}r^2 - x_i x_a}{r^3}\partial_r\varphi_2 + 2\frac{x_i x_a}{r^4}(\varphi_2+1) - \frac{\varepsilon_{ias}x_s}{r^2}(\partial_r\varphi_1 - A_1) - \frac{x_i x_a}{r^4}(\varphi_2+1)^2 \\
&\quad - \frac{\varepsilon_{ias}x_s}{r^2}(\varphi_2+1)A_1 + \frac{\delta_{ia}r^2 - x_i x_a}{r^4}\varphi_1^2 - \frac{\delta_{ia}r^2 - x_i x_a}{r^3}\varphi_1 A_1 - \frac{\delta_{ia}}{r^2}\varphi_1^2 \\
&= -\frac{\varepsilon_{ias}x_s}{r^2}(\partial_r\varphi_1 + A_1\varphi_2) + \frac{\delta_{ia}r^2 - x_i x_a}{r^3}(\partial_r\varphi_2 - \varphi_1 A_1) + \frac{x_i x_a}{r^4}(1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2).
\end{aligned}$$

ここで、 $\partial_r = \partial_1$ と書くことにすれば、結局、場の強さは以下ようになる。

$$\begin{aligned}
F_{0i}^a &= (\partial_0\varphi_2 - A_0\varphi_1)\frac{\varepsilon_{iak}x_k}{r^2} + (\partial_0\varphi_1 + A_0\varphi_2)\frac{(\delta_{ai}r^2 - x_a x_i)}{r^3} \\
&\quad + r^2(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)\frac{x_a x_i}{r^4}, \tag{2.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}^a &= -\frac{\varepsilon_{ias}x_s}{r^2}(\partial_1\varphi_1 + A_1\varphi_2) + \frac{\delta_{ia}r^2 - x_i x_a}{r^3}(\partial_1\varphi_2 - \varphi_1 A_1) \\
&\quad + \frac{x_i x_a}{r^4}(1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2). \tag{2.71}
\end{aligned}$$

これらより作用 A を求めると、クロスタームがことごとく消えることに注意して、

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4}\int d^3x \int dt F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2}\int d^3x \int dt \left\{ F_{0i}^a F_{0i}^a + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}^a\right) \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ilm}F_{lm}^a\right) \right\} \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} dr r^2 \left\{ (\partial_0\varphi_2 - A_0\varphi_1)^2 \frac{2}{r^2} + (\partial_0\varphi_1 + A_0\varphi_2)^2 \frac{2}{r^2} + (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r^2}(\partial_1\varphi_1 + A_1\varphi_2)^2 + \frac{2}{r^2}(\partial_1\varphi_2 - A_1\varphi_1)^2 + \frac{1}{r^4}(1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2 \right\} \\
&= 8\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} dr \left\{ \frac{1}{2}(D_\mu\varphi_i)^2 + \frac{1}{8}r^2 F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{4r^2}(1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2 \right\} \tag{2.72}
\end{aligned}$$

となるが、これは $\varphi_0, \varphi_1, A_0, A_1$ をそれぞれヒッグス場、ゲージ場と見なせば 2 次元 Abelian Higgs モデルの作用と一致する。ただし、 $\mu, \nu = 0, 1, i, j = 1, 2$ であり、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad D_\mu\varphi_i = \partial_\mu\varphi_i + \varepsilon_{ij}A_\mu\varphi_j$$

14:39, 25th Apr, 2014

はそれぞれ 2 次元 Abelian Higgs モデルにおける場の強さと共変微分である．また，曲率 $g^{\mu\nu}$ を持つ空間における Abelian Higgs モデルの作用

$$\int d^2x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \varphi_i D_\nu \varphi_i + \frac{1}{8} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} (1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2 \right\}$$

と比較すると，以下などより，今の作用は $g^{\mu\nu} = r^2 \delta^{\mu\nu}$ の場合に対応することがわかる．

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{r^2} (dt^2 + dr^2), \quad \sqrt{g} = \sqrt{\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r^2}} = \frac{1}{r^2},$$

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \phi_i D_\nu \phi_i = \frac{1}{2} r^2 (D_\mu \phi_i)^2, \quad g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = r^4 F_{\mu\nu}^2.$$

2.4.3 Liouville 解

式 (2.69) のアンザッツに自己双対条件を課して解を求めることを考える．今の場合，条件は

$$F_{0i}^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a \quad (2.73)$$

であるが，式 (2.70), (2.71) より，以下であれば十分であることがわかる．

$$\partial_0 \varphi_1 + A_0 \varphi_2 = \partial_1 \varphi_2 - A_1 \varphi_1, \quad (2.74)$$

$$\partial_1 \varphi_1 + A_1 \varphi_2 = -(\partial_0 \varphi_2 - A_0 \varphi_1), \quad (2.75)$$

$$r^2 (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) = 1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2. \quad (2.76)$$

これらを解くには，ゲージ固定条件 $\partial_\mu A_\mu = 0$ が $A_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \psi$ を満たす ψ が存在することと同値であることに注意する．

Proof

$A_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \psi \Rightarrow \partial_\mu A_\mu = 0$ は $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$ より明らかである．逆は，まず，

$$A_0 = \partial_1 \psi \iff \psi(r, t) = \int_0^{r_0} A_0 dr + f(t). \quad (f \text{ は任意関数})$$

次に，

$$\partial_0 \psi = \int_0^{r_0} \partial_0 A_0 dr + f'(t) = -A_1$$

$$\iff f(t) = - \int_0^{t_0} \left(\int_0^{r_0} \partial_0 A_0 dr + A_1 \right) dt + g(r). \quad (g \text{ は任意関数})$$

すると， $\partial_\mu A_\mu = 0$ ならば，

$$g'(r) = \int_0^{t_0} (\partial_0 A_0 + \partial_1 A_1) dt = 0 \iff g(r) = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

となり，以下のような $A_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \psi$ を満たす ψ が存在する．

$$\psi(r, t) = \int_0^{r_0} A_0 dr - \int_0^{t_0} \left(\int_0^{r_0} \partial_0 A_0 dr + A_1 \right) dt + C.$$

..... *Q.E.D.*

14:39, 25th Apr, 2014

このようなゲージ固定を用いると, $A_0 = \partial_1\psi$, $A_1 = -\partial_0\psi$ より, 式 (2.74), (2.75) はそれぞれ

$$\begin{aligned}\partial_0\varphi_1 + \partial_1\psi\varphi_2 &= \partial_1\varphi_2 - (-\partial_0\psi)\varphi_1 \iff (\partial_0 - \partial_0\psi)\varphi_1 = (\partial_1 - \partial_1\psi)\varphi_2, \\ \partial_1\varphi_1 + (-\partial_0\psi)\varphi_2 &= -(\partial_0\varphi_2 - \partial_1\psi\varphi_1) \iff (\partial_1 - \partial_1\psi)\varphi_1 = -(\partial_0 - \partial_0\psi)\varphi_2\end{aligned}$$

と書けるが, さらに $\varphi_1 = e^\psi\chi_1$, $\varphi_2 = e^\psi\chi_2$ と置けば,

$$\begin{aligned}e^\psi(\partial_0\psi + \partial_0 - \partial_0\psi)\chi_1 &= e^\psi(\partial_1\psi + \partial_1 - \partial_1\psi)\chi_2 \iff \partial_0\chi_1 = \partial_1\chi_2, \\ e^\psi(\partial_1\psi + \partial_1 - \partial_1\psi)\chi_1 &= -e^\psi(\partial_0\psi + \partial_0 - \partial_0\psi)\chi_2 \iff \partial_1\chi_1 = -\partial_0\chi_2\end{aligned}$$

となってコーシー・リーマンの方程式に帰着する, すなわち, $z = r + it$ において

$$f = \chi_1 - i\chi_2 \quad (2.77)$$

が解析的となる任意の χ_1, χ_2 が式 (2.74), (2.75) の解となることがわかる. すると, 残りは式 (2.76) であるが, これは今までのいくつかの定義を用いると以下のように書き換えられる.

$$-r^2\nabla^2\psi = 1 - f^*fe^{2\psi} \quad (2.78)$$

ただし, $\nabla^2 = \partial_\mu\partial_\mu = \partial_0^2 + \partial_1^2$ である. ここで, この条件は零点を持たない任意の解析関数 $h(z)$ による以下のような変換に対して不変であることに注意.

$$f \mapsto fh, \quad \psi \mapsto \psi - \frac{1}{2}\ln(h^*h). \quad (2.79)$$

Proof.....

$h(z)$ は零点を持たない解析関数なので, $\ln(h^*h)$ も解析関数である. ところが, 解析関数はラプラス方程式を満たすので,

$$\begin{aligned}-r^2\nabla^2\psi = 1 - f^*fe^{2\psi} &\mapsto -r^2\nabla^2\left\{\psi - \frac{1}{2}\ln(h^*h)\right\} = -r^2\nabla^2\psi \\ &= 1 - (fh)^*fhe^{2\psi - \ln(h^*h)} = 1 - f^*f(h^*h)(h^*h)^{-1}e^{2\psi} = 1 - f^*fe^{2\psi}.\end{aligned}$$

..... *Q.E.D.*

また, 零点を持つ $h(z)$ による変換は, 零点の数だけの孤立した特異点を持つことに注意.

式 (2.78) を解くには, 新たに以下のようなアンザッツを導入する.

$$\psi = \ln r - \frac{1}{2}\ln(f^*f) + \rho. \quad (2.80)$$

ただし, $\rho(z)$ は新たな未知関数である. これを式 (2.78) に代入すれば, 原点と f の零点以外では

$$\begin{aligned}-r^2\nabla^2\left\{\ln r - \frac{1}{2}\ln(f^*f) + \rho\right\} &= -r^2\left(-\frac{1}{r^2} + \nabla^2\rho\right) \\ &= 1 - f^*fe^{2\ln r - \ln(f^*f) + 2\rho} = 1 - r^2e^{2\rho} \iff \nabla^2\rho = e^{2\rho}\end{aligned} \quad (2.81)$$

となるが, 最後の式は Liouville 方程式と呼ばれる微分方程式である. その解として, ひとまず以下のような形が考えられる.

$$\rho_1(z) = -\ln\left\{\frac{1}{2}(1 - z^*z)\right\}. \quad (2.82)$$

14:39, 25th Apr, 2014*Proof*.....

まず,

$$\begin{aligned}\partial_1 &= (\partial_1 z) \frac{\partial}{\partial z} + (\partial_1 z^*) \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^*}, & \partial_1^2 &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}, \\ \partial_0 &= (\partial_0 z) \frac{\partial}{\partial z} + (\partial_0 z^*) \frac{\partial}{\partial z^*} = i \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial z^*}, & \partial_0^2 &= -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} - \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}\end{aligned}$$

より $\nabla^2 = 4(\partial^2/\partial z \partial z^*)$ であることに注意する. すると,

$$\begin{aligned}\nabla^2 \rho_1(z) &= -4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} \ln \left\{ \frac{1}{2} (1 - z^* z) \right\} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{4z}{1 - z^* z} \\ &= \frac{4}{1 - z^* z} + \frac{4z z^*}{(1 - z^* z)^2} = \frac{4}{(1 - z^* z)^2}.\end{aligned}$$

また,

$$e^{2\rho_1(z)} = e^{-\ln\{\frac{1}{4}(1-z^*z)^2\}} = \frac{4}{(1 - z^* z)^2}.$$

..... *Q.E.D.*ここで, 任意の解析関数 $g(z)$ に対して $\rho_1(g)$ という関数を考えると, $\nabla_z^2 = |dg/dz|^2 \nabla_g^2$ より

$$\nabla_z^2 \rho_1(g) = \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 \nabla_g^2 \rho_1(g) = \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 e^{2\rho_1(g)}$$

となる. これは, 式 (2.81) と因子 $|dg/dz|^2$ 分だけ異なるが, $\rho_1(g)$ の代わりに

$$\rho(z) = \rho_1(g) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{dg}{dz} \right|^2$$

と置けば,

$$\nabla_z^2 \rho(z) = \nabla_z^2 \rho_1(g) = \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 e^{2\rho_1(g)} = e^{2\{\rho_1(g) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{dg}{dz} \right|^2\}} = e^{2\rho(g)},$$

すなわち, 以下も Liouville 方程式の解であることがわかる.

$$\rho(z) = -\ln \left(\frac{1 - g^* g}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{dg}{dz} \right|^2. \quad (2.83)$$

これを式 (2.80) に代入すると, ψ は以下ようになる.

$$\psi = \ln r - \frac{1}{2} \ln(f^* f) - \ln \left(\frac{1 - g^* g}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{dg}{dz} \right|^2 = \frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{dg}{dz} \right) / f \right|^2 - \ln \left(\frac{1 - g^* g}{2r} \right).$$

このとき, $(dg/dz)/f$ が零点や極を持つと ψ は特異となるので, 特異でない最も一般的な解は以下であることがわかる.

$$\psi = -\ln \left(\frac{1 - g^* g}{2r} \right), \quad f = \frac{dg}{dz}. \quad (2.84)$$

14:39, 25th Apr, 2014

ただし, g は $r = 0$ で $|g| = 1$, $r > 0$ で $|g| < 1$ となるような解析関数である. このような性質を持ち, かつ $z \rightarrow 0$ で滑らかな振る舞いをする最も一般的な関数としては, 以下が考えられる.

$$g(z) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{a_i - z}{a_i^* + z} \right). \quad (2.85)$$

ただし, a_i は $\text{Re } a_i > 0$ を満たす複素数, すなわち, 複素平面の上半面に分布する点である.

2.4.4 Liouville 解の性質

式 (2.79) を見ると, 解の持つゲージ不変な唯一の性質は f の持つ零点であり, それらがこの解の性質を決めることがわかる. それを見るために, まず, 式 (2.84), (2.85) において $k = 1$ とした

$$g_1(z) = \frac{a_1 - z}{a_1^* + z}$$

について考えてみる. これより f を求めると,

$$f = \frac{dg}{dz} = -\frac{1}{a_1^* + z} - \frac{a_1 - z}{(a_1^* + z)^2} = -\frac{a_1^* + a_1}{(a_1^* + z)^2} \neq 0 \quad (\because \text{Re } a_1^* > 0)$$

となり, f は零点を持たないことがわかる. また, このとき, ψ を計算してみると, $z + z^* = 2r$ に注意して, 以下となることがわかる.

$$1 - g_1^* g_1 = 1 - \frac{a_1^* - z^*}{a_1 + z^*} \frac{a_1 - z}{a_1^* + z} = \frac{a_1 z + a_1^* z^* + a_1 z^* + a_1^* z}{|a_1 + z^*|^2} = \frac{(a_1 + a_1^*)(z + z^*)}{|a_1 + z^*|^2},$$

$$\psi = -\ln \frac{1 - g^* g}{2r} = -\ln \frac{a_1 + a_1^*}{|a_1 + z^*|^2} = -\frac{1}{2} \ln(h^* h), \quad h(z) = \frac{a_1 + a_1^*}{(a_1^* + z)^2}.$$

ここで, $\text{Re } a_1^* > 0$ より $h(z)$ は解析関数なので, これは真空をゲージ変換したものである. $k > 2$ の場合は, $g(z)$ を微分すると分子の z が 1 つ消えるため, f は $k - 1$ 個の零点を持つ.

次に, Liouville 解のトポロジカルチャージを計算してみる. すると, ひとまず,

$$Q = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2\pi} \int d^2x r^2 F_{0i}^a \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d^2x r^2 \left\{ -(\partial_0 \varphi_2 - A_0 \varphi_1)(\partial_1 \varphi_1 + A_1 \varphi_2) \frac{2}{r^2} \right.$$

$$\quad \left. + (\partial_0 \varphi_1 + A_0 \varphi_1)(\partial_1 \varphi_2 - A_1 \varphi_1) \frac{2}{r^2} + (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)(1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2) \frac{1}{r^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \left\{ \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} D_\mu \varphi_i D_\nu \varphi_j + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} (1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2) \right\}.$$

ここで, 被積分関数の第 1 項は,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} D_\mu \varphi_i D_\nu \varphi_j &= \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \partial_\mu \varphi_i D_\nu \varphi_j + \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik} A_\mu \varphi_k D_\nu \varphi_j \\ &= \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \partial_\mu (\varphi_i D_\nu \varphi_j) - \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \varphi_i \partial_\mu (D_\nu \varphi_j) + \varepsilon_{\mu\nu} A_\mu \varphi_j D_\nu \varphi_j \end{aligned}$$

14:39, 25th Apr, 2014

となるが，この第 2, 3 項は，それぞれ

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{ij}\varphi_i\partial_\mu(D_\nu\varphi_j) &= -\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{ij}\varphi_i\partial_\mu(\partial_\nu\phi_j + \varepsilon_{jk}A_\nu\varphi_k) = \varepsilon_{\mu\nu}\varphi_j\partial_\mu(A_\nu\varphi_j) \\ &= \varepsilon_{\mu\nu}\varphi_j\partial_\mu A_\nu\varphi_j + \varepsilon_{\mu\nu}\varphi_jA_\nu\partial_\mu\varphi_j, \\ \varepsilon_{\mu\nu}A_\mu\varphi_jD_\nu\varphi_j &= \varepsilon_{\mu\nu}A_\mu\varphi_j(\partial_\nu\varphi_j + \varepsilon_{jk}A_\nu\varphi_k) = \varepsilon_{\mu\nu}A_\mu\varphi_j\partial_\nu\varphi_j. \end{aligned}$$

故に，

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{ij}D_\mu\varphi_iD_\nu\varphi_j &= \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{ij}\partial_\mu(\varphi_iD_\nu\varphi_j) + \varepsilon_{\mu\nu}(\varphi_j\partial_\mu A_\nu\varphi_j + \varphi_jA_\nu\partial_\mu\varphi_j + A_\mu\varphi_j\partial_\nu\varphi_j) \\ &= \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{ij}\partial_\mu(\varphi_iD_\nu\varphi_j) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\varphi_j\varphi_j \\ &= \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{ij}\partial_\mu(\varphi_iD_\nu\varphi_j) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int d^2x \left\{ \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{ij}D_\mu\varphi_iD_\nu\varphi_j + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \left\{ \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{ij}\partial_\mu(\varphi_iD_\nu\varphi_j) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right\} \end{aligned}$$

となるが，この被積分関数の第 1 項は，ストークスの定理より

$$\frac{1}{2\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{ij}\partial_\mu(\varphi_iD_\nu\varphi_j) = \frac{1}{2\pi} \oint dx_\mu \varepsilon_{ij}\varphi_iD_\nu\varphi_j$$

となり，これは $r \rightarrow \infty$ で $D_\nu\varphi_j \rightarrow 0$ となることにより消えるので，結局，作用と同様に以下のような 2 次元 Abelian Higgs モデルにおける表式が得られる．

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (2.86)$$

ところが，2 次元 Abelian Higgs モデルのトポロジカルチャージはある領域を囲う経路の位相差の $1/2\pi$ 倍に比例するので，今の φ_1, φ_2 はある経路の位相差 φ により以下のように関係づけられる．

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 = fe^\psi = \exp\left(i \oint dx_\mu A_\mu\right).$$

これと場の強さの定義，ストークスの定理を用い， f の零点の数が $k-1$ であること， ψ が解析関数であることなどに注意すれば，Liouville 解のトポロジカルチャージは以下のように求まる．

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu = \frac{1}{2\pi} \oint dx_\mu A_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint d(\ln \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{d}{ds} \ln(fe^\psi) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{d}{ds} \ln f + \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2\pi i} \oint ds \frac{d}{ds} \ln f \\ &= (f \text{ の零点の数}) = k - 1. \end{aligned} \quad (2.87)$$

第3章 BPS モノポールとモジュライ空間

本章では，SU(2) Yang-Mills-Higgs 理論におけるモノポールについての基本的な知識，特に，BPS 極限におけるモジュライ空間とその計量について述べる．3.1 節では SU(2) Georgi-Glashow モデルと自発的対称性の破れについて，3.2 節ではモデルの線形化とトポロジーについて，3.3 節では最も基本的な非自明解である 't Hooft-Polyakov モノポールについて，3.4 節では BPS 極限とモジュライ空間について，3.5 節では磁荷に加えて電荷を持つ解である Julia-Zee dyon について，3.6 節では BPS 極限におけるモノポールの相互作用と計量について述べた．

3.1 SU(2) Georgi-Glashow モデル

SU(2) Georgi-Glashow モデルとは，物理的には非線形シグマモデルにゲージ対称性を課したものであり，ヒッグス機構により 3 重項ボソン場のうちの 2 成分が質量を獲得し，残りが零質量の電磁場となるようなモデルである．また，数学的には Derrick の定理に従い Yang-Mills 理論に 3 重項スカラー場を付加したものであり，境界条件より \mathbb{R}^3 の無限遠方としての 2 次元球面と 3 重項スカラー場のターゲット空間としての 2 次元球面との間にトポロジーがつくモデルである．

以下では，主に 4 次元ユークリッド空間における SU(2) Yang-Mills-Higgs 理論について考える．この理論には，3 重項実スカラー場であるヒッグス場 (Higgs fields) ϕ^a ($a = 1, 2, 3$) と，3 重項実ベクトル場であるゲージ場 (gauge fields) A_μ^a ($\mu = 0, 1, 2, 3$) が登場する^{*}．このとき，以下のような基本表現を用いると便利である．

$$\phi := \phi^a t_a, \quad A_\mu := A_\mu^a t_a, \quad \text{etc.} \quad \in \mathfrak{su}(2). \quad (3.1)$$

ただし， t_a は基本表現の基底であり，パウリ行列を用いて $t_a := i\sigma_a$ と書かれる，すなわち，

$$\text{Tr}(t_a t_b) = -2\delta_{ab}, \quad [t_a, t_b] = -2\varepsilon_{abc} t_c \quad (3.2)$$

を満たすとする．これらの場に対し，共変微分 (covariant derivative) D_μ と場の強さ (field strength) $F_{\mu\nu}^a$ をそれぞれ以下のように定義する．

$$\begin{aligned} D_\mu \phi^a &:= \partial_\mu \phi^a - 2\varepsilon_{abc} A_\mu^b \phi^c, \\ F_{\mu\nu}^a &:= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - 2\varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \end{aligned} \quad (3.3)$$

もしくは，基本表現を用いて以下のようにも書かれる．

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + [A_\mu, \phi], \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (3.4)$$

^{*})ベクトルの空間添え字は $i = 1, 2, 3$ などとし，その上げ下げで符号が変わるとする．また，縮約に関してはアインシュタインの規約を用いるが，空間添え字と内部空間添え字の縮約についてはしばしば位置を揃えて和をとる．

14:39, 25th Apr, 2014

このとき，以下が成り立つ**).

$$[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

ただし，両辺は共に交換関係をとることを前提とした量であり，例えば，ヒッグス場に対しては以下のように作用する．

$$[D_\mu, D_\nu]\phi^a = -2\varepsilon_{abc}F_{\mu\nu}^b\phi^c, \quad [D_\mu, D_\nu]\phi = [F_{\mu\nu}, \phi]. \quad (3.6)$$

Proof.....

両辺に $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を掛けるとよい．すると，

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[D_\mu, D_\nu]\phi^a &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\phi^a = 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}D_\mu D_\nu\phi^a \\ &= 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu D_\nu\phi^a - 2\varepsilon_{abc}A_\mu^b D_\nu\phi^c) \\ &= 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\{\partial_\mu(\partial_\nu\phi^a - 2\varepsilon_{abc}A_\nu^b\phi^c) - 2\varepsilon_{abc}A_\mu^b(\partial_\nu\phi^c - 2\varepsilon_{cde}A_\nu^d\phi^e)\} \\ &= -4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abc}(\partial_\mu A_\nu^b\phi^c - 2\varepsilon_{cde}A_\mu^b A_\nu^d\phi^e) \\ &= -2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abc}(\partial_\mu A_\nu^b - \partial_\nu A_\mu^b - 2\varepsilon_{bde}A_\mu^d A_\nu^e)\phi^c \\ &= -2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abc}F_{\mu\nu}^b\phi^c. \end{aligned}$$

ただし， $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abc}$ の下で以下が成り立つことを用いた．

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cde}A_\mu^b A_\nu^d\phi^e &= \delta_{bf}\varepsilon_{cde}A_\mu^f A_\nu^d\phi^e = (\delta_{bc}\varepsilon_{fde} + \delta_{bd}\varepsilon_{cfe} + \delta_{be}\varepsilon_{cdf})A_\mu^f A_\nu^d\phi^e \\ &= \varepsilon_{cde}A_\mu^d A_\nu^b\phi^e + \varepsilon_{cde}A_\mu^e A_\nu^d\phi^b = -\varepsilon_{cde}A_\mu^b A_\nu^d\phi^e + \varepsilon_{bde}A_\mu^d A_\nu^e\phi^c \\ \iff \varepsilon_{cde}A_\mu^b A_\nu^d\phi^e &= \frac{1}{2}\varepsilon_{bde}A_\mu^d A_\nu^e\phi^c. \end{aligned}$$

..... Q.E.D.

式 (3.5) とヤコビの恒等式より，

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}D_\nu F_{\rho\sigma} &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] \\ &= \frac{1}{3}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left([D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] + [D_\rho, [D_\sigma, D_\nu]] + [D_\sigma, [D_\nu, D_\rho]]\right) = 0 \end{aligned}$$

(μ を固定して cyclic に回していることに注意)，すなわち，以下の Bianchi の恒等式が成り立つ．

$$D_\nu \tilde{F}^{a\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}D_\nu F_{\rho\sigma}^a = 0. \quad (3.7)$$

ただし，以下を $F_{\mu\nu}^a$ の双対 (dual) という．

$$\tilde{F}^{a\mu\nu} := \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}^a. \quad (3.8)$$

***)幾何学的には，場の強さは曲率 (curvature) と見なされる．逆に，場の強さを曲率と定義すれば，その表式は共変微分の交換関係から求められる．また，Bianchi の恒等式は物理的な性質ではなく，曲率の持つ幾何学的な性質である (実際，Bianchi の恒等式は一般相対性理論にも表れる) ．

14:39, 25th Apr, 2014

以上のように定義された SU(2) Yang-Mills-Higgs 理論において、以後、主に扱う SU(2) Georgi-Glashow モデルのラグランジアン密度は以下のように定義される。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &:= \frac{1}{8}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(D_\mu\phi D^\mu\phi) - \frac{\lambda}{4}(1 - |\phi|^2)^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a - \frac{\lambda}{4}(1 - \phi^a\phi^a)^2.\end{aligned}\quad (3.9)$$

ただし、 λ は正の定数である (モデルの中の変数はすべて無次元量であることに注意)。また、

$$|\phi|^2 := -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\phi^2 = \phi^a\phi^a \quad (3.10)$$

であり、正方行列に対して定義されるこのような量を行列ノルム (matrix norm) という。ここで、ラグランジアン $L := \int d^3x \mathcal{L}$ は、 $L = T - V$ 、

$$T := \frac{1}{2} \int d^3x (E_i^a E_i^a + D_0\phi^a D_0\phi^a), \quad (3.11)$$

$$V := \int d^3x \left(\frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a + \frac{1}{2} D_i\phi^a D_i\phi^a + \frac{\lambda}{4} (1 - \phi^a\phi^a)^2 \right) \quad (3.12)$$

のように運動項 T とポテンシャル項 V に分けられる。ただし、 $E_i^a := F_{i0}^a$ であり、以下を用いた。

$$F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = F_{i0}^a F^{ai0} + F_{0j}^a F^{a0j} + F_{ij}^a F^{aij} = -2E_i^a E_i^a + F_{ij}^a F_{ij}^a.$$

これらより、 $V = 0$ 、すなわち、解が真空解であるための条件は以下であることがわかる。

$$F_{ij}^a = 0, \quad D_i\phi^a = 0, \quad \phi^a\phi^a = 1. \quad (3.13)$$

このように、このモデルにおいてヒッグス場の真空期待値は 0 ではなく、そのためにラグランジアンが持つゲージ対称性は真空において SU(2) から U(1) へ自発的に破れることが以下のように示せる。まず、 $F_{ij}^a = 0$ より A_i^a はピュアゲージ $A_i = g\partial_i g^{-1}$ 、 $g \in \mathrm{SU}(2)$ であるが、それを適当に選んで $A_i^a = 0$ とすれば、 $D_i\phi^a = \partial_i\phi^a = 0$ よりヒッグス場は一様となり、適当な大域ゲージ変換を用いて以下の標準形 (standard form) へ移せる。

$$\phi^a = (0, 0, 1) \iff \phi = t_3. \quad (3.14)$$

このとき、ゲージ $g(\mathbf{x}) \in \mathrm{SU}(2)$ は、

$$\phi \mapsto g(\mathbf{x})\phi g(\mathbf{x})^{-1} = \phi \iff g(\mathbf{x})t_3 g(\mathbf{x})^{-1} = t_3$$

を満たさなければならないが、そのような $g(\mathbf{x})$ は t_3 により生成される単なる U(1) ゲージである (条件より $g(\mathbf{x})$ と t_3 は可換であり、残された自由度は位相のみである)。

ラグランジアン密度に対して ϕ^a と A_μ^a についての変分をとると、以下の場の方程式 (field equations) が得られる。

$$D_\mu D^\mu \phi^a = \lambda \phi^a (1 - \phi^b \phi^b), \quad (3.15)$$

$$D_\nu F^{a\mu\nu} = 2\varepsilon_{abc} D^\mu \phi^b \phi^c. \quad (3.16)$$

14:39, 25th Apr, 2014

ここで、エネルギー $E := T + V$ が有限となるためには、解が静的な場合には、単に無限遠方において式 (3.13) が満たされればよく、それらが解に課される境界条件 (boundary conditions) となる。また、先に式 (3.14) のような標準形を考えたが、その選び方はモデルより決定されるものではなく、そのような任意性が真空解のみならず非自明解にもつきまとう。そのため、解にはエネルギーが有限となるための条件に加え、以下のような条件も習慣的に課される。

$$\phi^a(0, 0, +\infty) = (0, 0, 1). \quad (3.17)$$

すると、解に対するゲージ $g(x) \in \text{SU}(2)$ も以下を満たすものに制限されることがわかる。

$$g(0, 0, +\infty) = \mathbf{1}_2. \quad (3.18)$$

ただし、 $\mathbf{1}_2$ は 2×2 の単位行列である。このようなゲージへの制限を **framing** という (その直感的な理解については次小節の図 3.1 を参照のこと)。このような場の方程式に対し、ヒッグス場とゲージ場をそれぞれ $\phi^a = (0, 0, 1 + \phi_0)$, $A_\mu^a = (W_\mu^1, W_\mu^2, a_\mu)$ ($\phi_0, W_\mu^1, W_\mu^2, a_\mu \ll 1$) として真空における微小振動を考えると、以下の波動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \phi_0 &= -2\lambda \phi_0, \\ \partial_\mu (\partial^\mu W^{1\nu} - \partial^\nu W^{1\mu}) &= -4W^{1\nu}, \\ \partial_\mu (\partial^\mu W^{2\nu} - \partial^\nu W^{2\mu}) &= -4W^{2\nu}, \\ \partial_\mu (\partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

これより、自発的対称性の破れにより、ヒッグス粒子は質量 $\sqrt{2\lambda}$ 、3 重項ボソン場のうちの 2 成分 (ウィークボソン W^\pm) は質量 2 を獲得し、零質量のボソン場 (光子) が 1 つ残ることがわかる。このとき、残ったボソン場に対して実際に U(1) 電磁気学を定義することができるが、それについては次節で詳しく述べる。

最後に、SU(2) における量を用いて場の方程式を少しだけ書き換えておく。まず、SU(2) における電場 (electric field) E_i^a と磁場 (magnetic field) B_i^a をそれぞれ以下のように定義する*)。

$$E_i^a := F_{i0}^a, \quad B_i^a := \tilde{F}_{i0}^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a. \quad (3.20)$$

これらを用いると、式 (3.7) と式 (3.16) はそれぞれ以下のように書き換えられる。

$$D_i B_i^a = 0, \quad (3.21)$$

$$D_0 B_i^a + \varepsilon_{ijk} D_j E_k^a = 0, \quad (3.22)$$

$$D_i E_i^a = 2\varepsilon_{abc} D_0 \phi^b \phi^c, \quad (3.23)$$

$$D_0 E_i^a - \varepsilon_{ijk} D_j B_k^a = 2\varepsilon_{abc} D_i \phi^b \phi^c. \quad (3.24)$$

ただし、以下などを用いた。

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{ij}^a &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ij\alpha\beta} F^{a\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij0k} F^{a0k} + \varepsilon_{ijk0} F^{ak0}) = -\varepsilon_{ijk} E_k^a, \\ F_{ij}^a &= \frac{1}{2} (F_{ij}^a - F_{ji}^a) = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) F_{lm}^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} F_{lm}^a = \varepsilon_{ijk} B_k^a. \end{aligned}$$

*) $\varepsilon^{0ijk} = -\varepsilon_{0ijk} = \varepsilon_{ijk}$ とする。ただし、 ε_{ijk} は \mathbb{R}^3 における完全反対称テンソルである。

14:39, 25th Apr, 2014

また，同様に式 (3.6) も以下のように書き換えられる．

$$D_0 D_i \phi^a - D_i D_0 \phi^a = 2\varepsilon_{abc} E_i^b \phi^c, \quad (3.25)$$

$$-\varepsilon_{ijk} D_j D_k \phi^a = 2\varepsilon_{abc} B_i^b \phi^c. \quad (3.26)$$

3.2 線形化とトポロジカルチャージ

SU(2) Georgi-Glashow モデルが持つ SU(2) ゲージ対称性は真空において線形な U(1) へ破れるが，真空以外でも適当な条件を考えればいつでも理論の U(1) 成分を見ることが出来る．そのような条件は真空以外では一般には成り立たないが，もちろん真空においてはその条件に帰着する．そのような線形化は，物理的には SU(2) Georgi-Glashow モデルに対して電磁気学を定義することに対応し，それにより理論はトポロジカルに量子化された磁荷を持つモノポールを持つことがわかる．

以下の条件を考える [12]*) ．

$$D_\mu \hat{\phi}^a = 0. \quad (3.27)$$

ただし， $\phi^a := h \hat{\phi}^a$ ， $\hat{\phi}^a := \phi^a / |\phi^a|$ であり， h は正の値をとる任意の関数である．また， $\hat{\phi}^a \hat{\phi}^a = 1$ ， $\hat{\phi}^a \partial_\mu \hat{\phi}^a = 0$ が成り立つことに注意．すると，ヒッグス場の共変微分は，

$$D_\mu \phi^a = (\partial_\mu h) \hat{\phi}^a + h D_\mu \hat{\phi}^a = (\partial_\mu h) \hat{\phi}^a$$

となり， h に課される境界条件は以下となることがわかる．

$$h^2 = 1, \quad \partial_\mu h = 0. \quad (3.28)$$

また，これより，式 (3.15) も以下のように書き換えられる．

$$D_\mu D^\mu \phi^a = (\partial_\mu \partial^\mu h) \hat{\phi}^a = \lambda h (1 - h^2) \hat{\phi}^a \iff \partial_\mu \partial^\mu h = \lambda h (1 - h^2). \quad (3.29)$$

これらが成り立つとき，場は線形化 (linearize) されているという．特に，無限遠方もしくは真空において場は常に線形化されることに注意．

場が線形化されるとき，理論の U(1) 成分がどのように定義されるか見てみる．まず，式 (3.27) は A_μ^a について一般的に解けることが知られており，その形は以下ようになる．

$$A_\mu^a = a_\mu \hat{\phi}^a + \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^b \partial_\mu \hat{\phi}^c. \quad (3.30)$$

ただし， a_μ は任意の関数である (これが解であることは代入してみれば直ちにわかる)．ここで，ゲージ場の U(1) 成分とは A_μ^a を $\hat{\phi}^a$ 方向へ射影したものであり，今の場合，

$$A_\mu^a \hat{\phi}^a = a_\mu \quad (3.31)$$

*) $D_\mu \phi^a = 0$ として無限遠方のみを仮定する場合もあるが，今の場合はそれ以外の場所で場が線形化されることも想定している．

14:39, 25th Apr, 2014

である．次に，場の強さは，ひとまず，

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu a_\nu \hat{\phi}^a + a_\nu \partial_\mu \hat{\phi}^a + \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \partial_\mu \hat{\phi}^b \partial_\nu \hat{\phi}^c - \partial_\nu a_\mu \hat{\phi}^a - a_\mu \partial_\nu \hat{\phi}^a - \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \partial_\nu \hat{\phi}^b \partial_\mu \hat{\phi}^c \\ - 2\varepsilon_{abc} \left(a_\mu \hat{\phi}^b + \frac{1}{2} \varepsilon_{bde} \hat{\phi}^d \partial_\mu \hat{\phi}^e \right) \left(a_\nu \hat{\phi}^c + \frac{1}{2} \varepsilon_{cfg} \hat{\phi}^f \partial_\nu \hat{\phi}^g \right)$$

となるが，最右辺の最後の項のテンソルの積はそれぞれ

$$\varepsilon_{abc} \varepsilon_{bde} = -(\delta_{ad} \delta_{ce} - \delta_{ae} \delta_{cd}), \quad \varepsilon_{abc} \varepsilon_{cfg} = \delta_{af} \delta_{bg} - \delta_{ag} \delta_{bf}, \\ \varepsilon_{abc} \varepsilon_{bde} \varepsilon_{cfg} = \delta_{df} \varepsilon_{aeg} + \delta_{eg} \varepsilon_{adf} - \delta_{dg} \varepsilon_{aef} - \delta_{ef} \varepsilon_{adg}$$

となり，いくつかの項が打ち消して

$$F_{\mu\nu}^a = (\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu) \hat{\phi}^a + \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \partial_\mu \hat{\phi}^b \partial_\nu \hat{\phi}^c \quad (3.32)$$

となって，U(1) 成分は以下となることがわかる．

$$f_{\mu\nu} := F_{\mu\nu}^a \hat{\phi}^a = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^a \partial_\mu \hat{\phi}^b \partial_\nu \hat{\phi}^c. \quad (3.33)$$

このとき，式 (3.16) は，

$$D_\nu F^{a\mu\nu} = D_\nu (f^{\mu\nu} \hat{\phi}^a) = (\partial_\nu f^{\mu\nu}) \hat{\phi}^a \\ = 2\varepsilon_{abc} D^\mu \hat{\phi}^b \hat{\phi}^c = 2\varepsilon_{abc} (\partial^\mu h) h \hat{\phi}^b \hat{\phi}^c = 0 \iff \partial_\nu f^{\mu\nu} = 0 \quad (3.34)$$

のように書き換えられるが，これは電磁気学における真空でのマックスウェル方程式である．故に， $f_{\mu\nu}$ は電磁気学における電磁場テンソルに対応することがわかる．また，特に， $\hat{\phi}^a = (0, 0, 1)$ と置いた場合，

$$a_\mu = A_\mu^3, \quad f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 \quad (3.35)$$

となり， A_μ^3 が電磁気学における 4 元ポテンシャルに対応することがわかる．

このように，場が線形化されるとき，すなわち，真空において電磁気学が定義できることがわかったので，後は以下の線形化された Bianchi の恒等式が特異となる状況を考えれば，ディラックモノポールの場合と同様にモノポールを定義することができる．

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu f_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \left(\partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^a \partial_\alpha \hat{\phi}^b \partial_\beta \hat{\phi}^c \right) \\ = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{abc} \partial_\nu \hat{\phi}^a \partial_\alpha \hat{\phi}^b \partial_\beta \hat{\phi}^c = 0. \quad (3.36)$$

ここで，第 2 等号右辺のテンソル積は内部空間におけるスカラー 3 重積であるが，今の場合， $\partial_\nu \hat{\phi}^a$ ， $\partial_\alpha \hat{\phi}^b$ ， $\partial_\beta \hat{\phi}^c$ は $\hat{\phi}^a \hat{\phi}^a = 1$ より 2 次元球面の接ベクトルなので，それらのうち独立なものは 2 つしかなく，式 (3.36) は $\hat{\phi}^a$ が正則である限り常に成り立つことがわかる．すると，このモデルではディラックモノポールが定義できないように思われるが，今の線形化は $\hat{\phi}^a = \phi^a / |\phi^a|$ により行われており，その特異点を見逃している，すなわち，ヒッグス場の零点においては $\hat{\phi}^a$ が発散して Bianchi の恒等式が成り立たず，その場所に点磁荷が存在する可能性がある．さらに，そのとき

14:39, 25th Apr, 2014

$\hat{\phi}^a$ は特異であるが ϕ^a は特異ではない, すなわち, このモデルには U(1) 電磁気学の場合と異なり特異点を持たないようなモノポール解が存在し得る^{*)}. このとき, そのようなモノポールの持つ磁荷 (magnetic charge) g は, それにより作られる磁場の U(1) 成分

$$b_i := \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}f_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\partial_j a_k - \partial_k a_j + \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\hat{\phi}^a\partial_j\hat{\phi}^b\partial_k\hat{\phi}^c\right) \quad (3.37)$$

を \mathbb{R}^3 の無限遠方としての 2 次元球面 S_∞^2 上で積分したものであるが, 磁場を

$$f = da + \frac{1}{8}\text{Tr}([d\hat{\phi}, d\hat{\phi}]\hat{\phi})$$

のように微分形式で表すと, この積分において a の寄与はストークスの定理より消えて

$$g = \int_{S_\infty^2} f = \frac{1}{8} \int_{S_\infty^2} \text{Tr}([d\hat{\phi}, d\hat{\phi}]\hat{\phi})$$

となり, この値は 2π の整数倍となることが直ちにわかる. 以下では, この計算についてもう少し詳しく見てみる.

まず, 電磁気学における 4 元電流密度 (current) k_μ は以下のように定義される.

$$k_\mu := \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu f^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{abc}\partial^\nu\hat{\phi}^a\partial^\alpha\hat{\phi}^b\partial^\beta\hat{\phi}^c. \quad (3.38)$$

ここで, k_μ は明らかに保存則

$$\partial^\mu k_\mu = 0 \quad (3.39)$$

を満たす ($\hat{\phi}^a$ の性質ではなく単に完全反対称テンソルの性質より成り立つことに注意). すると, 磁荷は以下のように定義できる.

$$\begin{aligned} g &:= \int d^3x k_0 = \frac{1}{4} \int d^3x \partial_i \left(\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^a \partial_j \hat{\phi}^b \partial_k \hat{\phi}^c \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_{S_\infty^2} d^2\sigma_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^a \partial_j \hat{\phi}^b \partial_k \hat{\phi}^c = \int_{S_\infty^2} d^2\sigma_i b_i. \end{aligned} \quad (3.40)$$

ただし, $d^2\sigma_i$ は S_∞^2 の面積素ベクトルであり, 第 3 等号右辺へはストークスの定理を用いた. このとき, S_∞^2 上の座標は球座標における 2 つの角度座標により表されるが, それらは $\hat{\phi}^a$ を通して $\hat{\phi}^a\hat{\phi}^a = 1$ としての 2 次元球面 S^2 上の座標 (ξ_1, ξ_2) と対応づけられる. すると, それらの間の座標変換は, 外積と連鎖律よりそれぞれ

$$d^2\sigma_i = d^2\xi \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{pq} \frac{\partial x^m}{\partial \xi_p} \frac{\partial x^n}{\partial \xi_q} \right), \quad \partial_j \hat{\phi}^b = \frac{\partial \xi_r}{\partial x^j} \frac{\partial \hat{\phi}^b}{\partial \xi_r}, \quad \partial_k \hat{\phi}^c = \frac{\partial \xi_s}{\partial x^k} \frac{\partial \hat{\phi}^c}{\partial \xi_s}$$

となり, g の表式は以下のように書き換えられる.

$$g = \frac{1}{8} \int_{S^2} d^2\xi \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{pq} \frac{\partial x^m}{\partial \xi_p} \frac{\partial x^n}{\partial \xi_q} \hat{\phi}^a \frac{\partial \xi_r}{\partial x^j} \frac{\partial \hat{\phi}^b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_s}{\partial x^k} \frac{\partial \hat{\phi}^c}{\partial \xi_s}$$

^{*)}Magnetic monopole solutions with no singularities. これは, 真空における SU(2) から U(1) への自発的対称性の破れにより, ディラックモノポールが持つべき特異点も真空へ移されるためである. また, そのようなモノポールは中心付近では滑らかに見えるが, 十分に離れた場所で見ると特異点を持つように見える.

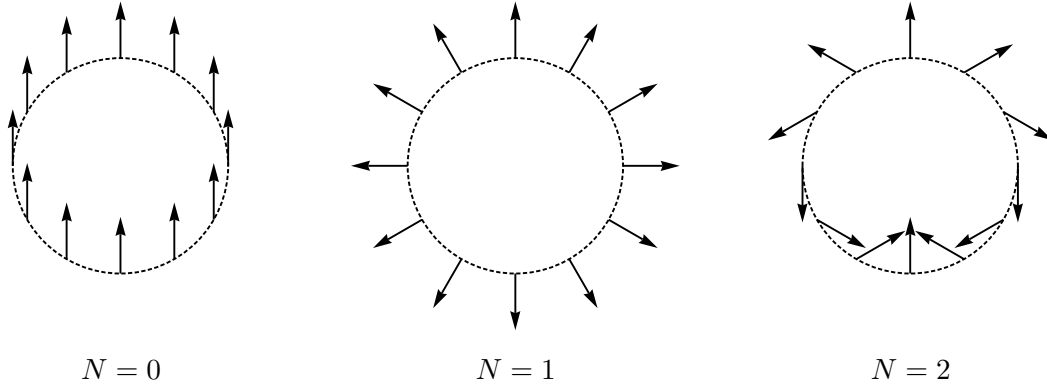


図 3.1: 無限遠方におけるヒッグス場の配位の概念図 (2次元における場合) . これらは内部空間における配位であるが, そのままでは明らかにゲージ変換の意味での回転の任意性があり, それを固定するのが framing である . 今の場合, 北極点にくっつけている矢印はすべての場合で上向きとなっており, そこを $x_3 \rightarrow +\infty$ に対応する点と見なせば, これらすべての配位において式 (3.17) の境界条件が満たされる .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \int_{S^2} d^2\xi (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) \varepsilon_{abc} \varepsilon_{pq} \frac{\partial x^m}{\partial \xi_p} \frac{\partial x^n}{\partial \xi_q} \hat{\phi}^a \frac{\partial \xi_r}{\partial x^j} \frac{\partial \hat{\phi}^b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_s}{\partial x^k} \frac{\partial \hat{\phi}^c}{\partial \xi_s} \\
&= \frac{1}{8} \int_{S^2} d^2\xi (\delta_{pr}\delta_{qs} - \delta_{ps}\delta_{qr}) \varepsilon_{abc} \varepsilon_{pq} \hat{\phi}^a \frac{\partial \hat{\phi}^b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \hat{\phi}^c}{\partial \xi_s} \\
&= \frac{1}{2} \int_{S^2} d^2S_a \hat{\phi}^a = \frac{1}{2} \int_{S^2} d^2S.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

ただし,

$$d^2S_a = d^2\xi \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{pq} \frac{\partial \hat{\phi}^b}{\partial \xi_p} \frac{\partial \hat{\phi}^c}{\partial \xi_q} \right), \quad d^2S = d^2S_a \hat{\phi}^a$$

はそれぞれ S^2 における面積素ベクトルと面積素である . ここで, 最後の積分は $\hat{\phi}^a$ によって覆われる 3次元単位球の表面積なので, 覆われる回数を N とすると, 以下となるのがわかる .

$$g = 2\pi N. \tag{3.42}$$

このような $N \in \mathbb{Z}$ は, 任意の連続写像 $\hat{\phi}^a : S_\infty^2 \rightarrow S^2$ に対して一意に決まることが知られている . N を巻き数 (winding number) またはトポロジカルチャージ (topological charge), 今の場合は特にモノポール数 (monopole number) という*) . 例として, $N = 0, 1, 2$ の場合の無限遠方におけるヒッグス場の配位の概念図を図 3.1 に示す . これらのうち, $N = 0$ の場合は, 例えばヒッグス場が $\phi^a = (0, 0, 1)$ の場合であるが, これは明らかに真空におけるヒッグス場の配位である . また, $N = 1$ の場合は非自明解のうちで最も簡単な場合であるが, そのような解は明らかに球対称性を持つことがわかる .

このように, このモデルはモノポール解を持ち得るが, それらは量子化された磁荷を持つトポロジカルソリトンであり, それらの分類は無限遠方におけるヒッグス場の配位のみにより行われ

*) 文脈によっては N の代わりに k を用いる場合もある .

る (そのようなカレントやチャージがネーターの定理のよるものではないことに注意) . ここで , 今の場合の量子化はトポロジーによるものであるが , それは以下のようにしてディラックの量子化条件と同様の形式に帰着できる [13] . まず , 非自明解を真空解へゲージ変換することを考える . しかし , トポロジカルチャージは位相的な量であり連続的なゲージ変換に対して不変となるので , それを行う S_∞^2 全体で特異でないゲージは存在せず , 特異でないためには , 少なくともゲージが S_∞^2 の 2 つの別々な領域で定義されていなければならない . そこで , S_∞^2 をその赤道 (equator) 上で重なる 2 つの領域に分け , それぞれにおけるゲージを $g^{(1)}, g^{(2)} \in \text{SU}(2)$ とする . すると , それらは解をそれぞれの領域で真空解 $\phi = t_3$ へ移すが , そのとき $g^{(1)}, g^{(2)}$ は赤道上で解析接続されていなければならない , 特に , 赤道上では $g^{(1)}g^{(2)-1}$ による変換が $\phi = t_3$ を保たなければならない . ところが , そのような $\text{SU}(2)$ の元は t_3 により生成されるものであり , 以下のように書ける .

$$g^{(1)}g^{(2)-1} = \exp(\alpha(\varphi)t_3).$$

ただし , $\alpha(\varphi)$ は赤道上で定義される関数であり , φ は方位角 (azimuthal angle) である . ここで , 各領域におけるゲージ場をそれぞれ $a^{(1)}, a^{(2)}$ とすれば ,

$$a^{(1)} - a^{(2)} = -d\alpha(\varphi)$$

となるが , これはディラックの量子化条件と同じ形である (つまり , ディラックモノポールの場合には特異点を回避するために 2 つの領域で異なるゲージを必要としたが , 今の場合にはトポロジカルチャージを変化させて真空へ移るために 2 つのゲージを必要とする) .

最後に , $N = 1$ の場合の解は , 数学的には単に球対称性を持つ解であるが , 物理的には点磁荷が 1 つある場合に対応し , その磁場の漸近形はクーロン磁場へ帰着すると考えられる . そのことを実際に示しておく . 無限遠方において場は常に線形化されるので , 以下では $\hat{\phi}^a = \phi^a$ とする . すると , まず , ヒッグス場の漸近形は以下のように書ける .

$$\phi^a = \frac{x^a}{r}. \quad (3.43)$$

ただし , $r := (x^i x^i)^{1/2}$ である . ここで , 無限遠方での境界条件より ,

$$D_i \phi^a = \partial_i \left(\frac{x^a}{r} \right) - 2\varepsilon_{abc} A_i^b \frac{x^c}{r} = 0$$

が成り立つが ,

$$\partial_i \left(\frac{x^a}{r} \right) = \frac{\delta_{ia} r^2 - x^a x^i}{r^3} = (\delta_{ia} \delta_{jc} - \delta_{ja} \delta_{ic}) \frac{x^j x^c}{r^3} = -\varepsilon_{ijb} \varepsilon_{abc} \frac{x^j x^c}{r^3}$$

なので , ゲージ場とその $U(1)$ 成分の漸近形はそれぞれ以下ようになる .

$$A_i^a = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ija} \frac{x^j}{r^2}, \quad a_i = A_i^a \phi^a = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ija} \frac{x^j x^a}{r^3}. \quad (3.44)$$

さらに ,

$$B_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k^a - \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} A_j^b A_k^c$$

14:39, 25th Apr, 2014

であるが，完全反対称テンソルの積公式

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kla} = \delta_{il}\delta_{ja} - \delta_{ia}\delta_{jl}, \quad \delta_{jl}\delta_{jl} = 3, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{jlb}\varepsilon_{kmc} = 2\delta_{il}\delta_{am}$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k^a &= \varepsilon_{ijk}\partial_j \left(-\frac{1}{2}\varepsilon_{kla}\frac{x^\ell}{r^2} \right) = -\frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{ja} - \delta_{ia}\delta_{jl})\frac{\delta_{jl}r^2 - 2x^\ell x^j}{r^4} \\ &= -\frac{1}{2r^4}(\delta_{ia}r^2 - 2x^i x^a - 3\delta_{ia}r^2 + 2\delta_{ia}r^2) = \frac{x^i x^a}{r^4}, \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}A_j^b A_k^c &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc} \left(-\frac{1}{2}\varepsilon_{jlb}\frac{x^\ell}{r^2} \right) \left(-\frac{1}{2}\varepsilon_{kmc}\frac{x^m}{r^2} \right) = \frac{x^i x^a}{2r^4} \end{aligned}$$

となるので，磁場とその U(1) 成分の漸近形はそれぞれ

$$B_i^a = \frac{x^i x^a}{2r^4}, \quad b_i = B_i^a \phi^a = \frac{x^i}{2r^3} = \frac{g}{4\pi r^2} \frac{x^i}{r} \quad (3.45)$$

となり，実際に単位磁荷により作られる長距離クーロン場となることがわかる．ただし， $g = 2\pi$ を用いた．このように， $N = 1$ の場合の解は漸近的には原点に点磁荷が 1 つあるような解であるが，その全空間における解の形は球対称性を持つアンザッツを用いて導かれる．それについて次節で詳しく見てみる．

3.3 't Hooft-Polyakov モノポール

$N = 1$ の場合の解は球対称性を持ち，それを頼りにアンザッツを考えることができる．その最も簡単な形は't Hooft-Polyakov アンザッツとして知られており，その未知関数についての方程式は 2 階の連立非線形微分方程式となる．

前節の最後より， $N = 1$ の場合の解に対して以下のようなアンザッツが考えられる [14, 15]*).

$$\phi^a = h(r)\frac{x^a}{r}, \quad A_i^a = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ija}(1 - k(r))\frac{x^j}{r^2}, \quad A_0^a = 0. \quad (3.46)$$

ただし， $r := (x^i x^i)^{1/2}$ であり， $h(r)$ ， $k(r)$ はアンザッツの未知関数 (profile functions) である．これを't Hooft-Polyakov アンザッツといい，その解を't Hooft-Polyakov モノポールという．ここで，アンザッツはそのままでは原点で発散するが，前節で見たように，このモデルは SU(2) の範囲で特異でない解を持ち得る．そこで，アンザッツが原点で発散しないような境界条件を未知関数に課すことにする．それらに無限遠方での境界条件も加えれば，未知関数に課される境界条件は以下ようになる．

$$h(0) = 0, \quad h(\infty) = 1, \quad (3.47)$$

$$k(0) = 1, \quad k(\infty) = 0. \quad (3.48)$$

*) ϕ^a ， A_i^a のそれぞれから x^a/r^2 ， x^j/r^2 を出して $h(r)$ ， $k(r)$ を無次元とする場合もあるが，その場合では無限遠方での境界条件が比例の形となり，未知関数についての方程式も異なる形となる．今の置き方は式 (3.43) と式 (3.44) に合わせてある．

14:39, 25th Apr, 2014

また，このアンザッツは $\partial_0\phi^a = \partial_0 A_i^a = 0$ ，すなわち，ヒッグス場とゲージ場の空間成分が静的かつ $A_0^a = 0$ であることに注意．それ故，ヒッグス場の共変微分の時間成分と電場はそれぞれ

$$\begin{aligned} D_0\phi^a &= \partial_0\phi^a - 2\varepsilon_{abc}A_0^b\phi^c = 0, \\ E_i^a &= F_{i0}^a = \partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a - 2\varepsilon_{abc}A_i^b A_0^c = 0 \end{aligned}$$

のように消え，'t Hooft-Polyakov モノポールは運動エネルギーを持たないことがわかる．また，これらより，場の方程式も

$$D_i D_i \phi^a = -\lambda \phi^a (1 - \phi^b \phi^b), \quad (3.49)$$

$$\varepsilon_{ijk} D_j B_k^a = -2\varepsilon_{abc} D_i \phi^b \phi^c \quad (3.50)$$

のように空間成分のみとなり，共変微分と場の強さの関係と Bianchi の恒等式もそれぞれ

$$\varepsilon_{ijk} D_j D_k \phi^a = -2\varepsilon_{abc} B_i^b \phi^c, \quad (3.51)$$

$$D_i B_i^a = 0 \quad (3.52)$$

のみが残る．

以下で，'t Hooft-Polyakov アンザッツから興味のある量を求めて未知関数についての方程式を導くが，それには多少の計算を必要とする．そのとき，以下の表式を踏まえておくこと便利である．

$$\partial_i = \frac{x^i}{r} \partial_r, \quad D_i \left(\frac{x^a}{r} \right) = -\varepsilon_{ijb} \varepsilon_{abc} k \frac{x^j x^c}{r^3}.$$

ここで，第1式は球座標への単なる変数変換であるが，ベクトルとしては x^i/r 方向を向いていることに注意．また，第2式はヒッグス場の漸近形に対する共変微分において A_i^a の中の $-k(r)$ の項が打ち消さずに残ったものであるが， x^i/r と直交することに注意．すると，まず，ヒッグス場の共変微分は以下ようになる．

$$D_i \phi^a = \partial_i h \frac{x^a}{r} + h D_i \left(\frac{x^a}{r} \right) = h' \frac{x^i x^a}{r^2} - \varepsilon_{ijb} \varepsilon_{abc} h k \frac{x^j x^c}{r^3}. \quad (3.53)$$

これより，式(3.49)の左辺は

$$D_i D_i \phi^a = D_i \left(h' \frac{x^i x^a}{r^2} - \varepsilon_{ijb} \varepsilon_{abc} h k \frac{x^j x^c}{r^3} \right)$$

となるが，この項ごとの計算はそれぞれ

$$\text{第1項} = \partial_i \left(\frac{h'}{r} x^i \right) \frac{x^a}{r} = \left\{ \frac{x^i}{r} \left(\frac{h''}{r} - \frac{h'}{r^2} \right) x^i + \frac{3h'}{r} \right\} \frac{x^a}{r} = \left(h'' + \frac{2h'}{r} \right) \frac{x^a}{r},$$

$$\begin{aligned} \text{第2項} &= -\varepsilon_{ijb} \varepsilon_{abc} h k \frac{x^j}{r^2} D_i \left(\frac{x^c}{r} \right) = \varepsilon_{ijb} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ikd} \varepsilon_{cde} h k^2 \frac{x^j x^k x^e}{r^5} \\ &= -(\delta_{ja} \delta_{ke} + \delta_{jk} \delta_{ae}) h k^2 \frac{x^j x^k x^e}{r^5} = -\frac{2h k^2}{r^2} \frac{x^a}{r} \end{aligned}$$

となり，すべての項から x^a/r を括り出せる．そこで，式(3.49)の右辺についても見てみると，

$$-\lambda \phi^a (1 - \phi^b \phi^b) = -\lambda h (1 - h^2) \frac{x^a}{r}$$

14:39, 25th Apr, 2014

となり，式 (3.49) は未知関数についての微分方程式へ帰着することがわかる．また，これに習って式 (3.50) の右辺も計算してみると，

$$\begin{aligned} -2\varepsilon_{abc}D_i\phi^b\phi^c &= 2\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ijd}\varepsilon_{bde}h^2k\frac{x^jx^cx^e}{r^4} = 2(\delta_{ae}\varepsilon_{ijc} - \delta_{ce}\varepsilon_{ija})h^2k\frac{x^jx^cx^e}{r^4} \\ &= -2\varepsilon_{ija}h^2k\frac{x^j}{r^2} = 4h^2k\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_{ija}\frac{x^j}{r^2}\right) \end{aligned}$$

となり，今度はすべての項から $-(1/2)\varepsilon_{ija}x^j/r^2$ を括り出せると予想できる．次に，磁場については，前節での計算を踏まえれば直ちに以下となることがわかる．

$$B_i^a = \frac{1}{2r^2}(1-k^2)\frac{x^ix^a}{r^2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijb}\varepsilon_{abc}k'\frac{x^jx^c}{r^3}. \quad (3.54)$$

これより，式 (3.50) の左辺は

$$\varepsilon_{ijk}D_jB_k^a = \varepsilon_{ijk}D_j\left\{\frac{1}{2r^2}(1-k^2)\frac{x^kx^a}{r^2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{klb}\varepsilon_{abc}k'\frac{x^lx^c}{r^3}\right\}$$

となるが，この項ごとの計算はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{第 1 項} &= -\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2r^2}(1-k^2)\frac{x^j}{r}D_k\left(\frac{x^a}{r}\right) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klb}\varepsilon_{abc}\frac{1}{2r^2}(1-k^2)k\frac{x^jx^lx^c}{r^4} \\ &= (\delta_{la}\varepsilon_{ijc} - \delta_{lc}\varepsilon_{ija})\frac{1}{2r^2}(1-k^2)k\frac{x^jx^lx^c}{r^4} = \frac{1}{r^2}(1-k^2)k\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_{ija}\frac{x^j}{r^2}\right), \\ \text{第 2 項} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klb}\varepsilon_{abc}\left\{\partial_j\left(k'\frac{x^l}{r^2}\right)\frac{x^c}{r} + k'\frac{x^l}{r^2}D_j\left(\frac{x^c}{r}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}(\delta_{la}\varepsilon_{ijc} - \delta_{lc}\varepsilon_{ija})\left\{\frac{x^j}{r}\left(\frac{k''}{r^2} - \frac{2k'}{r^3}\right)x^l + \frac{k'}{r^2}\delta_{j\ell}\right\}\frac{x^c}{r} \\ &\quad - \frac{1}{2}(\delta_{la}\varepsilon_{ijc} - \delta_{lc}\varepsilon_{ija})\varepsilon_{jmd}\varepsilon_{cde}k'k\frac{x^lx^mx^e}{r^5} = k''\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_{ija}\frac{x^j}{r^2}\right) \end{aligned}$$

となり，これらの $-(1/2)\varepsilon_{ija}x^j/r^2$ の係数についての関係式が未知関数についての 2 つ目の方程式となる．以上をまとめると，'t Hooft-Polyakov アンザッツの未知関数についての方程式は以下の 2 つとなる．

$$\frac{d^2h}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dh}{dr} = \frac{2}{r^2}hk^2 - \lambda(1-h^2)h, \quad (3.55)$$

$$\frac{d^2k}{dr^2} = \frac{1}{r^2}(k^2-1)k + 4h^2k. \quad (3.56)$$

これらの方程式の一般の λ に対する解析解は知られていないが，数値計算を用いれば任意の λ に対して解を求められることが知られている．また，'t Hooft-Polyakov モノポールは任意の λ に対して一意に存在すること， $\lambda \rightarrow \infty$ におけるエネルギーの漸近展開などが知られている．

3.4 BPS 極限とモジュライ空間

SU(2) Georgi-Glashow モデルのラグランジアンにはパラメーター λ が含まれるが，それが 0 となる場合，すなわち，ヒッグス場が質量を持たない場合は特に BPS 極限と呼ばれる．BPS 極限

14:39, 25th Apr, 2014

においては、't Hooft-Polyakov アンザッツに対して解析解が見つかる。また、BPS 極限におけるモノポールのモジュライ空間の次元は有限となることが知られている。

前節の式 (3.50) と式 (3.51) を見比べると、以下の条件が成り立つとき、式 (3.50) は自動的に満たされることがわかる*)。

$$B_i^a = D_i \phi^a. \quad (3.57)$$

これを Bogomolny 条件または BPS 条件 (Bogomolny-Prasad-Sommerfield condition) という [16]*)。これが成り立つとき、式 (3.49) と式 (3.52) より

$$-\lambda \phi^a (1 - \phi^b \phi^b) = D_i D_i \phi^a = D_i B_i^a = 0$$

でなければならないが、これは $\lambda = 0$ であれば常に満たされる。この極限を BPS 極限 (BPS limit) といい、その下で導かれるモノポールを BPS モノポールという。ここで、BPS 極限においてはもはや自発的対称性の破れを起こす項は消えるが、それでも境界条件 $\phi^a \phi^a = 1$ は非線形条件 (non-linear constraint) として習慣的に課される。今の場合、BPS 条件は場の方程式から導かれたが、これはエネルギーからも以下のようにして導ける。まず、3.2 小節の線形化より、無限遠方、すなわち、 S_∞^2 上で場は常に線形化されるので、その上での積分として定義される磁荷の表式は逆に $SU(2)$ の量を用いても表せ、以下のように書き換えられる。

$$g = \int_{S_\infty^2} d^2 \sigma_i B_i^a \phi^a = \int d^3 x D_i (B_i^a \phi^a) = \int d^3 x B_i^a D_i \phi^a. \quad (3.58)$$

ただし、最右辺へは Bianchi の恒等式を用いた。一方、't Hooft-Polyakov モノポールのように運動エネルギーを持たず、かつ $\lambda = 0$ の場合、エネルギーは以下のように平方完成できる。

$$E = \frac{1}{2} \int d^3 x (B_i^a B_i^a + D_i \phi^a D_i \phi^a) = \frac{1}{2} \int d^3 x (B_i^a - D_i \phi^a)^2 + \int d^3 x B_i^a D_i \phi^a. \quad (3.59)$$

ただし、以下となることを用いた。

$$F_{ij}^a F_{ij}^a = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} B_k^a B_l^a = 2 \delta_{kl} B_k^a B_l^a = 2 B_i^a B_i^a.$$

これより、エネルギーには以下のようなトポロジーによって課される下限が存在し、BPS 条件はエネルギーの極値を与えるための十分条件であることがわかる。

$$E \geq 2\pi N. \quad (3.60)$$

この下限を Bogomolny bound という。特に、BPS 極限において、エネルギーは $E = 2\pi N$ のようにヒッグス場の配位のみによるが、それだけでなく、エネルギー密度 $\mathcal{E}(x)$ もヒッグス場のみ依存し、以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &:= \frac{1}{2} (B_i^a B_i^a + D_i \phi^a D_i \phi^a) = D_i \phi^a D_i \phi^a = D_i (\phi^a D_i \phi^a) \\ &= \partial_i (\phi^a D_i \phi^a) = \partial_i (\phi^a \partial_i \phi^a) = \frac{1}{2} \nabla^2 |\phi|^2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

*) $B_i^a = -D_i \phi^a$ とする場合もある。

*) Bogomol'nyi と書くこともある。

14:39, 25th Apr, 2014

BPS 極限においては't Hooft-Polyakov アンザッツの未知関数についての方程式が簡単な形となるが、それらは式 (3.53) と式 (3.54) より明らかに以下となる。

$$\frac{dh}{dr} = \frac{1}{2r^2}(1 - k^2), \quad \frac{dk}{dr} = -2hk. \quad (3.62)$$

これらの解析解は知られており、以下のようになる。

$$h(r) = \coth 2r - \frac{1}{2r}, \quad k(r) = \frac{2r}{\sinh 2r}. \quad (3.63)$$

Proof.....

$h = \tilde{h} - 1/2r$, $k = 2r\tilde{k}$ と置けば、式 (3.62) は以下のように書き換えられる。

$$\frac{d\tilde{h}}{dr} = -2\tilde{k}^2, \quad \frac{d\tilde{k}}{dr} = -2\tilde{h}\tilde{k}.$$

このとき、無限遠方での境界条件を用いれば、

$$\frac{d^2\tilde{h}}{dr^2} = -4\tilde{k}\frac{d\tilde{k}}{dr} = 8\tilde{h}\tilde{k}^2 = -4\tilde{h}\frac{d\tilde{h}}{dr} = -2\frac{d}{dr}(\tilde{h}^2) \iff \frac{d\tilde{h}}{dr} = 2(1 - \tilde{h}^2)$$

となり、後は以下の双曲線関数の微分公式を思い出せばよい。

$$\frac{d}{dx} \cot x = 1 - \coth^2 x = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

..... *Q.E.D.*

この解を Prasad-Sommerfield 解という [17]*). この解について少し見ておく。まず、双曲線関数のテーラー展開

$$\begin{aligned} \coth x &= \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + O(x^6), \\ \frac{1}{\sinh x} &= \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + O(x^6) \end{aligned}$$

を思い出せば、 $h(r)$, $k(r)$ は $r \rightarrow 0$ における境界条件を満たすことがわかる。また、

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots \quad \therefore \coth x = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1 + O(e^{-2x})$$

なので、 $h(r)$ の無限遠方における展開は以下となることがわかる。

$$h(r) = 1 - \frac{1}{2r} + O(e^{-4r}). \quad (3.64)$$

次に、今のアンザッツでは $|\phi|^2 = h^2(r)$ であるが、BPS 極限ではこのラプラシアンを計算すれば直ちにエネルギー密度が得られるのであった。そこで、球対称の場合のラプラシアン

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

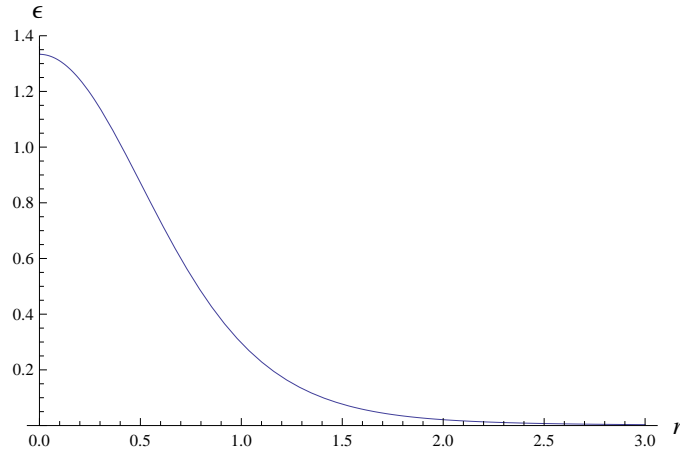


図 3.2: Prasad-Sommerfield 解のエネルギー密度 (動径プロット) .

を思い出せば, これと式 (3.62) よりエネルギー密度 $\mathcal{E}(r)$ は以下のように計算できる .

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(r) &= \frac{1}{2} \nabla^2 |\phi|^2 = \frac{1}{2r^2} \{r^2 (h^2)'\}' = \frac{1}{r^2} (r^2 h h')' = \frac{1}{2r^2} \{h(1-k^2)\}' \\ &= \frac{1}{2r^2} \{h'(1-k^2) - 2hkk'\} = \frac{1}{4r^4} (1-k^2)^2 + \frac{2}{r^2} h^2 k^2\end{aligned}\quad (3.65)$$

これに式 (3.63) を代入すれば, エネルギー密度の動径プロットが得られる (図 3.2) . また, $\mathcal{E}(r)$ の原点付近での展開は

$$\mathcal{E}(r) = \frac{4}{3} - \frac{64}{27}r^2 + \frac{64}{25}r^4 + O(r^6)\quad (3.66)$$

となり, 原点では発散しないことに注意 . さらに, エネルギー密度の計算の途中の式と境界条件より, $E = 2\pi$ も以下のようにして確かめられる .

$$E = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \mathcal{E}(r) = 2\pi h(1-k^2) \Big|_0^\infty = 2\pi.\quad (3.67)$$

BPS 極限には様々な特徴があるが, そのうち最も重要なものは, モジュライ空間の次元が有限となることである . ここで, モジュライ (modulus, 複数形は moduli) とは解が持つパラメーターのことであり, モジュライ空間 (moduli space) とはそれらによる空間のことである . BPS 極限における N -モノポールのモジュライ空間 \mathcal{M}_N は以下のような構造を持つことが知られている .

$$\mathcal{M}_N = \mathbb{R}^3 \times \frac{S^1 \times \widetilde{\mathcal{M}}_N^0}{\mathbb{Z}_N}.\quad (3.68)$$

ただし, $\mathbb{R}^3 \times S^1$ は平坦であり, $\widetilde{\mathcal{M}}_k^0$ は単連結 (simply connected) な空間である . また, \mathcal{M}_N の次元は $4N$ となることが知られている [18] . ここで, 1-モノポールのモジュライ空間は $\mathbb{R}^3 \times S^1$ であり, それらのうちの \mathbb{R}^3 はモノポールの \mathbb{R}^3 における平行移動のモジュライに対応するが, 本来の BPS モノポールはさらに S^1 に対応する位相のモジュライを持つことがわかる .

*) この解は $\lambda = 0$ における数値解の近似曲線として発見された .

このような BPS モノポールのモジュライ空間の構造は、自己双対インスタントンの次元降下を用いて直感的に理解できる。インスタントンの自己双対条件を思い出してみる。

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}. \quad (3.69)$$

ただし、 $\mu, \nu, \rho, \sigma = 1, 2, 3, 4$ であり、 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は \mathbb{R}^4 における完全反対称テンソルである。ここで、 k -インスタントンのモジュライ空間の次元は BPS モノポールと同じく有限となることが知られている。また、その次元は $8k$ であり、1-インスタントンのモジュライは \mathbb{R}^4 における平行移動 $\times 4$ 、 $SU(2)$ におけるゲージ変換の自由度 $\times 3$ 、大きさ $\times 1$ である。このとき、自己双対条件において A_μ が x_4 に依存しないとして A_4 をヒッグス場 ϕ と見なし、 $\mu = 4$ の場合を見れば、以下のように自己双対条件から BPS 条件が導かれることがわかる。

$$\begin{aligned} F_{4i} &= \partial_4 A_i - \partial_i A_4 + [A_4, A_i] = -(\partial_i \phi + [A_i, \phi]) = -D_i \phi \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{4ijk}F_{jk} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk} = -B_i \iff B_i = D_i \phi. \end{aligned}$$

このように、場いくつかの条件を課して方程式やソリトン解の次元を下げる操作を次元降下 (dimensional reduction) という。これより、BPS モノポールのモジュライ空間はインスタントンのモジュライ空間から以下のようにして導かれると直感的に理解できる。

- 次元降下により平行移動のモジュライが \mathbb{R}^4 から \mathbb{R}^3 へ落ちる。
- 自発的対称性の破れによりゲージ変換の自由度が $SU(2)$ から $U(1)$ へ落ちる。
- モノポールでは大きさが一意に決まるのでその分のモジュライが消える。

このような BPS モノポールのモジュライ空間に関し、BPS 条件とは別の次元で定義される方程式系のモジュライ空間が 1 対 1 に対応することが示されており、それを用いて解を構成する方法は Nahm 構成法として知られている。また、BPS モノポールのモジュライ空間の計量は hyperkähler 計量となることが知られており、 $N = 2$ の場合は Atiyah-Hitchin 計量、一般の N の場合でそれぞれのモノポールが十分に離れていると見なせる場合は Gibbons-Manton 計量が知られている。本章では Gibbons-Manton 計量の導出を行う。そのために、次節でより一般的な解である dyon について見てみる。

3.5 Julia-Zee dyon と時間に依存するゲージ変換

't Hooft-Polyakov アンザッツを一般化したものとして、Julia-Zee アンザッツが知られている。それから導かれる解は磁荷とともに電荷を持ち、そのようなソリトン解は dyon と呼ばれる。BPS 極限は dyon へも拡張できる。また、dyon の性質を調べるには時間に依存するゲージ変換が重要な役割を果たす。

't Hooft-Polyakov アンザッツに対し、 ϕ^a, A_i^a はそのまま $A_0^a = 0$ を

$$A_0^a = j(r) \frac{x^a}{r} \quad (3.70)$$

と置き換えたものを Julia-Zee アンザッツという [19]。ただし、 $j(r)$ は新たな未知関数である。ここで、 A_0^a は内部空間において ϕ^a と同じ方向を向いており、付加的なスカラー場と見なせるこ

14:39, 25th Apr, 2014

とに注意．このような ϕ^a と A_0^a の関係を Julia-Zee 対応といい， $\phi^a \rightleftharpoons A_0^a$ と書く．これより，'t Hooft-Polyakov アンザッツと同様に，

$$D_0\phi^a = \partial_0\phi^a - 2\varepsilon_{abc}A_0^b\phi^c = 0$$

が成り立つ (ϕ^a と A_0^a が交換するため)．ところが，電場に関しては，

$$E_i^a = F_{i0}^a = \partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a - 2\varepsilon_{abc}A_i^b A_0^c = D_i A_0^a \quad (3.71)$$

となって一般に 0 とは限らず，Julia-Zee アンザッツから導かれる解は磁荷とともに電荷を持つ dyon であることがわかる．ここで，dyon とは以下の性質を持つ粒子またはソリトン解である．

- 磁荷と電荷の両方を持つ．
- 厳密に静的である必要はないが，あるゲージにおいて静的である．

この意味で，Julia-Zee アンザッツから導かれる解を Julia-Zee dyon という．ここで，今のアンザッツから導かれる Julia-Zee dyon は静的であること，またそれにもかかわらず $E_i^a \neq 0$ より運動エネルギーを持つことに注意．

$D_0\phi^a = 0$ における場の方程式は以下ようになる．

$$D_i D_i \phi^a = -\lambda \phi^a (1 - \phi^b \phi^b), \quad (3.72)$$

$$D_i E_i^a = 0, \quad (3.73)$$

$$\varepsilon_{ijk} D_j B_k^a + D_0 E_i^a = -2\varepsilon_{abc} D_i \phi^b \phi^c. \quad (3.74)$$

ここで，第 1 項は't Hooft-Polyakov モノポールの場合と同じ形であり，第 2 式は真空におけるガウスの法則であることに注意．これらより未知関数についての方程式を導くには，'t Hooft-Polyakov アンザッツの場合と同様の計算を行えばよい．ところが， ϕ^a と A_i^a の類似性を用いれば，直ちに

$$E_i^a = -j' \frac{x^i x^a}{r^2} + \varepsilon_{ijb} \varepsilon_{abc} j k \frac{x^j x^c}{r^3}, \quad D_i E_i^a = -\left(j'' + \frac{2j'}{r} - \frac{2jk^2}{r^2}\right) \frac{x^a}{r}$$

であることがわかる．また，

$$\begin{aligned} D_0 E_i^a &= -2\varepsilon_{abc} j \frac{x^b}{r} \left(-j' \frac{x^i x^a}{r^2} + \varepsilon_{ijd} \varepsilon_{cde} j k \frac{x^j x^e}{r^3}\right) = -2\varepsilon_{abc} \varepsilon_{ijd} \varepsilon_{cde} j^2 k \frac{x^b x^j x^e}{r^4} \\ &= -2(\delta_{be} \varepsilon_{ija} - \delta_{ae} \varepsilon_{ijb}) j^2 k \frac{x^b x^j x^e}{r^4} = 4j^2 k \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_{ija} \frac{x^j}{r^2}\right) \end{aligned}$$

なので，Julia-Zee アンザッツの未知関数についての方程式は以下の 3 つであることがわかる．

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dh}{dr} = \frac{2}{r^2} h k^2 - \lambda(1 - h^2)h, \quad (3.75)$$

$$\frac{d^2 j}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dj}{dr} = \frac{2}{r^2} j k^2, \quad (3.76)$$

$$\frac{d^2 k}{dr^2} = \frac{1}{r^2} (k^2 - 1)k + 4(h^2 - j^2)k. \quad (3.77)$$

14:39, 25th Apr, 2014

これらの一般の λ に対する解は、再び数値計算を用いて求められる。そのとき、 $j(r)$ に課される $r \rightarrow 0$ での境界条件は $h(r)$ と同じくアンザッツが発散しないようにすればよいが、 $r \rightarrow \infty$ では $E_i^a = 0$ であれば十分なので、 $h(r)$ とは異なり

$$j(0) = 0, \quad j(\infty) = \text{const.} \quad (3.78)$$

のようになり、この境界値から電荷と運動エネルギーが決定される、すなわち、Julia-Zee dyon の電荷は磁荷と異なり古典の範囲では必ずしも量子化されないことに注意。

今の Julia-Zee dyon は静的な解であるが、これは以下の時間に依存するゲージを用いたゲージ変換を行うことで $A_0^a = 0$ かつ動的な解へ移せる。

$$g(t, \mathbf{x}) = \exp(tA_0(\mathbf{x})). \quad (3.79)$$

このとき、 $A_0 \in \mathfrak{su}(2)$ より $g \in \text{SU}(2)$ であり $g^{-1} = g^\dagger = \exp(-tA_0)$ なので、確かに

$$A_0 \mapsto gA_0g^{-1} + g\partial_0g^{-1} = gA_0g^{-1} - gA_0g^{-1} = 0$$

となる。また、

$$A_i \mapsto gA_i g^{-1} + g\partial_i g^{-1}$$

は再び球対称であるが、変換前と異なり複雑な時間依存性を持つことに注意。さらに、ヒッグス場については、Julia-Zee 対応より A_0 と ϕ が交換するので g と ϕ も交換し、

$$\phi \mapsto g\phi g^{-1} = \phi g g^{-1} = \phi$$

となって元のままとなる。このような時間に依存するゲージ変換は dyon の性質を考える上で重要であるが、それらが必ずしも framing を保つとは限らないことに注意。それを見るには、 $j(r)$ の無限遠方での境界条件を $j(\infty) = C$ と置く。すると、

$$g(t, 0, 0, +\infty) = \exp(Ctt_3) = \exp\begin{pmatrix} iCt & 0 \\ 0 & -iCt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{iCt} & 0 \\ 0 & e^{-iCt} \end{pmatrix}$$

より、framing は $2\pi/C$ の周期で回転することがわかる。

BPS 極限は以下のようにして dyon の場合へ拡張できる。3.1 小節の最後で述べたように、Bianchi の恒等式、ゲージ場についての場の方程式、共変微分と場の強さの関係は、 $\text{SU}(2)$ における電場と磁場を用いてそれぞれ式 (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), (3.25), (3.26) のように書ける。ここで、モノポールの場合と同様に式 (3.24) を式 (3.26) に帰着させようとする $D_0 E_i^a$ がじゃまになるが、これは式 (3.22) を用いて各場の間に適当な関係をつけることで消すことができる、すなわち、2 つの定数 C_1, C_2 を用いて表式の両辺に対して $C_2 \times (3.24) - C_1 \times (3.22) = (3.26)$ と置けば、以下の関係が成り立つとき、式 (3.24) は自動的に満たされることがわかる。

$$C_2 E_i^a - C_1 B_i^a = 0, \quad C_2 B_i^a + C_1 E_i^a = D_i \phi^a, \quad B_i^a = C_2 D_i \phi^a.$$

これらより $C_1^2 + C_2^2 = 1$ が導かれるので、 $(C_1, C_2) = (\sin \alpha, \cos \alpha)$ と置く。ただし、 α は任意の定数である。すると、BPS 条件は以下のように一般化されることがわかる。

$$B_i^a = D_i \phi^a \cos \alpha, \quad E_i^a = D_i \phi^a \sin \alpha. \quad (3.80)$$

14:39, 25th Apr, 2014

ここで, $\alpha = 0$ でモノポールの場合に帰着することに注意. このとき, 式 (3.23), (3.21) より,

$$2\varepsilon_{abc}D_0\phi^b\phi^c = D_iE_i^a = D_iB_i^a \tan \alpha = 0$$

でなければならないが, これは $D_0\phi^a = 0$, 特に Julia-Zee 対応があれば常に満たされる. また, 式 (3.15) より,

$$\lambda\phi^a(1 - \phi^b\phi^b) = D_\mu D^\mu \phi^a = 0$$

でなければならないが, これは BPS 極限であれば常に満たされる. 場の方程式による BPS 極限の導出はこのように拡張されるが, これはもちろんエネルギーにおいても以下のように拡張される [20]. まず, 磁荷と電荷の表式はそれぞれ以下のように書き換えられる.

$$g = \int_{S_\infty^2} d^2\sigma_i B_i^a \phi^a = \int d^3x D_i(B_i^a \phi^a) = \int d^3x B_i^a D_i \phi^a, \quad (\text{with } D_i B_i^a = 0) \quad (3.81)$$

$$q = \int_{S_\infty^2} d^2\sigma_i E_i^a \phi^a = \int d^3x D_i(E_i^a \phi^a) = \int d^3x E_i^a D_i \phi^a. \quad (\text{if } D_i E_i^a = 0) \quad (3.82)$$

ただし, Bianchi の恒等式 $D_i B_i^a = 0$ は常に成り立つが, 真空でのガウスの法則 $D_i E_i^a = 0$ は $D_0\phi^a = 0$ により成り立つことに注意. 一方, エネルギーは $D_0\phi^a = 0$ と $\lambda = 0$ の下で以下のように平方完成できる.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int d^3x (E_i^a E_i^a + B_i^a B_i^a + D_i \phi^a D_i \phi^a) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x (E_i^a - D_i \phi^a \sin \alpha)^2 + \sin \alpha \int d^3x E_i^a D_i \phi^a \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^3x (B_i^a - D_i \phi^a \cos \alpha)^2 + \cos \alpha \int d^3x B_i^a D_i \phi^a. \end{aligned} \quad (3.83)$$

これより, Bogomolny bound は以下のように拡張され, 先の BPS 条件は dyon のエネルギーの極値を与えるための十分条件であることがわかる.

$$E \geq q \sin \alpha + g \cos \alpha \quad (3.84)$$

一般の α に対する BPS 条件は以下のようにして $\alpha = 0$ の場合へ帰着させて解くことができる. まず, ϕ^a, A_i^a を $\alpha = 0$ の場合の解とすれば, $\tilde{B}_i^a = \tilde{D}_i \tilde{\phi}^a \cos \alpha$ の解は $\tilde{\phi}^a = \phi^a / \cos \alpha, \tilde{A}_i^a = A_i^a$ と置けばよい. しかし, このままでは境界条件 $\tilde{\phi}^a \tilde{\phi}^a = 1$ を満たさないのので, ヒッグス場の真空期待値 $v = 1$ を $v \mapsto v / \cos \alpha$ のように置き換え, v に関わるすべての量を同時にリスケールする*). すると, 一般の α に対する解は以下であることがわかる.

$$\tilde{\phi}^a(\tilde{x}) = \phi^a(x), \quad \tilde{A}_i^a(\tilde{x}) = A_i^a(x) \cos \alpha \quad (3.85)$$

ただし, $\tilde{x} = x / \cos \alpha$ である. また, \tilde{A}_0^a については, 一般の α に対する BPS 方程式と電場の定義より, 以下のように求まる.

$$\tilde{E}_i^a = \tilde{D}_i \tilde{\phi}^a \sin \alpha = \tilde{D}_i \tilde{A}_0^a \quad \therefore \tilde{A}_0^a(\tilde{x}) = \tilde{\phi}^a(\tilde{x}) \sin \alpha = \phi^a(x) \sin \alpha. \quad (3.86)$$

*) このようなりスケールを行わず, dyon となることで真空が $1 / \cos \alpha$ 倍だけ励起されたと見る場合もある.

表 3.1: 時間に依存するゲージ変換のまとめ .

$A_0 = 0$	$A_0 \neq \phi$
static 't Hooft-Polyakov monopole $\downarrow g = \exp(\chi\phi)$	Julia-Zee dyon $\swarrow g = \exp(tA_0)$
non-static Non-static dyon ($\partial_0 A_i \neq 0, A_0 = 0$)	

これらと式 (3.63) より, Julia-Zee アンザッツの BPS 極限における解析解は以下となることわかる (アンザッツの置き方に注意) .

$$h(r) = \coth(2r \cos \alpha) - \frac{1}{2r \cos \alpha}, \quad (3.87)$$

$$k(r) = \frac{2r \cos \alpha}{\sinh(2r \cos \alpha)}, \quad (3.88)$$

$$j(r) = \coth(2r \cos \alpha) \sin \alpha - \frac{\tan \alpha}{2r}. \quad (3.89)$$

このとき, 磁荷 g はモノポールの場合と同じく $g = 2\pi$ であるが, 電荷 q は $E_i^a = B_i^a \tan \alpha$ より

$$q = g \tan \alpha \quad (3.90)$$

となることに注意 . また, これより,

$$\tan \alpha = \frac{q}{g}, \quad \sin \alpha = \frac{|q|}{\sqrt{g^2 + q^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{|g|}{\sqrt{g^2 + q^2}}$$

となり, BPS 極限におけるエネルギーは以下のように書き換えられることに注意 .

$$E = \sqrt{g^2 + q^2} = |g + iq|. \quad (3.91)$$

最後に, BPS 極限における dyon の電荷がどのようにして生じるか見てみる [21] . 先に静的な Julia-Zee dyon に対するゲージ変換を考えたが, 今度は 't Hooft-Polyakov モノポールに対する以下のゲージを用いた変換を考える (表 3.1) .

$$g(t, \boldsymbol{x}) = \exp(\chi(t)\phi(\boldsymbol{x})) \simeq \mathbf{1}_2 + \dot{\chi}\phi\delta t. \quad (3.92)$$

ただし, $\chi(t)$ は任意の実数値関数であり, これによる変換は $A_0 = 0$ を保つとする . このとき, $\phi \in \mathfrak{su}(2)$ より $g \in \text{SU}(2)$ であり

$$g^{-1} = g^\dagger = \exp(-\chi(t)\phi(\boldsymbol{x})) \simeq \mathbf{1}_2 - \dot{\chi}\phi\delta t$$

なので, 以下のようになる .

$$\begin{aligned} A_i &\mapsto gA_i g^{-1} + g\partial_i g^{-1} \\ &\simeq (\mathbf{1}_2 + \dot{\chi}\phi\delta t)A_i(\mathbf{1}_2 - \dot{\chi}\phi\delta t) + (\mathbf{1}_2 + \dot{\chi}\phi\delta t)\partial_i(\mathbf{1}_2 - \dot{\chi}\phi\delta t) \\ &\simeq A_i - \dot{\chi}(\partial_i\phi + [A_i, \phi])\delta t = A_i - \dot{\chi}D_i\phi\delta t \quad \therefore \partial_0 A_i = -\dot{\chi}D_i\phi. \end{aligned} \quad (3.93)$$

14:39, 25th Apr, 2014

また, 先と同様に g と ϕ は交換するので $\phi \mapsto \phi$, $\partial_0 \phi = 0$ である. ここで, $A_0 = 0$ とモノポールについての BPS 条件を用いれば,

$$E_i = -\partial_0 A_i = \dot{\chi} D_i \phi = \dot{\chi} B_i, \quad (3.94)$$

すなわち, このゲージにおける解は動的な dyon であることがわかる. すると, 先の静的な Julia-Zee dyon の表式との比較より,

$$\dot{\chi} = \tan \alpha = \frac{q}{g} \iff q = g\dot{\chi}, \quad (3.95)$$

すなわち, BPS 極限における dyon の持つ電荷はモノポールの位相の時間変化により生じることがわかる.

3.6 Well-separated モノポールと Gibbons-Manton 計量

高いモノポール数を持つマルチモノポールの解析は一般に困難であるが, それらをいくつかの十分に離れたモノポールの集まりと見なした場合は解析が容易であり, それらの間の相互作用やモジュライ空間の計量が知られている.

2つのモノポールまたはモノポール-反モノポール間の相互作用を考える [12]. そのとき, モノポールが十分に離れた場所にあるとすれば, もう片方が感じる場はその無限遠方における場であり, 3.2 小節での議論より以下のような背景場中での運動と見なせる.

$$b_i \simeq \frac{1}{2r^2} \frac{x^i}{r}, \quad |\phi| \simeq 1 - \frac{1}{2r}. \quad (3.96)$$

このとき, もう片方のモノポールまたは反モノポールが時刻 $t = 0$ で原点に静止していて初期加速度 a を持っていたとする. すると, それにより作られる時刻 t における場は, ローレンツブーストとテーラー展開を用いて以下のように導ける.

$$\begin{cases} \phi^a(t, \mathbf{x}) = \phi^a\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}at^2\right) \simeq \phi^a(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}at^2 \cdot \nabla \phi^a(\mathbf{x}), \\ A_i^a(t, \mathbf{x}) = A_i^a\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}at^2\right) \simeq A_i^a(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}at^2 \cdot \nabla A_i^a(\mathbf{x}), \\ A_0^a(t, \mathbf{x}) = at \cdot \mathbf{A}^a\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}at^2\right) \simeq at \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (3.97)$$

ただし, 時刻 t における速度を at , 近似は $O(|a|^2)$ までとし, 光速に比べて十分に小さい速度 V で動く座標 (t, \mathbf{x}) に対するローレンツブーストの表式は以下を用いた.

$$\begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -{}^t\mathbf{V} \\ -\mathbf{V} & \mathbf{1}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

このとき, ヒッグス場とゲージ場の時間依存性はそれぞれ

$$\partial_0 \phi^a(t, \mathbf{x}) \simeq -a_j t \partial_j \phi^a(\mathbf{x}), \quad \partial_0 A_i^a(t, \mathbf{x}) \simeq -a_j t \partial_j A_i^a(\mathbf{x})$$

14:39, 25th Apr, 2014

となるので，共変微分の時間成分に対する量はそれぞれ

$$\begin{aligned} D_0\phi^a &\simeq -a_j t(\partial_j\phi^a - 2\varepsilon_{abc}A_j^b\phi^c) = -a_j t D_j\phi^a, & D_0 D_0\phi^a &\simeq -a_j D_j\phi^a, \\ E_i^a &\simeq -a_j t(\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a - 2\varepsilon_{abc}A_i^b A_j^c) = -a_j t F_{ij}^a, & D_0 E_i^a &\simeq -a_j F_{ij}^a \end{aligned}$$

となり， $t = 0$ における場の方程式は以下のような静的なものとなることわかる．

$$D_i(D_i + a_i)\phi^a = -\lambda\phi^a(1 - \phi^b\phi^b), \quad (3.98)$$

$$\varepsilon_{ijk}(D_j + a_j)B_k^a = -2\varepsilon_{abc}D_i\phi^b\phi^c. \quad (3.99)$$

このとき，Bianchi の恒等式 $D_i B^a = 0$ はそのままなので， $\lambda = 0$ において第 1 式を満たすための十分条件は，

$$B_i^a = D_i\phi^a + a_i\phi^a \quad (3.100)$$

であるが，これは以下のようにして第 2 式も満たし，式 (3.100) は修正された BPS 条件と見なせる．

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}(D_j + a_j)B_k^a &= \varepsilon_{ijk}(D_j + a_j)(D_k + a_k)\phi^a = \varepsilon_{ijk}D_j D_k\phi^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}[D_j, D_k]\phi^a \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(-2\varepsilon_{abc}F_{jk}^b\phi^c) = -2\varepsilon_{abc}B_i^b\phi^c = -2\varepsilon_{abc}(B_i^b - a_i\phi^b)\phi^c \\ &= -2\varepsilon_{abc}D_i\phi^b\phi^c. \end{aligned}$$

さらに，式 (3.100) に対する線形化を考えれば， $B_i^a = b_i\hat{\phi}^a$ ， $D_i\phi^a = \partial_i|\phi|\hat{\phi}$ より，

$$a_i = b_i - \partial_i|\phi|, \quad (3.101)$$

すなわち，BPS 極限では質量を失ったヒッグス場がそのノルムの勾配に等しい長距離相互作用を持つことがわかる．また，式 (3.96) より，そのような相互作用は磁場と同じ強さのスカラーポテンシャルによって生じ，その結果，BPS 極限では 2 つのモノポール間には引力が生じず，モノポール-反モノポール間では磁荷による引力の 2 倍の引力が生じることもわかる．このようなヒッグス場の相互作用におけるチャージをスカラーチャージ (scalar charge) という．スカラーチャージの大きさは式 (3.96) のようなヒッグス場のノルムの漸近形より求まり，今の場合は $|g|$ である．dyon における相互作用も今と同様に考えられる．その場合，電場もスカラーポテンシャルと同様の相互作用を持ち，そのチャージは電荷 q である．また，そのときのスカラーチャージの値は，dyon の BPS 条件を解く際のリスケールと式 (3.96) より，明らかにモノポールの場合の $\sqrt{g^2 + q^2}/|g|$ 倍であり，dyon の相互作用には以下の 3 つのチャージが寄与することがわかる．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{scalar charge : } \sqrt{g^2 + q^2} \\ \text{electric charge : } q \\ \text{magnetic charge : } g \end{array} \right. \quad (3.102)$$

また，同じチャージを持つ 2 つの dyon 間に働く力は，2 つのモノポールの場合と同様に，

$$\frac{g^2}{4\pi s^2} + \frac{q^2}{4\pi s^2} - \frac{g^2 + q^2}{4\pi s^2} = 0$$

14:39, 25th Apr, 2014

のように打ち消す．ただし， s は 2 つの dyon 間の距離で， $|a| = 1/s^2$ である．

このように，十分に離れた dyon の相互作用は線形に近似できるので，それらの測地線運動のラグランジアンは普通の電磁気学に従って導くことができる [22, 23]．互いに十分に離れた n 個の dyon を考える．このとき， n 番目の dyon のラグランジアンは以下のように置ける．

$$L_n = -\sqrt{g^2 + q_n^2} \phi \sqrt{1 - V_n^2} + q_n \mathbf{V}_n \cdot \mathbf{A} - q_n A_0 + g \mathbf{V}_n \cdot \tilde{\mathbf{A}} - g \tilde{A}_0. \quad (3.103)$$

ただし， $\sqrt{g^2 + q_n^2}$ ， $g = 2\pi$ ， q_n ， \mathbf{V}_n はそれぞれ n 番目の dyon のスカラーチャージ，磁荷，電荷，速度， $v = 1$ はヒッグス場の真空期待値であり， ϕ ， \mathbf{A} ， A_0 はそれぞれ背景場としてのヒッグス場とゲージ場の空間成分，時間成分である（前節で見たように，dyon の磁荷はトポロジカルチャージごとに一定なので g には粒子の添え字はつかないが，電荷は同じとは限らないので添え字がつくことに注意）．また， $\tilde{\mathbf{A}}$ ， \tilde{A}_0 はそれぞれ \mathbf{A} ， A_0 に対する双対ポテンシャルであり，双対電場 $\tilde{\mathbf{E}}$ と双対磁場 $\tilde{\mathbf{B}}$ を介して以下のように定義される．

$$\begin{aligned} \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} &:= \tilde{\mathbf{B}} := -\mathbf{E} = \nabla A_0 + \dot{\mathbf{A}}, \\ -\nabla \tilde{A}_0 - \dot{\tilde{\mathbf{A}}} &:= \tilde{\mathbf{E}} := \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

ここで， L_n の第 1 項，第 2, 3 項，第 4, 5 項はそれぞれ n 番目の dyon のスカラーチャージ，電荷，磁荷と対応する背景場との相互作用である（電荷による相互作用は電磁気学における普通のローレンツ力のラグランジアンであることに注意．また，磁荷による相互作用もローレンツ力と同じ形であるが，電荷と 4 元ポテンシャルをそれぞれ磁荷と双対ポテンシャルに置き換えたものとなることに注意）．このとき，1 番目の dyon によって作られる背景場は以下のようにして導ける．まず，モノポールの BPS 極限における線形化されたヒッグス場は以下となるのであった．

$$\phi \simeq 1 - \frac{1}{2r} + O(e^{-4r}) = v - \frac{g}{4\pi r} + O(e^{-8\pi v r/g}). \quad (3.105)$$

ただし， $v = 1$ ， $g = 2\pi$ を用いた．また，線形化された BPS 条件は単なる回転と勾配の等式であり*)，それよりゲージ場も以下のようにして導ける．

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \phi = -\frac{g}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{g}{4\pi} \nabla \times \mathbf{w} \quad \therefore \mathbf{A} = -\frac{g}{4\pi} \mathbf{w}. \quad (3.106)$$

ただし， $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ は

$$\nabla \times \mathbf{w} = \nabla \left(\frac{1}{r} \right), \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(-\mathbf{x}). \quad (3.107)$$

を満たすベクトルであり，これを調和関数 (harmonic function) $1/r$ に対するディラックポテンシャル (Dirac potential) という (今の計算において \mathbf{w} の具体的な形は気にしなくてよい)．すると，1 番目の dyon により作られる背景場は，今の結果と本節の前半の議論，前節の Julia-Zee dyon の BPS 極限における式変形を踏まえれば，以下となることがわかる．

$$\phi = v - \frac{\sqrt{g^2 + q_1^2}}{4\pi r_{n1}}, \quad \mathbf{A} = -\frac{g}{4\pi} \mathbf{w}_{n1}, \quad A_0 = -\frac{q_1}{4\pi r_{n1}}. \quad (3.108)$$

*) 微分形式で書かれた BPS 条件 $*D_A \phi = F$ を考えるとよい．ただし， $D_A \phi = d\phi + [A, \phi]$ ， $F = dA + A \wedge A$ である．

14:39, 25th Apr, 2014

ただし, $r_{ji} := \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$, $r_{ji} := |r_{ji}|$, $\mathbf{w}_{ji} := \mathbf{w}(r_{ji}) = \mathbf{w}_{ij}$ であり, \mathbf{x}_j は j 番目の dyon の位置である. また, ゲージ場の時間成分の導出には式 (3.86) を用いた. このとき, 双対ポテンシャルは式 (3.104) より以下のようにして導ける.

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{A}} = \nabla A_0 = -\frac{q_1}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r_{n1}} \right) = -\frac{q_1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{w}_{n1} \quad \therefore \tilde{\mathbf{A}} = -\frac{q_1}{4\pi} \mathbf{w}_{n1}, \quad (3.109)$$

$$-\nabla \tilde{A}_0 = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{g}{4\pi} \nabla \times \mathbf{w}_{n1} = -\frac{g}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r_{n1}} \right) \quad \therefore \tilde{A}_0 = \frac{g}{4\pi r_{n1}}. \quad (3.110)$$

さらに, これらの場は運動する系における形で書かれなければならないが, ヒッグス場については以下のようにスカラーポテンシャルの部分を Liénard-Wiechert ポテンシャルと置き換えればよい.

$$\phi = v - \frac{\sqrt{g^2 + q_1^2}}{4\pi s_{n1}} \sqrt{1 - \mathbf{V}_1^2} \simeq v - \frac{g}{4\pi r_{n1}} \left(1 + \frac{q_1^2}{2g^2} - \frac{\mathbf{V}_1^2}{2} \right). \quad (3.111)$$

ただし, $s_{n1} := \sqrt{r_{n1}^2 - |\mathbf{r}_{n1} \times \mathbf{V}_1|^2} + O(\mathbf{V}_1^2)$ であり, $s_{n1} \simeq r_{n1}$ として q_1 , \mathbf{V}_1 についての近似を 2 次までとした (電荷が磁荷と比べて十分に小さいとしていることに注意. これは速度と同様に位相の変化も十分に小さいとしていることに対応する). また, 4 元ポテンシャルと双対ポテンシャルについてはローレンツ変換を行えばよく, ヒッグス場と同じ次数の近似で以下ようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{q_1}{4\pi r_{n1}} \mathbf{V}_1 - \frac{g}{4\pi} \mathbf{w}_{n1}, & A_0 &= -\frac{q_1}{4\pi r_{n1}} - \frac{g}{4\pi} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{w}_{n1}, \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \frac{g}{4\pi r_{n1}} \mathbf{V}_1 - \frac{q_1}{4\pi} \mathbf{w}_{n1}, & \tilde{A}_0 &= \frac{g}{4\pi r_{n1}} - \frac{q_1}{4\pi} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{w}_{n1}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

これらを式 (3.103) に代入し, q_n , \mathbf{V}_n も含めて 2 次までの近似とすれば, 1 番目の dyon のみを考慮した場合のラグランジアン L_{n1} の各項は,

$$\begin{aligned} \text{第 1 項} &\simeq -m_n + \frac{1}{2} m_n \mathbf{V}_n^2 + \frac{g^2}{4\pi r_{n1}} \left(1 + \frac{q_n^2}{2g^2} - \frac{\mathbf{V}_n^2}{2} \right) \left(1 + \frac{q_1^2}{2g^2} - \frac{\mathbf{V}_1^2}{2} \right) \\ &\simeq -m_n + \frac{1}{2} m_n \mathbf{V}_n^2 + \frac{g^2}{4\pi r_{n1}} + \frac{1}{8\pi r_{n1}} (q_n^2 + q_1^2) - \frac{g^2}{8\pi r_{n1}} (\mathbf{V}_n^2 + \mathbf{V}_1^2), \\ \text{第 2 項} &\simeq q_n \mathbf{V}_n \cdot \left(-\frac{g}{4\pi} \mathbf{w}_{n1} \right), & \text{第 3 項} &\simeq -q_n \left(-\frac{q_1}{4\pi r_{n1}} - \frac{g}{4\pi} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{w}_{n1} \right), \\ \text{第 4 項} &\simeq g \mathbf{V}_n \cdot \left(\frac{g}{4\pi r_{n1}} \mathbf{V}_1 - \frac{q_1}{4\pi} \mathbf{w}_{n1} \right), & \text{第 5 項} &\simeq -g \left(\frac{g}{4\pi r_{n1}} - \frac{q_1}{4\pi} \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{w}_{n1} \right) \end{aligned}$$

のようになり, まとめると以下となることがわかる.

$$\begin{aligned} L_{n1} &= -m_n + \frac{1}{2} m_n \mathbf{V}_n^2 + \frac{1}{8\pi r_{n1}} (q_n - q_1)^2 - \frac{g^2}{8\pi r_{n1}} (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_1)^2 \\ &\quad - \frac{g}{4\pi} (q_n - q_1) (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_1) \cdot \mathbf{w}_{n1}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

ただし, $m_n := v \sqrt{g^2 + q_n^2}$ である. これを 1 から $n-1$ 番目までのすべての dyon を考慮した場合へ拡張するには単に和をとればよく, その場合のラグランジアン L_n は以下となることがわかる.

$$L_n = \frac{1}{2} m_n \mathbf{V}_n^2 + \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(q_n - q_i)^2}{r_{ni}} - \frac{g^2}{8\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_i)^2}{r_{ni}}$$

14:39, 25th Apr, 2014

$$- \frac{g}{4\pi} \sum_{i=1}^{n-1} (q_n - q_i) (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_i) \cdot \mathbf{w}_{ni}. \quad (3.114)$$

ここで, L_n の中の和は n について対称でないが, 系全体のラグランジアン L はもちろん対称であり, 以下のように書ける (電磁気学で多粒子系の静電ポテンシャルを求めるときと同様である. ただし, $1/r_{ji}$, \mathbf{W}_{ji} の添え字の対称性に注意).

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m \mathbf{V}_i^2 + \frac{1}{8\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(q_j - q_i)^2}{r_{ji}} - \frac{g^2}{8\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i)^2}{r_{ji}} - \frac{g}{4\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (q_j - q_i) (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) \cdot \mathbf{w}_{ji}. \quad (3.115)$$

ただし, $m := vg$ であり, $m_i \mathbf{V}_i^2 \simeq m \mathbf{V}_i^2$ とした. このとき, 第 2 項以降が差の形で書けることに注意. また, 第 1 項も以下のように重心座標と相対座標の項の和に分けられることに注意^{*}).

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m \mathbf{V}_i^2 = \frac{1}{2n} m \left(\sum_i \mathbf{V}_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{2n} m (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i)^2. \quad (3.116)$$

今のラグランジアンは dyon の測地線運動から導かれたものであるが, これはモジュライ空間における純粋な運動のラグランジアン \mathcal{L} と対応づけられ, それらの係数を比較することでモジュライ空間の計量を導くことができる. それには, まず, \mathcal{L} のアンザッツを以下のように置く.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ij} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_j + \frac{1}{2} h_{ij} (\dot{\chi}_i + \mathbf{W}_{ik} \cdot \mathbf{V}_k) (\dot{\chi}_j + \mathbf{W}_{j\ell} \cdot \mathbf{V}_\ell). \quad (3.117)$$

ただし, χ_i は dyon の位相であり, g_{ij} , h_{ij} は対称行列である. このとき, \mathcal{L} は位相 χ_i を用いて表されるが, 前小節で見たように dyon の位相と電荷は関連づけられるので, ルジャンドル変換を用いて変数を q_i と置き換えたラグランジアン \mathcal{L}_{eff} を以下のように置くことができる.

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} := \mathcal{L} - \frac{1}{\kappa} q_i \dot{\chi}_i. \quad (3.118)$$

ただし, κ は定数である. すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \dot{\chi}_i} &= h_{ij} (\dot{\chi}_j + \mathbf{W}_{j\ell} \cdot \mathbf{V}_\ell) - \frac{1}{\kappa} q_i = 0 \iff q_i = \kappa h_{ij} (\dot{\chi}_j + \mathbf{W}_{j\ell} \cdot \mathbf{V}_\ell) \\ \iff h^{ij} q_i &= \kappa \delta_k^i (\dot{\chi}_k + \mathbf{W}_{k\ell} \cdot \mathbf{V}_\ell) = \kappa (\dot{\chi}_i + \mathbf{W}_{i\ell} \cdot \mathbf{V}_\ell) \iff \dot{\chi}_i = \frac{1}{\kappa} h^{ij} q_j - \mathbf{W}_{i\ell} \cdot \mathbf{V}_\ell \end{aligned}$$

より, \mathcal{L}_{eff} は以下のように書き換えられることがわかる.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \frac{1}{2} g_{ij} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_j + \frac{1}{2} h_{ij} \left(\frac{1}{\kappa} h^{ik} q_k \right) \left(\frac{1}{\kappa} h^{j\ell} q_\ell \right) - \frac{1}{\kappa} q_i \left(\frac{1}{\kappa} h^{ij} q_j - \mathbf{W}_{i\ell} \cdot \mathbf{V}_\ell \right) \\ &= \frac{1}{2} g_{ij} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_j - \frac{1}{2\kappa^2} h^{ij} q_i q_j + \frac{1}{\kappa} q_i \mathbf{W}_{ij} \cdot \mathbf{V}_j. \end{aligned} \quad (3.119)$$

^{*}この恒等式はそれほど自明ではない, すなわち, 右辺の第 1 項と第 2 項のクロスタームが打ち消すことは自明であるが, 第 2 項の 2 乗の係数が $n-1$ となることはそれほど自明ではないことに注意. これは, $\sum_{1 \leq i < j \leq n}$ の項の数が $\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell = n(n-1)/2$ となり, それぞれの $(\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i)^2$ に 2 乗の項が 2 つずつ含まれるためである.

14:39, 25th Apr, 2014

ただし, h^{ij} は h_{ij} の逆行列である. これと式 (3.115) の係数を比較すれば, 以下が得られる.

$$\begin{aligned} g_{jj} &= m - \frac{g^2}{4\pi} \sum_{i \neq j} \frac{1}{r_{ij}}, \quad (\text{not summed over } j) & g_{ij} &= \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{r_{ij}}, \quad (i \neq j) \\ \mathbf{W}_{jj} &= -\frac{g\kappa}{4\pi} \sum_{i \neq j} \mathbf{w}_{ij}, \quad (\text{not summed over } j) & \mathbf{W}_{ij} &= \frac{g\kappa}{4\pi} \mathbf{w}_{ij}. \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

また, h^{ij} は \mathcal{L}_{eff} と L を単に比較しただけでは逆行列を持つ形で得られないが, 任意の項を付け加えたものを考えればそのような形のものも得られ, 特に $h^{ij} = (\kappa^2/g^2)g_{ij}$ と置けば十分である. さらに, ディラックポテンシャルの特異点を踏まえれば $\kappa = 4\pi/g$ でなければならないこともわかる [23]. これらに $v = 1, g = 2\pi$ を用いてさらに適当な係数を掛ければ, 結局, 式 (3.117) に対する計量は以下となることがわかる.

$$ds^2 = g_{ij} d\mathbf{x}_i \cdot d\mathbf{x}_j + g_{ij}^{-1} (d\chi_i + \mathbf{W}_{ik} \cdot d\mathbf{x}_k) (d\chi_j + \mathbf{W}_{j\ell} \cdot d\mathbf{x}_\ell). \quad (3.120)$$

ただし,

$$g_{jj} = 2 - \sum_{i \neq j} \frac{1}{r_{ij}}, \quad (\text{not summed over } j) \quad g_{ij} = \frac{1}{r_{ij}}, \quad (i \neq j) \quad (3.121)$$

$$\mathbf{W}_{jj} = -\sum_{i \neq j} \mathbf{w}_{ij}, \quad (\text{not summed over } j) \quad \mathbf{W}_{ij} = \mathbf{w}_{ij} \quad (i \neq j) \quad (3.122)$$

である. これを Gibbons-Manton 計量という. Gibbons-Manton 計量は, 各モノポールが十分に離れているという仮定の下で導かれる漸近的な計量であり, その形は Taub-NUT 計量で質量が負の場合に対応する. また, そのような計量は hyperkähler 計量であることが知られており, 今の結果は hyperkähler 計量がトポロジカルソリトンのモジュライ空間から導かれる例となっている.

このように, BPS 極限においては高次のチャージを持つモノポールのモジュライ空間の構造を調べることはできるが, 具体的な解については, 今までのような BPS 条件に対するアンザッツを考えるとというアプローチで求めるのは困難である. 次章では, そのような高次のチャージを持つ場合の解を求めるための手法である Nahm 構成法について詳しく見る.

第4章 ADHM/Nahm 構成法

本章では、インスタントンを系統的に求める手法である ADHM 構成法、それをモノポールに応用した Nahm 構成法について述べる。4.1 節では ADHM/Nahm 構成法を理解するのに必要な概念であるモジュライ空間と次元降下について、4.2, 4.3 節ではそれぞれ ADHM/Nahm 構成法の原理といくつかの例について、4.4 節では Nahm 構成法から導かれる概念であるスペクトル曲線とその応用について述べた。

4.1 ADHM/Nahm 構成法の原理

2章で自己双対条件を満たすインスタントン、3章で Bogomolny 条件を満たすモノポールの例を紹介したが、それらは位置やサイズといったパラメーターを持っていた。そのようなパラメーターをモジュライパラメーター (moduli parameter)、それらの空間をモジュライ空間 (moduli space) という。インスタントン/モノポールモジュライ空間はそれぞれ自己双対/Bogomolny 方程式から導かれるが、実はそれらの方程式が定義される次元とは別の次元において、同様のモジュライ空間が導かれる方程式系が存在する。また、元の空間におけるゲージ場 A_μ とそのような方程式系の解としてのゲージ場 T_α との間の 1 対 1 対応が示されており、それらを用いてインスタントンやモノポールを構成する手法は ADHM/Nahm 構成法として知られている。

Yang-Mills 理論におけるソリトン方程式と対応する方程式の関係を表 4.1 にまとめておく。インスタントンからモノポールへの次元降下は 3.4 小節で説明したが、そのような次元降下はさらに低次元へも行うことができる。また、対応する方程式の次元はそれに伴って上がることが知られている。ここで、 \mathbb{R}^4 で定義される自己双対方程式に対して ADHM 方程式は単なる行列の代数

表 4.1: Yang-Mills 理論におけるソリトン方程式と対応する方程式系。

A_μ		T_α	
\mathbb{R}^4	自己双対方程式	\mathbb{R}^0	ADHM 方程式
	↓		↑
\mathbb{R}^3	Bogomolny 方程式	\mathbb{R}^1	Nahm 方程式
	↓		↑
\mathbb{R}^2	いろいろなソリトン方程式	\mathbb{R}^2	いろいろなソリトン方程式
	↓		↑
\mathbb{R}^1	Nahm 方程式	\mathbb{R}^3	Bogomolny 方程式
	↓		↑
\mathbb{R}^0	ADHM 方程式	\mathbb{R}^4	自己双対方程式

14:39, 25th Apr, 2014

方程式, \mathbb{R}^3 で定義される Bogomolny 方程式に対して Nahm 方程式は 1 変数の 1 階微分方程式であり, 元の方程式を解くよりも対応する方程式を解いて解を変換する方が容易である. これが ADHM/Nahm 構成法の原理である.

4.2 ADHM 構成法

インスタントンを求める際の自己双対条件は, 対応する零質量ディラック作用素の積がパウリ行列と可換になるという条件に置き換えられる. これを 0 次元におけるディラック作用素に置き換えれば, 逆に自己双対方程式に対応する ADHM 方程式を導くことができる. また, その解を変換することで自己双対インスタントンを構成することができる.

4.2.1 ADHM 方程式

4 次元 pure Yang-Mills 理論のゲージ場 A_μ に対し, 以下をそれぞれ零質量ディラック作用素 (Dirac operator), その共役という*) .

$$\mathcal{D} := e_\mu \otimes D_\mu := e_\mu \otimes (\partial_\mu + A_\mu), \quad (4.1)$$

$$\bar{\mathcal{D}} := e_\mu^\dagger \otimes D_\mu := e_\mu^\dagger \otimes (\partial_\mu + A_\mu). \quad (4.2)$$

ただし, e_μ は四元数の 2 次複素行列表現における基底行列である. ここで, $A_\mu \in \mathfrak{su}(2)$ と $\partial_\mu^\dagger = -\partial_\mu$ より, 以下となることに注意.

$$\mathcal{D}^\dagger = e_\mu^\dagger \otimes (\partial_\mu + A_\mu)^\dagger = -e_\mu^\dagger \otimes (\partial_\mu + A_\mu) = -\bar{\mathcal{D}}. \quad (4.3)$$

このとき, $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}$ を計算してみると, $\eta_{\mu\nu}^{k(+)} F_{\mu\nu} = \tilde{\eta}_{\mu\nu}^{k(+)} \tilde{F}_{\mu\nu}$, $\tilde{\eta}_{\mu\nu}^{k(+)} = \eta_{\mu\nu}^{k(+)}$ などに注意して,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} &= e_\mu^\dagger e_\nu \otimes (\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu) \\ &= (\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{k(+)} \sigma_k) \otimes (\partial_\mu \partial_\nu + \partial_\mu A_\nu + A_\nu \partial_\mu + A_\mu \partial_\nu + A_\mu A_\nu) \\ &= \mathbf{1}_2 \otimes D^2 + i\eta_{\mu\nu}^{k(+)} \sigma_k \otimes (\partial_\mu A_\nu + A_\mu A_\nu) \\ &= \mathbf{1}_2 \otimes D^2 + \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{k(+)} \sigma_k \otimes F_{\mu\nu} \\ &= \mathbf{1}_2 \otimes D^2 + \frac{i}{4} \eta_{\mu\nu}^{k(+)} \sigma_k \otimes (F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

すると, この第 2 項が 0 となるための条件が自己双対条件なので, 以下であることがわかる.

$$F_{\mu\nu} \text{ が自己双対} \iff \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} \text{ がパウリ行列と可換.} \quad (4.5)$$

このような零質量ディラック作用素 \mathcal{D} に対し, 4.1 節で述べたような対応する方程式系における, 単なる行列であるようなディラック作用素が考えられる. それを 0 次元ディラック作用素といい,

*) $V \otimes W$ は 2 つのベクトル空間 V, W に対するテンソル積であり, $v \in V, w \in W$ に対する元も $v \otimes w$ と書く. テンソル積は 2 つのベクトル空間を合体させるような演算であり, $V \otimes W$ の基底の数は $\dim V \cdot \dim W$ である. 例えば, 2×2 行列と $k \times k$ 行列のテンソル積は, $2k \times 2k$ 行列と見ても, 各成分が 2×2 行列である $k \times k$ 行列と見ても, 2×2 行列で成分が $k \times k$ 行列とも見なせる.

14:39, 25th Apr, 2014

Δ と書く．このとき， $\overline{D}D$ がパウリ行列と可換であるという条件は $\Delta^\dagger\Delta$ が Real かつ Regular であることに対応する．ただし，Real とは行列が四元数の意味で実数，すなわち， 2×2 の単位行列 $\mathbf{1}_2$ のスカラー倍となること，Regular とは逆行列が存在することを意味する．また，これらを満たす場合， Δ は自己双対であるという． Δ は単なる行列なので， Δ が自己双対かどうかを調べるには単に $\Delta^\dagger\Delta$ が Real かつ Regular かどうかを調べればよい．

0 次元ディラック作用素 Δ が自己双対となるためのより正確な条件を求めてみる．まず， Δ は以下のように置ける^{*)}．

$$\Delta(x) = Cx - D. \quad (4.6)$$

ただし， C, D は $(n+2k) \times 2k$ の行列， $x = x^\mu e_\mu$ ， x^μ は \mathbb{R}^4 の座標， e_μ は四元数の 2 次複素行列表現における基底行列である^{**)}．ここで， C, D はそれぞれ以下の標準形 (standard form) に変形可能であることが知られている．

$$C = \begin{pmatrix} O_{n \times 2k} \\ \mathbf{1}_{2k} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

ただし， $O_{n \times 2k}$ は $n \times 2k$ の零行列， $\mathbf{1}_{2k}$ は $2k$ 次の単位行列， S は $n \times 2k$ の行列， $T = e_\mu \otimes T^\mu$ は $2k$ 次の正方行列， T^μ は k 次のエルミート行列である．すると， Δ に含まれる情報はすべて D が担うことになる．この D を ADHM データという．これらを代入すれば， Δ は

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} -S \\ x\mathbf{1}_{2k} - T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S \\ e_\mu \otimes (x^\mu \mathbf{1}_k - T^\mu) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

のように書ける．このとき， $\Delta^\dagger\Delta$ を計算すると，

$$\Delta^\dagger\Delta = \begin{pmatrix} -S^\dagger & x^\dagger\mathbf{1}_{2k} - T^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -S \\ x\mathbf{1}_{2k} - T \end{pmatrix} = S^\dagger S + x^\dagger x \mathbf{1}_{2k} - x^\dagger T - T^\dagger x + T^\dagger T$$

となるが，パウリ行列の性質

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1}_2 + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \text{Tr } \sigma_i = 0, \quad \text{Tr } \mathbf{1}_2 = 2$$

を思い出せば， $\sigma_a \Delta^\dagger\Delta$ に対してテンソル積の 2×2 成分についてのトレースをとったものは σ_a の係数の 2 倍となることがわかる．ところが，

$$x^\dagger x \mathbf{1}_{2k} = |x_\mu|^2 \mathbf{1}_{2k}, \quad x^\dagger T + T^\dagger x = x_\mu T_\nu (e_\mu^\dagger e_\nu + e_\nu^\dagger e_\mu) = 2x_\mu T_\mu \mathbf{1}_2$$

であり，これらの項はそのようなトレースで自動的に 0 となる．故に， $\Delta^\dagger\Delta$ がパウリ行列と可換となるための条件は以下のように書けることがわかる．

$$\text{Tr}_2 \{ \sigma_a (S^\dagger S + T^\dagger T) \} = 0. \quad (\text{for all } a = 1, 2, 3) \quad (4.9)$$

ただし， Tr_2 はテンソル積の 2×2 成分についてのトレースである．

^{*)} x について線形と仮定するのは一種のアンザツである．

^{**)} $(n+2k) \times 2k$ の 2 は $x \in \mathbb{H}$ の 2 次複素行列表現に対応しており，他の表現では 2 でなくなる．

14:39, 25th Apr, 2014

より詳細な条件を導くには，以下のように置く．

$$S = \begin{pmatrix} I^\dagger & J \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

すると， $\Delta^\dagger \Delta$ はひとまず以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} \Delta^\dagger \Delta &= \begin{pmatrix} -S^\dagger & e_\mu^\dagger \otimes (x^\mu \mathbf{1}_k - T^\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -S \\ e_\nu \otimes (x^\nu \mathbf{1}_k - T^\nu) \end{pmatrix} \\ &= S^\dagger S + e_\mu^\dagger e_\nu \otimes (x^\mu \mathbf{1}_k - T^\mu)(x^\nu \mathbf{1}_k - T^\nu) \\ &= \begin{pmatrix} I & \\ & J^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^\dagger & J \end{pmatrix} + (\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{a(+)} \sigma_a) \otimes (x^\mu x^\nu \mathbf{1}_k - x^\mu T^\nu - x^\nu T^\mu + T^\mu T^\nu) \\ &= \begin{pmatrix} II^\dagger & IJ \\ J^\dagger I^\dagger & J^\dagger J \end{pmatrix} + \mathbf{1}_2 \otimes (x \mathbf{1}_k - T)^2 + i\eta_{\mu\nu}^{a(+)} \sigma_a \otimes T^\mu T^\nu. \end{aligned}$$

ここで，第1項を e_μ で括るために，以下のように置く．

$$\begin{pmatrix} II^\dagger & IJ \\ J^\dagger I^\dagger & J^\dagger J \end{pmatrix} = e_\mu \otimes I^\mu = \begin{pmatrix} I^4 - iI^3 & -I^2 - iI^1 \\ I^2 - iI^1 & I^4 + iI^3 \end{pmatrix}.$$

すると，簡単な連立方程式を解くことで，

$$\begin{aligned} I^4 &= \frac{1}{2}(II^\dagger + J^\dagger J), & I^3 &= \frac{i}{2}(II^\dagger - J^\dagger J), \\ I^2 &= \frac{1}{2}(J^\dagger I^\dagger - IJ), & I^1 &= \frac{i}{2}(J^\dagger I^\dagger + IJ) \end{aligned}$$

であることがわかり，第1項は以下のように書き直せる．

$$\begin{pmatrix} II^\dagger & IJ \\ J^\dagger I^\dagger & J^\dagger J \end{pmatrix} = (\delta_{\mu 4} \mathbf{1}_2 - i\delta_{\mu a} \sigma_a) \otimes I^\mu = \mathbf{1}_2 \otimes I^4 - i\sigma_a \otimes I^a.$$

また，第3項も以下のように書き直せる．

$$\begin{aligned} i\eta_{\mu\nu}^{a(+)} \sigma_a \otimes T^\mu T^\nu &= i\sigma_a \otimes (\varepsilon_{a\mu\nu 4} + \delta_{a\mu} \delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu} \delta_{\mu 4}) T^\mu T^\nu \\ &= i\sigma_a \otimes \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} [T_b, T_c] + [T_a, T_4] \right). \end{aligned}$$

故に，

$$\Delta^\dagger \Delta = \mathbf{1}_2 \otimes \{(x - T)^2 + I^4\} + i\sigma_a \otimes \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} [T_b, T_c] + [T_a, T_4] - I^a \right) \quad (4.11)$$

となり，これがパウリ行列と可換となるための条件は以下であることがわかる．

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} [T_b, T_c] + [T_a, T_4] - I^a = 0. \quad (\text{for all } a = 1, 2, 3) \quad (4.12)$$

14:39, 25th Apr, 2014

これを ADHM 方程式という．ADHM 方程式を成分で書き下せば以下のようなになる．

$$\begin{cases} [T_1, T_2] + [T_3, T_4] - \frac{i}{2}(II^\dagger - J^\dagger J) = 0, \\ [T_1, T_3] - [T_2, T_4] - \frac{1}{2}(IJ - J^\dagger I^\dagger) = 0, \\ [T_1, T_4] + [T_2, T_3] - \frac{i}{2}(IJ + J^\dagger I^\dagger) = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

また， $B_1 := T_4 + iT_3$ ， $B_2 := T_2 + iT_1$ とすれば，以下のようにも書き直せる．

$$\begin{cases} [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = 0, \\ [B_1, B_2] + IJ = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Proof.....

まず，

$$\begin{aligned} [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J &= [T_4 + iT_3, T_4 - iT_3] + [T_2 + iT_1, T_2 - iT_1] + II^\dagger - J^\dagger J \\ &= 2i[T_1, T_2] + 2i[T_3, T_4] + II^\dagger - J^\dagger J = 0 \\ &\iff [T_1, T_2] + [T_3, T_4] - \frac{i}{2}(II^\dagger - J^\dagger J) = 0. \end{aligned}$$

次に，

$$\begin{aligned} [B_1, B_2] + IJ &= [T_2 + iT_1, T_4 + iT_3] + \frac{1}{2}(IJ + J^\dagger I^\dagger) + \frac{1}{2}(IJ - J^\dagger I^\dagger) \\ &= \left\{ [T_2, T_4] - [T_1, T_3] + \frac{1}{2}(IJ - J^\dagger I^\dagger) \right\} + i \left\{ [T_2, T_3] + [T_1, T_4] - \frac{i}{2}(IJ + J^\dagger I^\dagger) \right\} = 0 \\ &\iff \begin{cases} [T_2, T_4] - [T_1, T_3] + \frac{1}{2}(IJ - J^\dagger I^\dagger) = 0, \\ [T_2, T_3] + [T_1, T_4] - \frac{i}{2}(IJ + J^\dagger I^\dagger) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

..... *Q.E.D.*

0次元ディラック作用素 Δ が自己双対であるためには，厳密には ADHM 方程式を満たさなければならない．しかし，簡単には，適当な ADHM データを仮定して直接 $\Delta^\dagger \Delta$ を計算し，それが Real かつ Regular であるかどうかを確認することで解が得られる．

4.2.2 ADHM \rightarrow ASD

0次元ディラック作用素 $\Delta(x)$ に対する Weyl 方程式は以下のように書ける*)．

$$\Delta^\dagger V = 0 \quad (4.15)$$

*)Weyl 方程式と零質量ディラック方程式は同じものを指すが，4次元におけるディラック方程式と区別するために双対なディラック方程式を Weyl 方程式と呼ぶことにする．

14:39, 25th Apr, 2014

また, $V(x)$ は Weyl 方程式のゼロモード (zeromode) である. このとき, 方程式は $(\Delta^\dagger V)^\dagger = V^\dagger \Delta = 0$ と同値であることに注意. ここで, Δ の型を考えると,

$$\Delta^\dagger V = \left(\begin{array}{c|c} [2k \times n] & [2k \times 2k] \end{array} \right)_{=\Delta^\dagger} \left(\begin{array}{c} [n \times n] \\ \hline [2k \times n] \end{array} \right)_{=V} = O_{2k \times n}$$

でなければならないので, V は $(n+2k) \times n$ の行列である. それ故, V は $n \times n$ 行列の u , $2k \times n$ 行列の v を用いて以下のように書ける.

$$V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

また, V の規格化条件は以下のようになる.

$$V^\dagger V = \mathbf{1}_n. \quad (4.17)$$

このとき, 以下が成り立つことに注意.

$$\partial_\mu (V^\dagger V) = \partial_\mu V^\dagger V + V^\dagger \partial_\mu V = O_n \iff \partial_\mu V^\dagger V = -V^\dagger \partial_\mu V. \quad (4.18)$$

ADHM 構成法 (Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin construction) とは, 与えられた自己双対な 0 次元ディラック作用素 $\Delta(x)$ に対する Weyl 方程式の規格化されたゼロモード V に対して

$$A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V \quad (4.19)$$

と置いたとき, これが自己双対インスタントンのゲージ場となっているというものである. このことを示していく. まず, 以下より A_μ は確かに反エルミートである.

$$A_\mu^\dagger = (V^\dagger \partial_\mu V)^\dagger = \partial_\mu V^\dagger V = -V^\dagger \partial_\mu V = -A_\mu. \quad (4.20)$$

次に, A_μ が自己双対インスタントンのゲージ場であることを示す. ひとまず, ゼロモード V に対して以下のように置く.

$$P = VV^\dagger. \quad (4.21)$$

このとき, P は V の型より $(n+2k) \times (n+2k)$ の行列である. また, P は以下を満たす.

$$P^2 = P, \quad P^\dagger = P. \quad (4.22)$$

$$\therefore P^2 = VV^\dagger VV^\dagger = VV^\dagger = P, \quad (4.23)$$

$$P^\dagger = (VV^\dagger)^\dagger = (V^\dagger)^\dagger V^\dagger = VV^\dagger = P.$$

このような性質を持つ行列を射影演算子 (projection operator) という. これまでに出てきた量の中では, $\Delta(\Delta^\dagger \Delta)^{-1} \Delta^\dagger$ という積も射影演算子となっている.

$$\therefore \{\Delta(\Delta^\dagger \Delta)^{-1} \Delta^\dagger\} \{\Delta(\Delta^\dagger \Delta)^{-1} \Delta^\dagger\} = \Delta(\Delta^\dagger \Delta)^{-1} (\Delta^\dagger \Delta) (\Delta^\dagger \Delta)^{-1} \Delta^\dagger = \Delta(\Delta^\dagger \Delta)^{-1} \Delta^\dagger,$$

14:39, 25th Apr, 2014

$$\begin{aligned} \{\Delta(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}\Delta^\dagger\}^\dagger &= (\Delta^\dagger)^\dagger\{(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}\}^\dagger\Delta^\dagger = \Delta\{(\Delta^\dagger\Delta)^\dagger\}^{-1}\Delta^\dagger = \Delta\{\Delta^\dagger(\Delta^\dagger)^\dagger\}^{-1}\Delta^\dagger \\ &= \Delta(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}\Delta^\dagger. \end{aligned}$$

このとき, $\Delta^\dagger\Delta$ が $k \times k$ の行列であることに注意. また, $(\Delta^\dagger\Delta)^{-1}$ が存在することは $\Delta^\dagger\Delta$ が Regular であることにより保障されることに注意 ($\Delta^\dagger\Delta$ が Regular であるからといって $\Delta(x)$ も Regular とは限らないことに注意). そこで, 以下のように置く.

$$(\Delta^\dagger\Delta)^{-1} = f. \quad (4.24)$$

すると, 2つの射影演算子の関係は以下のように書ける.

$$\Delta f \Delta^\dagger + P = \mathbf{1}_{n+2k}. \quad (4.25)$$

Proof.....

まず, 以下のように置く.

$$W = \begin{pmatrix} \Delta & V \end{pmatrix}.$$

すると, Weyl 方程式に注意して, 以下となることがわかる.

$$W^\dagger W = \begin{pmatrix} \Delta^\dagger \\ V^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^\dagger\Delta & \Delta^\dagger V \\ V^\dagger\Delta & V^\dagger V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^\dagger\Delta & O \\ O & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}.$$

このとき, 明らかに

$$(W^\dagger W)^{-1} = \begin{pmatrix} f & O \\ O & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}$$

であり, これと恒等式

$$W(W^\dagger W)^{-1}W^\dagger = WW^{-1}(W^\dagger)^{-1}W^\dagger = \mathbf{1}_{n+2k}$$

を用いれば,

$$\begin{pmatrix} \Delta & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & O \\ O & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta^\dagger \\ V^\dagger \end{pmatrix} = \Delta f \Delta^\dagger + P = \mathbf{1}_{n+2k}.$$

..... *Q.E.D.*

これらの準備の下で, まず, 以下が示せる.

$$F_{\mu\nu} = V^\dagger[\partial_\mu P, \partial_\nu P]V. \quad (4.26)$$

ただし, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ である.

$$\begin{aligned} \therefore V^\dagger[\partial_\mu P, \partial_\nu P]V &= V^\dagger(\partial_\mu V V^\dagger + V \partial_\mu V^\dagger)(\partial_\nu V V^\dagger + V \partial_\nu V^\dagger)V - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= V^\dagger \partial_\mu V V^\dagger \partial_\nu V + V^\dagger \partial_\mu V \partial_\nu V^\dagger V + \partial_\mu V^\dagger \partial_\nu V + \partial_\mu V^\dagger V \partial_\nu V^\dagger V - (\mu \leftrightarrow \nu) \end{aligned}$$

14:39, 25th Apr, 2014

$$\begin{aligned}
&= \partial_\mu V^\dagger \partial_\nu V + \partial_\mu V^\dagger V \partial_\nu V^\dagger V - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (\because \partial_\nu V^\dagger V = -V^\dagger \partial_\nu V) \\
&= \partial_\mu (V^\dagger \partial_\nu V) - V^\dagger \partial_\mu \partial_\nu V + V^\dagger \partial_\mu V V^\dagger \partial_\nu V - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (\because \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu, A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V) \\
&= F_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

また, $P = \mathbf{1}_{n+2k} - \Delta f \Delta^\dagger$, $\Delta = Cx - D$, $\Delta^\dagger = x^\dagger C^\dagger - D^\dagger$ などより, 以下となることもわかる.

$$\begin{aligned}
V^\dagger \partial_\mu P &= -V^\dagger \partial_\mu (\Delta f \Delta^\dagger) = -V^\dagger \partial_\mu \Delta f \Delta^\dagger - V^\dagger \Delta \partial_\mu (f \Delta^\dagger) \\
&= -V^\dagger C \partial_\mu x f \Delta^\dagger = -v^\dagger e_\mu f \Delta^\dagger, \tag{4.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\nu P V &= -\partial_\nu (\Delta f \Delta^\dagger) V = -\partial_\nu (\Delta f) \Delta^\dagger V - \Delta f \partial_\nu \Delta^\dagger V \\
&= -\Delta f \partial_\nu x^\dagger C^\dagger V = -\Delta f e_\nu^\dagger v. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

すると,

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= V^\dagger \partial_\mu P \partial_\nu P V - (\mu \leftrightarrow \nu) = v^\dagger e_\mu f \Delta^\dagger \Delta f e_\nu^\dagger v - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= v^\dagger (e_\mu f e_\nu^\dagger - e_\nu f e_\mu^\dagger) v \quad (\because f = (\Delta^\dagger \Delta)^{-1}) \\
&= v^\dagger f (e_\mu e_\nu^\dagger - e_\nu e_\mu^\dagger) v \quad (\because f \text{ の Reality}) \\
&= 2iv^\dagger f \eta_{\mu\nu}^{(-)} v \quad (\because e_\mu e_\nu^\dagger = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(-)}) \tag{4.29}
\end{aligned}$$

となるが, $\eta_{\mu\nu}^{(-)}$ は自己双対なので, $F_{\mu\nu}$ も明らかに自己双対である.

最後に, A_μ が無限遠方でピュアゲージに近づくことを示す. まず, $u \approx O(1)$ としたとき,

$$\Delta^\dagger V = (x^\dagger C^\dagger - D^\dagger) V = x^\dagger v - (S^\dagger u + T^\dagger v) = 0 \iff v = \frac{x}{|x|^2} (S^\dagger u + T^\dagger v) \approx O(|x|^{-1})$$

なので, V の規格化条件より,

$$V^\dagger V \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = u^\dagger u = \mathbf{1}_n$$

となる. 次に, A_μ の定義より,

$$A_\mu \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu u \\ 0 \end{pmatrix} = u^\dagger \partial_\mu u$$

となる. それから,

$$\begin{aligned}
C^\dagger C &= \begin{pmatrix} O_{2k \times n} & \mathbf{1}_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{n \times 2k} \\ \mathbf{1}_{2k} \end{pmatrix} = O_{2k \times 2k} + \mathbf{1}_{2k} = \mathbf{1}_{2k}, \\
C^\dagger D &= \begin{pmatrix} O_{2k \times n} & \mathbf{1}_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} = T, \quad D^\dagger C = T^\dagger
\end{aligned}$$

より,

$$\Delta^\dagger \Delta = (x^\dagger C^\dagger - D^\dagger)(Cx - D) = x^\dagger C^\dagger Cx - x^\dagger C^\dagger D - D^\dagger Cx + D^2$$

14:39, 25th Apr, 2014

$$\begin{aligned}
&= x^2 - x^\dagger T - T^\dagger x + D^2 \iff f = (\Delta^\dagger \Delta)^{-1} \approx \frac{1}{|x|^2} \\
\Delta f \Delta^\dagger &\approx \frac{1}{|x|^2} (Cx - D)(x^\dagger C^\dagger - D^\dagger) = \frac{1}{|x|^2} (Cx^2 C^\dagger - Cx D^\dagger - Dx^\dagger C^\dagger - D^2) \\
&\approx CC^\dagger
\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}
VV^\dagger &= 1 - \Delta f \Delta^\dagger \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 1 - CC^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uu^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff uu^\dagger = \mathbf{1}_2
\end{aligned}$$

となり, $u \in U(n)$ と A_μ がピュアゲージ $u^\dagger \partial_\mu u$ に近づくことが示せた (ADHM データとして正方向行列をとると始めからピュアゲージとなってしまうことに注意).

4.2.3 ADHM 構成法の諸性質

ADHM 構成法の性質について見ておく. まず, 0 次元ディラック作用素 Δ とそのゼロモード V に $h \in U(n+2k)$ を左から掛け, 以下のように変換してみる.

$$\Delta \mapsto h\Delta, \quad V \mapsto hV. \quad (4.30)$$

すると,

$$\begin{aligned}
\Delta^\dagger V &\mapsto (h\Delta)^\dagger hV = \Delta^\dagger h^\dagger hV = \Delta^\dagger V = 0, \\
\Delta^\dagger \Delta &\mapsto (h\Delta)^\dagger h\Delta = \Delta^\dagger h^\dagger h\Delta = \Delta^\dagger \Delta
\end{aligned}$$

となるので, この変換は ADHM 構成法によって構成されるゲージ場に影響を及ぼさない. また, $\Delta(x)$ に $\ell \in GL(2k)$ を右から掛けて,

$$\Delta \mapsto \Delta \ell \quad (4.31)$$

と変換してみても, $(\Delta^\dagger \Delta)^{-1}$ が正則ならば,

$$(\Delta^\dagger \Delta)^{-1} \mapsto \{(\Delta \ell)^\dagger \Delta \ell\}^{-1} = (\ell^\dagger \Delta^\dagger \Delta \ell)^{-1} = \ell^{-1} (\Delta^\dagger \Delta)^{-1} (\ell^\dagger)^{-1}$$

も正則となるので, この変換も ADHM 構成法に影響を及ぼさない. これらは, ADHM 構成法の持つグローバルな対称性である. さらに, V に $g \in U(n)$ を右から掛けて,

$$V \mapsto Vg \quad (4.32)$$

と変換してみる. すると,

$$\Delta^\dagger V \mapsto \Delta^\dagger (Vg) = (\Delta^\dagger V)g = 0$$

であり, また, 以下よりこれは A_μ のゲージ変換に対応することがわかる.

$$A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V \mapsto (Vg)^\dagger \partial_\mu (Vg) = g^\dagger V^\dagger \partial_\mu Vg + g^\dagger V^\dagger V \partial_\mu g = g^\dagger A_\mu g + g^\dagger \partial_\mu g.$$

14:39, 25th Apr, 2014

4.2.4 ADHM 構成法の例

ADHM 構成法の例について見てみる．まず， $n = 2, k = 1$ とし，以下の形の 0 次元ディラック作用素を考える．

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ x_1 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

ただし， λ_1 は任意の実四元数， α_1 は任意の四元数， $x_1 = x + \alpha_1$ であり，すべて 2 次複素行列表現であるとする．このとき，

$$\Delta^\dagger \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x_1^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = (\lambda_1^2 + |x_1|^2) \mathbf{1}_2$$

は明らかに Real かつ Regular なので， $\Delta(x)$ は自己双対である．次に， $\Delta(x)$ のゼロモードを

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \phi^{-1/2} \quad (4.34)$$

と置く．ただし， v_1 は四元数， $\phi(x)$ は実関数の規格化因子であり，規格化条件より，

$$\begin{aligned} V^\dagger V &= \phi^{-1/2} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & v_1^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \phi^{-1/2} = \phi^{-1} (1 + |v_1|^2) \mathbf{1}_2 = \mathbf{1}_2 \\ &\iff \phi(x) = 1 + |v_1|^2. \end{aligned}$$

すると， V は，

$$\Delta^\dagger V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x_1^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \phi^{-1/2} = (\lambda_1 + x_1^\dagger v_1) \phi^{-1/2} = 0 \iff v_1 = -\frac{x_1}{|x_1|^2} \lambda_1 \quad (4.35)$$

のように求まり， $\phi(x)$ は以下のように't Hooft アンザッツの未知関数に対応することがわかる．

$$\phi(x) = 1 + \frac{\lambda_1^2}{|x_{1\mu}|^2} = 1 + \frac{\lambda_1^2}{|x_\mu + \alpha_{1\mu}|^2}. \quad (4.36)$$

そして， V よりゲージ場 $A_\mu(x)$ を計算すると，ひとまず

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= V^\dagger \partial_\mu V = \phi^{-1/2} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & v_1^\dagger \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} O_2 \\ \partial_\mu v_1 \end{pmatrix} \phi^{-1/2} - \frac{1}{2} \phi^{-1} V \partial_\mu \phi \right\} \\ &= \left(v_1^\dagger \partial_\mu v_1 - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \right) \phi^{-1} = \frac{1}{2} (v_1^\dagger \partial_\mu v_1 - \partial_\mu v_1^\dagger v_1) \phi^{-1} \end{aligned}$$

となるが，

$$\begin{aligned} \partial_\mu v_1 &= -\lambda_1 \partial_\mu \left(\frac{x_{1\nu}}{|x_1|^2} e_\nu \right) = -\lambda_1 \left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{|x_1|^2} e_\nu - 2 \frac{x_{1\nu}}{|x_1|^3} \frac{x_{1\mu}}{|x_1|} e_\nu \right) = -\frac{\lambda_1}{|x_1|^2} e_\mu - 2 \frac{x_\mu}{|x_1|^2} v_1, \\ v_1^\dagger \partial_\mu v_1 &= \lambda_1^2 \frac{x_{1\nu}}{|x_1|^4} e_\nu^\dagger e_\mu - 2 \frac{x_\mu}{|x_1|^2} |v_1|^2, \end{aligned}$$

$$\partial_\mu v_1^\dagger = -\frac{\lambda_1}{|x_1|^2} e_\mu^\dagger - 2\frac{x_\mu}{|x_1|^2} v_1^\dagger, \quad \partial_\mu v_1^\dagger v_1 = \lambda_1^2 \frac{x_{1\nu}}{|x_1|^4} e_\mu^\dagger e_\nu - 2\frac{x_\mu}{|x_1|^2} |v_1|^2$$

なので,

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \frac{1}{2} \lambda_1^2 \frac{x_{1\nu}}{|x_1|^4} (e_\nu^\dagger e_\mu - e_\mu^\dagger e_\nu) \phi^{-1} = -i \eta_{\mu\nu}^{(+)} \lambda_1^2 \frac{x_{1\nu}}{|x_1|^4} / \left(1 + \frac{\lambda_1^2}{|x_1|^2} \right) \\ &= \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(+)} \partial_\nu \ln \left(1 + \frac{\lambda_1^2}{|x_1|^2} \right) = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(+)} \partial_\nu \ln \left(1 + \frac{\lambda_1^2}{|x_\mu + \alpha_{1\mu}|^2} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

となり, 't Hooft 1-インスタントンが得られた. このとき, $\lambda_1, \alpha_{1\mu}$ はそれぞれ 1-インスタントンの大きさと位置のパラメーターであり, 実際に ADHM データがインスタントンのモジュライを用いて表されることがわかる. また, $k=1$ はインスタントン数に対応することもわかる.

't Hooft k -インスタントンの 0 次元ディラック作用素は以下となることが知られている.

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ x & & & & \\ & x & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & x & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_k \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

ただし, λ_i は実四元数, α_i は任意の四元数であり, これらはそれぞれ 't Hooft k -インスタントンの i 番目の極に対するスケールと位置のパラメーターである.

4.3 Nahm 構成法

ADHM 構成法をモノポールに応用したものは Nahm 構成法と呼ばれる. ADHM 構成法と同様に 1 次元におけるディラック作用素を考えれば, Bogomolny 方程式に対応する Nahm 方程式が得られる. ADHM 構成法の場合と異なり, Nahm 方程式の解はさらにいくつかの境界条件を満たさなければならない. そのような解を用いれば, BPS モノポールを構成することができる.

4.3.1 Nahm 方程式

4.1 節で述べたように, Bogomolny 方程式に対応する方程式は 1 次元のものであり, それに対応する 1 次元ディラック作用素 $\Delta(x)$ は以下のように置ける.

$$\Delta(x) = \mathbf{1}_{2k} i \frac{d}{ds} + T^\dagger(s) + x^\dagger = \mathbf{1}_{2k} i \frac{d}{ds} + e_\mu^\dagger \otimes \{T_\mu(s) + x_\mu \mathbf{1}_k\}. \quad (4.39)$$

ただし, $\mathbf{1}_{2k}$ などは単位行列, s は 1 次元の空間における変数, e_μ は四元数の 2 次複素行列表現における基底行列, $T_\mu(s)$ は k 次のエルミート行列, x_μ は 4 次元ミンコフスキー空間における座標である (エルミート共役をとるのは習慣である). また, $T_\mu(s)$ を Nahm データという. ここで, $\Delta^\dagger \Delta$ を計算してみると, $(d/ds)^\dagger = -d/ds$ に注意して,

$$\Delta^\dagger \Delta = \left\{ \mathbf{1}_{2k} i \frac{d}{ds} + e_\mu \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k) \right\} \left\{ \mathbf{1}_{2k} i \frac{d}{ds} + e_\nu^\dagger \otimes (T_\nu + x_\nu \mathbf{1}_k) \right\}$$

14:39, 25th Apr, 2014

$$\begin{aligned}
&= -\mathbf{1}_{2k} \frac{d^2}{ds^2} + e_\nu^\dagger \otimes i \frac{dT_\nu}{ds} + (e_\mu^\dagger + e_\mu) \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k) i \frac{d}{ds} \\
&\quad + e_\mu e_\nu^\dagger \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k)(T_\nu + x_\nu \mathbf{1}_k)
\end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned}
\text{第 2 項} &= (\delta_{4\nu} \mathbf{1}_2 + i\delta_{\nu a} \sigma_a) \otimes i \frac{dT_\nu}{ds} = \mathbf{1}_2 \otimes i \frac{dT_4}{ds} - \sigma_a \otimes \frac{dT_a}{ds}, \\
\text{第 3 項} &= 2\delta_{4\mu} \mathbf{1}_2 \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k) i \frac{d}{ds} = \mathbf{1}_2 \otimes 2(T_4 + x_4 \mathbf{1}_k) i \frac{d}{ds}, \\
\text{第 4 項} &= (\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(-)}) \otimes (T_\mu T_\nu + x_\nu T_\mu + x_\mu T_\nu + x_\mu x_\nu \mathbf{1}_k) \\
&= \mathbf{1}_2 \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k)^2 + i(\varepsilon_{a\mu\nu 4} - \delta_{a\mu} \delta_{\nu 4} + \delta_{a\nu} \delta_{\mu 4}) \sigma_a \otimes T_\mu T_\nu \\
&= \mathbf{1}_2 \otimes (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k)^2 + \sigma_a \otimes \left(\frac{i}{2} \varepsilon_{abc} [T_b, T_c] - i[T_a, T_4] \right)
\end{aligned}$$

なので, 結局,

$$\begin{aligned}
\Delta^\dagger \Delta &= \mathbf{1}_2 \otimes \left\{ -\mathbf{1}_k \frac{d^2}{ds^2} + i \frac{dT_4}{ds} + 2(T_4 + x_4 \mathbf{1}_k) i \frac{d}{ds} + (T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k)^2 \right\} \\
&\quad + \sigma_a \otimes \left(-\frac{dT_a}{ds} + \frac{i}{2} \varepsilon_{abc} [T_b, T_c] - i[T_a, T_4] \right)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

となり, これがパウリ行列と可換になるための条件は以下であることがわかる.

$$\frac{d}{ds} T_a - \frac{i}{2} \varepsilon_{abc} [T_b, T_c] + i[T_a, T_4] = 0. \quad (\text{for all } a = 1, 2, 3) \tag{4.41}$$

ところが, T_4 は適当なゲージ変換によって 0 にできるので, 以下であれば十分である.

$$\frac{d}{ds} T_a = \frac{i}{2} \varepsilon_{abc} [T_b, T_c]. \quad (\text{for all } a = 1, 2, 3) \tag{4.42}$$

これを Nahm 方程式という. ADHM 構成法の場合, 自己双対な 0 次元ディラック作用素を用いれば直ちにインスタントンを構成できた. ところが, モノポールの場合, Nahm 方程式の解 $T_a(s)$ が必ずしもモノポールに対応するとは限らず, さらに以下の付加的な境界条件が課される [26].

- $T_a(s)$ は区間 $[-1, 1]$ で定義され*, 区間内の至る所で滑らか.
- $T_a(-s) = {}^t T_a(s)$ を満たす (Reality の条件).
- $s = \pm 1$ で単純極を持ち, それぞれの留数は $\text{su}(2)$ の既約表現 (irreducible representation) で表される, すなわち, $s = 1$ 付近での $T_a(s)$ の展開が以下ようになる.

$$T_a(s) \sim \frac{R_a}{s-1} + O(1). \tag{4.43}$$

ただし, R_a は $\text{su}(2)$ の既約表現であり, $[R_1, R_2] = -R_3$ などの交換関係を満たす.

*) $[0, 2]$ とする場合もある.

14:39, 25th Apr, 2014

以上の条件を満たす Nahm データ $T_a(s)$ が与えられれば, それをポテンシャルとして持つ以下の Weyl 方程式が考えられる .

$$\left(\mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - T_a \otimes \sigma_a - ix_\mu \mathbf{1}_k \otimes e_\mu \right) U(s, x^\alpha) = 0. \quad (4.44)$$

ここで, $U(s, x^\alpha)$ は Weyl 方程式のゼロモードであり, 以下の規格化条件が課される .

$$\int_{-1}^1 U(s, x^\alpha)^\dagger U(s, x^\alpha) ds = \mathbf{1}_2. \quad (4.45)$$

このように規格化されたゼロモード $U(s, x^\alpha)$ に対して

$$A_\mu(x) = \int_{-1}^1 U(s, x^\alpha)^\dagger \partial_\mu U(s, x^\alpha) ds, \quad \Phi(x) = A_4(x) \quad (4.46)$$

とすると, $\Phi(x)$ が以下のようにして BPS モノポールの境界条件を満たし, $\Phi(x)$, $A_j(x)$ がそれぞれ BPS モノポールのヒッグス場とゲージ場に対応することが示されている .

$$\Phi(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} i \operatorname{diag}(1, -1) - \frac{i}{2r} \operatorname{diag}(k, -k) + O(r^{-2}), \quad \frac{\partial}{\partial \Omega} \|\Phi(x)\| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} O(r^{-2})$$

このようにしてモノポールを構成する方法を Nahm 構成法 (Nahm construction) という . また, Nahm データから BPS モノポールのヒッグス場とゲージ場を得る手順を特に Nahm 変換 (Nahm transform) という . 後に見るように, Nahm 方程式の解はいくつかの場合に対して解析的に求められている . しかし, それらの解をポテンシャルとして持つ Weyl 方程式を解析的に解くことは困難であり, しばしば Nahm 変換は数値計算を用いて行われる .

最後に, Weyl 方程式を少しだけ書き直しておく . まず, 両辺に $e^{-ix_4 s}$ を掛けると,

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - T_a \otimes \sigma_a - ix_\mu \mathbf{1}_k \otimes e_\mu \right) U(s, x^\alpha) \right\} e^{-ix_4 s} \\ &= \left\{ \mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - (T_j + x_j \mathbf{1}_k) \otimes \sigma_j \right\} \{ U(s, x^\alpha) e^{-ix_4 s} \} = 0 \end{aligned}$$

のように座標 x_4 を括り出せるので, 結局, 解くべき Weyl 方程式は時間に依存しないゼロモード $\tilde{U}(s, x) = U(s, x^\alpha) e^{-ix_4 s}$ に対する以下のようなものとなる .

$$\left\{ \mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - (T_j + x_j \mathbf{1}_k) \otimes \sigma_j \right\} \tilde{U}(s, x) = 0. \quad (4.47)$$

また, $U(s, x)$ の規格化条件も, 因子 $e^{-ix_4 s}$ が打ち消すので以下であれば十分である .

$$\int_{-1}^1 \tilde{U}(s, x)^\dagger \tilde{U}(s, x) ds = \mathbf{1}_2. \quad (4.48)$$

さらに, ヒッグス場とゲージ場の表式も, $U(s, x^\alpha) = \tilde{U}(s, x) e^{ix_4 s}$ が x_4 と残りの変数が分離された形となっているため, 微分は片方ずつの因子に掛かり, それぞれ以下のように書き直せる .

$$\Phi(x) = i \int_{-1}^1 s \tilde{U}(s, x)^\dagger \tilde{U}(s, x) ds, \quad A_j(x) = \int_{-1}^1 \tilde{U}(s, x)^\dagger \partial_j \tilde{U}(s, x) ds. \quad (4.49)$$

4.3.2 Bogomolny \rightarrow Nahm

Nahm 方程式といくつかの境界条件を満たす Nahm データからモノポールが構成されることを説明したので、今度は逆に Bogomolny 方程式を満たすゲージ場から Nahm 方程式を満たす Nahm データが構成されることを見てみる。モノポールのディラック場^t $(\psi^-(x), \psi^+(x))$ に対する以下の零質量ディラック方程式を考える。

$$D\psi^-(x) = 0, \quad D^\dagger\psi^+(x) = 0. \quad (4.50)$$

ただし、 $\psi^-(x), \psi^+(x)$ はスピノル成分であり、それぞれの空間を S^-, S^+ とする。また、

$$D = -e_i \otimes D_i - \Phi + is, \quad D^\dagger = -e_i \otimes D_i + \Phi - is \quad (4.51)$$

であり、 e_i は四元数の 2 次複素行列表現における基底行列の虚数成分、 $D_i = \partial_i + A_i$ は共変微分、 A_i はゲージ場、 Φ はヒッグス場、 s は任意の実数であり、 $e_i^\dagger = -e_i, \partial_i^\dagger = -\partial_i, A_i^\dagger = -A_i$ などに注意。ここで、 DD^\dagger を計算してみると、 $e_i e_j = -\delta_{ij} \mathbf{1}_2 + \varepsilon_{ijk} e_k$ に注意して、

$$DD^\dagger = (-\delta_{ij} \mathbf{1}_2 + \varepsilon_{ijk} e_k) \otimes D_i D_j - e_i \otimes D_i \Phi - (\Phi - is)^2$$

となるが、 $[D_i, D_j] = F_{ij}, B_i = -(1/2)\varepsilon_{ijk} F_{jk}$ より、

$$\varepsilon_{ijk} e_k \otimes D_i D_j = e_k \otimes \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} [D_i, D_j] = e_k \otimes \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{ij} = -e_k \otimes B_k$$

なので、結局、以下のようになる。

$$DD^\dagger = -\mathbf{1}_2 \otimes \{D_i^2 + (\Phi - is)^2\} - e_i \otimes (B_i + D_i \Phi). \quad (4.52)$$

これより、BPS 条件 $D_i \Phi = -B_i$ は DD^\dagger がパウリ行列と可換 (DD^\dagger が可逆かつ四元数の実成分) であることと等価であることがわかる。

BPS 条件を満たすモノポールのディラック作用素 D について考える。すると、式 (4.52) より DD^\dagger は正の演算子なので、 $DD^\dagger\psi^+(x) = 0$ は解を持たず、従って $D^\dagger\psi^+(x) = 0$ も解を持たず、 $D\psi^-(x) = 0$ のみが解を持つことがわかる。その解空間を S_0^- とすると、 S^- は S_0^- とそれに直交する空間 S_\perp^- によって $S^- = S_0^- \oplus S_\perp^-$ のように直交分解される。このとき、 DD^\dagger は正則なので、そのグリーン関数 $G(x, y)$ が考えられる。すると、

$$DD^\dagger G = D(D^\dagger G) = \delta(x - y)$$

より、 $D^\dagger G(x, y)$ が D のグリーン関数であることがわかる。また、 $D\psi^-(x) = 0$ の解はすべて S_0^- に含まれ、 S_\perp^- には含まれないので、作用する空間を S_\perp^- に制限した D のグリーン関数が考えられるが、そのようなグリーン関数は

$$GDD^\dagger G = GG^{-1}G = G$$

より $G(x, y)D$ であることがわかる。スピノル成分の空間、それらの間での D, D^\dagger, DD^\dagger 、及び各グリーン関数の作用について図 4.1 にまとめておく。ただし、 $\text{Ker } D$ は D によって 0 に移されるものの集合、すなわち、 $D\psi^+(x) = 0$ の解空間を表わす。

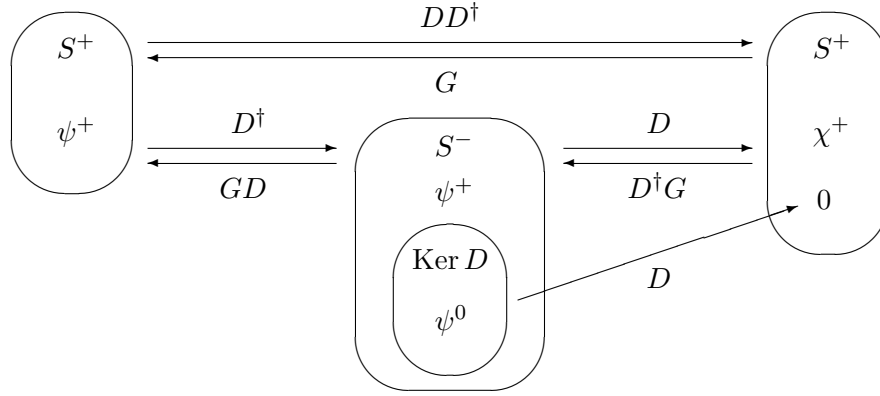


図 4.1: スピノル成分の空間とそれらの間での各ディラック作用素, グリーン関数の作用の仕方.

D^\dagger のグリーン関数はこのようにして求まるが, S_\perp^- における恒等演算子はまだ定まっていない. それを求めるには, $D\psi^-(x) = 0$ の k 個の独立な解 $\psi_1^0(x), \psi_2^0(x), \dots, \psi_k^0(x)$ に対して, それらを各列に持つベクトル

$$\psi_x := (\psi_1^0(x), \psi_2^0(x), \dots, \psi_k^0(x)) \quad (4.53)$$

を考える. ただし, ψ_x は以下のように規格化されているとする.

$$\int \psi_x^\dagger \psi_x d^3x = \mathbf{1}_k \iff \int \psi_a^{0\dagger}(x) \psi_b^0(x) d^3x = \delta_{ab}. \quad (4.54)$$

すると,

$$\delta(x-y) - \psi_x \psi_y^\dagger = \delta(x-y) - \sum_a \psi_a^0(x) \psi_a^{0\dagger}(y) \quad (4.55)$$

という演算子は, S^- の任意の元 $\psi^-(x)$ に対して

$$\int \{\delta(x-y) - \psi_x \psi_y^\dagger\} \psi^-(y) d^3y = \psi^-(x) - \sum_a \psi_a^0(x) \int \psi_a^{0\dagger}(y) \psi^-(y) d^3y \quad (4.56)$$

のように作用して $\psi^-(x)$ から $D\psi^-(x) = 0$ の解をすべて取り除くので, S^- から S_\perp^- への射影演算子, すなわち, S_\perp^- 上での恒等演算子になっていることがわかる. これと, D^\dagger のグリーン関数が $G(x,y)D$ であったことを合わせれば, 以下が成り立つことがわかる*).

$$D_x^\dagger G(x,y) D_y = \delta(x-y) - \psi_x \psi_y^\dagger \quad (4.57)$$

(D の中の変数が指定されていることに注意).

さて, このようなベクトル ψ_x を用いて以下のような行列を作ってみる.

$$T_i(s) := - \int \psi_x^\dagger x_i \psi_x d^3x. \quad (4.58)$$

*) 逆に, $\psi_x \psi_y^\dagger = \delta(x-y) - D_x^\dagger G(x,y) D_y$ は S^- から S_0^- への射影演算子である.

14:39, 25th Apr, 2014

ただし, x_i は単なるスカラーであり, 順序を入れ替えてもよいが, 演算子の作用がわかりづらくなるのでこの順序を保つことにする. また, $T_i(s)$ がエルミートであることに注意. このとき, 部分積分と $D\psi_x = 0$, $\psi_x^\dagger D^\dagger = (D\psi_x)^\dagger = 0$,

$$Dx_i = -e_j \otimes \partial_j x_i + x_i D = -e_i + x_i D \iff [D, x_i] = -e_i$$

$e_i^\dagger e_j - e_j^\dagger e_i = -2\varepsilon_{ijk} e_k$ に注意して $[T_i, T_j]$ を計算すると,

$$\begin{aligned} [T_i, T_j] &= \int [\psi_x^\dagger x_j \psi_x, \psi_y^\dagger y_k \psi_y] d^3 x d^3 y \\ &= \int \psi_x^\dagger x_j \psi_x \psi_y^\dagger y_k \psi_y d^3 x d^3 y - (x \leftrightarrow y) \\ &= \int \psi_x^\dagger x_j \{ \delta(x-y) - D_x^\dagger G(x, y) D_y \} y_k \psi_y d^3 x d^3 y - (x \leftrightarrow y) \\ &= \int \psi_x^\dagger e_j^\dagger G(x, y) e_k \psi_y d^3 x d^3 y - (x \leftrightarrow y) \\ &= \int \psi_x^\dagger (e_j^\dagger e_k - e_k^\dagger e_j) G(x, y) \psi_y d^3 x d^3 y \quad (\because \text{第2項で } x \leftrightarrow y) \\ &= -2\varepsilon_{ijk} \int \psi_x^\dagger e_i G(x, y) \psi_y d^3 x d^3 y. \end{aligned}$$

また, $D^\dagger G(x, y)$ が D のグリーン関数であることにより,

$$\begin{aligned} D\psi_x = 0 &\iff \frac{d}{ds}(D\psi_x) = \frac{dD}{ds}\psi_x + D\frac{d\psi_x}{ds} = i\psi_x + D\frac{d\psi_x}{ds} = 0 \\ &\iff \frac{d\psi_x}{ds} = -i \int D^\dagger G(x, y) \psi_y d^3 y \end{aligned}$$

となることを用いて dT_k/ds を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{dT_k}{ds} &= - \int \frac{d\psi_x^\dagger}{ds} x_k \psi_x d^3 x - \int \psi_x^\dagger x_k \frac{d\psi_x}{ds} d^3 x \\ &= -i \int \psi_y^\dagger D G(x, y) x_k \psi_x d^3 x d^3 y + i \int \psi_x^\dagger x_k D^\dagger G(x, y) \psi_y d^3 x d^3 y \\ &= -i \int \psi_y^\dagger G(x, y) e_k \psi_x d^3 x d^3 y + i \int \psi_x e_k^\dagger G(x, y) \psi_y d^3 x d^3 y \\ &= -2i \int \psi_x^\dagger G(x, y) e_k \psi_y d^3 x d^3 y. \quad (\because e_k^\dagger = -e_k, \text{第1項で } x \leftrightarrow y) \end{aligned}$$

すると, 結局,

$$\begin{aligned} [T_i, T_j] = -i\varepsilon_{ijk} \frac{dT_k}{ds} &\iff \varepsilon_{ijk} [T_i, T_j] = -i\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ij\ell} \frac{dT_\ell}{ds} = -2i\delta_{k\ell} \frac{dT_\ell}{ds} = -2i \frac{dT_k}{ds} \\ &\iff \frac{dT_k}{ds} = \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} [T_i, T_j], \end{aligned}$$

すなわち, $T_i(s)$ は Nahm 方程式を満たすことがわかる.

4.3.3 Prasad-Sommerfield 解の Nahm 構成

Nahm 構成法の例について見てみる． $k = 1$ とすると，Nahm データは単にスカラーであるが，エルミート性の条件を踏まえると $T_i = c_i$ という形が考えられる ($k = 1$ の場合，いくつかの境界条件は考えなくてもよい)．ただし， c_1, c_2, c_3 は任意の実定数である．ところが，これらの定数は Weyl 方程式に代入した際に空間座標に吸収されるので， c_i は単なる平行移動のパラメーターであり， $T_i = 0$ として計算すれば十分である．この解は自明なように思われるが，Weyl 方程式はそれほど自明ではなく，以下ようになる．

$$\left(\frac{d}{ds} - x_i \sigma_i \right) U(s, x) = 0. \quad (4.59)$$

このゼロモードは明らかに以下ようになる．

$$U(s, x) = e^{x_i \sigma_i s} \phi(r) = \left(\mathbf{1}_2 \cosh rs + \frac{x_i \sigma_i}{r} \sinh rs \right) \phi(r). \quad (4.60)$$

ただし， $r^2 = x_i x_i$ であり， $\phi(r)$ は規格化因子である．ここで，後の計算のために，

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sinh \alpha x \, dx &= 0, & \int_{-1}^1 x \sinh \alpha x \, dx &= \frac{2}{\alpha^2} (\alpha \cosh \alpha - \sinh \alpha), \\ \int_{-1}^1 \cosh \alpha x \, dx &= \frac{2}{\alpha}, & \int_{-1}^1 x \cosh \alpha x \, dx &= 0, & \partial_i &= \frac{\partial r}{\partial x_i} \partial_r = \frac{x_i}{r} \partial_r \end{aligned}$$

などに注意しておく．すると，規格化条件より $\phi(r)$ は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 U(s, x)^\dagger U(s, x) \, ds &= \phi^2 \int_{-1}^1 e^{2x_i \sigma_i s} \, ds = \phi^2 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{1}_2 \cosh 2rs + \frac{x_i \sigma_i}{r} \sinh 2rs \right) \, ds \\ &= \frac{\phi^2}{r} \mathbf{1}_2 \sinh 2r = \mathbf{1}_2 \iff \phi(r) = \sqrt{\frac{r}{\sinh 2r}}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

また，ヒッグス場 $\Phi(x)$ は以下ようになる．

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= i\phi^2 \int_{-1}^1 s e^{2x_i \sigma_i s} \, ds = i\phi^2 \int_{-1}^1 s \left(\mathbf{1}_2 \cosh 2rs + \frac{x_i \sigma_i}{r} \sinh 2rs \right) \, ds \\ &= i\phi^2 \frac{x_i \sigma_i}{r} \frac{1}{2r^2} (2r \cosh 2r - \sinh 2r) = i \frac{x_i \sigma_i}{2r^2} \left(\frac{2r}{\tanh 2r} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

さらに，ゲージ場 $A_i(x)$ は以下ようになる．

$$\begin{aligned} A_i(x) &= \phi^2 \int_{-1}^1 e^{x_i \sigma_i s} \partial_i e^{x_i \sigma_i s} \, ds + \phi \partial_i \phi \int_{-1}^1 e^{2x_i \sigma_i s} \, ds \\ &= \phi^2 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{1}_2 \cosh rs + \frac{x_j \sigma_j}{r} \sinh rs \right) \frac{x_i}{r} s \left(\mathbf{1}_2 \sinh rs + \frac{x_k \sigma_k}{r} \cosh rs \right) \, ds \\ &\quad + \phi^2 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{1}_2 \cosh rs + \frac{x_j \sigma_j}{r} \sinh rs \right) \left(\frac{\sigma_i}{r} - \frac{x_i x_k \sigma_k}{r^3} \right) \sinh rs \, ds \\ &\quad + \phi \frac{x_i}{r} \partial_r (r^{1/2} \sinh^{-1/2} 2r) \int_{-1}^1 e^{2x_i \sigma_i s} \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi^2 \int_{-1}^1 s \left(\mathbf{1}_2 \sinh 2rs + \frac{x_j \sigma_j}{r} \cosh 2rs \right) ds \frac{x_i}{r} \\
&\quad + \phi^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{1}_2 \sinh 2rs + \frac{x_j \sigma_j}{r} (\cosh 2rs - 1) \right\} ds \left(\frac{\sigma_i}{r} - \frac{x_i x_k \sigma_k}{r^3} \right) \\
&\quad + \frac{x_i}{2r^2} \left(1 - \frac{2r}{\tanh 2r} \right) \phi^2 \int_{-1}^1 e^{2x_i \sigma_i s} ds \quad (\because (x^n)' = \frac{n}{x} x^n) \\
&= \phi^2 \frac{x_i \mathbf{1}_2}{2r^3} (2r \cosh 2r - \sinh 2r) \\
&\quad + \phi^2 \frac{x_j \sigma_j}{r} \left(\frac{1}{2r} \sinh 2r - 1 \right) \left(\frac{\sigma_i}{r} - \frac{x_i x_k \sigma_k}{r^3} \right) + \frac{x_i \mathbf{1}_2}{2r^2} \left(1 - \frac{2r}{\tanh 2r} \right) \\
&= \frac{x_i \mathbf{1}_2}{2r^2} \left(\frac{2r}{\tanh 2r} - 1 \right) + i \frac{\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_k}{2r^2} \left(\frac{2r}{\sinh 2r} - 1 \right) + \frac{x_i \mathbf{1}_2}{2r^2} \left(1 - \frac{2r}{\tanh 2r} \right) \\
&= i \frac{\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_k}{2r^2} \left(\frac{2r}{\sinh 2r} - 1 \right). \quad (\because \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1}_2 + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \tag{4.63}
\end{aligned}$$

まとめると,

$$\Phi = i \frac{x_i \sigma_i}{2r^2} \left(\frac{2r}{\tanh 2r} - 1 \right), \quad A_i = i \frac{\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_k}{2r^2} \left(\frac{2r}{\sinh 2r} - 1 \right) \tag{4.64}$$

であり, これは 3.4 節で見た Prasad-Sommerfield 解と一致する.

4.3.4 2-モノポールの Nahm 構成

$k = 2$ の場合の Nahm データは 2 次のエルミート行列であり, 以下のように置ける.

$$T_i(s) = f_i(s) \sigma_i. \quad (\text{not summed over } i) \tag{4.65}$$

ただし, σ_i はパウリ行列である. これらを Nahm 方程式に代入すれば,

$$\begin{aligned}
T_1' &= f_1' \sigma_1 = i[T_2, T_3] = i f_2 f_3 [\sigma_2, \sigma_3] = -2 f_2 f_3 \sigma_1, \\
T_2' &= f_2' \sigma_2 = i[T_3, T_1] = i f_3 f_1 [\sigma_3, \sigma_1] = -2 f_3 f_1 \sigma_2, \\
T_3' &= f_3' \sigma_3 = i[T_1, T_2] = i f_1 f_2 [\sigma_1, \sigma_2] = -2 f_1 f_2 \sigma_3,
\end{aligned}$$

すなわち, 以下が未知関数に対する方程式であることがわかる.

$$f_1' = -2 f_2 f_3, \quad f_2' = -2 f_3 f_1, \quad f_3' = -2 f_1 f_2. \tag{4.66}$$

ここで, 後のために, 未知関数と変数をそれぞれ以下のように置き直しておく.

$$f_i(s) = D F_i(u), \quad u = 2D(s + s_0). \tag{4.67}$$

ただし, D, s_0 は任意の実数であり,

$$f_1' = D \frac{dF_1}{du} \frac{du}{ds} = 2D^2 \frac{dF_1}{du} = -2 f_2 f_3 = -2D^2 F_2 F_3 \iff \frac{dF_1}{du} = -F_2 F_3, \quad \text{etc.}$$

14:39, 25th Apr, 2014

すなわち, D は未知関数のスケールの自由度を表わすパラメーターである. すると, まず,

$$\begin{aligned} f_1'/f_2' = f_2/f_1 &\iff f_1 f_1' - f_2 f_2' = (f_1^2 - f_2^2)'/2 = 0, \quad \text{etc.} \\ \therefore f_1^2 - f_2^2 = c_{12}^2, \quad f_2^2 - f_3^2 = c_{23}^2, \quad f_1^2 - f_3^2 = c_{13}^2 \end{aligned}$$

となることがわかる. ただし, $f_1^2 \geq f_2^2 \geq f_3^2$ と仮定した. また, c_{12}, c_{23}, c_{13} は $c_{12}^2 + c_{23}^2 = c_{13}^2$ を満たす任意の定数であり, 先のスケールの自由度を持つことに注意. このとき, c_{12}, c_{23}, c_{13} の残りの1つの自由度を用いて, 以下のように置いてみる.

$$c_{12}^2 = D^2 k^2, \quad c_{23}^2 = D^2(1 - k^2), \quad c_{13}^2 = D^2.$$

ただし, k は定数であり, $f_1^2 \geq f_2^2 \geq f_3^2$ となるためには $0 \leq k \leq 1$ でなければならない. すると, F_2, F_3 はそれぞれ以下のように表せる.

$$\begin{aligned} f_2^2 = D^2 F_2^2 = f_1^2 - c_{12}^2 = D^2(F_1^2 - k^2) &\iff F_2^2 = F_1^2 - k^2, \\ f_3^2 = D^2 F_3^2 = f_1^2 - c_{13}^2 = D^2(F_1^2 - 1) &\iff F_3^2 = F_1^2 - 1. \end{aligned}$$

また, F_1 が満たすべき方程式は, $F_1' = -F_2 F_3$ の両辺を2乗して

$$\left(\frac{dF_1}{du}\right)^2 = (F_1^2 - k^2)(F_1^2 - 1)$$

となるが, さらに $F_1 = -1/y$ と置けば以下のようになることがわかる.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - k^2 y^2)(1 - y^2) &\iff \frac{du}{dy} = \frac{1}{\sqrt{(1 - k^2 y^2)(1 - y^2)}} \\ \iff u = \int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{(1 - k^2 y'^2)(1 - y'^2)}} = \text{sn}^{-1} y &\iff y = \text{sn} u. \end{aligned} \quad (4.68)$$

ただし, sn はヤコビの楕円関数である. すると, ヤコビの楕円関数の性質

$$\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1, \quad k^2 \text{sn}^2 u + \text{dn}^2 u = 1$$

より, 以下となることがわかる.

$$\begin{aligned} F_1 = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\text{sn} u}, \quad F_2^2 = F_1^2 - k^2 = \frac{1 - k^2 \text{sn}^2 u}{\text{sn}^2 u} = \frac{\text{dn}^2 u}{\text{sn}^2 u}, \\ F_3^2 = F_1^2 - 1 = \frac{1 - \text{sn}^2 u}{\text{sn}^2 u} = \frac{\text{cn}^2 u}{\text{sn}^2 u}. \end{aligned}$$

ただし, F_2, F_3 の複合の取り方は, $(\text{sn} u)' = \text{cn} u \text{dn} u$ に注意して $F_1' = F_2 F_3$ を計算すれば,

$$F_1' = -\left(-\frac{1}{\text{sn}^2 u}\right) \text{cn} u \text{dn} u = -F_2 F_3 \quad \therefore F_2 F_3 \leq 0,$$

すなわち, 互いに異なる符号を取るようになればよい. 故に, もとの係数は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} f_1(s) = -D \frac{1}{\text{sn} 2D(s - s_0)}, \quad f_2(s) = \pm D \frac{\text{dn} 2D(s - s_0)}{\text{sn} 2D(s - s_0)}, \\ f_3(s) = \mp D \frac{\text{cn} 2D(s - s_0)}{\text{sn} 2D(s - s_0)}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

14:39, 25th Apr, 2014

このとき, $\operatorname{sn} u$ は $u = 0, 2K$ で零点を持つので, $f_i(s)$ もそれらの点で単純極を持つことに注意. ただし, K は k をモジュライとした第 I 種完全楕円積分であり, 以下のように書かれる.

$$K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (4.70)$$

ここで, モジュライ空間が定義される区間を原点に対して対称にするため, 座標を $u \mapsto u - K$ と平行移動させて極を $u = -K, K$ に移動させておく. すると,

$$\operatorname{sn}(u - K) = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{cn}(u - K) = k' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{dn}(u - K) = k' \frac{1}{\operatorname{dn} u}.$$

に注意して,

$$\begin{aligned} f_1 \mapsto -D \cdot \left(-\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \right) &= D \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}, & f_2 \mapsto \pm D \cdot k' \frac{1}{\operatorname{dn} u} \cdot \left(-\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \right) &= \mp D k' \frac{1}{\operatorname{cn} u}, \\ f_3 \mapsto \mp D \cdot k' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \cdot \left(-\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \right) &= \pm D k' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \end{aligned}$$

となり, $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$ は改めて以下のように書けることがわかる.

$$\begin{aligned} f_1(s) &= D \frac{\operatorname{dn} 2D(s - s_0)}{\operatorname{cn} 2D(s - s_0)}, & f_2(s) &= \mp D k' \frac{1}{\operatorname{cn} 2D(s - s_0)}, \\ f_3(s) &= \pm D k' \frac{\operatorname{sn} 2D(s - s_0)}{\operatorname{cn} 2D(s - s_0)}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

ただし, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ である. このとき, $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$ は

$$s = \pm K/2D + s_0 \quad (4.72)$$

で極を持つので, これらの間の区間 I のみを採用すれば Nahm データの境界条件を満たす. 特に, $s_0 = 0, D = K/2$ と置けば, Nahm データは $s = \pm 1$ で極を持つことになる. ここで, 解はヤコビの楕円関数のモジュライ k を含むが, これは 2-モノポールの測地線運動を表すパラメーターであることが知られている. 特に, $k = 1, D = K/2, s = \pm 1$ とした場合の解は, $K \rightarrow \pi/2, \operatorname{sn} u \rightarrow \sin u, \operatorname{cn} u \rightarrow \cos u, \operatorname{dn} u \rightarrow 1$ より以下のように書ける.

$$f_1(s) = \frac{\pi}{2} \sec(\pi s/2), \quad f_2(s) = \pm \frac{\pi}{2} \sec(\pi s/2), \quad f_3(s) = \mp \frac{\pi}{2} \tan(\pi s/2). \quad (4.73)$$

$k = 2$ の場合の Nahm データは以上のようにして解析的に求められた. ところが, このような複雑な Nahm データをポテンシャルとして持つ Weyl 方程式は, 原点を通る対称軸上などの特別な場合 ([28] など) を除いて解析的に解くことは困難であり, ゲージ場は次小節で説明する数値 Nahm 変換を用いて求められる.

4.3.5 数値 Nahm 変換

$k = 1$ の場合は解析的に Nahm 変換を行うことができたが, $k \geq 2$ の場合では必ずしもそうとは限らない. この小節では, Nahm 変換を数値的に行うことを考える.

14:39, 25th Apr, 2014

1次元ディラック作用素に対する Weyl 方程式の表式は 4.3.1 小節で導いたが、そのゼロモードの成分は四元数の 2 次複素行列表現なので、まず、それらを扱いやすいように置き換えることを考える。それには、ゼロモードを以下のように置けばよい。

$$U(s, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2). \quad (4.74)$$

ただし、 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は $2k$ 個の成分を持つ列ベクトルである。すると、Weyl 方程式は

$$\left\{ \mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - (T_i + x_i \mathbf{1}_k) \otimes \sigma_i \right\} \boldsymbol{u}_\ell = \mathbf{0} \quad (4.75)$$

となり、この中の 1 次独立な 2 つの解を探せばよい。このとき、

$$\int_{-1}^1 U^\dagger(s, \boldsymbol{x}) U(s, \boldsymbol{x}) ds = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 \boldsymbol{u}_1^\dagger \boldsymbol{u}_1 ds & \int_{-1}^1 \boldsymbol{u}_1^\dagger \boldsymbol{u}_2 ds \\ \int_{-1}^1 \boldsymbol{u}_2^\dagger \boldsymbol{u}_1 ds & \int_{-1}^1 \boldsymbol{u}_2^\dagger \boldsymbol{u}_2 ds \end{pmatrix} = \mathbf{1}_2 \quad (4.76)$$

より、規格化条件は

$$\int_{-1}^1 \boldsymbol{u}_a^\dagger \boldsymbol{u}_b ds = \delta_{ab} \quad (4.77)$$

となり、ヒッグス場とゲージ場を求める表式も以下ようになる。

$$(\Phi(\boldsymbol{x}))_{ab} = i \int_{-s_1}^1 s \boldsymbol{u}_a^\dagger \boldsymbol{u}_b ds, \quad (A_j(\boldsymbol{x}))_{ab} = \int_{-s_1}^1 \boldsymbol{u}_a^\dagger \partial_j \boldsymbol{u}_b ds. \quad (4.78)$$

ただし、 $a, b = 1, 2$ である。

Weyl 方程式をこのように書き換えれば、次にすべきことは、Weyl 方程式の中のテンソル積を展開することである。ここで、 $m \times n$ 型の行列 $A = (a_{ij})$ と $m' \times n'$ 型の行列 α に対し、それらのテンソル積 $A \otimes \alpha$ は以下のような $mm' \times nn'$ 型の行列となる。

$$A \otimes \alpha = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha & a_{12}\alpha & \cdots & a_{1n}\alpha \\ a_{21}\alpha & a_{22}\alpha & \cdots & a_{2n}\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\alpha & a_{m2}\alpha & \cdots & a_{mn}\alpha \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

これを用いて式 (4.75) のテンソル積を展開すれば、解くべき方程式は $2k$ 本の 1 階線形連立微分方程式となる。

そのような常微分方程式を解くには Runge-Kutta 法を用いればよい。それには導関数が必要となるが、それは式 (4.75) の微分のみを左辺に移項すれば直ちに得られる。しかし、解き方については多少の注意を払わなければならない。今の場合、Weyl 方程式のポテンシャルに対応する Nahm データは区間の両端で発散しているが、Runge-Kutta 法は極付近から解き始めることはできても極に向かって解くことはできないので、今の場合は両方の極付近からそれぞれ出発して中央まで解き、シューティングを用いてそれらを繋げなければならない。そのとき、ゼロモードは両極では方程式が発散しないために 0 でなければならないので、Runge-Kutta 法はその 1 歩先から行えばよく、初期条件に関しても極付近でのものを用いればよい。

14:39, 25th Apr, 2014

初期条件を求めるには、解の各成分 u_i を両極付近で以下のようにフロベニウス級数展開する。

$$u_i = \sum_n u_i^{(j)} (s \pm 1)^{\lambda_i + n}. \quad (4.80)$$

ただし、 λ_i は必ずしも整数とは限らないことに注意。これらを Weyl 方程式に代入し、さらに級数展開して各次数ごとにまとめれば、(i) 各次数の係数が 0、(ii) 任意の i に対して $u_i^{(0)} \neq 0$ の 2 つの条件を用いて λ_i と $u_i^{(j)}$ を決定することができる (Weyl 方程式の係数は両端で発散するのでそのままでは展開できないが、それらは単純極なので、方程式全体に $(s \pm 1)$ を掛ければ展開できる)。このとき、解くべき Weyl 方程式は連微分方程式なので、(i) で解くべき方程式も連立方程式となることに注意。すると、高次の $u_i^{(j)}$ はいくつかの低次の $u_i^{(j)}$ を用いて帰納的に求まり、それらの低次の係数がシューティングパラメーターとなる。また、求めた級数展開にそれらのシューティングパラメーターと格子間隔を代入したものが、両極の 1 歩先における初期条件となる。このような作業は、例えば、Mathematica を用いて行うと良い*。

そのようにして初期条件が求まれば、Runge-Kutta 法により区間の中央までの解が得られ、残りは中央におけるシューティングのみとなる。ところが、今の場合、シューティングは以下のようにして同次方程式を解く問題に帰着できる。Runge-Kutta 法を用いて $s = -1$ から $s = 0$ までの解 $\mathbf{u}^{(1)}(s), \mathbf{u}^{(2)}(s), \dots, \mathbf{u}^{(N)}(s)$ と $s = +1$ から $s = 0$ までの解 $\mathbf{u}^{(N+1)}(s), \mathbf{u}^{(N+2)}(s), \dots, \mathbf{u}^{(2N)}(s)$ が求まったとする。ただし、 N はそれぞれの極から求まる独立な解の数である。次に、 $A = (\mathbf{u}^{(1)}(0), \mathbf{u}^{(2)}(0), \dots, \mathbf{u}^{(2N)}(0))$ とし、以下のような同次方程式を考える。

$$A\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (4.81)$$

このとき、 A は $2k \times 2N$ の行列なので、 \mathbf{w} は $2N$ 個の成分 w_j を持つ列ベクトルである。そして、この同次方程式の 2 つの 1 次独立な解 $\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}$ を求めれば、

$$A\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{2N} w_j \mathbf{u}^{(j)}(0) = \mathbf{0} \iff \sum_{j=1}^N w_j \mathbf{u}^{(j)}(0) = - \sum_{j=N+1}^{2N} w_j \mathbf{u}^{(j)}(0) \quad (4.82)$$

より、以下の線形結合は自動的に中央で繋がった解となる。

$$\mathbf{u}_\ell(s) = \begin{cases} \sum_{j=1}^N w_j^{(\ell)} \mathbf{u}^{(j)}(s) & (-1 \leq s \leq 0) \\ - \sum_{j=N+1}^{2N} w_j^{(\ell)} \mathbf{u}^{(j)}(s) & (0 < s \leq 1) \end{cases} \quad (4.83)$$

ただし、 $\ell = 1, 2$ である。これらの $\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}$ を求めるには A にガウスの消去法を行う。すると、正しい初期条件が選べていて $\mathbf{u}^{(j)}(s)$ がすべて 1 次独立であれば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & u'_{1N-1} & u'_{1N} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & u'_{2N-1} & u'_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u'_{kN-1} & u'_{kN} \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

*まず、Weyl 方程式をすべて左辺にまとめ、それを多項式として定義しておく。また、解のフロベニウス級数展開も、適当な次数までの多項式を作って定義しておく。そして、Series, Normal, FullSimplify などの命令を用いて解を展開・整理して λ_i を決定し、適当な次数で SeriesCoefficient, Solve 命令を用いて係数についての連立方程式を解き、 $u_i^{(j)}$ を決定していく。得られた初期条件の式はプログラムのコードに直さなければならないが、それには CForm, ToString, StringReplace, Print, "" (文字), <> (文字の結合) 命令などを用いると良い。

14:39, 25th Apr, 2014

のような右の 2 行が残る形に変形でき, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ はそれぞれ以下で与えられる.

$$\omega^{(1)} = {}^t(-u'_{1N-1}, \dots, -u'_{kN-1}, 1, 0), \quad \omega^{(2)} = {}^t(-u'_{1N}, \dots, -u'_{kN}, 0, 1). \quad (4.85)$$

また, これより $N = k + 1$ でなければならず, それだけの 1 次独立な初期条件を両極で探さなければならない. ただし, 1 次独立でありさえすれば, どのようなパラメーターを選んででも求まるヒッグス場は同じ形となる.

このようにして 2 つの 1 次独立な解が得られれば, それらを式 (4.77) となるように正規直交化しなければならない. それにはグラム-シュミットの正規直交化法を用いればよく, 今の場合は単に u_2 を以下で置き換えればよい.

$$u_2 - \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1. \quad (4.86)$$

ただし, 内積は以下のようになる.

$$\langle u_a, u_b \rangle = \int_{-1}^1 u_a^\dagger u_b ds. \quad (4.87)$$

また, この積分には Simpson の公式を用いればよい.

このようにして正規直交化されたゼロモードが得られれば, 式 (4.78) を用いてヒッグス場を計算することができる. すると, 3.4 節で求めた以下の表式を用いてエネルギー密度 $\mathcal{E}(x)$ を計算することができる.

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2} \nabla^2 |\phi|^2. \quad (4.88)$$

ただし, $|\phi|^2 := -\frac{1}{2} \text{Tr} \phi^2$ であり, ラプラシアンは 2 階の中央差分を用いて計算すればよい. このようにして求めたエネルギー密度は, 例えば, Mathematica を用いて可視化することができる.

計算の流れをまとめると以下のようになる.

プログラム外:

1. Nahm データの準備

Nahm データ $T_j(s)$ ($k \times k$ の行列) を用意する.

2. Weyl 方程式の準備

$T_\alpha(s)$ を Weyl 方程式に代入して四元数とのテンソル積を展開し, $2k$ 本の線形連立微分方程式である Weyl 方程式及び Runge-Kutta 法で使う導関数を得る.

3. 初期条件の個数

1 次独立な初期条件の個数, すなわち, 導関数を

$$(s \pm 1) \frac{d\mathbf{u}_\ell}{ds} = B_s \mathbf{u}_\ell \quad (4.89)$$

と置いたときの $B_{\pm 1}$ の正の固有値の数を調べる.

4. 初期条件

Weyl 方程式の解を適当な項までフロベニウス級数展開して Weyl 方程式に代入し, (i) 各係数が 0, (ii) 0 次の係数は $\neq 0$ を用いて肩の定数を求め, 各係数を低い次数の有限個の係数で帰納的に表す. このときのいくつかの係数が初期条件のパラメーターになる.

5. 特殊関数等の計算

Nahm データの中の特殊関数 (Jacobi, Weierstrass の楕円関数など) を計算するコードを用意する．もしくは，格子点上の値を予め計算してテーブルにしておく．

プログラム中と作用密度の可視化：

1. Nahm データのリスト化

Nahm データを予め計算して配列に代入しておく．

2. 初期条件の計算

初期条件のパラメーターを与えて初期条件を計算させる．

3. Weyl 方程式を解く

Runge-Kutta 法を用いて Weyl 方程式をモジュライ空間の両端の極から中央まで，初期条件の数だけそれぞれ解く．

4. 線形結合の決定

解が中央で繋がるための条件より 2 つの 1 次独立な線形結合を決定し，2 つの独立なゼロモード u_1, u_2 を求める (同次方程式はガウスの消去法を用いて行う) ．

5. Nahm 変換

得られたゼロモードを正規直交化し，ヒッグス場を求める (正規直交化はグラム-シュミットの正規直交化法，積分は Simpson の公式を用いて計算する) ．

6. エネルギー密度の計算

エネルギー密度を計算し，結果を出力する (ラプラシアンは 2 階の中央差分を用いて計算する) ．

7. 可視化

出力したエネルギー密度を Mathematica などで可視化する．

4.4 スペクトル曲線と対称性

Nahm 構成法からは，スペクトル曲線と呼ばれる概念が自然に導かれる．また，Nahm 構成法により示される本来の対応は，Bogomolny 方程式を満たすゲージ場，Nahm 方程式を満たす Nahm データ，スペクトル曲線の間の 1 対 1 対応である．このことを Hitchin の三位一体 (Hitchin's trinity) という．スペクトル曲線は複素変数による代数曲線であるが，そのような曲線は TP_1 という空間の曲線と見なせる．この空間は立体射影によって 3 次元空間内の球表面に対応づけられ，回転や鏡映，反転を含むメビウス変換が考えられる．そのような対称性を持つスペクトル曲線を考えることで，様々な対称性を持つモノポールの Nahm データを導くことができる．本節では，モノポールのスペクトル曲線とそれに課される対称性について述べ，その応用として正多面体の対称性を持つモノポールの Nahm データを導出する．

4.4.1 Lax 形式とスペクトル曲線

Nahm 方程式

$$\frac{dT_i}{ds} = \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}[T_j, T_k] \quad (\text{for all } i = 1, 2, 3.)$$

をよく見ると, 以下のように変形できることに気づく.

$$\begin{cases} i\frac{dT_1}{ds} = -[T_2, T_3] = [T_3, T_2], \\ \frac{dT_2}{ds} = i[T_3, T_1] = [T_3, iT_1] \end{cases} \implies \frac{d}{ds}(T_2 + iT_1) = [T_3, T_2 + iT_1].$$

このように, 行列 $h(t)$, $A(t)$ に対する

$$\frac{dh}{dt} = [A, h] \quad (4.90)$$

という形の微分方程式を Lax 形式 (Lax form) という^{*)}. このとき, $h(t)$ の固有値, 固有関数, d/dt の表現行列をそれぞれ $\lambda(t)$, $\psi(t)$, A とし,

$$h\psi = \lambda\psi, \quad \frac{d\psi}{dt} = A\psi \quad (4.91)$$

とすると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h\psi) &= \frac{dh}{dt}\psi + hA\psi = \frac{d}{dt}(\lambda\psi) = \frac{d\lambda}{dt}\psi + \lambda A\psi = \frac{d\lambda}{dt}\psi + Ah\psi \\ \iff \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{dh}{dt} - [A, h] \end{aligned} \quad (4.92)$$

となるが, この右辺が 0 となるための条件が Lax 形式なので, Lax 形式とはスペクトル保存の系が存在するための必要十分条件である. ここで, $\lambda = -\eta$ と置くと, h の固有多項式 $P(\eta)$ は

$$P(\eta) = \det(\eta\mathbf{1}_N + h(t)) \quad (4.93)$$

となるが, これも時間に依らない. ただし, N は Nahm データの行列としての次数である. これより, $P(\eta)$ は Lax 形式の解としての $h(t)$ の積分定数を与えることがわかる.

本小節の冒頭で Nahm 方程式のうちの 2 成分を用いて Lax 形式を作ったが, これだと残りの 1 成分が反映されないなので, 新たに複素変数 ξ を導入して

$$\begin{cases} \Lambda_- = -(T_2 - iT_1) + 2T_3\xi + (T_2 + iT_1)\xi^2, \\ \Lambda_+ = -T_3 - (T_2 + iT_1)\xi. \end{cases} \quad (4.94)$$

のように置き, 以下のような Lax 形式を考えてみる.

$$\frac{d\Lambda}{ds} = [\Lambda_+, \Lambda] \quad (4.95)$$

^{*)}Lax 形式は可積分系 (integrable systems) における用語であり, t は習慣的には時間と見なされる.

14:39, 25th Apr, 2014

という Lax 形式を考えてみる．すると，

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= -\frac{d}{ds}(T_2 - iT_1) + 2\frac{dT_3}{ds}\xi + \frac{d}{ds}(T_2 + iT_1)\xi^2, \\ (\text{右辺}) &= [T_3, T_2 - iT_1] + 2i[T_1, T_2]\xi + [T_3, T_2 + iT_1]\xi^2 \end{aligned}$$

となり， ξ の各次数を比較すれば Nahm 方程式の 3 成分が得られるので，これは Nahm 方程式と同値な Lax 形式となっている．ここで，先と同様に複素変数 η を用いれば，固有方程式

$$P(\xi, \eta) = \det(\eta \mathbf{1}_N - (T_2 - iT_1) + 2T_3\xi + (T_2 + iT_1)\xi^2) = 0 \quad (4.96)$$

は複素平面 (ξ, η) 上の s に依らない代数曲線を表すことがわかる．これを Nahm 方程式に対するスペクトル曲線 (spectral curve) という．式 (4.96) は行列式をとるので，スペクトル曲線は以下のような η についての最高次数が N の多項式となる．

$$\eta^N + a_1(\xi)\eta^{N-1} + \cdots + a_N(\xi) = 0. \quad (4.97)$$

また，このとき，Nahm データの Reality の条件は以下のように書けることが知られている．

$$a_r(\xi) = (-1)^r \xi^{2r} a_r^*(-1/\xi^*). \quad (\text{for all } r.) \quad (4.98)$$

スペクトル曲線の具体的な形を見てみる．まず， $N = 1$ のとき，一般の Nahm データは $T_i = c_i$ となるのであった．ただし， c_1, c_2, c_3 は任意の実数の定数である．これに対するスペクトル曲線は以下のようなになる．

$$\eta - (c_2 - ic_1) + 2c_3\xi + (c_2 + ic_1)\xi^2 = 0. \quad (4.99)$$

このとき，Reality の条件は任意の c_1, c_2, c_3 に対して以下のようにして満たされることに注意．

$$\begin{aligned} -\xi^2 a_1^*(-1/\xi^*) &= -\xi^2 \left\{ -(c_2 - ic_1) - 2c_3 \frac{1}{\xi^*} + (c_2 + ic_1) \frac{1}{\xi^{*2}} \right\}^* \\ &= -(c_2 - ic_1) + 2c_3\xi + (c_2 + ic_1)\xi^2. \end{aligned}$$

次に， $N = 2$ の場合は以下のようなになる．

$$\begin{aligned} &\det(\eta \mathbf{1}_2 - (f_2\sigma_2 - if_1\sigma_1) + 2f_3\sigma_3\xi + (f_2\sigma_2 + if_1\sigma_1)\xi^2) \\ &= \det \begin{pmatrix} \eta + 2f_3\xi & i(f_1 + f_2) + i(f_1 - f_2)\xi^2 \\ i(f_1 - f_2) + i(f_1 + f_2)\xi^2 & \eta - 2f_3\xi \end{pmatrix} \\ &= \eta^2 + (f_1^2 - f_2^2)(1 + \xi^4) + 2(f_1^2 + f_2^2 - 2f_3^2)\xi^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.100)$$

ここで，各係数は積分定数 $c_{12}^2, c_{23}^2, c_{13}^2$ で書けるので，確かに s に依らない方程式となっている．また，先のように k と D を用いて書くと

$$\eta^2 + D^2 k^2 (1 + \xi^4) + 2D^2 (2 - k^2) \xi^2 = 0 \quad (4.101)$$

となり， $k = 0, D = K/2 = \pi/4$ とすると以下のようなになる．

$$\eta^2 + \frac{1}{4}\pi^2 \xi^2 = 0 \quad (4.102)$$

表 4.2: 各空間の種類と変数 .

\mathbb{R}^3	P_1	TP_1
3次元ユークリッド空間	1次元実射影空間	P_1 の接空間
x_1, x_2, x_3	ζ_0, ζ_1	η, ζ

一般に, 軸対称である N -モノポールのスペクトル曲線は以下となることが知られている .

$$\begin{aligned} \eta(\eta^2 + \pi^2 \xi^2)(\eta^2 + 4\pi^2 \xi^2) \cdots \left(\eta^2 + \left(\frac{N-1}{2} \right)^2 \pi^2 \xi^2 \right) &= 0, & (N = \text{odd.}) \\ \left(\eta^2 + \frac{1}{4} \pi^2 \xi^2 \right) \left(\eta^2 + \frac{9}{4} \pi^2 \xi^2 \right) \cdots \left(\eta^2 + \left(\frac{N-1}{2} \right)^2 \pi^2 \xi^2 \right) &= 0. & (N = \text{even.}) \end{aligned} \quad (4.103)$$

4.4.2 TP_1 とメビウス変換

\mathbb{R}^3 内の x_1x_2 -平面を複素平面 $\mathbb{C} : \zeta = u + iv$ と見なし, \mathbb{R}^3 内の原点を中心とした単位球表面 $S : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ を考える . すると, S の極 $(0, 0, -1)$ を通る任意の直線 ℓ は S とのもう1つの交点 $P(x_1, x_2, x_3)$ と x_1x_2 -平面との交点 $Q(u, v)$ の間に1対1対応を与える, すなわち, ℓ を x_1x_3, x_2x_3 -平面へ投影した直線の方程式は, それぞれ

$$\begin{aligned} x_3 = \frac{1}{u}x_1 - 1 &\iff u = \frac{x_1}{1+x_3}, \\ x_3 = \frac{1}{v}x_2 - 1 &\iff v = \frac{x_2}{1+x_3} \end{aligned}$$

となり, 複素平面上では

$$\zeta = u + iv = \frac{x_1 + ix_2}{1+x_3} \quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1) \quad (4.104)$$

となるが, これは S から $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への全単射になっている*). このような写像を S から \mathbb{C} への立体射影 (stereographic projection) という . S から \mathbb{C} への立体射影において,

$$\zeta = \frac{x_1 + ix_2}{1+x_3} =: \frac{\zeta_1}{\zeta_0} \quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1) \quad (4.105)$$

としたとき, ζ_0, ζ_1 を座標とする空間を1次の実射影空間といい, P_1 と書く**. また, ζ と $\eta := \zeta'$ (ζ の微分) を座標とする空間を P_1 の接空間といい, TP_1 と書く***). 今までに登場した空間を表 4.2 にまとめておく . 式 (4.105) において, S における極周りの θ 回転は以下ようになる .

$$\begin{cases} x_1 \mapsto x_1 \cos(-\theta) - x_2 \sin(-\theta) \\ x_2 \mapsto x_1 \sin(-\theta) + x_2 \cos(-\theta) \end{cases} \iff x_1 + ix_2 \mapsto (\cos \theta - i \sin \theta)(x_1 + ix_2)$$

*) このとき, \mathbb{C} の外にある任意の無限遠点は S の極 $(0, 0, -1)$ に集約される . これを \mathbb{C} の一点コンパクト化といい, $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq S$ と書く .

**) \mathbb{R}^{n+1} の原点を通る直線全体の集合を n 次の実射影空間といい, P_n と書く .

***) 多様体 M 上の点 p における微分演算子全体が成すベクトル空間を M の p における接ベクトル空間といい, $T_p(M)$ と書く .

14:39, 25th Apr, 2014

$$\iff \zeta \mapsto e^{-i\theta}\zeta.$$

このとき, $\zeta = \infty, 0$ に対応する S 上の点はそれぞれ極 $(0, 0, -1)$ とその対蹠点 $(0, 0, 1)$ であり, これらを通る直線は回転軸を表す. それ故, $\zeta = \infty, 0$ に対応する点をそれぞれ $\hat{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $-\hat{x}$ へ移す分数変換

$$\zeta \mapsto \left(\zeta + \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right) / \left(\zeta - \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3} \right)$$

は回転軸を \hat{x} に移す変換であり,

$$\begin{aligned} & \left(\zeta + \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right) / \left(\zeta - \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3} \right) \mapsto e^{-i\theta} \left(\zeta + \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right) / \left(\zeta - \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3} \right) \\ \iff & e^{i\theta/2} \frac{\zeta(1 - x_3) + (x_1 + ix_2)}{\zeta(1 + x_3) - (x_1 + ix_2)} \mapsto e^{-i\theta/2} \frac{\zeta(1 - x_3) + (x_1 + ix_2)}{\zeta(1 + x_3) - (x_1 + ix_2)} \\ \iff & \zeta \mapsto \frac{(d + ic)\zeta + (b - ia)}{-(b + ia)\zeta + (d - ic)}, \quad (\because 1 - x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)) \end{aligned}$$

すなわち,

$$\zeta \mapsto \frac{(d + ic)\zeta + (b - ia)}{-(b + ia)\zeta + (d - ic)} \quad (4.106)$$

は \mathbb{R}^3 における \hat{x} 軸周りの θ 回転を表すことがわかる. ただし,

$$a := x_1 \sin \frac{\theta}{2}, \quad b := x_2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad c := x_3 \sin \frac{\theta}{2}, \quad d := \cos \frac{\theta}{2} \quad (4.107)$$

であり, これらは明らかに以下の関係を満たす.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \quad (4.108)$$

この変換をメビウス変換 (Möbius transformation) といい, この公式をケーリーの公式 (Cayley) という. 式 (4.105) を式 (4.106) に代入すると, P_1 上でのメビウス変換は以下のような行列式が 1 の斉次線形変換とも見なせる.

$$\begin{cases} \zeta_1 \mapsto (d + ic)\zeta_1 + (b - ia)\zeta_0, \\ \zeta_0 \mapsto -(b + ia)\zeta_1 + (d - ic)\zeta_0. \end{cases} \quad (4.109)$$

また, TP_1 における η のメビウス変換は

$$\begin{aligned} \eta = \zeta' & \mapsto \left(\frac{(d + ic)\zeta + (b - ia)}{-(b + ia)\zeta + (d - ic)} \right)' \\ & = \frac{(d + ic)\zeta'}{-(b + ia)\zeta + (d - ic)} + \frac{(d + ic)\zeta + (b - ia)}{\{-(b + ia)\zeta + (d - ic)\}^2} (b + ia)\zeta' \\ & = \frac{-(d + ic)(b + ia)\zeta\zeta' + (d + ic)(d - ic)\zeta' + (b + ia)(b + ia)\zeta\zeta' + (d - ic)(b + ia)\zeta'}{\{-(b + ia)\zeta + (d - ic)\}^2} \\ & = \frac{\eta}{\{-(b + ia)\zeta + (d - ic)\}^2} \quad (\because a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1) \end{aligned}$$

14:39, 25th Apr, 2014

となり, ζ と合わせて以下のように書ける .

$$\zeta \mapsto \frac{(d+ic)\zeta + (b-ia)}{-(b+ia)\zeta + (d-ic)}, \quad \eta \mapsto \frac{\eta}{\{-(b+ia)\zeta + (d-ic)\}^2}. \quad (4.110)$$

さらに, 回転以外の

$$\begin{aligned} I_{12} : (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, x_2, -x_3), && (x_1x_2\text{-平面に対する鏡映}) \\ I_{23} : (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (-x_1, x_2, x_3), && (x_2x_3\text{-平面に対する鏡映}) \\ I_{31} : (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, -x_2, x_3), && (x_3x_1\text{-平面に対する鏡映}) \\ I_O : (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (-x_1, -x_2, -x_3) && (\text{原点についての反転}) \end{aligned}$$

のような変換についても, それぞれを式 (4.105) に作用させることで

$$\begin{aligned} I_{12}(\zeta) &= \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} = \frac{(x_1 + ix_2)(1 + x_3)}{1 - x_3^2} = \frac{(x_1 + ix_2)(1 + x_3)}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1 + x_3}{x_1 - ix_2} = \frac{1}{\bar{\zeta}}, \\ I_{23}(\zeta) &= \frac{-x_1 + ix_2}{1 + x_3} = -\bar{\zeta}, \quad I_{31}(\zeta) = \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3} = \bar{\zeta}, \quad I_O(\zeta) = \frac{-x_1 - ix_2}{1 - x_3} = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \end{aligned}$$

が得られ, さらにこれらの微分を取ることで以下となることがわかる .

$$I_{12}(\eta, \zeta) = \left(-\frac{\eta}{\bar{\zeta}^2}, \frac{1}{\bar{\zeta}} \right), \quad I_{23}(\eta, \zeta) = (-\bar{\eta}, -\bar{\zeta}), \quad I_{31}(\eta, \zeta) = (\bar{\eta}, \bar{\zeta}), \quad (4.111)$$

$$I_O(\eta, \zeta) = \left(\frac{\eta}{\bar{\zeta}^2}, -\frac{1}{\bar{\zeta}} \right). \quad (4.112)$$

TP_1 における曲線は, 一般には以下のように書ける .

$$P(\eta, \zeta) = \eta^k + \eta^{k-1}a_1(\zeta) + \cdots + \eta a_{k-1}(\zeta) + a_k(\zeta) = 0. \quad (4.113)$$

ただし, $a_r(\zeta)$ ($1 \leq r \leq k$) は少なくとも ζ についての $2r$ 次の多項式である . このとき, TP_1 上の向きづけられた曲線の向きを変える変換 τ は以下のように書ける .

$$\tau(\eta, \zeta) = \left(-\frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}^2}, -\frac{1}{\bar{\zeta}} \right). \quad (4.114)$$

そこで, 式 (4.113) に τ 不変性を課すと, ひとまず以下ようになる .

$$\tau P(\eta, \zeta) = \left(-\frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}^2} \right)^k + \left(-\frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}^2} \right)^{k-1} a_1(-1/\bar{\zeta}) + \cdots + \left(-\frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}^2} \right) a_{k-1}(-1/\bar{\zeta}) + a_k(-1/\bar{\zeta}) = 0 \quad (4.115)$$

これをもとに戻すには, 全体の複素共役をとって $(-1)^r \zeta^{2r}$ を掛ければよいので, 任意の r に対して以下となることが求める条件である .

$$a_r(\zeta) = (-1)^r \zeta^{2r} \overline{a_r(-1/\bar{\zeta})} \quad (4.116)$$

ところが, スペクトル曲線における Reality の条件 (4.98) と一致する .

14:39, 25th Apr, 2014

4.4.3 対称性を持つスペクトル曲線

TP_1 におけるメビウス変換に対して不変なスペクトル曲線を求めてみる．まず， x_3 -軸周りの n 回回転の成す群 C_n の元は， $x = (0, 0, 1)$ ， $\theta = 2\pi/n$ に対する

$$a = b = 0, \quad c = \sin \frac{\pi}{n}, \quad d = \cos \frac{\pi}{n}$$

より以下であることがわかる．

$$\zeta \mapsto \frac{e^{\pi i/n}}{e^{-\pi i/n}} \zeta = e^{2\pi i/n} \zeta, \quad \eta \mapsto \frac{1}{(e^{-\pi i/n})^2} \eta = e^{2\pi i/n} \eta. \quad (4.117)$$

また，同様にして， x_3 軸周りの連続回転の成す群 C_∞ の元は以下であることがわかる．

$$\zeta \mapsto e^{i\theta} \zeta, \quad \eta \mapsto e^{i\theta} \eta. \quad (4.118)$$

ただし， θ は実パラメーターである．これらより， TP_1 の曲線 $P(\eta, \zeta) = 0$ は，各項の次数を k で割った余りがすべて等しければ C_k 不変であり，特に，各項の次数がすべて同じならば C_∞ 不変であることがわかる．さらに， x_1 軸周りの π 回転は， $x = (1, 0, 0)$ ， $\theta = \pi$ に対する

$$a = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad b = c = 0, \quad d = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

より

$$\zeta \mapsto \frac{-i}{-i\zeta} = \frac{1}{\zeta}, \quad \eta \mapsto \frac{\eta}{(-i\zeta)^2} = -\frac{\eta}{\zeta^2} \quad (4.119)$$

であることがわかり， C_n, C_∞ 不変な曲線がさらにこれらに対して不変であれば， D_n, D_∞ 不変であることがわかる．ただし， D_n, D_∞ はそれぞれ C_n, C_∞ に裏返しの操作を加えた群である．軸対称なモノポールのスペクトル曲線は，先に見たように

$$\eta \prod_{\ell=1}^m (\eta^2 + \ell^2 \pi^2 \zeta^2) = 0, \quad (k = 2m + 1 \text{ のとき}) \quad (4.120)$$

$$\prod_{\ell=0}^m (\eta^2 + (\ell + 1/2)^2 \pi^2 \zeta^2) = 0 \quad (k = 2m + 2 \text{ のとき}) \quad (4.121)$$

であるが，これは明らかに D_∞ 不変である．

ある変換に対して不変な曲線を求めるには，最も一般的なスペクトル曲線の式 (4.113) に対称性を課し，係数を減らしていけばよい．例として， D_3 不変な曲線を求めてみる．その場合，最初に仮定すべき曲線の形は以下ようになる．

$$\begin{aligned} & \eta^3 + \eta(\alpha_4 \zeta^4 + \alpha_3 \zeta^3 + \alpha_2 \zeta^2 + \alpha_1 \zeta + \alpha_4) \\ & + (\beta_6 \zeta^6 + \beta_5 \zeta^5 + \beta_4 \zeta^4 + \beta_3 \zeta^3 + \beta_2 \zeta^2 + \beta_1 \zeta + \beta_0) = 0. \end{aligned} \quad (4.122)$$

これに Reality の条件を課すと，以下でなければならぬことがわかる．

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \bar{\alpha}_0, & \alpha_3 &= -\bar{\alpha}_1, & \alpha_2 &= \bar{\alpha}_2, \\ \beta_6 &= -\bar{\beta}_0, & \beta_5 &= \bar{\beta}_1, & \beta_4 &= -\bar{\beta}_2, & \beta_3 &= \bar{\beta}_3 \end{aligned}$$

14:39, 25th Apr, 2014

(関係式は 11 本出てくるが、独立なものは 7 本)．次に、 C_3 に対して不変となるためには、各項の次数が 3 で割り切れなければならない．それ故、式 (4.122) は第 1, 4, 7, 10, 13 項のみが残り、以下ようになる．

$$\eta^3 + \alpha_2 \eta \zeta^2 - \bar{\beta}_0 \zeta^6 + \beta_3 \zeta^3 + \beta_0 = 0.$$

ここで、Reality の条件より、 α_2, β_3 は実数であるが β_0 は複素数である．ところが、任意の β_0 に対して全体を $\text{Arg } \beta_0/3$ で回転させれば、 β_0 は $|\beta_0|$ で置き換えられて係数はすべて実数となるので、式 (4.122) は $x_2 \mapsto -x_2$ の鏡映対称性を持つことがわかる．最後に、 x_1 -軸周りの π 回転は、

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\eta}{\zeta^2}\right)^3 + \alpha_2 \left(-\frac{\eta}{\zeta^2}\right) \left(\frac{1}{\zeta}\right)^2 - |\beta_0| \left(\frac{1}{\zeta}\right)^6 + \beta_3 \left(\frac{1}{\zeta}\right)^3 + |\beta_0| &= 0 \\ \iff \eta^3 + \alpha_2 \eta \zeta^2 + |\beta_0| - \beta_3 \zeta^3 - |\beta_0| \zeta^6 &= 0 \end{aligned}$$

となり、これがもとと一致するためには $\beta_3 = 0$ でなければならない．よって、 D_3 不変な曲線の最も一般的な形は以下であることがわかる．

$$\eta^3 + \alpha \eta \zeta^2 + \beta(\zeta^6 - 1) = 0. \quad (4.123)$$

ただし、 α, β は任意の実数である．これを 2-モノポールのスペクトル曲線の式 に一致させるには、 $\alpha = \pi, \beta = 0$ とすればよい．また、原点を中心とした $x_1 x_2$ -平面内の正 3 角形は D_3 の対称性を持つが、その各頂点

$$(x_1, x_2, x_3) = \left\{ (a, 0, 0), \left(a \cos \frac{2\pi}{3}, a \sin \frac{2\pi}{3}, 0 \right), \left(a \cos \frac{4\pi}{3}, a \sin \frac{4\pi}{3}, 0 \right) \right\} \quad (4.124)$$

に十分離れて配置されたモノポールのスペクトル曲線は以下のように書ける．

$$\{\eta - a(1 - \zeta^2)\} \{\eta - a\omega(1 - \omega\zeta^2)\} \{\eta - a\omega^2(1 - \omega^2\zeta^2)\} = 0. \quad (4.125)$$

ただし、 $\omega = e^{2\pi i/3}$ である．

4.4.4 不変 2 元形式と正多面体の対称性

ζ_0, ζ_1 についての以下のような多項式を考える．

$$Q_r(\zeta_0, \zeta_1) = \zeta_0^r q_r(\zeta). \quad (4.126)$$

ただし、 $q_r(\zeta)$ は r 以下の次数を持つ ζ の多項式である．このとき、 ζ_0^r はメビウス変換に対して

$$\zeta_0^r \mapsto \{-(b + ia)\zeta_1 + (d - ic)\zeta_0\}^r = \zeta_0^r \{-(b + ia)\zeta + (d - ic)\}^r$$

のように変換されるので、もし $q_r(\zeta)$ が

$$q_r(\zeta) \mapsto \frac{q_r(\zeta)}{\{-(b + ia)\zeta + (d - ic)\}^r} \quad (4.127)$$

14:39, 25th Apr, 2014

と変換されれば, $Q_r(\zeta_0, \zeta_1)$ はメビウス変換に対して不変となる. ここで, このように変換される $q_r(\zeta)$ を用いた曲線

$$P(\eta, \zeta) = \eta^k + \eta^{k-2}q_4(\zeta) + \eta^{k-3}q_6(\zeta) + \cdots + q_{2k}(\zeta) = 0 \quad (4.128)$$

に対するメビウス変換を考えると, 各項から同じ因子 $\{-(b+ia)\zeta + (d-ic)\}^{-2k}$ が出てくるので不変となることがわかる. 故に, メビウス変換に対して不変となる曲線を探すには, メビウス変換に対して不変となる $Q_r(\zeta_0, \zeta_1)$ を探せばよい. このような $Q_r(\zeta_0, \zeta_1)$ を不変 2 元形式という.

例えば, \mathbb{R}^3 における正多面体回転群の元はすべて, 正多面体の頂点 (Vertices), 面の中心 (centres of Faces), 辺の中心 (mid-points of Edges) のうちのいずれかの 2 点を通る直線を軸としている. それ故, これらの点の情報を多項式に取り込ませれば, それらはその多面体の対称性についての情報も含むことになる. そこで, 各正多面体の頂点, 面の中心, 辺の中心に対する多項式をそれぞれ $q_V^{(\text{tet})}$, $q_F^{(\text{tet})}$, $q_E^{(\text{tet})}$ などと書くことにする. これらの多項式を得るには, まず, 各正多面体に外接する単位球を考える. すると, 頂点, 面の中心, 辺の中心などの座標はそのような単位球に対する立体射影を通して, 複素平面上に移すことができる. そのとき, それらの点を解として持つような方程式を考えれば, それらの項が求める多項式となる. 頂点に関しては, 各正多面体を単位球に内接させて座標を読み取ればよい. また, 面の中心や辺の中心を求める際は, 正多面体に関する双対を用いればよい. 例えば, 正 4 面体の面の中心は双対な正 4 面体の頂点, 辺の中心は正 8 面体の頂点, 正 8 面体の面の中心は双対な立方体の頂点にそれぞれ等しい.

まず, 単位球に内接する各辺が座標軸と平行な立方体について考えてみる. このとき, 8 つの頂点の \mathbb{R}^3 における座標は $\pm x_1 = \pm x_2 = \pm x_3 = 1/\sqrt{3}$ なので, これらを TP_1 に移した際の座標は以下ようになる.

$$\zeta = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{3} \pm 1}. \quad (4.129)$$

ただし, 複合はすべての組み合わせを用いる. このとき, これらのうちの 4 つは 1 つの正 4 面体の頂点を与え, 他の 4 つはそれに双対な正 4 面体の頂点, すなわち, 元の正 4 面体の面の中心を与える. それ故, それらから適当な 4 つを選んで因子を掛け合わせることで,

$$\begin{aligned} q_V^{(\text{tet})} &= \left(\zeta - \frac{1+i}{\sqrt{3}+1}\right) \left(\zeta - \frac{-1-i}{\sqrt{3}+1}\right) \left(\zeta - \frac{1-i}{\sqrt{3}-1}\right) \left(\zeta - \frac{-1+i}{\sqrt{3}-1}\right) \\ &= \left\{ \zeta^2 - \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+1}\right)^2 \right\} \left\{ \zeta^2 - \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-1}\right)^2 \right\} = \zeta^4 + 2\sqrt{3}i\zeta^2 + 1 \\ &\left(\because \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+1}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-1}\right)^2 = \frac{1}{4} \{ 2i(4-2\sqrt{3}) - 2i(4+2\sqrt{3}) \} = -2\sqrt{3}i \right) \end{aligned} \quad (4.130)$$

となることがわかり, 同様にして以下であることもわかる.

$$q_F^{(\text{tet})} = \zeta^4 - 2\sqrt{3}i\zeta^2 + 1. \quad (4.131)$$

さらに, これらを掛け合わせたものは立方体の頂点, すなわち, 正 8 面体の面の中心を与えるので,

$$q_F^{(\text{oct})} = q_V^{(\text{tet})} q_F^{(\text{tet})} = (\zeta^4 + 1)^2 + 12\zeta^4 = \zeta^8 + 14\zeta^4 + 1 \quad (4.132)$$

14:39, 25th Apr, 2014

となる．次に，6つの頂点のうちの4つが複素平面の軸上になるように置かれた正8面体について考える．すると，その頂点の TP_1 での座標は明らかに以下となる．

$$\zeta = 0, \infty, \pm 1, \pm i. \quad (4.133)$$

これより， $q_V^{(\text{oct})}$ が求まるが，これらの点は正4面体の辺の中点でもあるので，

$$q_V^{(\text{oct})} = q_E^{(\text{tet})} = \zeta(\zeta - 1)(\zeta + 1)(\zeta - i)(\zeta + i) = \zeta(\zeta^4 - 1) \quad (4.134)$$

となる．このとき，無限遠方の解はあらわには含まれず，その分次数が1つ下がることに注意．そして，正20面体については，各頂点の TP_1 での座標は以下ようになる．

$$\zeta = 0, \infty, \omega^\nu(\omega + \omega^4), \omega^\nu(\omega^2 + \omega^3), \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (4.135)$$

ただし， ω は1の5乗根で，

$$\omega^\nu = 1, \frac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

である（各べき乗に対応する複合は，複素平面上に図を描いて確認すること）．これらより，以下となることがわかる．

$$\begin{aligned} q_V^{(\text{ico})} &= \zeta \cdot \prod_\nu \{\zeta - \omega^\nu(\omega + \omega^4)\} \cdot \prod_\nu \{\zeta - \omega^\nu(\omega^2 + \omega^3)\} \\ &= \zeta \{\zeta^5 - (\omega + \omega^4)^5\} \{\zeta^5 - (\omega^2 + \omega^3)^5\} = \zeta(\zeta^{10} + 11\zeta^5 - 1) \\ &\left(\begin{array}{l} (\omega + \omega^4)^5 = 1 + 5\omega^3 + 10\omega + 10\omega^4 + 5\omega^2 + 1 = (-11 + 5\sqrt{5})/2 \\ (\omega^2 + \omega^3)^5 = 1 + 5\omega + 10\omega^2 + 10\omega^3 + 5\omega^4 + 1 = (-11 - 5\sqrt{5})/2 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4.136)$$

残りの多項式を求めるには，ヘッシアンとヤコビアンを用いるとよい．例えば，各多項式を ζ_1, ζ_0 で表したものを \tilde{q}_V などと書くことにすれば， $\tilde{q}_V^{(\text{oct})}$ に対するヘッシアンは

$$\begin{aligned} H &= \begin{vmatrix} \partial_1^2 \tilde{q}_V^{(\text{oct})} & \partial_1 \partial_0 \tilde{q}_V^{(\text{oct})} \\ \partial_0 \partial_1 \tilde{q}_V^{(\text{oct})} & \partial_0^2 \tilde{q}_V^{(\text{oct})} \end{vmatrix} = 125 \begin{vmatrix} 4\zeta_1^3 \zeta_0 & \zeta_1^4 - \zeta_0^4 \\ \zeta_1^4 - \zeta_0^4 & -4\zeta_1 \zeta_0^3 \end{vmatrix} \\ &= -125(\zeta_1^8 + 14\zeta_1^4 \zeta_0^4 + \zeta_0^8) \end{aligned} \quad (4.137)$$

となり，この係数を除いたものが $\tilde{q}_F^{(\text{oct})}$ となる．また， $\tilde{q}_V^{(\text{oct})}, \tilde{q}_F^{(\text{oct})}$ に対するヤコビアンは

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \partial_1 \tilde{q}_V^{(\text{oct})} & \partial_0 \tilde{q}_V^{(\text{oct})} \\ \partial_1 \tilde{q}_F^{(\text{oct})} & \partial_0 \tilde{q}_F^{(\text{oct})} \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 5\zeta_1^4 \zeta_0 - \zeta_0^5 & \zeta_1^5 - 5\zeta_1 \zeta_0^4 \\ \zeta_1^7 + 7\zeta_1^3 \zeta_0^4 & \zeta_0^7 + 7\zeta_1^4 \zeta_0^3 \end{vmatrix} \\ &= -8(\zeta_1^{12} - 33\zeta_1^8 \zeta_0^4 - 33\zeta_1^4 \zeta_0^8 + \zeta_0^{12}) \end{aligned} \quad (4.138)$$

となり，この係数を除いたものが $\tilde{q}_E^{(\text{oct})}$ となる． $\tilde{q}_F^{(\text{ico})}, \tilde{q}_E^{(\text{ico})}$ も同様にして求められる．得られた各多項式を表4.3に示す．

表 4.3: 正多面体に関する多項式 .

	q_V	q_F	q_E
正 4 面体	$\zeta^4 + 2\sqrt{3}i\zeta^2 + 1$	$\zeta^4 - 2\sqrt{3}i\zeta^2 + 1$	$\zeta(\zeta^4 - 1)$
正 8 面体	$\zeta(\zeta^4 - 1)$	$\zeta^8 + 14\zeta^4 + 1$	$\zeta^{12} - 33\zeta^8 - 33\zeta^4 + 1$
正 20 面体	$\zeta(\zeta^{10} + 11\zeta^5 - 1)$	$\zeta^{20} - 228\zeta^{15} + 494\zeta^{10}$ $+ 228\zeta^5 + 1$	$\zeta^{30} + 522\zeta^{25} - 10005\zeta^{20}$ $- 10005\zeta^{10} - 522\zeta^5 + 1$

4.4.5 正多面体の対称性を持つモノポールの Nahm 構成

$G \subset \text{SO}(3)$ を正多面体対称群, V を $\text{SU}(2)$ の表現行列とする. このとき, n 次の対称変換 $S^n V$ はスペクトル曲線への作用となる. ここで, Nahm データが 3 次元の脚を持つことと, 両極で単純極となり, それぞれの留数が $\text{su}(2)$ の既約表現で表わされなければならないことを思い出すと, Nahm データは,

$$\mathbb{R}^3 \otimes \text{su}(k)$$

における関数と見なせ, それに対する $\text{SO}(3)$ の作用の表現行列は,

$$S^2 V \otimes \text{End}_0(S^{k-1} V) \quad (4.139)$$

と表わされることがわかる. ただし, End_0 はトレースが 0 の自己準同型写像である. このとき, クレブシュ-ゴルダン分解を用いて $\text{End}_0(S^{k-1} V)$ を

$$\begin{aligned} \text{End}_0(S^{k-1} V) &\cong S^{k-1} V \otimes S^{k-1} V \\ &\cong S^{2k-2} V \oplus S^{2k-4} V \oplus \dots \oplus S^2 V \end{aligned} \quad (4.140)$$

のように分解すると,

$$\text{so}(3) \cong S^2 V \rightarrow \text{End}_0(S^{k-1} V) \quad (4.141)$$

より $S^2 V$ が $S^2 V \otimes S^{k-1} V \otimes S^{k-1} V$ の 1 次元の部分空間を与えることがわかる. また, クレブシュ-ゴルダン分解より

$$S^{2m} V \otimes S^2 V = S^{2m+2} V \oplus W^{2m} V \oplus S^{2m-2} V \quad (4.142)$$

も成り立つが, $S^n V$ が G に対して不変となる最小の係数は $2k$ なので, $S^{2k} V$ がもう 1 つの部分空間を与えることがわかる. 故に, G に対して不変となる $S^2 V \otimes \text{End}_0(S^{k-1} V)$ は 2 次元のベクトル空間となり, Nahm データは 2 種類の基底行列 ρ_i, S_i により以下のように書けることがわかる.

$$T_i(s) = x(s)\rho_i + y(s)S_i. \quad (4.143)$$

ただし, $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{su}(N)$ は \mathbb{C}^N における $\text{so}(3)$ の表現, (S_1, S_2, S_3) は $S^{2k} \subset \mathbb{R}^3 \otimes \text{su}(k)$ 内の G 不変なベクトルである. ここで, Nahm データは $\mathbb{R}^3 \otimes \text{su}(k)$ の元なので,

$$[T_1, T_2] = [x\rho_1 + yS_1, x\rho_2 + yS_2]$$

14:39, 25th Apr, 2014

$$= x^2[\rho_1, \rho_2] + xy([\rho_1, S_2] + [S_1, \rho_2]) + y^2[S_1, S_2] \quad (4.144)$$

などの交換関係は再びそのリー代数の元とすることができる．このとき， ρ_i はもともと $\mathfrak{so}(3)$ の元なので $[\rho_1, \rho_3] =: 2\rho_3$ などとすればよいが， S_i は $\mathfrak{so}(3)$ の元とは限らず，残りの交換関係は

$$\begin{aligned} [\rho_1, S_2] + [S_1, \rho_2] &= \alpha\rho_3 + \beta S_3, \\ [S_1, S_2] &= \gamma\rho_3 + \delta S_3 \end{aligned} \quad (4.145)$$

のようになる．ただし， $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数である．すると，Nahm 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} T_3 = [T_1, T_2] &\iff \frac{dx}{ds} \rho_3 + \frac{dy}{ds} S_3 = 2x^2 \rho_3 + xy(\alpha\rho_3 + \beta S_3) + y^3(\gamma\rho_3 + \delta S_3) \\ &= (2x^2 + \alpha xy + \gamma y^2)\rho_3 + (\beta xy + \delta y^2)S_3 \end{aligned}$$

などとなり，解くべき方程式は以下であることがわかる．

$$\frac{dx}{ds} = 2x^2 + \alpha xy + \gamma y^2, \quad \frac{dy}{ds} = \beta xy + \delta y^2. \quad (4.146)$$

ただし，各定数は，各対称性に対する ρ_i, S_i を求めることで決まる．

ρ_i については適当な $\mathfrak{so}(3)$ の基底を用いればよいが， S_i を求めるには以下のようにする．まず， e_1, e_2, e_3 を $\mathfrak{so}(3)$ の基底としたとき，これらを

$$X := \frac{1}{2}(e_1 - ie_2), \quad Y := \frac{1}{2}(e_1 + ie_2), \quad H := ie_3 \quad (4.147)$$

のように置き直し，これらに対応する多項式

$$a_0 \zeta_0^{k-1} + a_1 \zeta_0^{k-2} \zeta_1 + \cdots + a_{k-2} \zeta_0 \zeta_1^{k-2} + a_{k-1} \zeta_1^{k-1} \quad (4.148)$$

上での作用を探してみる．すると， X, Y, Z の交換関係は

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \frac{1}{4}(i[e_1, e_2] - i[e_2, e_1]) = ie_3 = H, \\ [X, H] &= \frac{1}{2}(i[e_1, e_3] + [e_2, e_3]) = (e_1 - ie_2) = 2X, \\ [Y, H] &= \frac{1}{2}(i[e_1, e_3] - [e_2, e_3]) = -(e_1 + ie_2) = -2Y, \end{aligned}$$

まとめて，

$$[X, Y] = H, \quad [X, H] = 2X, \quad [Y, H] = -2Y \quad (4.149)$$

となり，これらに対応する多項式上での作用は以下であることがわかる．

$$X = -\zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_0}, \quad Y = \zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \quad H = \zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} - \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1}. \quad (4.150)$$

Proof.....

14:39, 25th Apr, 2014

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= -\zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \left(\zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \right) + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \right) \\
&= -\zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} - \zeta_1 \zeta_0 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_0 \partial \zeta_1} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} + \zeta_0 \zeta_1 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_0} = H, \\
[X, H] &= -\zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \left(\zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} - \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \right) - \left(\zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} - \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \right) \left(\zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \right) \\
&= -\zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} - \zeta_1 \zeta_0 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_0^2} + \zeta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_0 \partial \zeta_1} + \zeta_1 \zeta_0 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_0^2} - \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} - \zeta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_0} = 2X, \\
[Y, H] &= \zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} - \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \right) - \left(\zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_0} - \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \right) \left(\zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \right) \\
&= \zeta_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_0} - \zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} - \zeta_0 \zeta_1 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1^2} - \zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} - \zeta_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_0 \partial \zeta_1} + \zeta_1 \zeta_0 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1^2} = -2Y.
\end{aligned}$$

..... Q.E.D.

このようにすれば、今までに求めた各対称性における不変 2 次形式 $Q_{2k}(\zeta_0, \zeta_1)$ を用いて各基底 S_i を求めることができる．それには、包含関係

$$S^{2k}V \subset S^2V \otimes S^{2k-2}V \subset S^2V \otimes \text{End}_0(S^{k-1}V)$$

より、まず、 $Q_{2k}(\zeta_0, \zeta_1)$ を

$$Q_{2k} \mapsto \xi_0^2 \otimes \frac{\partial^2 Q_{2k}}{\partial \zeta_0^2} + 2\xi_0 \xi_1 \otimes \frac{\partial^2 Q_{2k}}{\partial \zeta_0 \partial \zeta_1} + \xi_1^2 \otimes \frac{\partial^2 Q_{2k}}{\partial \zeta_1^2} \quad (4.151)$$

のように分極 (polarize) させ、各 ξ_0^2 , $\xi_0 \xi_1$, ξ_1^2 をそれぞれ X , H , Y に対応させる．そして、式 (4.140) の分解における $S^{2k-2}V$ が X を生成元とした巡回群となり、その各元が最高の重みを持つ X^{k-1} に Y を作用させたもので表わせることを用い、分極させた各多項式 $Q(\zeta_0, \zeta_1)$ に対して

$$Q(\zeta_0, \zeta_1) = \tilde{Q} \left(\zeta_0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \right) \zeta_1^{2k-2} \quad (4.152)$$

を満たす多項式 \tilde{Q} を探し、

$$S(Q) = \tilde{Q}(\text{ad}Y)X^{k-1} \quad (4.153)$$

という行列を定義すれば、それらが求める S_i となっている．ただし、ad は随伴表現で、

$$(\text{ad}X)Y := [X, Y] \quad (4.154)$$

である．これらの作業を行うには Mathematica を用いるとよい．例えば、随伴表現を計算するには以下のような命令を定義する．

```

Ad[X_, Y_]:=X.Y - Y.X;
AdPower[X_, Y_, n.]:=Module[{temp},
temp = Ad[X, Y];

```

14:39, 25th Apr, 2014

```

Do[temp = Ad[X, temp], {i, 2, n}];
temp
];

```

また, S_i を計算するには, 例えば,

```

PolarizeQ[Q_]:=Module[{X, Y, H},
  {X, H, Y} = {∂ζ0∂ζ0Q[ζ0, ζ1], 2∂ζ0∂ζ1Q[ζ0, ζ1], ∂ζ1∂ζ1Q[ζ0, ζ1]} //Simplify;
  {X + Y, i(X - Y), -iH} //Simplify
];

```

のような命令を定義して分極を計算し, 得られた多項式中の各 $\zeta_0^{2n}\zeta_1^{2k-2-2n}$ を

$$\frac{(2k-2-2n)!}{(2k-2)!} \text{AdPower}[Y, Xmax, 2n]$$

と置き換えればよい. ただし, $Xmax := X^{k-1}$ である.

以上の手順を用いて実際に S_i を求めてみる. まず, 表 4.3 の不変 2 元形式に reality の条件を課し, 正 4 面体, 正 8 面体, 正 20 面体の対称性を持つスペクトル曲線をそれぞれ以下とする.

$$\eta^3 + ia(\zeta^4 - 1) = 0, \quad (4.155)$$

$$\eta^4 + a(\zeta^8 + 14\zeta^4 + 1) = 0, \quad (4.156)$$

$$\eta^6 + a(\zeta^{10} + 11\zeta^5 - 1) = 0. \quad (4.157)$$

すると, それぞれの対称性における分極 P_{tet} , P_{oct} , P_{ico} はそれぞれ以下ようになる.

$$P_{tet} = \frac{i}{10}(e_1, e_2, e_3) = (2i(\zeta_0\zeta_1^3 - \zeta_0^3\zeta_1), 2(\zeta_0\zeta_1^3 + \zeta_0^3\zeta_1), (\zeta_1^4 - \zeta_0^4)),$$

$$P_{oct} = \frac{1}{56}(e_1, e_2, e_3) = ((\zeta_0^2 + \zeta_1^2)^3, i(\zeta_0^2 - \zeta_1^2)^3, -8i\zeta_1^3\zeta_0^3),$$

$$P_{ico} = -\frac{1}{110}(e_1, e_2, e_3) = (\zeta_0\zeta_1(\zeta_0^8 - 3\zeta_0^5\zeta_1^3 - 3\zeta_0^3\zeta_1^5 - \zeta_1^8),$$

$$i\zeta_0\zeta_1(\zeta_0^8 + 3\zeta_0^5\zeta_1^3 - 3\zeta_0^3\zeta_1^5 + \zeta_1^8), \frac{1}{5}i(\zeta_1^{10} + \zeta_1^5\zeta_0^5 - \zeta_0^{10})).$$

これより, 正 4 面体の対称性の場合, $so(3)$ の基底行列を 3×3 の表現として

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = i \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (4.158)$$

と置くと, S_i は P_{tet} から計算したものに $(-i/4)$ を掛けて, それぞれ以下ようになる.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = i \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.159)$$

すると、交換関係

$$[S_1, S_2] = \frac{1}{8}\rho_3, \quad [S_1, \rho_3] + [\rho_1, S_2] = -4S_3$$

などより $\alpha = 0, \beta = -4, \gamma = \frac{1}{8}, \delta = 0$ であることがわかり、式 (4.146) は以下ようになる。

$$\frac{dx}{ds} = 2x^2 + \frac{1}{8}y^2, \quad \frac{dy}{ds} = -4xy. \quad (4.160)$$

これを解くには、求めた交換関係の下で、改めてスペクトル曲線を計算してみる。すると、正 4 面体の対称性を持つスペクトル曲線として以下が得られる。

$$\eta^3 - \frac{i}{2}(48x^2 + y^2)y\zeta(\zeta^4 - 1). \quad (4.161)$$

ただし、Nahm データを反エルミートとしており、 x と $y = iv$ と置いたときの v は実数であることに注意。これを見ると、 $c = (48x^2 - v^2)v$ が積分定数であることがわかり、これより x と y を消去して Nahm 方程式に代入すれば、

$$-v^2 = 16 \cdot \frac{1}{48} \left(\frac{c}{v} + v^2 \right) (-v^2) \iff 3v'^2 = v^4 + cv.$$

ここで、 $v = c^{1/3}w(u)^{-1}$ 、 $u = c_1s + c_2$ と置けば、

$$3 \left(-\frac{c^{1/3}}{w^2} c_1 w' \right)^2 = \frac{c^{4/3}}{w^4} + \frac{c^{4/3}}{w} \iff 12c^{-2/3} c_1^2 w'^2 = 4w^3 + 4$$

となるが、さらに $c_1^{-1} = 2\sqrt{3}c^{-1/3}$ と置けば、結局、以下であることがわかる。

$$x = \frac{c^{1/3}}{8\sqrt{3}} \frac{\wp'(u)}{\wp(u)}, \quad y = \frac{ic^{1/3}}{\wp(u)}, \quad s = 2\sqrt{3}c^{-1/3}u + K. \quad (4.162)$$

ただし、 \wp は $\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) + 4$ を満たすワイエルシュトラスの楕円関数、 K は定数である。ここで、 \wp は $u = \frac{2}{3}\omega_1, \frac{4}{3}\omega_1$ で 0 となるので、Nahm データが $s = 0, 2$ で単純極を持つためには

$$s = \frac{1}{\omega_1}(3u - 2\omega_1) \quad (4.163)$$

と置けばよい。ただし、 ω_1 は \wp の周期であり、

$$2\omega_1 = \int_{-1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3 + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right). \quad (4.164)$$

以上の Nahm データを用いて計算した $k = 3$ のモノポールのエネルギー密度を図 4.2 に示す*)

正 8 面体の対称性を持つ Nahm データも、同様にして求められる。また、正 20 面体の対称性の場合、Nahm データは求まるが、それに Nahm 構成を行ってもモノポールが得られないことが示されている [29]。さらに、(4.158) の基底は [29] のものであるが、これは計算しやすく取られたものであり、基底を取り直した場合の Nahm データは [30]、エルミートに直した Nahm データは [40] に載っている。

*) Mathematica m から出力したそのままの eps ファイルでは、重すぎて pdf にすら変換できないので、画面上に表示したものをキャプチャした bmp ファイルを改めて eps に変換してある。

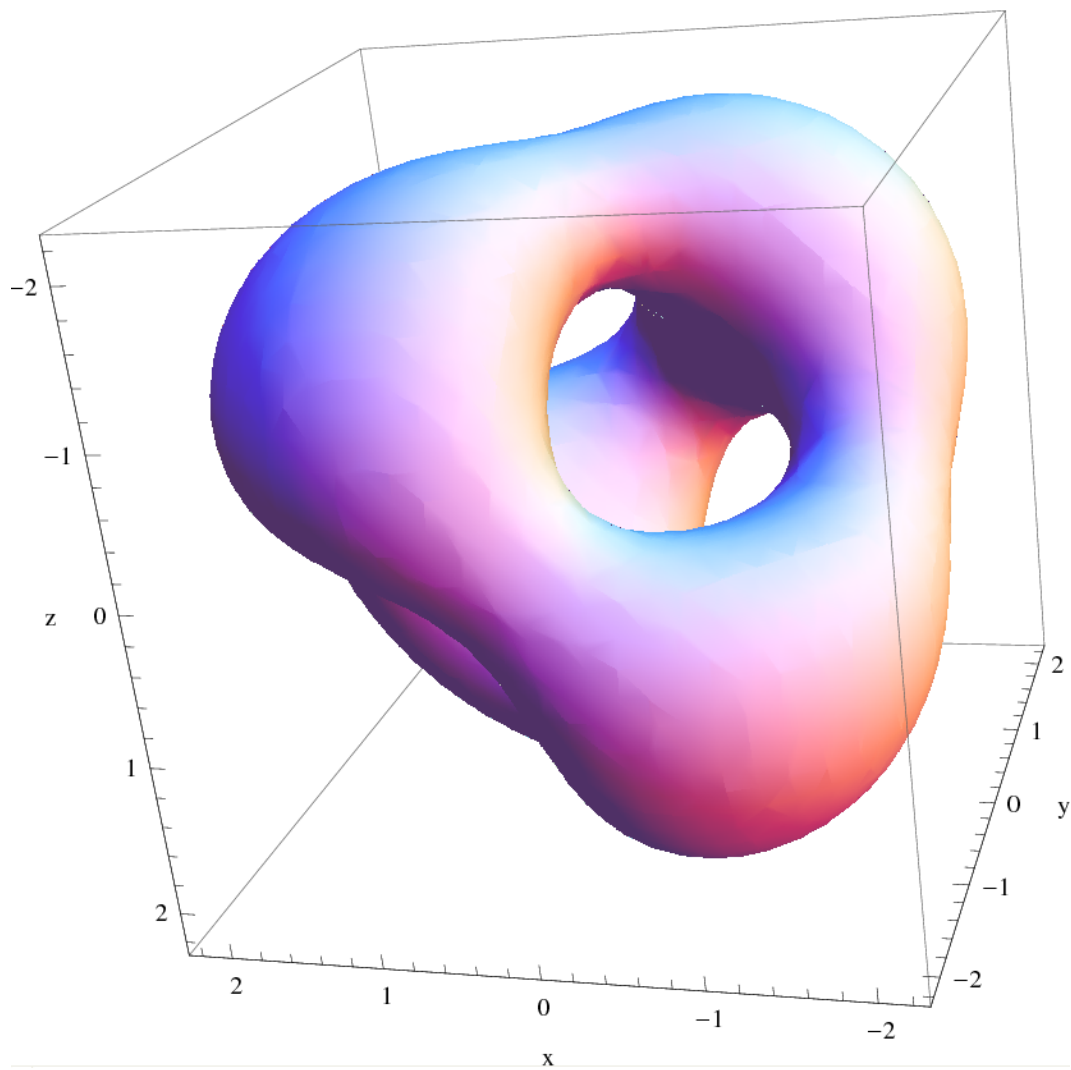


図 4.2: 正 4 面体の対称性を持つモノポールの等エネルギー面 ($\epsilon = 0.20$) .

第5章 caloron とその Nahm 構成法

前章までで、SU(2) Yang-Mills 理論における重要なソリトン解であるインスタントとモノポール、及びそれらを構成するための ADHM/Nahm 構成法について見た。本章では、それらの基礎的な知識を踏まえて、より応用的な caloron と呼ばれるソリトン解について見る。caloron とは、一言で言えば、4次元ユークリッド空間の1方向について周期的なインスタントンである。caloron はその周期の極限によりインスタントンとモノポールの間を繋ぐ、すなわち、インスタントンとモノポールの間の連続的な次元降下を行うような解である。caloron にも Nahm 構成法を応用でき、Nahm 方程式は新たに境界における方程式が加わる。

5.1 caloron の定義

4次元 pure Yang-Mills 理論におけるインスタントのうち、以下の性質を持つ解 $A_\mu(x)$ を caloron という。

- $x^4 = t$ について周期的。
- 全空間で滑らか。
- 場の強さ $F_{\mu\nu}$ は自己双対条件 $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = F_{\mu\nu}$ を満たす。
- $r \rightarrow \infty$ で $\text{Tr } F_{\mu\nu}^2 \rightarrow O(1/r^4)$ 。

caloron の周期を β としたとき、以下をホロノミー (holonomy) または Wilson loop という

$$\Omega_\beta(x^j) = \mathcal{P} \exp \left[- \int_0^\beta A_t(x^j, t) dt \right] \in \text{SU}(2). \quad (5.1)$$

ここで、caloron のホロノミーは周期についての周回積分なので、普通は積分が0となり、ホロノミーは単位行列になるように思われる。そのようなホロノミーを自明なホロノミー (trivial holonomy) という。ところが、SU(2) Yang-Mills 理論においてゲージ場は非可換なので、その積分は必ずしも単位行列になるとは限らない。そのようなホロノミーを非自明なホロノミー (non-trivial holonomy) という。 $\Omega_\beta(x^j)$ は、 $\Lambda(x) \in \text{SU}(2)$ による周期的なゲージ変換により以下のように変換される。

$$\Omega_\beta(x^j) \mapsto \Lambda(x^j, 0)^{-1} \Omega_\beta(x^j) \Lambda(x^j, 0). \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \Omega_\beta(x^j) &\mapsto \mathcal{P} \exp \left[- \int_0^\beta \left\{ \Lambda(x^j, 0)^{-1} A_t(x^j, t) \Lambda(x^j, 0) + \Lambda(x^j, 0)^{-1} \partial_t \Lambda(x^j, 0) \right\} dt \right] \\ &= \Lambda(x^j, 0)^{-1} \mathcal{P} \exp \left[- \int_0^\beta A_t(x^j, t) dt \right] \Lambda(x^j, 0) = \Lambda(x^j, 0)^{-1} \Omega_\beta(x^j) \Lambda(x^j, 0). \end{aligned}$$

14:39, 25th Apr, 2014

また, caloron のチャージ k はインスタントンと同様に以下のように定義される .

$$k = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^\beta dt \int d^3x \operatorname{Tr} (\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}). \quad (5.3)$$

't Hooft アンザッツ

$$A_\mu(x) = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^{(+)} \partial_\nu \ln \phi \quad (5.4)$$

に自己双対条件を課すと, $\phi(x)$ に対する以下のような方程式が得られるのであった .

$$\frac{\square\phi}{\phi} = 0. \quad (5.5)$$

ここで, 解に 3 次元における球対称性を仮定すると, $r := (x_i x_i)^{1/2}$, $t := x_4$ として,

$$\square\phi = \ddot{\phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (5.6)$$

となり, さらに, $\phi(x) = r^{-1} f(r, t)$ と置けば,

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \ddot{f} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-f + r f') = \frac{1}{r} (\ddot{f} + f'') \quad (5.7)$$

となる . すると, $\ddot{f} + f'' = 0$ であればよいことがわかるが, これは 2 次元の波動方程式なので, $\xi = r + it$, $\eta = r - it$ と置けば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} & \therefore \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = i \frac{\partial}{\partial \xi} - i \frac{\partial}{\partial \eta} & \therefore \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \therefore \ddot{f} + f'' &= 4 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \iff f = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(r + it) + f_2(r - it) \end{aligned}$$

となり, 解は以下となることがわかる .

$$\phi = \frac{1}{r} \{f_1(r + it) + f_2(r - it)\}. \quad (5.8)$$

ただし, f_1, f_2 は任意関数である . この解は, 一般には複素平面 $z = r + it$ 内で定義されるものであるが, $f_1 = f_2 = (\lambda^2/4) \coth(\mu_0 z/2)$ と置けば, 三角関数と双曲線関数の公式

$$\begin{aligned} \cosh(z_1 + z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, & \cosh iz &= \cos z, \\ \sinh(z_1 + z_2) &= \cosh z_1 \sinh z_2 + \sinh z_1 \cosh z_2, & \sinh iz &= i \sin z, \\ \cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1, & \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z}, & \coth z_1 + \coth z_2 &= \frac{\sinh(z_1 + z_2)}{\sinh z_1 \sinh z_2}, \\ \cosh 2z &= 2 \cosh^2 z - 1, & \cos 2z &= 2 \cos^2 z - 1 \end{aligned}$$

などに注意して,

$$\phi = \frac{\lambda^2}{4r} \left\{ \coth \frac{\mu_0}{2} (r + it) + \coth \frac{\mu_0}{2} (r - it) \right\}$$

14:39, 25th Apr, 2014

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^2}{4r} \frac{\sinh \mu_0 r}{\left| \sinh(\mu_0 r/2) \cos(\mu_0 t/2) + i \cosh(\mu_0 r/2) \sin(\mu_0 t/2) \right|^2} \\
&= \frac{\lambda^2}{4r} \frac{\sinh \mu_0 r}{4r - \cos^2(t/2) + \cosh^2(r/2)} = \frac{\lambda^2}{2r} \frac{\sinh \mu_0 r}{\cosh \mu_0 r - \cos \mu_0 t} \quad (5.9)
\end{aligned}$$

となり, すべて実数で表せる. ただし, λ, μ_0 は任意の実数である. この解を Harrington-Shepard caloron という. ここで, 式 (5.9) の最右辺は以下の公式に似ている^{*)}.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + (a + 2n\pi)^2} = \frac{\sinh x}{2x(\cosh x - \cos a)}. \quad (5.10)$$

そこで, $\mu_0 = 2\pi/\beta$ に対して $a_j = (0, 0, 0, j\beta)$ とすると,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x - a_j|^2} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^2 + (t - j\beta)^2} = \mu_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\mu_0 r)^2 + (\mu_0 t + 2n\pi)^2} \\
&= \frac{\mu_0}{2r} \frac{\sinh \mu_0 r}{\cosh \mu_0 r - \cos \mu_0 t} \quad \therefore \phi(x) = \frac{\lambda^2}{\mu_0} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x - a_j|^2}, \quad (5.11)
\end{aligned}$$

すなわち, Harrington-Shepard caloron はサイズが λ^2/μ_0 の JNR 1-インスタントンを周期 β で並べたものに等しいことがわかる. また, Harrington-Shepard caloron に対して,

$$A_0 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} i \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 \end{pmatrix} + O(r^{-1}) \quad (5.12)$$

となるようなゲージ A_0 が取れるので, ホロノミーは以下のようにして自明であることがわかる.

$$\begin{aligned}
\Omega(\infty) &= \mathcal{P} \exp \left[-i \int_0^{2\pi/\mu_0} \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 \end{pmatrix} dt \right] = \exp \begin{pmatrix} -2\pi i & 0 \\ 0 & 2\pi i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{1}_2. \quad (5.13)
\end{aligned}$$

5.2 caloron の Nahm 構成法とその例

前章で見た ADHM/Nahm 構成法は caloron に対しても応用される. caloron はインスタントンの一種なので, caloron に対する ADHM データが考えられるが, caloron の周期性より行列の型は有限でなくなり, 一種のフーリエ展開と見なすことができる. その結果として導かれる構成法は, Nahm 構成法に不純物項 (impurity) が含まれる形となる. 本節では, ADHM/Nahm 構成法の caloron への応用と, caloron の Nahm 構成の例として Ward の 2, 3, 4-symmetric caloron について見てみる.

^{*)}岩波数学公式 II の 68 ページの下から 2 つ目の公式.

5.2.1 caloron の Nahm 構成法

先に見たように, Harrington-Shepard caloron は't Hooft インスタントン (ほとんど JNR 1-インスタントンと同じ) を時間軸上に周期的に並べたものである. すると, 原点にある Harrington-Shepard caloron の 0 次元ディラック作用素 Δ は, 't Hooft インスタントンの場合の拡張として以下のようになると考えられる.

$$\Delta = \begin{pmatrix} \cdots & \lambda_{-2} & \lambda_{-1} & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots \\ \ddots & & & & & & \\ & -2\beta & & & & O & \\ & & -\beta & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & +\beta & & \\ O & & & & & +2\beta & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \ddots & & & & & & \\ & x & & & & O & \\ & & x & & & & \\ & & & x & & & \\ & & & & x & & \\ O & & & & & x & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \\ =: {}^t \begin{pmatrix} W & B \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

ただし, $\lambda_n, \beta = 2\pi/\mu_0$ は実四元数, W は長さ ∞ の行ベクトル, B は $\infty \times \infty$ の正方行列であり, 四元数の 2 次複素行列表現における 2×2 の単位行列は省略してある. Δ は caloron についてのディラック作用素であり, それは時間 $t = x_4$ について周期的である. そこで, W, B をそれぞれ t に対応する空間 (座標を s とする) における微分作用素と見なし, そこでのフーリエ展開の基底 $e^{i\beta ns}/\sqrt{\mu_0}$ を用いてそれぞれ展開することを考える. すると, まず, $W(s)$ は以下のように表せる.

$$W(s) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{i\beta ns} = \frac{\lambda}{\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\beta ns} = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(s - 2\pi n/\beta). \quad (5.15)$$

ただし, 習慣的に $\lambda_n = \lambda/\sqrt{\mu_0}$ とした. また,

$$\beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\beta ns} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(s - 2\pi n/\beta) \quad (5.16)$$

は周期デルタ関数であり, s 上の点 $2\pi n/\beta$ ($n \in \mathbb{Z}$) にデルタ関数が並んでいるような関数である. ここで, 周期デルタ関数の 1 周期のみを考えることにすると, $\beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\beta ns} = \delta(s)$ であり, $W(s)$ は, 結局, 以下のように書ける.

$$W(s) = \frac{\lambda}{2\pi} \delta(s). \quad (5.17)$$

次に, B は, $W(s)$ と同様に以下のようになる.

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\mu_0} \sum_{m,n} (m\beta + x) \delta_{mn} e^{-i\beta ms'} e^{i\beta ns} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{-i} \frac{d}{ds'} + x \right) e^{i\beta m(s-s')} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(i \frac{d}{ds'} + x \right) \delta(s - s'). \end{aligned} \quad (5.18)$$

14:39, 25th Apr, 2014

そして、このようにフーリエ級数展開した Δ に対して、そのゼロモードを、

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} V(x^\alpha) \\ U(s, x^\alpha) \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

と置いてみる。すると、Weyl 方程式は、

$$\Delta^\dagger \mathcal{V} = \begin{pmatrix} W(s)^\dagger & B(s)^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(x^\alpha) \\ U(s, x^\alpha) \end{pmatrix} = W(s)^\dagger V(x^\alpha) + B(s)^\dagger U(s, x^\alpha) = 0 \quad (5.20)$$

となるが、 $B(s)^\dagger U(s, x^\alpha)$ は内積なので、

$$\begin{aligned} B(s)^\dagger U(s, x^\alpha) &= \int_0^{\mu_0} \frac{1}{2\pi} \left(i \frac{d}{ds'} + x^\dagger \right) \delta(s - s') U(s', x^\alpha) ds' \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(i \frac{d}{ds} + x^\dagger \right) U(s, x^\alpha) \end{aligned} \quad (5.21)$$

となり、結局、以下となることがわかる。

$$\lambda \delta(s) V(x^\alpha) + \left(i \frac{d}{ds} + x^\dagger \right) U(s, x^\alpha) = 0. \quad (5.22)$$

これを一般の caloron へ拡張するには、 $B(s)$ を以下のように置き直す。

$$B(s) = i \frac{d}{ds} + T(s)^\dagger + x^\dagger. \quad (5.23)$$

ただし、 $T(s) = T_\mu(s) \otimes e_\mu$ 、 $T_\mu(s)$ は $k \times k$ のエルミート行列である。また、 $W(s)$ については、 $k = 1$ の場合の

$$W_1 = (\dots, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \dots) \quad (5.24)$$

の各成分を $SU(2)$ における

$$g(\mu) = e^{-i\beta\mu\hat{\omega}\cdot\sigma} \quad (5.25)$$

のようなゲージを用いて以下のように変換する*)。

$$W_1 \mapsto (\dots, g^{-2}\lambda, g^{-1}\lambda, \lambda, g\lambda, g^2\lambda, \dots). \quad (5.26)$$

ただし、 $0 \leq \mu \leq \mu_0/2$ であり、 $\hat{\omega} \cdot \sigma$ は純虚四元数、 σ はパウリ行列である。すると、 W_1 は先と同様にフーリエ級数展開で表せ、以下のようなになる。

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\lambda}{\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\beta n \mu \hat{\omega} \cdot \sigma} e^{i\beta n s} = \frac{\lambda}{\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathbf{1}_2 \cos \beta n \mu - i \hat{\omega} \cdot \sigma \sin \beta n \mu) e^{i\beta n s} \\ &= \frac{\lambda}{2\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \mathbf{1}_2 (e^{i\beta n \mu} + e^{-i\beta n \mu}) - \hat{\omega} \cdot \sigma (e^{i\beta n \mu} - e^{-i\beta n \mu}) \} e^{i\beta n s} \end{aligned}$$

*)これは一種のアンザッツである。

14:39, 25th Apr, 2014

$$= \frac{\lambda}{\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{P_+ e^{i\beta n(s-\mu)} + P_- e^{i\beta n(s+\mu)}\} = \frac{\lambda}{2\pi} \{P_+ \delta(s-\mu) + P_- \delta(s+\mu)\}. \quad (5.27)$$

ただし,

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_2 \pm \hat{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_2 \pm i\hat{\omega} \cdot \mathbf{e}) \quad (5.28)$$

であり, これらはそれぞれ $P_{\pm}^2 = P_{\pm}$, $P_{\pm}^{\dagger} = P_{\pm}$ を満たす, すなわち, 射影演算子である. この変換により, s 上の区間 $I = [-\mu_0/2, \mu_0/2]$ は 2 つの区間 $I_1 = [-\mu, \mu]$, $I_2 = [\mu, \mu_0 - \mu]$ の直和に分けられる, すなわち, $I = I_1 \oplus I_2$ となる. また, ここに現れる因子を用いて, 一般の caloron のディラック作用素 Δ は以下のように書ける.

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{P_+ \delta(s-\mu) + P_- \delta(s+\mu)\}W \\ \mathbf{1}_{2k} i \frac{d}{ds} + (T_{\mu} + x_{\mu} \mathbf{1}_k) \otimes e_{\mu}^{\dagger} \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

すると, $\Delta^{\dagger} \Delta$ は以下ようになる.

$$\Delta^{\dagger} \Delta = W^{\dagger} \{P_+ \delta(s-\mu) + P_- \delta(s+\mu)\}W + B^{\dagger} B. \quad (5.30)$$

(P_{\pm} が射影演算子であることと, デルタ関数の 2 乗はもとのデルタ関数に等しいことに注意*). ここで, パウリ行列の係数は, 第 2 項についてはモノポールの Nahm 構成法の場合と同様である. ただし, caloron の場合は一般に $T_4 = 0$ とは限らないことに注意. また, 第 1 項については, ADHM 構成法の場合と同様にパウリ行列を掛けてトレースをとればよい. すると, 以下のような Nahm 方程式が得られる.

$$\frac{d}{ds} T_j + i[T_j, T_4] - \frac{i}{2} \varepsilon_{jkl} [T_k, T_l] = \frac{1}{2} \text{Tr}_2 \left[\sigma_j W^{\dagger} \{P_+ \delta(s-\mu) + P_- \delta(s+\mu)\}W \right]. \quad (5.31)$$

ただし, Tr_2 は四元数についてのトレースである. ここで, 式 (5.31) は区間 $I = [-\mu_0/2, \mu_0/2]$ の全体における方程式であるが, I は 2 つの区間 $I_1 = [-\mu, \mu]$, $I_2 = [\mu, \mu_0 - \mu]$ に分けられおり, それらの上で 2 つの独立な Nahm データ $T_{\mu}^{(1)}$, $T_{\mu}^{(2)}$ が考えられる (図 5.1). そのとき, I_1, I_2 での境界を除いた Nahm 方程式は以下ようになる.

$$\frac{d}{ds} T_j^{(m)} + i[T_j^{(m)}, T_4^{(m)}] - \frac{i}{2} \varepsilon_{jkl} [T_k^{(m)}, T_l^{(m)}] = 0. \quad (5.32)$$

ただし, $m = 1, 2$ である. これを bulk の Nahm 方程式, $T_{\mu}^{(m)}(s)$ を bulk の Nahm データという. また, I_1, I_2 の境界 $s = \pm\mu$ で Nahm データが連続であるとは限らないので, caloron の Nahm 方程式には $s = \pm\mu$ における境界条件が必要となる. それらは, 境界付近の $s = \pm\varepsilon$ の間で式 (5.31) の両辺を積分してから $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を取ることで, 以下となることがわかる.

$$\begin{cases} T_j^{(2)}(\mu) - T_j^{(1)}(\mu) = \frac{1}{2} \text{Tr}_2(\sigma_j W^{\dagger} P_+ W) \\ T_j^{(1)}(-\mu) - T_j^{(2)}(\mu_0 - \mu) = \frac{1}{2} \text{Tr}_2(\sigma_j W^{\dagger} P_- W) \end{cases} \quad (5.33)$$

*) Δ に Δ^{\dagger} が作用するので, Δ^{\dagger} の中の変数を s' などとし, 暗黙に s' で 1 度積分する.

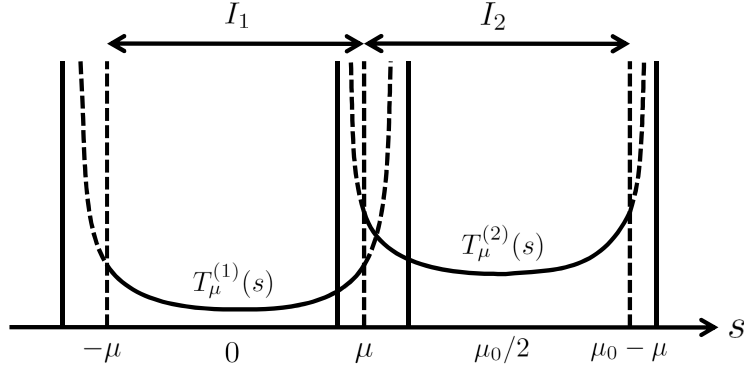


図 5.1: caloron の Nahm データが定義される区間 .

これらを境界における Nahm 方程式 (matching conditions) , W , $\hat{\omega}$ を境界での Nahm データ (boundary data) という .

Nahm データが得られれば , ADHM 構成法のと看と同様 , ゼロモード $\mathcal{V} = {}^t(V(x), U(s, x))$ に対する以下の Weyl 方程式が考えられる .

$$\left\{ \mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - i(T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k) \otimes e_\mu \right\} U(s, x) = iW^\dagger \{P_+ \delta(s - \mu) + P_- \delta(s + \mu)\} V(x). \quad (5.34)$$

ただし , caloron の周期性より , $U(s, x)$ は s について周期 $2\pi/\beta$ を持つ周期関数でなければならず ,

$$U(s, x + \beta) = U(s, x) e^{i\beta s}, \quad V(x + \beta) = V(x) \quad (5.35)$$

を満たさなければならない . そのようなゼロモードを

$$\mathcal{V}^\dagger \mathcal{V} = \mathbf{1}_k \quad (5.36)$$

のように規格化すれば , 対応する caloron のゲージ場 $A_\alpha(x)$ は以下で与えられる .

$$A_\alpha(x) = \mathcal{V}^\dagger \partial_\alpha \mathcal{V}. \quad (5.37)$$

このとき , Nahm 方程式のと看と同様 , ゼロモードの区間内に対する成分も $U^{(m)}(s, x)$ と 2 つの区間 I_1, I_2 ごとに考えられる . すると , Weyl 方程式は I_1, I_2 における bulk の Weyl 方程式 (bulk Weyl equation)

$$\left\{ \mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - i(T_\mu^{(m)} + x_\mu \mathbf{1}_k) \otimes e_\mu \right\} U^{(m)}(s, x) = 0, \quad (5.38)$$

及び , 境界における Weyl 方程式 (boundary Weyl equation)

$$\begin{cases} U^{(2)}(\mu, x^\alpha) - U^{(1)}(\mu, x^\alpha) = iW^\dagger P_+ V(x^\alpha) \\ U^{(1)}(-\mu, x^\alpha) - U^{(2)}(\mu_0 - \mu, x^\alpha) = iW^\dagger P_- V(x^\alpha) \end{cases} \quad (5.39)$$

の 2 種類に分けられる . また , 規格化条件は ,

$$\sum_m \int_{I_m} U^{(m)\dagger} U^{(m)} ds + V^\dagger V = \mathbf{1}_k \quad (5.40)$$

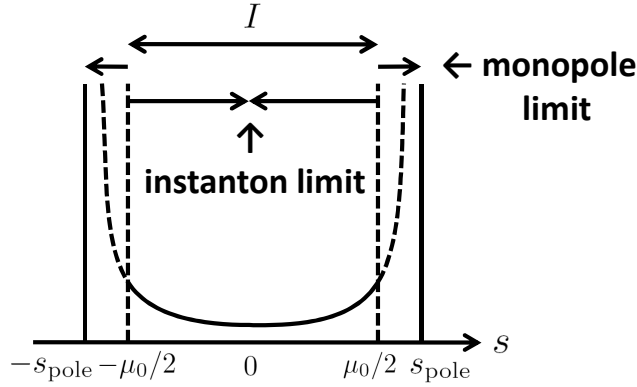


図 5.2: 零質量極限における caloron のモノポール極限とインスタントン極限 .

となり, 対応する caloron のゲージ場を与える表式は以下ようになる .

$$A_\alpha(x) = \sum_m \int_{I_m} U^{(m)\dagger} \partial_\alpha U^{(m)} ds + V^\dagger \partial_\alpha V. \quad (5.41)$$

このように 2 つの区間で定義された Nahm データに対応する caloron は, 非自明なホロノミーを持つことが知られている . しかし, その扱いは非常に難しいので, 片方の極限をなくす, $\mu \rightarrow \mu_0/2$ または $\mu \rightarrow 0$ という極限を取る場合がある (図 5.2) . これらの場合, caloron は自明なホロノミーを持つことが知られている . このような極限を零質量極限 (massless monopole limit) という . 零質量極限を取った場合, Nahm 方程式は,

$$\frac{d}{ds} T_j + i[T_j, T_4] - \frac{i}{2} \varepsilon_{jkl} [T_k, T_l] = \frac{1}{2} \text{Tr}_2(\sigma_j W^\dagger W) \delta(s - \mu_0/2), \quad (5.42)$$

bulk の Nahm 方程式と matching condition は, それぞれ,

$$\frac{d}{ds} T_j + i[T_j, T_4] - \frac{i}{2} \varepsilon_{jkl} [T_k, T_l] = 0, \quad (5.43)$$

$$T_j(-\mu_0/2) - T_j(\mu_0/2) = \frac{1}{2} \text{Tr}_2(\sigma_j W^\dagger W), \quad (5.44)$$

Weyl 方程式は,

$$\left\{ \mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - i(T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k) \otimes e_\mu \right\} U(s, x) = iW^\dagger V(s) \delta(s - \mu_0/2), \quad (5.45)$$

bulk の Weyl 方程式と境界での Weyl 方程式は, それぞれ,

$$\left\{ \mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - i(T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k) \otimes e_\mu \right\} U(s, x) = 0, \quad (5.46)$$

$$U(-\mu_0/2, x) - U(\mu_0/2, x) = iW^\dagger V(x) \quad (5.47)$$

のように書ける .

最後に, caloron の極限について述べておく . まず, caloron の bulk データはモノポールの Nahm データなので, bulk データがいくつかの条件を満たせば周期極限によってモノポール極限を持つ

14:39, 25th Apr, 2014

ようになる．そのためには，モノポール極限において Nahm データが区間の両端で単純極を持たなければならないが，Nahm データは区間で滑らかでなければならないので，caloron の区間の外側に極があるような bulk データを考えればよい．もしくは，始めからモノポールの Nahm データを仮定し，その内側のある区間内を caloron の bulk データと見なせばよい．そのときの極の位置を $s = \pm s_{\text{pole}}$ とすれば，モノポール極限は $\mu_0/2 \rightarrow s_{\text{pole}}$ である．それから，別の周期極限 $\mu_0 \rightarrow 0$ はインスタントン極限であることが以下のようにして示せる．簡単のため，零質量極限の場合を考える．すると，極限によって区間 I が狭くなるので， $U(s, x)$ は近似的に

$$U(s, x) = U_0 + U_1 s \quad (5.48)$$

のように書ける．このとき，規格化条件は，

$$\begin{aligned} \int_I U^\dagger U ds + V^\dagger V &\simeq \int_{-\mu_0/2}^{\mu_0/2} \{U_0 U_0 + (U_0 U_1 + U_1 U_0) s\} ds + V^\dagger V \\ &= U_0' U_0' + V^\dagger V = \mathbf{1}_k \end{aligned} \quad (5.49)$$

となる．ただし， $U_0' = \sqrt{\mu_0} U_0$ とした．また，Weyl 方程式は，

$$\begin{cases} 0 = \left\{ \mathbf{1}_{2k} \frac{d}{ds} - i(T_\mu + x_\mu \mathbf{1}_k) \otimes e_\mu \right\} U(s, x) \simeq U_1 - i\{T_\mu(0) + x_\mu \mathbf{1}_k\} \otimes e_\mu U_0, \\ iW^\dagger V(x) = U(-\mu_0/2) - U(\mu_0/2) \simeq -\mu_0 U_1 \\ \iff \sqrt{\mu_0} U_1 = i\{T_\mu(0) + x_\mu \mathbf{1}_k\} \otimes e_\mu U_0' = -\frac{i}{\sqrt{\mu_0}} W^\dagger V \end{cases} \quad (5.50)$$

となるが，これはインスタントンのゼロモード $\nu = {}^t(V, U_0')$ に対する Weyl 方程式と見なせ，そのディラック作用素は以下のように書ける．

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Lambda \\ \{T_\mu(0) + x_\mu \mathbf{1}_k\} \otimes e_\mu^\dagger \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

ただし， $\Lambda = W/\sqrt{\mu_0}$ である．

このように，caloron は Nahm 構成法の上でもモノポール極限とインスタントン極限を持つので，既存のモノポールの Nahm データに対する matching condition を追加的に解くことで caloron の Nahm データを得て，さらにそのインスタントン極限を取ることで対応するインスタントンを得ることができる．

5.2.2 Ward の 2, 3, 4-symmetric caloron

前節で見たように，caloron の bulk データはモノポールの Nahm データと同じであり，さらに領域の境界における boundary データを求めることで完全な Nahm データを得る．この節では，対称性を持つモノポールの bulk データに matching condition を課すことで得られる 2, 3, 4-symmetric caloron について見てみる．

チャージ $k = 2$ のモノポールの Nahm データは 4 章で求めたが，今回はその簡単な場合である以下の形を採用する．

$$T_j(s) = f_j(s) \sigma_j, \quad (\text{not summed over } j) \quad (5.52)$$

14:39, 25th Apr, 2014

$$f_1(s) = f_3(s) = \frac{\pi}{4} \sec(\pi s/2), \quad f_2(s) = -\frac{\pi}{4} \tan(\pi s/2). \quad (5.53)$$

このとき、まず、matching condition の左辺は

$$T_j(-\mu_0/2) - T_j(\mu_0/2) = \{f_j(-\mu_0/2) - f_j(\mu_0/2)\}\sigma_j \quad (5.54)$$

となるが、 $f_1(s)$, $f_3(s)$ は偶関数なので 0 となり、

$$\{f_2(-\mu_0/2) - f_2(\mu_0/2)\}\sigma_2 = \frac{\pi}{2} \tan(\pi\mu_0/4)\sigma_2 \quad (5.55)$$

のみが残る。次に、matching condition の右辺は

$$\frac{1}{2} \text{Tr}_2(\sigma_j W^\dagger W) \quad (5.56)$$

である。ここで、 W は四元数成分の 2-行ベクトルなので、 $W^\dagger W$ は四元数成分の 2×2 の行列であり、その各四元数成分についてトレースが取られ、最終的には、普通の 2×2 の行列となって左辺と一致する。このとき、 $j = 1, 3$ のときは左辺が 0 となるが、もし $W^\dagger W$ に σ_1 か σ_3 が含まれると σ_j との掛け算の際に $\mathbf{1}_2$ が生じ、トレースが 0 でないので左辺と矛盾する。そこで、 W を以下のように置く。

$$W = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

すると、

$$\frac{1}{2} \text{Tr}_2(\sigma_2 W^\dagger W) = \frac{\lambda^2}{2} \text{Tr}_2 \left[\sigma_2 \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \right] = \frac{\lambda^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = \lambda^2 \sigma_2 \quad (5.58)$$

となり、

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi\mu_0}{4}\right)} \quad (5.59)$$

であることがわかるので、これらが求める boundary データである。

第6章 Conclusion

インスタントン/モノポールのモジュライの空間はそれぞれ自己双対/Bogomolny 条件から導かれるが、それらの住む空間とは別の次元において、同様のモジュライ空間が導かれる方程式系が存在する。それらの間の1対1対応が示されており、それをを用いてインスタントン/モノポールを構成する手法はADHM/Nahm 構成法として知られている。ADHM 構成法を用いれば、自己双対条件を満たす't Hooft インスタントンが容易に構成できる。また、Nahm 構成法からは TP_1 という空間に住むスペクトル曲線概念が導かれ、それらの対称性を考察することで高いチャージを持つモノポールを構成することができる。

ADHM/Nahm 構成法により、 $SU(2)$ Yang-Mills 理論における様々なソリトン解が新たに発見された。ADHM 構成法を用いずとも、自己双対条件を用いればBPST 解、't Hooft 解、JNR 解、Witten の Liouville 解といった様々なインスタントンが導かれるが、ADHM 構成法を用いた方が見通しが良くなる。一方、Nahm 構成法に関しては、BPS 極限における't Hooft-Polyakov モノポールである Prasad-Sommerfield 解に加え、トーラス、正4面体、正8面体、正20面体の対称性を持つチャージ $N = 2, 3, 4, 7$ のモノポールも、数値的にはあるが構成することができる。さらに、ADHM/Nahm 構成法はインスタントンやモノポールよりも複雑な caloron の解析にも応用され、実際に解の構成を行うことができる。因みに、そのような数値的な Nahm 構成を行う際に用いるプログラミングの手法は学部生でもわかる程度のものであり、プログラミングと数値計算の基本的な知識があれば実際に解を構成することも容易である。

$SU(2)$ Yang-Mills 理論におけるインスタントンやモノポールは重要なソリトン解であるが、このような古典解についての詳細な研究は近年において発展してきた超対称性理論や超弦理論と比べるとやや注目されない傾向があるように思われる。そのような高度な理論を古典理論に繋げようとする際に、この記事が読者の手助けとなることを期待する。

最後に、自分の卒業論文をホームページに掲載させてもらい、その手直しを助めてくださった今の指導教官の一人である浜中真志氏に深く感謝いたします。また、その他今までお世話になった方々に深く感謝し、その感謝の気持ちはこの多少(加筆修正して見やすくなったはずの)長めの記事を持って代えさせていただきます。

この記事の作成は日本学術振興会の経済援助の下行われました。

付録 A テンソルと行列

場の理論やゲージ場の理論は様々なテンソルや行列を用いて記述される。完全反対称テンソルやパウリ行列，四元数の 2 次複素表現における基底行列などはゲージ場の理論を学ぶ上で必須のものである。また，自己双対な 't Hooft の η 記号，'t Hooft 行列は自己双対 Yang-Mills や ADHM 構成法において重要な役割を果たす。この付録では，本論で扱うテンソルと行列の基本的な知識について述べる。

A.1 添え字についての注意

テンソル計算 (tensor calculus) において，扱う添え字の範囲は常に把握されるべきものである。添え字の範囲はその都度 $i, j = 1, 2$ といった形で示すものとする。また，添え字の種類がいくつかある場合には，用いる添え字をアルファベットの並び，大文字，小文字，ギリシャ文字などで使い分け，それぞれに対して範囲を指定するものとする。例えば，

$$i, j, k = 1, 2, 3, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \quad \mu, \nu, \rho, \sigma = 0, 1, 2, 3$$

のようにする。

2 つのテンソル A_i, B_i の縮約については，以下のアインシュタインの縮約記法 (Einstein summation convention) を用いる。

$$A_i B^i = g_{ij} A^i B^j = \sum_{i,j} g_{ij} A^i B^j. \quad (\text{A.1})$$

ただし， g_{ij} は計量テンソルと呼ばれる対称テンソルである。同じ添え字が 2 つ揃ったときには，特に断らない限りこのような和をとるものとする。また，縮約をとらない添え字が 2 つ以上ある場合には，その都度「not summed over \sim 」のように断るものとする。

本節では，主に 4 次元ユークリッド空間における理論を想定し，添え字の上下は気にせず，単に同じ添え字が 2 つ揃ったときに和をとるものとする。

A.2 クロネッカーのデルタ

以下のように定義されたテンソルをクロネッカーのデルタ (Kronecker's delta) という。

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}. \quad (\text{A.2})$$

14:39, 25th Apr, 2014

ただし, $i, j = 1, 2, \dots, n$ である. 定義より, クロネッカーのデルタは対称テンソルである. また, 1 階のテンソル T_i に対し,

$$\begin{aligned}\delta_{ij}T_i &= \delta_{1j}T_1 + \delta_{2j}T_2 + \dots + \delta_{jj}T_j + \dots + \delta_{nj}T_n \\ &= 0 \cdot T_1 + 0 \cdot T_2 + \dots + 1 \cdot T_j + \dots + 0 \cdot T_n = T_j,\end{aligned}$$

すなわち, クロネッカーのデルタはテンソルの添え字を入れ換える.

クロネッカーのデルタについての性質をいくつかまとめておく.

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad (\text{添え字の入れ換え}) \quad (\text{A.3})$$

$$\delta_{ij}T_i = T_j, \quad (\text{テンソルとの積}) \quad (\text{A.4})$$

$$\delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{jk}, \quad (\text{積の縮約}) \quad (\text{A.5})$$

$$\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = n. \quad (\text{添え字の縮約}) \quad (\text{A.6})$$

ただし, T_i は任意の 1 階のテンソルである.

A.3 完全反対称テンソル

以下のように定義されたテンソルを完全反対称テンソル (anti-symmetric tensor) という^{*)**)}.

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \dots p_n} := \begin{cases} 1 & (\text{even}) \\ -1 & (\text{odd}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}. \quad (\text{A.7})$$

ただし, $p_1, p_2, \dots, p_n = 1, 2, \dots, n$ であり, 「even」, 「odd」はそれぞれ (p_1, p_2, \dots, p_n) が偶置換, 奇置換の場合, 「otherwise」はそれ以外の場合を指す. 定義より, 2 つの添え字を入れ換えると, 置換の偶奇性が入れ換わるので符号が変わる, すなわち,

$$\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} = -\varepsilon_{p_1 \dots p_j \dots p_i \dots p_n}.$$

これより, 任意のテンソル T_{ij} に対して以下となることがわかる.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} T_{p_i p_j} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} T_{p_i p_j} + \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} T_{p_i p_j}) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} T_{p_i p_j} + \varepsilon_{p_1 \dots p_j \dots p_i \dots p_n} T_{p_j p_i}) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} T_{p_i p_j} - \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} T_{p_j p_i}) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} (T_{p_i p_j} - T_{p_j p_i}).\end{aligned}$$

また, 対称テンソル S_{ij} に対しては $\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} S_{p_i p_j} = 0$ であり, 特に,

$$\delta_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} = 0,$$

^{*)}一般に, $S_{ij} = S_{ji}$ を満たすテンソルを対称テンソル, $A_{ij} = -A_{ji}$ を満たすテンソルを反対称テンソルという.

^{**)}エディントンのイプシロン (Eddington's epsilon), レビ-チビタ記号 (Levi-Civita symbol) とも呼ばれる.

14:39, 25th Apr, 2014

すなわち，同じ添え字を 2 つ以上持つ完全反対称テンソルは 0 である．さらに，定義より，

$$\varepsilon_{p_1 \cdots p_{n-1} n} = \varepsilon_{p_1 \cdots p_{n-1}}$$

も成り立つ．ここで，右辺の完全反対称テンソルの添え字の範囲は $n - 1$ までとなることに注意（完全反対称テンソルの添え字の範囲の上限は添え字の数に等しい）．また，これを用いる際は， n を最後尾まで移動させる間の符号の変化に注意．

完全反対称テンソルを用いると， n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式は以下のように書ける*）．

$$|A| = \varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

これと，

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{1p_1} & \delta_{2p_1} & \cdots & \delta_{np_1} \\ \delta_{1p_2} & \delta_{2p_2} & \cdots & \delta_{np_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{1p_n} & \delta_{2p_n} & \cdots & \delta_{np_n} \end{vmatrix} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

を比較すれば，完全反対称テンソルは行列式を用いて以下のように表せることがわかる．

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} = \begin{vmatrix} \delta_{1p_1} & \delta_{2p_1} & \cdots & \delta_{np_1} \\ \delta_{1p_2} & \delta_{2p_2} & \cdots & \delta_{np_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{1p_n} & \delta_{2p_n} & \cdots & \delta_{np_n} \end{vmatrix}.$$

これに第 j 列について余因子展開を行えば，以下が得られる．

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} = \delta_{jp_1} \varepsilon_{jp_2 \cdots p_n} + \delta_{jp_2} \varepsilon_{p_1 j \cdots p_n} + \cdots + \delta_{jp_n} \varepsilon_{p_1 p_2 \cdots j}.$$

($1 \leq j \leq n$, not summed over j .)

また， $j = n$ として完全反対称テンソルの次数を下げれば，以下も得られる．

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} = \delta_{np_1} \varepsilon_{p_2 \cdots p_n} + \delta_{np_2} \varepsilon_{p_3 \cdots p_1} + \cdots + \delta_{np_n} \varepsilon_{p_1 \cdots p_{n-1}}.$$

行列式の表式を用いれば，2 つの完全反対称テンソルの積は以下のように書けることがわかる．

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} \varepsilon_{q_1 q_2 \cdots q_n} &= \begin{vmatrix} \delta_{1p_1} & \delta_{2p_1} & \cdots & \delta_{np_1} \\ \delta_{1p_2} & \delta_{2p_2} & \cdots & \delta_{np_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{1p_n} & \delta_{2p_n} & \cdots & \delta_{np_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1q_1} & \delta_{1q_2} & \cdots & \delta_{1q_n} \\ \delta_{2q_1} & \delta_{2q_2} & \cdots & \delta_{2q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{nq_1} & \delta_{nq_2} & \cdots & \delta_{nq_n} \end{vmatrix} \quad (\because |A| = |{}^t A|.) \\ &= \begin{vmatrix} \delta_{p_1 q_1} & \delta_{p_1 q_2} & \cdots & \delta_{p_1 q_n} \\ \delta_{p_2 q_1} & \delta_{p_2 q_2} & \cdots & \delta_{p_2 q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{p_n q_1} & \delta_{p_n q_2} & \cdots & \delta_{p_n q_n} \end{vmatrix}. \quad (\because |A||B| = |AB|, \delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{jk}.) \end{aligned}$$

*）逆に，行列式の性質は完全反対称テンソルの性質より導かれるべきであるかもしれないが，学部では行列式を先に習うのでその順序に従う．

14:39, 25th Apr, 2014

この表式は、積のいくつかの添え字についての縮約をとった場合の表式を導く際に役立つ。また、特に、すべての添え字についての縮約をとったものは、完全反対称テンソルの 0 でない成分の数、すなわち、置換の総数 $n!$ に等しい。

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \dots p_n} \varepsilon_{p_1 p_2 \dots p_n} = n!.$$

完全反対称テンソルについての性質をいくつかまとめておく。

$$\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} = -\varepsilon_{p_1 \dots p_j \dots p_i \dots p_n}, \quad (\text{添え字の入れ換え}) \quad (\text{A.8})$$

$$\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} T_{p_i p_j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} (T_{p_i p_j} - T_{p_j p_i}), \quad (\text{テンソルとの積}) \quad (\text{A.9})$$

$$\varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} S_{p_i p_j} = 0, \quad (S_{ij} = S_{ji}), \quad (\text{対称テンソルとの積}) \quad (\text{A.10})$$

$$\delta_{p_i p_j} \varepsilon_{p_1 \dots p_i \dots p_j \dots p_n} = 0, \quad (\text{添え字の縮約}) \quad (\text{A.11})$$

$$\varepsilon_{p_1 \dots p_{n-1} n} = \varepsilon_{p_1 \dots p_{n-1}}, \quad (n \text{ がある場合の次数下げ}) \quad (\text{A.12})$$

$$|A| = \varepsilon_{p_1 p_2 \dots p_n} a_{1 p_1} a_{2 p_2} \dots a_{n p_n}, \quad (\text{行列式の書き換え}) \quad (\text{A.13})$$

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \dots p_n} = \begin{vmatrix} \delta_{1 p_1} & \delta_{2 p_1} & \dots & \delta_{n p_1} \\ \delta_{1 p_2} & \delta_{2 p_2} & \dots & \delta_{n p_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{1 p_n} & \delta_{2 p_n} & \dots & \delta_{n p_n} \end{vmatrix}, \quad (\text{行列式を用いた表記}) \quad (\text{A.14})$$

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \dots p_n} \varepsilon_{q_1 q_2 \dots q_n} = \begin{vmatrix} \delta_{p_1 q_1} & \delta_{p_1 q_2} & \dots & \delta_{p_1 q_n} \\ \delta_{p_2 q_1} & \delta_{p_2 q_2} & \dots & \delta_{p_2 q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{p_n q_1} & \delta_{p_n q_2} & \dots & \delta_{p_n q_n} \end{vmatrix}, \quad (\text{積公式}) \quad (\text{A.15})$$

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \dots p_n} \varepsilon_{p_1 p_2 \dots p_n} = n!, \quad (\text{積の縮約}) \quad (\text{A.16})$$

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \dots p_n} = \delta_{m p_1} \varepsilon_{m p_2 \dots p_n} + \delta_{m p_2} \varepsilon_{p_1 m \dots p_n} + \dots + \delta_{m p_n} \varepsilon_{p_1 p_2 \dots m}, \quad (\text{余因子展開}) \quad (\text{A.17})$$

$(1 \leq m \leq n, \text{ not summed over } m.)$

$$\varepsilon_{p_1 p_2 \dots p_n} = \delta_{n p_1} \varepsilon_{p_2 \dots p_n} + \delta_{n p_2} \varepsilon_{p_3 \dots p_1} + \dots + \delta_{n p_n} \varepsilon_{p_1 \dots p_{n-1}}. \quad (\text{次数下げ}) \quad (\text{A.18})$$

ただし、 T_{ij} , S_{ij} は任意の 2 階のテンソル、 $A = (a_{ij})$ は任意の n 次正方行列である。

A.3.1 2 階の完全反対称テンソル

2 階の完全反対称テンソルは、以下のように行列を用いて表せる。

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ただし、 $\alpha, \beta = 1, 2$ である。2 階の完全反対称テンソルはスピノル添え字の上げ下げに用いられる。2 階の完全反対称テンソルについての公式をいくつかまとめておく。

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta} = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}, \quad (\text{A.19})$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma}. \quad (\text{A.20})$$

A.3.2 3階の完全反対称テンソル

3階の完全反対称テンソルの場合，積公式で添え字を1つ揃えたものは，

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{ji} & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{ki} & \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix} = \delta_{ii} \begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix} - \delta_{il} \begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{jm} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} \end{vmatrix} + \delta_{im} \begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{jl} \\ \delta_{ki} & \delta_{kl} \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jl} \\ \delta_{km} & \delta_{kl} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\end{aligned}$$

となり，さらに1つ揃えたものは，

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = \delta_{jj}\delta_{kl} - \delta_{jl}\delta_{kj} = 3\delta_{kl} - \delta_{kl} = 2\delta_{kl}$$

となる．また，クロネッカーのデルタとの積も以下のようにして計算できる．

$$\begin{aligned}\delta_{ij}\varepsilon_{klm} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jab}\varepsilon_{klm} = \frac{1}{2}\varepsilon_{jab} \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{ak} & \delta_{al} & \delta_{am} \\ \delta_{bk} & \delta_{bl} & \delta_{bm} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{jab} \left(\delta_{ik} \begin{vmatrix} \delta_{al} & \delta_{am} \\ \delta_{bl} & \delta_{bm} \end{vmatrix} - \delta_{il} \begin{vmatrix} \delta_{ak} & \delta_{am} \\ \delta_{bk} & \delta_{bm} \end{vmatrix} + \delta_{im} \begin{vmatrix} \delta_{ak} & \delta_{al} \\ \delta_{bk} & \delta_{bl} \end{vmatrix} \right) \\ &= \delta_{ik}\varepsilon_{jlm} + \delta_{il}\varepsilon_{kjm} + \delta_{im}\varepsilon_{klj}.\end{aligned}$$

この他にも，例えば，以下であることがわかる．

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{j pq} &= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\varepsilon_{j pq} = \delta_{kn}\varepsilon_{mpq} - \delta_{km}\varepsilon_{npq} \\ &= \delta_{mn}\varepsilon_{kpq} + \delta_{pn}\varepsilon_{mkq} + \delta_{qn}\varepsilon_{mpk} - (\delta_{nm}\varepsilon_{kpq} + \delta_{pm}\varepsilon_{nkq} + \delta_{qm}\varepsilon_{npk}) \\ &= \delta_{mp}\varepsilon_{knq} + \delta_{nq}\varepsilon_{kmp} - \delta_{mq}\varepsilon_{knp} - \delta_{np}\varepsilon_{kmq}.\end{aligned}$$

3階の完全反対称テンソルを用いると，ベクトル $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ， $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ の外積， \mathbf{a} ， \mathbf{b} ， $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ のスカラー三重積はそれぞれ以下のように書ける．

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k.$$

また，ベクトル三重積の公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ は以下のようにして導ける．

$$\begin{aligned}\{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\}_i &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_jb_lc_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})a_jb_lc_m \\ &= (a_jc_j)b_i - (a_jb_j)c_i = \{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}\}_i.\end{aligned}$$

3階の完全反対称テンソルについての公式をいくつかまとめておく．

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}, \quad (\text{A.21})$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}, \quad (\text{A.22})$$

$$\delta_{ij}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\varepsilon_{jlm} + \delta_{il}\varepsilon_{kjm} + \delta_{im}\varepsilon_{klj}, \quad (\text{A.23})$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{j pq} = \delta_{mp}\varepsilon_{knq} + \delta_{nq}\varepsilon_{kmp} - \delta_{mq}\varepsilon_{knp} - \delta_{np}\varepsilon_{kmq}. \quad (\text{A.24})$$

A.3.3 4階の完全反対称テンソル

4階の完全反対称テンソルの場合，積公式で添え字を2つ揃えたものは，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= \begin{vmatrix} \delta_{\mu\mu} & \delta_{\mu\nu} & \delta_{\mu\rho} & \delta_{\mu\sigma} \\ \delta_{\nu\mu} & \delta_{\nu\nu} & \delta_{\nu\rho} & \delta_{\nu\sigma} \\ \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} = \delta_{\mu\mu} \begin{vmatrix} \delta_{\nu\nu} & \delta_{\nu\rho} & \delta_{\nu\sigma} \\ \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} - \delta_{\mu\nu} \begin{vmatrix} \delta_{\nu\mu} & \delta_{\nu\rho} & \delta_{\nu\sigma} \\ \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} \\
&+ \delta_{\mu\rho} \begin{vmatrix} \delta_{\nu\mu} & \delta_{\nu\nu} & \delta_{\nu\sigma} \\ \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} - \delta_{\mu\sigma} \begin{vmatrix} \delta_{\nu\mu} & \delta_{\nu\nu} & \delta_{\nu\rho} \\ \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{\nu\nu} & \delta_{\nu\rho} & \delta_{\nu\sigma} \\ \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{\nu\nu} \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} - \delta_{\nu\rho} \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} + \delta_{\nu\sigma} \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} \\
&= 2(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho})
\end{aligned}$$

となり，さらに1つ揃えたものは，

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho} = 2(\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\rho} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\alpha}) = 2(4\delta_{\beta\rho} - \delta_{\beta\rho}) = 6\delta_{\beta\rho}$$

となる．また，クロネッカーのデルタとの積も以下のようにして計算できる．

$$\begin{aligned}
\delta_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\xi\lambda\eta}\varepsilon_{\nu\xi\lambda\eta}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{1}{6}\varepsilon_{\nu\xi\lambda\eta} \begin{vmatrix} \delta_{\mu\alpha} & \delta_{\mu\beta} & \delta_{\mu\rho} & \delta_{\mu\sigma} \\ \delta_{\xi\alpha} & \delta_{\xi\beta} & \delta_{\xi\rho} & \delta_{\xi\sigma} \\ \delta_{\lambda\alpha} & \delta_{\lambda\beta} & \delta_{\lambda\rho} & \delta_{\lambda\sigma} \\ \delta_{\eta\alpha} & \delta_{\eta\beta} & \delta_{\eta\rho} & \delta_{\eta\sigma} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\varepsilon_{\nu\xi\lambda\eta} \left(\delta_{\mu\alpha} \begin{vmatrix} \delta_{\xi\beta} & \delta_{\xi\rho} & \delta_{\xi\sigma} \\ \delta_{\lambda\beta} & \delta_{\lambda\rho} & \delta_{\lambda\sigma} \\ \delta_{\eta\beta} & \delta_{\eta\rho} & \delta_{\eta\sigma} \end{vmatrix} - \delta_{\mu\beta} \begin{vmatrix} \delta_{\xi\alpha} & \delta_{\xi\rho} & \delta_{\xi\sigma} \\ \delta_{\lambda\alpha} & \delta_{\lambda\rho} & \delta_{\lambda\sigma} \\ \delta_{\eta\alpha} & \delta_{\eta\rho} & \delta_{\eta\sigma} \end{vmatrix} + \delta_{\mu\rho} \begin{vmatrix} \delta_{\xi\alpha} & \delta_{\xi\beta} & \delta_{\xi\sigma} \\ \delta_{\lambda\alpha} & \delta_{\lambda\beta} & \delta_{\lambda\sigma} \\ \delta_{\eta\alpha} & \delta_{\eta\beta} & \delta_{\eta\sigma} \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \delta_{\mu\sigma} \begin{vmatrix} \delta_{\xi\alpha} & \delta_{\xi\beta} & \delta_{\xi\rho} \\ \delta_{\lambda\alpha} & \delta_{\lambda\beta} & \delta_{\lambda\rho} \\ \delta_{\eta\alpha} & \delta_{\eta\beta} & \delta_{\eta\rho} \end{vmatrix} \right) = \delta_{\mu\alpha}\varepsilon_{\nu\beta\rho\sigma} + \delta_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\nu}.
\end{aligned}$$

4階の完全反対称テンソルについての公式をいくつかまとめておく．

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 2(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}), \quad (\text{A.25})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho} = 6\delta_{\beta\rho}, \quad (\text{A.26})$$

$$\delta_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = \delta_{\mu\alpha}\varepsilon_{\nu\beta\rho\sigma} + \delta_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\nu}. \quad (\text{A.27})$$

A.4 't Hooft の η 記号

以下のように定義されたテンソルを't Hooft の η 記号または't Hooft のイェータ・シンボル ('t Hooft η symbol) という*).

$$\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)} := \varepsilon_{a\mu\nu 4} \pm (\delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4}). \quad (\text{A.28})$$

*) $\eta_{\mu\nu}^a = \varepsilon_{a\mu\nu 4} + \delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4}$, $\bar{\eta}_{\mu\nu}^a = \varepsilon_{a\mu\nu 4} - \delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} + \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4}$ と書かれることもある．

14:39, 25th Apr, 2014

ただし, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, $a = 1, 2, 3$ であり, それぞれを空間添え字, アイソスピン添え字という. 定義より, 't Hooft の η 記号は空間添え字について反対称である. また, 't Hooft の η 記号は 4 次元空間において, 1 方向が特別な方向となる形で定義されていることに注意. これらより, 't Hooft の η 記号は以下のようにも定義される.

$$\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)} := -\eta_{\nu\mu}^{a(\pm)} := \begin{cases} \varepsilon_{a\mu\nu} & (\mu, \nu = 1, 2, 3) \\ \pm\delta_{a\mu} & (\nu = 4) \end{cases}. \quad (\text{A.29})$$

このような場合分けを避けるため, 本節では 1, 2, 3, 4 を想定していたが 1, 2, 3 の場合のみとなった添え字には「'」をつけることとする. このとき, 以下が成り立つことに注意.

$$\delta_{\mu\nu} = \delta_{\mu'\nu'} + \delta_{\mu 4}\delta_{\nu 4}. \quad (\text{A.30})$$

't Hooft の η 記号についての性質は, クロネッカーのデルタと完全反対称テンソルの性質より導かれる. まず, 't Hooft の η 記号の積の縮約については, 定義内の複合が一致する場合には以下のようになる.

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\rho\sigma}^{b(\pm)}, & \quad \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\rho\sigma}^{a(\pm)} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \pm \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \\ \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\sigma}^{b(\pm)} = \delta_{ab}\delta_{\nu\sigma} + \varepsilon_{abc}\eta_{\nu\sigma}^{c(\pm)}, & \quad \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\sigma}^{a(\pm)} = 3\delta_{\nu\sigma}, \\ \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\nu}^{b(\pm)} = 4\delta_{ab}, & \quad \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)} = 12. \end{aligned}$$

これらのうち, $\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\sigma}^{b(\pm)}$ の表式は,

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\sigma}^{a(\pm)} &= \{\varepsilon_{a\mu\nu 4} \pm (\delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4})\}\{\varepsilon_{a\rho\sigma 4} \pm (\delta_{a\rho}\delta_{\sigma 4} - \delta_{a\sigma}\delta_{\rho 4})\} \\ &= \delta_{\mu'\rho'}\delta_{\nu'\sigma'} - \delta_{\mu'\sigma'}\delta_{\nu'\rho'} \pm (\delta_{\sigma 4}\varepsilon_{\rho\mu\nu 4} - \delta_{\rho 4}\varepsilon_{\sigma\mu\nu 4} + \delta_{\nu 4}\varepsilon_{\mu\rho\sigma 4} - \delta_{\mu 4}\varepsilon_{\nu\rho\sigma 4}) \\ &\quad + \delta_{\mu'\rho'}\delta_{\nu 4}\delta_{\sigma 4} - \delta_{\mu'\sigma'}\delta_{\nu 4}\delta_{\rho 4} - \delta_{\nu'\rho'}\delta_{\mu 4}\delta_{\sigma 4} + \delta_{\nu'\sigma'}\delta_{\mu 4}\delta_{\rho 4} \\ &= \delta_{\mu'\rho'}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu'\sigma'}\delta_{\nu\rho} \pm (\delta_{\mu 4}\varepsilon_{4\nu\rho\sigma} + \delta_{\nu 4}\varepsilon_{\mu 4\rho\sigma} + \delta_{\rho 4}\varepsilon_{\mu\nu 4\sigma} + \delta_{\sigma 4}\varepsilon_{\mu\nu\rho 4}) \\ &\quad - (\delta_{\nu\rho}\delta_{\mu 4}\delta_{\sigma 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\rho 4}\delta_{\mu 4}\delta_{\sigma 4}) + (\delta_{\nu\sigma}\delta_{\mu 4}\delta_{\rho 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\sigma 4}\delta_{\mu 4}\delta_{\rho 4}) \\ &= \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \pm \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \end{aligned}$$

$\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\rho\sigma}^{a(\pm)}$ の表式は,

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\rho\sigma}^{b(\pm)} &= \{\varepsilon_{a\mu\nu 4} \pm (\delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4})\}\{\varepsilon_{b\rho\sigma 4} \pm (\delta_{b\rho}\delta_{\sigma 4} - \delta_{b\sigma}\delta_{\rho 4})\} \\ &= \delta_{ab}\delta_{\nu'\sigma'} \pm (\varepsilon_{ab\nu 4}\delta_{\sigma 4} - \varepsilon_{ab\sigma 4}\delta_{\nu 4}) + \delta_{ab}\delta_{\nu 4}\delta_{\sigma 4} + \delta_{a\nu}\delta_{b\sigma} \\ &= \delta_{ab}\delta_{\nu\sigma} \pm \varepsilon_{abc}(\delta_{c\nu}\delta_{\sigma 4} - \delta_{c\sigma}\delta_{\nu 4}) + \varepsilon_{abc}\varepsilon_{c\nu\sigma 4} \\ &= \delta_{ab}\delta_{\nu\sigma} + \varepsilon_{abc}\eta_{\nu\sigma}^{c(\pm)} \end{aligned}$$

のように示せ, これらより右下のものは空間添え字とアイソスピン添え字についての縮約をとることで順次得られる. また, 定義内の複合が逆の場合は, 例えば以下のようになる.

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\nu}^{b(\mp)} &= \{\varepsilon_{a\mu\nu 4} \pm (\delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4})\}\{\varepsilon_{b\mu\nu 4} \mp (\delta_{b\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{b\nu}\delta_{\mu 4})\} \\ &= 2\delta_{ab} - 2\delta_{ab} = 0. \end{aligned}$$

14:39, 25th Apr, 2014

次に，空間添え字を持つ完全反対称テンソルとの積で，1つの添え字を揃えたものは，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{\tau\sigma}^{a(\pm)} &= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\{\varepsilon_{a\tau\sigma 4} \pm (\delta_{a\tau}\delta_{\sigma 4} - \delta_{a\sigma}\delta_{\tau 4})\} = - \begin{vmatrix} \delta_{\mu a} & \delta_{\mu\tau} & \delta_{\mu 4} \\ \delta_{\nu a} & \delta_{\nu\tau} & \delta_{\nu 4} \\ \delta_{\rho a} & \delta_{\rho\tau} & \delta_{\rho 4} \end{vmatrix} \pm (\delta_{a\tau}\varepsilon_{\mu\nu\rho 4} - \delta_{\tau 4}\varepsilon_{\mu\nu\rho a}) \\
&= \delta_{\mu\tau}(\delta_{\nu a}\delta_{\rho 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\rho a}) - \delta_{\nu\tau}(\delta_{\mu a}\delta_{\rho 4} - \delta_{\mu 4}\delta_{\rho a}) + \delta_{\rho\tau}(\delta_{\mu a}\delta_{\nu 4} - \delta_{\mu 4}\delta_{\nu a}) \\
&\quad \pm \{\delta_{\tau'\mu'}\varepsilon_{a\nu\rho 4} + \delta_{\tau'\nu'}\varepsilon_{\mu a\rho 4} + \delta_{\tau'\rho'}\varepsilon_{\mu\nu a 4} + \delta_{\tau'4}\varepsilon_{\mu\nu\rho a} \\
&\quad - \delta_{\tau 4}(\delta_{\mu 4}\varepsilon_{4\nu\rho a} + \delta_{\nu 4}\varepsilon_{\mu 4\rho a} + \delta_{\rho 4}\varepsilon_{\mu\nu 4 a} + \delta_{a 4}\varepsilon_{\mu\nu\rho 4})\} \\
&= \delta_{\mu\tau}(\delta_{a\nu}\delta_{\rho 4} - \delta_{a\rho}\delta_{\nu 4} \pm \varepsilon_{a\nu\rho 4}) + \delta_{\nu\tau}(\delta_{a\rho}\delta_{\mu 4} - \delta_{a\mu}\delta_{\rho 4} \pm \varepsilon_{a\rho\mu 4}) \\
&\quad + \delta_{\rho\tau}(\delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4} \pm \varepsilon_{a\mu\nu 4}) \\
&= \pm(\delta_{\mu\tau}\eta_{\nu\rho}^{a(\pm)} + \delta_{\nu\tau}\eta_{\rho\mu}^{a(\pm)} + \delta_{\rho\tau}\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)})
\end{aligned}$$

となり，さらに1つの添え字を揃えれば以下が得られる．

$$\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)} = \pm \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{\rho\sigma}^{a(\pm)}. \quad (\text{A.31})$$

これは，(反)自己双対性 ((Anti-)Self-Duality, (A)SD) と呼ばれる非常に重要な性質である ($\eta_{\mu\nu}^{i(+)}$ が SD, $\eta_{\mu\nu}^{i(-)}$ が ASD に対応する)．(反)自己双対性を用いれば，先の定義内の符号が異なるもの同士が積が0となる性質は以下のようにしても導ける．

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\nu}^{b(\mp)} &= -\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\tau\kappa}\eta_{\rho\sigma}^{a(\pm)}\eta_{\tau\kappa}^{b(\mp)} = -\frac{1}{2}(\delta_{\rho\tau}\delta_{\sigma\kappa} - \delta_{\rho\kappa}\delta_{\sigma\tau})\eta_{\rho\sigma}^{a(\pm)}\eta_{\tau\kappa}^{b(\mp)} \\
&= -\eta_{\rho\sigma}^{a(\pm)}\eta_{\rho\sigma}^{b(\mp)} \iff \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\nu}^{b(\mp)} = 0.
\end{aligned}$$

それから，'t Hooft の η 記号の積にアイソスピン添え字を持つ完全反対称テンソルを掛け，2つの添え字を揃えたものは，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{abc}\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\rho\sigma}^{b(\pm)} &= \varepsilon_{abc}\{\varepsilon_{a\mu\nu 4} \pm (\delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4})\}\{\varepsilon_{b\rho\sigma 4} \pm (\delta_{b\rho}\delta_{\sigma 4} - \delta_{b\sigma}\delta_{\rho 4})\} \\
&= \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a\mu'\nu'}\varepsilon_{b\rho'\sigma'} \pm \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a\mu'\nu'}(\delta_{b\rho}\delta_{\sigma 4} - \delta_{b\sigma}\delta_{\rho 4}) \pm \varepsilon_{abc}\varepsilon_{b\rho'\sigma'}(\delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4}) \\
&\quad + \varepsilon_{abc}(\delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4})(\delta_{b\rho}\delta_{\sigma 4} - \delta_{b\sigma}\delta_{\rho 4}) \\
&= \delta_{\mu'\rho'}\varepsilon_{c\nu'\sigma'} + \delta_{\nu'\sigma'}\varepsilon_{c\mu'\rho'} - \delta_{\mu'\sigma'}\varepsilon_{c\nu'\rho'} - \delta_{\nu'\rho'}\varepsilon_{c\mu'\sigma'} \\
&\quad \pm \varepsilon_{a\rho'c}\varepsilon_{a\mu'\nu'}\delta_{\sigma 4} \pm \varepsilon_{a\sigma'c}\varepsilon_{a\mu'\nu'}\delta_{\rho 4} \pm \varepsilon_{\mu'bc}\varepsilon_{b\rho'\sigma'}\delta_{\nu 4} \pm \varepsilon_{\nu'bc}\varepsilon_{b\rho'\sigma'}\delta_{\mu 4} \\
&\quad + \varepsilon_{\mu'\rho'c}\delta_{\nu 4}\delta_{\sigma 4} - \varepsilon_{\mu'\sigma'c}\delta_{\nu 4}\delta_{\rho 4} - \varepsilon_{\nu'\rho'c}\delta_{\mu 4}\delta_{\sigma 4} + \varepsilon_{\nu'\sigma'c}\delta_{\mu 4}\delta_{\rho 4} \\
&= \delta_{\mu\rho}(\varepsilon_{c\nu\sigma 4} \pm \delta_{c\nu}\delta_{\sigma 4} \mp \delta_{c\sigma}\delta_{\nu 4}) + \delta_{\nu\sigma}(\varepsilon_{c\mu\rho 4} \pm \delta_{c\mu}\delta_{\rho 4} \mp \delta_{c\rho}\delta_{\mu 4}) \\
&\quad - \delta_{\mu\sigma}(\varepsilon_{c\nu\rho 4} \pm \delta_{c\nu}\delta_{\rho 4} \mp \delta_{c\rho}\delta_{\nu 4}) - \delta_{\nu\rho}(\varepsilon_{c\mu\sigma 4} \pm \delta_{c\mu}\delta_{\sigma 4} \mp \delta_{c\sigma}\delta_{\mu 4}) \\
&= \delta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}^{c(\pm)} + \delta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho}^{c(\pm)} - \delta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}^{c(\pm)} - \delta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}^{c(\pm)}
\end{aligned}$$

となり，さらに1つの空間添え字についての縮約をとれば以下が得られる．

$$\varepsilon_{abc}\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\sigma}^{b(\pm)} = 2\eta_{\nu\sigma}^{c(\pm)}.$$

't Hooft の η 記号についての公式をまとめておく．

$$\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\rho\sigma}^{a(\pm)} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \pm \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{A.32})$$

14:39, 25th Apr, 2014

$$\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\sigma}^{b(\pm)} = \delta_{ab}\delta_{\nu\sigma} + \varepsilon_{abc}\eta_{\nu\sigma}^{c(\pm)}, \quad (\text{A.33})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\nu}^{b(\pm)} = 4\delta_{ab}, \quad (\text{A.34})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\sigma}^{a(\pm)} = 3\delta_{\nu\sigma}, \quad (\text{A.35})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)} = 12, \quad (\text{A.36})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\nu}^{b(\mp)} = 0, \quad (\text{A.37})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{\tau\sigma}^{a(\pm)} = \pm(\delta_{\mu\tau}\eta_{\nu\rho}^{a(\pm)} + \delta_{\nu\tau}\eta_{\rho\mu}^{a(\pm)} + \delta_{\rho\tau}\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}), \quad (\text{A.38})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{\rho\sigma}^{a(\pm)} = \pm 2\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}, \quad (\text{A.39})$$

$$\varepsilon_{abc}\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\rho\sigma}^{b(\pm)} = \delta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}^{c(\pm)} + \delta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho}^{c(\pm)} - \delta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}^{c(\pm)} - \delta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}^{c(\pm)}, \quad (\text{A.40})$$

$$\varepsilon_{abc}\eta_{\mu\nu}^{a(\pm)}\eta_{\mu\sigma}^{b(\pm)} = 2\eta_{\nu\sigma}^{c(\pm)}. \quad (\text{A.41})$$

A.5 トレース

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し, 以下を A のトレース (trace) という*).

$$\text{Tr } A := \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{A.42})$$

定義より, トレースは明らかに線形性を持つ. また, 2 つの正方行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ に対し,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \text{Tr} \left(\sum_k a_{ik}b_{kj} \right) = \sum_{i,k} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k} b_{ik}a_{ki} = \text{Tr} \left(\sum_k b_{ik}a_{kj} \right) \\ &= \text{Tr}(BA), \end{aligned}$$

すなわち, トレース内では 2 つの行列の積は可換である. ところが, 3 つの正方行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ に対しては,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(ABC) &= \text{Tr} \left(\sum_{k,\ell} a_{ik}b_{k\ell}c_{\ell j} \right) = \sum_{i,k,\ell} a_{ik}b_{k\ell}c_{\ell i} = \sum_{i,k,\ell} b_{ik}c_{k\ell}a_{\ell i} = \text{Tr} \left(\sum_{k,\ell} b_{ik}c_{k\ell}a_{\ell j} \right) \\ &= \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB) \end{aligned}$$

となり, 可換ではなく循環する. この性質を循環律 (cyclic property) という. トレースの性質をまとめておく.

$$\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr } A + \mu \text{Tr } B, \quad (\text{線形性}) \quad (\text{A.43})$$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA), \quad (\text{可換性}) \quad (\text{A.44})$$

$$\text{Tr}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \text{Tr}(A_2 \cdots A_n A_1) = \cdots, \quad (\text{循環律}) \quad (\text{A.45})$$

$$\text{Tr}(U A U^{-1}) = \text{Tr } A, \quad (\text{相似変換に対して不変}) \quad (\text{A.46})$$

$$\text{Tr } \mathbf{1}_n = n. \quad (\text{縮約}) \quad (\text{A.47})$$

ただし, A, B などは任意の正方行列, λ, μ は任意の定数, $\mathbf{1}_n$ は n 次の単位行列である.

*)シュプール ($\text{Spur}, \text{Sp } A$) という場合もある.

A.6 行列ノルム

正方行列 A に対し, 以下を A の行列ノルム (matrix norm) またはフロベニウスノルム (Frobenius norm) という**).

$$\|A\| := \sqrt{\text{Tr}(A^\dagger A)}. \quad (\text{A.48})$$

例えば, 2 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列ノルムは以下ようになる.

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \text{Tr} \begin{pmatrix} |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 & a_{11}^* a_{12} + a_{21}^* a_{22} \\ a_{12}^* a_{11} + a_{22}^* a_{21} & |a_{12}|^2 + |a_{22}|^2 \end{pmatrix} \\ &= |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2. \end{aligned}$$

また, 行列 A が反エルミートのときは, 以下のようにも書ける.

$$\|A\|^2 = \text{Tr}(A^\dagger A) = -\text{Tr} A^2.$$

行列ノルムの性質をまとめておく.

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \geq 0, \quad (\text{A.49})$$

$$\|A\|^2 = -\text{Tr} A^2. \quad (A^\dagger = -A.) \quad (\text{A.50})$$

ただし, $A = (a_{ij})$ である.

A.7 指数行列

N 次正方行列 A に対し, 以下を A の指数行列 (matrix exponential) という.

$$\exp(A) := e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \mathbf{1}_N + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots. \quad (\text{A.51})$$

ただし, $\mathbf{1}_N$ は N 次の単位行列である. 指数行列に関し, 以下などが成り立つ.

$$\begin{aligned} e^{O_N} &= \mathbf{1}_N, & e^{sA} e^{tA} &= e^{(s+t)A}, & e^A e^{-A} &= \mathbf{1}_N, \\ [A, B] &= 0 \implies e^A e^B &= e^B e^A, & e^{PAP^{-1}} &= P e^A P^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

ただし, O_N は N 次の零行列, s, t は任意の実数, P は N 次正則行列である. ここで,

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A) \quad (\text{A.53})$$

より, 任意の A に対して $\exp(A)$ は常に正則行列となることに注意. また, これと

$${}^t \exp(A) = \exp({}^t A), \quad \exp(A)^\dagger = \exp(A^\dagger), \quad (\text{A.54})$$

より, 以下となることに注意*).

***) 行列ノルムはノルムの性質を満たせばよく, いくつかの定義がある.

*) 直交群のリー代数は反対称行列, ユニタリー群のリー代数は反エルミート.

14:39, 25th Apr, 2014

- A が対称行列ならば $\exp(A)$ も対称行列 .
- A が反対称行列ならば $\exp(A)$ は直交行列 .
- A がエルミート行列ならば $\exp(A)$ もエルミート行列 .
- A が反エルミート行列ならば $\exp(A)$ はユニタリー行列 .

また , 実パラメータ t に対し , 以下が成り立つ .

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}. \quad (\text{A.55})$$

これより , 指数行列は初期条件 $f(0) = \mathbf{1}_N$ に対する微分方程式 $\frac{d}{dt}f(t) = Af(t)$ の解と見なせる .
さらに , トレース , 行列式 , 指数行列の間には以下の関係が成り立つ .

$$\text{Tr}(A) = \ln(\det(\exp(A))). \quad (\text{A.56})$$

特に , $\det(\exp(A)) = 1$ ならば $\text{Tr}(A) = 0$ となることに注意*).

Proof

A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ とすれば , $\exp(A)$ の固有値は明らかに $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_N}$ であり ,

$$\ln(\det(\exp(A))) = \ln e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = \text{Tr}(A).$$

..... *Q.E.D.*

例 A.7.1 対角行列の指数行列は以下のようになる .

$$\exp(\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N)) = \text{diag}(e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_N}). \quad (\text{A.57})$$

例 A.7.2 2×2 行列の指数行列は以下のようになる .

$$\exp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.58})$$

ただし , $\Delta = \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}$ であり ,

$$a_{11} = e^{(a+d)/2} \{ \Delta \cosh(\Delta/2) + (a-d) \sinh(\Delta/2) \},$$

$$a_{12} = 2b e^{(a+d)/2} \sinh(\Delta/2),$$

$$a_{21} = 2c e^{(a+d)/2} \sinh(\Delta/2),$$

$$a_{22} = e^{(a+d)/2} \{ \Delta \cosh(\Delta/2) - (a-d) \sinh(\Delta/2) \}$$

である .

*) 特殊線形変換群のリー代数はトレースレス .

14:39, 25th Apr, 2014

例 A.7.3 パウリ行列に関して以下が成り立つ .

$$e^{ia_j\sigma_j} = \mathbf{1}_2 \cos a + i\hat{a}_j\sigma_j \sin a. \quad (\text{A.59})$$

ただし, $a := |a_j|$, $\hat{a}_j := a_j/a$ である .

$$\begin{aligned} \because e^{ia_j\sigma_j} &= \mathbf{1}_2 + ia_i\sigma_i + \frac{1}{2}(ia_i\sigma_i)(ia_j\sigma_j) + \frac{1}{3!}(ia_i\sigma_i)(ia_j\sigma_j)(ia_k\sigma_k) + \cdots \\ &= \mathbf{1}_2 \left(1 - \frac{1}{2}|a_j| + \cdots\right) + i\frac{a_j}{|a_j|}\sigma_j \left(|a_j| - \frac{1}{3!}|a_j|^3 + \cdots\right) = \mathbf{1}_2 \cos a + i\hat{a}_j\sigma_j \sin a. \end{aligned}$$

2つの正方行列 A, B に対して, $e^A e^B = e^{A+B}$ は必ずしも成り立たず, 以下のようなになる .

$$e^A e^B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A - B, [A, B]] + \cdots\right). \quad (\text{A.60})$$

これをハウスドルフの公式という*).

Proof..... t を実パラメーターとすると, 指数行列の定義より,

$$\begin{aligned} e^{tA} e^{tB} &= \left(\mathbf{1} + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + O(t^4)\right) \left(\mathbf{1} + tB + \frac{t^2}{2}B^2 + \frac{t^3}{3!}B^3 + O(t^4)\right) \\ &= \mathbf{1} + t(A + B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \frac{t^3}{3!}(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) + O(t^4). \end{aligned}$$

ここで, $e^{tA} e^{tB} = e^{tC}$ と置くと, まず, $e^{tC} = \mathbf{1} + tC + O(t^2)$ より $C = A + B + tC'$. 次に,

$$e^{tC} = \mathbf{1} + t(A + B) + t^2 \left\{C' + \frac{1}{2}(A + B)^2\right\} + O(t^3)$$

より,

$$C' = \frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2) - \frac{1}{2}(A + B)^2 + O(t) = \frac{1}{2}[A, B] + tC''.$$

それから,

$$\begin{aligned} e^{tC} &= \mathbf{1} + t(A + B) + t^2 \left\{\frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{2}(A + B)^2\right\} \\ &\quad + t^3 \left\{C'' + \frac{1}{4}(A + B)[A, B] + \frac{1}{4}[A, B](A + B) + \frac{1}{6}(A + B)^3\right\} + O(t^4) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} C'' &= \frac{1}{6}(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) - \frac{1}{6}(A + B)^3 \\ &\quad - \frac{1}{4}(A + B)[A, B] - \frac{1}{4}[A, B](A + B) + O(t) \end{aligned}$$

*) Baker-Campbell-Hausdorff の公式 .

14:39, 25th Apr, 2014

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}(2A + B)[A, B] + \frac{1}{6}[A, B](A + 2B) - \frac{1}{4}(A + B)[A, B] - \frac{1}{4}[A, B](A + B) + O(t) \\
&= \frac{1}{12}[A - B, [A, B]] + O(t).
\end{aligned}$$

以上をまとめると,

$$e^{tA}e^{tB} = \exp \left\{ t(A + B) + \frac{t^2}{2}[A, B] + \frac{t^3}{12}[A - B, [A, B]] + \dots \right\}$$

であり, $t = 1$ と置けば与式が得られる.

..... Q.E.D.

4次元ミンコフスキー空間もしくは4次元ユークリッド空間の各点 x で定義された, 正方行列を成分に持つベクトル場 $A_\mu(x)$ を考える. このとき, 空間内のある経路 C について, その上に $n + 1$ 個の点 P_0, P_1, \dots, P_n (P_0, P_n はそれぞれ C の始点, 終点) を取り, $\overline{P_{i-1}P_i}$ 上の任意の点を x_i , $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} =: \Delta x_i^\mu$ としたとき, 以下の極限は一意に決まる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \exp \left(\int_C A_\mu(x) dx^\mu \right) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \exp (A_\mu(x_i) \Delta x_i^\mu) \\
&:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{A_\mu(x_1) \Delta x_1^\mu} e^{A_\mu(x_2) \Delta x_2^\mu} \dots e^{A_\mu(x_n) \Delta x_n^\mu} \right). \quad (\text{A.61})
\end{aligned}$$

これを $A_\mu(x)$ の C 上での経路順序べき (path-ordered exponential) という. 経路上の各点における指数行列は一般には可換とは限らないので, 経路順序べきは経路だけでなくその上を動く順序にも依ることに注意.

A.8 パウリ行列

以下のように定義された3つの行列をパウリ行列 (Pauli matrices) という*).

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.62})$$

パウリ行列の積は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \sigma_1 &= \sigma_2 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_3 = \mathbf{1}_2, \\
\sigma_1 \sigma_2 &= -\sigma_2 \sigma_1 = i\sigma_3, \\
\sigma_2 \sigma_3 &= -\sigma_3 \sigma_2 = i\sigma_1, \\
\sigma_3 \sigma_1 &= -\sigma_1 \sigma_3 = i\sigma_2.
\end{aligned}$$

ただし, $\mathbf{1}_2$ は2次の単位行列である. これらの積は, クロネッカーのデルタと完全反対称テンソルを用いて以下のようにまとめられる.

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1}_2 + i\epsilon_{ijk} \sigma_k.$$

*)原子核などの分野では, 場を表すのに σ を使い, パウリ行列には τ を用いる場合がある.

14:39, 25th Apr, 2014

ただし, $i, j, k = 1, 2, 3$ である .

パウリ行列についての性質をまとめておく .

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i, \quad (\text{エルミート行列}) \quad (\text{A.63})$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1}_2 + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{積公式}) \quad (\text{A.64})$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{交換関係}) \quad (\text{A.65})$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \{\sigma_j, \sigma_i\} = 2\delta_{ij} \mathbf{1}_2, \quad (\text{反交換関係}) \quad (\text{A.66})$$

$$\text{Tr} \sigma_i = 0, \quad (\text{A.67})$$

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}, \quad (\text{A.68})$$

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) = 2i \varepsilon_{ijk}. \quad (\text{A.69})$$

A.9 't Hooft 行列

以下のように定義された行列を't Hooft 行列という .

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} := \eta_{\mu\nu}^{a(\pm)} \sigma_a. \quad (\text{A.70})$$

't Hooft 行列を $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ について並べれば, 以下ようになる .

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = -\eta_{\nu\mu}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} 0 & +\sigma_3 & -\sigma_2 & \pm\sigma_1 \\ -\sigma_3 & 0 & +\sigma_1 & \pm\sigma_2 \\ +\sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & \pm\sigma_3 \\ \mp\sigma_1 & \mp\sigma_2 & \mp\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.71})$$

't Hooft 行列についての公式は, 't Hooft の η 記号とパウリ行列の性質から導ける .

't Hooft 行列についての性質をまとめておく .

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\rho\sigma}^{(\pm)} &= (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} \pm \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}) \mathbf{1}_2 \\ &\quad + i \delta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma}^{(\pm)} + i \delta_{\nu\sigma} \eta_{\mu\rho}^{(\pm)} - i \delta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}^{(\pm)} - i \delta_{\nu\rho} \eta_{\mu\sigma}^{(\pm)}, \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\mu\sigma}^{(\pm)} = 3\delta_{\nu\sigma} \mathbf{1}_2 + 2i \eta_{\nu\sigma}^{(\pm)}, \quad (\text{A.73})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = 12 \cdot \mathbf{1}_2, \quad (\text{A.74})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \eta_{\tau\sigma}^{(\pm)} = \pm (\delta_{\mu\tau} \eta_{\nu\rho}^{(\pm)} + \delta_{\nu\tau} \eta_{\rho\mu}^{(\pm)} + \delta_{\rho\tau} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)}), \quad (\text{A.75})$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \eta_{\rho\sigma}^{(\pm)} = \pm 2 \eta_{\mu\nu}^{(\pm)}, \quad (\text{A.76})$$

$$[\eta_{\mu\nu}^{(\pm)}, \eta_{\rho\sigma}^{(\pm)}] = 2i (\delta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma}^{(\pm)} + \delta_{\nu\sigma} \eta_{\mu\rho}^{(\pm)} - \delta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}^{(\pm)} - \delta_{\nu\rho} \eta_{\mu\sigma}^{(\pm)}), \quad (\text{A.77})$$

$$\text{Tr} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)} = 0, \quad (\text{A.78})$$

$$\text{Tr}(\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\rho\sigma}^{(\pm)}) = 2(\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} \pm \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}), \quad (\text{A.79})$$

$$\text{Tr}(\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\mu\sigma}^{(\pm)}) = 6\delta_{\nu\sigma}, \quad (\text{A.80})$$

$$\text{Tr}(\eta_{\mu\nu}^{(\pm)} \eta_{\mu\nu}^{(\pm)}) = 24. \quad (\text{A.81})$$

付録 B 四元数

四元数とは複素数を拡張した数体系である．四元数は 3 次元空間における回転や $SU(2)$ の群元の記述に用いられる．この節では，四元数の基本的な性質であるハミルトン積や極分解について述べる．また，2 次複素行列を用いた表現についても触れる．

B.1 四元数

以下のような数体系を四元数 (quaternion) という．

$$\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}. \quad (\text{B.1})$$

ただし， $i, j, k \in \mathbb{H}$ は四元数の 1 でない基底元であり，定義の通り，以下を満たす．

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (\text{B.2})$$

また，この関係式は以下と同値である．

$$\begin{cases} ij = k, & ji = -k, \\ jk = i, & kj = -i, \\ ki = j, & ik = -j. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

四元数の基底の演算を表 B.1 に示す．このように，表は対角に対して対称ではなく，四元数の積は一般には非可換であることに注意．また，表の左上の 2×2 の部分は複素数の演算表であり，それはもちろん対称である．さらに，表の右下の 3×3 の部分はベクトル解析におけるベクトル積もしくは外積の演算表となっている．これより，四元数を以下のように書くと便利である．

$$q = q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \in \mathbb{H}. \quad (\text{B.4})$$

ただし， $\mathbf{q} := (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ ， $\mathbf{e} := (i, j, k)$ である．このとき， q_0 を実部 (real part)，スカラー部 (scaler part)，時間成分 (time component) など， $\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}$ を虚部 (imaginary part)，ベクトル部

表 B.1: 四元数の基底の演算表．

\times	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

14:39, 25th Apr, 2014

(vector part), 空間成分 (space component) などという。また, $q = \mathbf{0}$ である四元数を実四元数 (real quaternion), $q_0 = 0$ である四元数を純虚四元数 (pure imaginary quaternion) という。

$p, q, r \in \mathbb{H}$ に対して $r = pq$ と置くと, その成分は以下ようになる。

$$\begin{cases} r_0 = p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3, \\ r_1 = p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2, \\ r_2 = p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3, \\ r_3 = p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

もしくは, $p = p_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} \in \mathbb{H}$, $q = q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \in \mathbb{H}$ に対し, 以下が成り立つ。

$$pq = (p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + (p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}. \quad (\text{B.6})$$

これらのような四元数の積をハミルトン積 (Hamilton product) という。

$q = q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \in \mathbb{H}$ に対し, 以下を q の共役 (conjugate, 共軛) という*)。

$$q^* := q_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} = -\frac{1}{2}(q + iqi + jqj + kqk). \quad (\text{B.7})$$

共役について, 以下が成り立つ。

$$(q^*)^* = q, \quad (pq)^* = q^*p^*, \quad q_0 = \frac{1}{2}(p + p^*), \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{2}(p - p^*). \quad (\text{B.8})$$

ただし, $p, q = q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \in \mathbb{H}$ である。

$q = q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \in \mathbb{H}$ に対し, 以下を q の大きさ (norm) という。

$$|q| := \sqrt{qq^*} = \sqrt{q^*q} = (q_0^2 + |\mathbf{q}|^2)^{1/2}. \quad (\text{B.9})$$

大きさについて, 以下が成り立つ。

$$|q^*| = |q|, \quad |pq| = |p||q|. \quad (\text{B.10})$$

ただし, $p, q \in \mathbb{H}$ である。ここで, 第2式は, $q = q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \in \mathbb{H}$ に対して

$$|q|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \det \begin{pmatrix} q_0 + q_1 & iq_3 + q_2 \\ iq_3 - q_2 & q_0 - q_1 \end{pmatrix}$$

と書け, さらに行列式に関して $\det AB = \det A \cdot \det B$ が成り立つことによる。

大きさをを用いると, 任意の $q \in \mathbb{H}$ に対し,

$$\hat{q} = \frac{q}{|q|} \quad (\text{B.11})$$

は大きさが1の四元数となる。このような四元数を単位四元数 (unit quaternion) という**)。

*)複素数の場合と異なり, 四元数の積と和で表せることに注意

**)ベルソル (versor) という場合もある。

14:39, 25th Apr, 2014

大きさをを用いると, $q \in \mathbb{H}$ の逆数 (reciprocal) q^{-1} は以下のように書ける .

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}. \quad (\text{B.12})$$

特に, 単位四元数の逆数は共役と一致する .

$q = q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \in \mathbb{H}$ に対し, その指数関数 (exponential) \exp は以下のように定義される .

$$\exp(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} = e^{q_0} \left(\cos |q| + \sin |q| \cdot \frac{\mathbf{q}}{|q|} \cdot \mathbf{e} \right). \quad (\text{B.13})$$

最右辺を得るには, まず, 四元数の実部と虚部が積について可換であり, $\exp(q) = e^{q_0} \exp(\mathbf{q} \cdot \mathbf{e})$ となることに注意する . すると, $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{e})^2 = -|q|^2$ に注意して,

$$\exp(\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}) = 1 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} - \frac{1}{2}|q|^2 - \frac{1}{3!}|q|^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} + \cdots = \cos |q| + \sin |q| \cdot \frac{\mathbf{q}}{|q|} \cdot \mathbf{e}.$$

この逆関数は以下のようにして求められる . $p = p_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} \in \mathbb{H}$ に対して

$$q = q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} = e^p = e^{p_0} \left(\cos |p| + \sin |p| \cdot \frac{\mathbf{p}}{|p|} \cdot \mathbf{e} \right)$$

と置くと, $|q| = e^{p_0}$ より $p_0 = \ln |q|$ であり,

$$\begin{aligned} \cos |p| &= \frac{q_0}{|q|}, & \sin |p| &= \sqrt{1 - (q_0/|q|)^2} = \frac{|q|}{|q|}, \\ \therefore \mathbf{q} &= |q| \cdot \frac{\mathbf{p}}{|p|} \iff \mathbf{p} = \cos^{-1} \frac{q_0}{|q|} \cdot \frac{\mathbf{q}}{|q|}, \end{aligned}$$

すなわち, $q = q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \in \mathbb{H}$ に対する対数関数 (logarithm) \ln は以下のように定義される .

$$\ln(q) := \ln |q| + \cos^{-1} \frac{q_0}{|q|} \cdot \frac{\mathbf{q}}{|q|} \cdot \mathbf{e}. \quad (\text{B.14})$$

このとき,

$$\begin{cases} q_0 =: |q| \cos \theta, \\ \mathbf{q} =: |q| \hat{\mathbf{n}} = |q| \sin \theta \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

と置けば, 任意の $q \in \mathbb{H}$ は以下のように極分解 (polar decomposition) できることがわかる .

$$q = \exp(\ln(q)) = |q| \exp(\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}) = |q| (\cos \theta + \sin \theta \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}). \quad (\text{B.16})$$

これより, 四元数のべき乗 (power) は任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して以下となることがわかる .

$$q^\alpha = |q|^\alpha \exp(\alpha \theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}) = |q|^\alpha (\cos \alpha \theta + \sin \alpha \theta \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}). \quad (\text{B.17})$$

このような四元数の表現には, 4×4 の実行列や 2×2 の複素行列によるものが知られている . 本論では, 特に断らない限り, 次節で説明する 2 次複素行列表現を用いる .

B.2 2次複素行列表現

四元数 $q = q_4 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \in \mathbb{H}$ の2次複素行列表現は以下ようになる。

$$q = \begin{pmatrix} q_4 - iq_3 & -q_2 - iq_1 \\ q_2 - iq_1 & q_4 + iq_3 \end{pmatrix} = q_4 \mathbf{1}_2 - iq_j \sigma_j = q_\mu e_\mu. \quad (\text{B.18})$$

ただし, $\mu = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3$, $\mathbf{1}_2$ は 2×2 の単位行列, σ_j はパウリ行列である。また, e_μ は以下のように定義され, これを四元数の2次複素行列表現における基底行列という。

$$e_\mu := \delta_{\mu 4} \mathbf{1}_2 - i\delta_{\mu j} \sigma_j. \quad (\text{B.19})$$

ここで, パウリ行列の性質より

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1 e_2 e_3 = -e_4 \quad (\text{B.20})$$

となるので, 四元数の基底との対応は以下ようになる。

$$D(i) = e_1, \quad D(j) = e_2, \quad D(k) = e_3, \quad D(1) = e_4. \quad (\text{B.21})$$

また, この表現においては, 四元数の共役は以下のようにエルミート共役に対応する。

$$D(q^*) = q_0 \mathbf{1}_2 + iq_j \sigma_j = q_\mu e_\mu^\dagger = q^\dagger. \quad (\text{B.22})$$

さらに, 四元数の大きさは以下のように行列式に対応する。

$$|q|^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = \det \begin{pmatrix} q_4 - iq_3 & -q_2 - iq_1 \\ q_2 - iq_1 & q_4 + iq_3 \end{pmatrix} = \det(q). \quad (\text{B.23})$$

e_μ の性質を導いておく。まず, エルミート共役は以下ようになる。

$$e_\mu^\dagger = \delta_{\mu 4} \mathbf{1}_2 + i\delta_{\mu j} \sigma_j, \quad e_4^\dagger = e_4, \quad e_j^\dagger = -e_j.$$

次に, $p = p_\mu e_\mu$, $q = q_\nu e_\nu$ の積は四元数のハミルトン積に従うので,

$$\begin{aligned} pq &= (p_4 q_4 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{1}_2 + (p_4 \mathbf{q} + q_4 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{e} \\ &= p_\mu q_\nu \{ (\delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} - \delta_{\mu j} \delta_{\nu j}) \mathbf{1}_2 - i(\varepsilon_{j\mu\nu 4} + \delta_{j\mu} \delta_{\nu 4} + \delta_{j\nu} \delta_{\mu 4}) \sigma_j \} = p_\mu q_\nu e_\mu e_\nu \\ &\iff e_\mu e_\nu = (\delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} - \delta_{\mu j} \delta_{\nu j}) \mathbf{1}_2 - i(\varepsilon_{j\mu\nu 4} + \delta_{j\mu} \delta_{\nu 4} + \delta_{j\nu} \delta_{\mu 4}) \sigma_j \end{aligned}$$

であることがわかり, この特別な場合として以下が成り立つことがわかる。

$$e_\mu^\dagger e_\nu = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(+)}, \quad e_\mu e_\nu^\dagger = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(-)}.$$

これらのそれぞれで和と差をとることで, 以下が得られる。

$$\begin{aligned} e_\mu^\dagger e_\nu + e_\nu^\dagger e_\mu &= 2\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2, & e_\mu^\dagger e_\nu - e_\nu^\dagger e_\mu &= 2i\eta_{\mu\nu}^{(+)}, \\ e_\mu e_\nu^\dagger + e_\nu e_\mu^\dagger &= 2\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2, & e_\mu e_\nu^\dagger - e_\nu e_\mu^\dagger &= 2i\eta_{\mu\nu}^{(-)}. \end{aligned}$$

14:39, 25th Apr, 2014

また，パウリ行列がトレースレスであることを思い出せば，以下であることもわかる．

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(e_\mu^\dagger e_\nu) &= 2\delta_{\mu\nu}, & \eta_{\mu\nu}^{i(+)} &= -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_i e_\mu^\dagger e_\nu), \\ \mathrm{Tr}(e_\mu e_\nu^\dagger) &= 2\delta_{\mu\nu}, & \eta_{\mu\nu}^{i(-)} &= -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_i e_\mu e_\nu^\dagger).\end{aligned}$$

さらに，これらより， $q = q_\mu e_\mu$ に対して以下が成り立つことがわかる．

$$q^\dagger q = qq^\dagger = |q_\mu|^2 \mathbf{1}_2 = \det(q) \mathbf{1}_2, \quad q_\mu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_2(e_\mu^\dagger q) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_2(e_\mu q^\dagger).$$

四元数の 2 次複素行列表現における基底行列についての性質をまとめておく．

$$e_\mu^\dagger = \delta_{\mu 4} \mathbf{1}_2 + i\delta_{\mu j} \sigma_j, \quad e_4^\dagger = e_4, \quad e_j^\dagger = -e_j, \quad (\text{B.24})$$

$$e_\mu e_\nu = (\delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} - \delta_{\mu j} \delta_{\nu j}) \mathbf{1}_2 - i(\varepsilon_{j\mu\nu 4} + \delta_{j\mu} \delta_{\nu 4} + \delta_{j\nu} \delta_{\mu 4}) \sigma_j, \quad (\text{B.25})$$

$$e_\mu^\dagger e_\nu = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(+)}, \quad e_\mu^\dagger e_\nu + e_\nu^\dagger e_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2, \quad e_\mu^\dagger e_\nu - e_\nu^\dagger e_\mu = 2i\eta_{\mu\nu}^{(+)}, \quad (\text{B.26})$$

$$e_\mu e_\nu^\dagger = \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2 + i\eta_{\mu\nu}^{(-)}, \quad e_\mu e_\nu^\dagger + e_\nu e_\mu^\dagger = 2\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_2, \quad e_\mu e_\nu^\dagger - e_\nu e_\mu^\dagger = 2i\eta_{\mu\nu}^{(-)}, \quad (\text{B.27})$$

$$\mathrm{Tr}(e_\mu^\dagger e_\nu) = \mathrm{Tr}(e_\mu e_\nu^\dagger) = 2\delta_{\mu\nu}, \quad (\text{B.28})$$

$$\eta_{\mu\nu}^{i(+)} = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_i e_\mu^\dagger e_\nu), \quad \eta_{\mu\nu}^{i(-)} = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_i e_\mu e_\nu^\dagger), \quad (\text{B.29})$$

$$q^\dagger q = qq^\dagger = |q_\mu|^2 \mathbf{1}_2 = \det(q) \mathbf{1}_2, \quad q_\mu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_2(e_\mu^\dagger q) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_2(e_\mu q^\dagger). \quad (\text{B.30})$$

ただし， $q = q_\mu e_\mu$ である．

付録 C 有限群と正多面体回転群

本文で扱うモノポールは3次元ユークリッド空間に住み、それらは種々の対称性を持つ。特に、高いチャージを持つモノポールは正多面体の回転対称性を持つことが知られている。そのような対称性は数学における有限群に関連づけると理解しやすく、複雑な正多面体を持つ対称性も単純な対称群や交代群と同じ群構造を持つことがわかる。この付録では、有限群と正多面体回転群の基本的な知識について説明する。

C.1 群の定義

集合 G とその上の1つの演算 (積) が以下を満たすとき、 G は群 (group) を成すという。

- (1) 任意の $a, b, c \in G$ に対して $(ab)c = a(bc)$. (結合法則)
- (2) 任意の $a \in G$ に対して $ae = ea = a$ を満たす e が存在する。
このような e を単位元という。(単位元の存在)
- (3) 任意の $a \in G$ に対して $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ を満たす a^{-1} が存在する。
このような a^{-1} を a の逆元という。(逆元の存在)

結合法則により、3つ以上の元の積の括弧は省略できる。また、単位元と逆元はそれぞれ一意に存在する。

Proof

2つの単位元 e_1, e_2 が存在すると、

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2.$$

また、2つの逆元 a_1^{-1}, a_2^{-1} が存在すると、

$$a_1^{-1} = a_1^{-1} e = a_1^{-1} (a a_2^{-1}) = (a_1^{-1} a) a_2^{-1} = e a_2^{-1} = a_2^{-1}.$$

..... *Q.E.D.*

さらに、群 G の任意の2つの元 a, b に対して以下が成り立つ。

$$(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}, \quad (a^{-1})^{-1} = a. \quad (\text{C.1})$$

Proof

14:39, 25th Apr, 2014

まず, e を G の単位元とすると,

$$b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}eb = b^{-1}b = e.$$

同様にして $abb^{-1}a^{-1} = e$ なので, 1 つ目は示せた. 2 つ目は, $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ を a^{-1} について見ればよい.

..... Q.E.D.

群 G の任意の $a, b \in G$ に対して $ab = ba$ が成り立つとき, G を可換群またはアーベル群 (Abelian group) という.

群 G の元の個数を G の位数 (order) といい, $|G|$ と書く. また, 位数が有限となる群を有限群, そうでない群を無限群という.

群 G から群 G' への写像 $f: G \rightarrow G'$ が任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して以下を満たすとき, f は G から G' への準同型写像 (homomorphism) であるという.

$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2). \quad (\text{C.2})$$

また, G から G' への準同型写像が存在するとき, G と G' は準同型であるといい, $G \sim G'$ と書く.

全単射である準同型写像を特に同型写像 (isomorphism) という. また, G から G' への同型写像が存在するとき, G と G' は同型であるといい, $G \simeq G'$ と書く.

群 G の部分集合 $H \neq \phi$ が以下が成り立つとき, H は群を成す.

$$(1) \quad a, b \in H \implies ab \in H, \quad (\text{C.3})$$

$$(2) \quad a \in H \implies a^{-1} \in H. \quad (\text{C.4})$$

Proof.....

結合法則は明らか. 単位元の存在は, $H \neq \phi$ よりある $a \in G$ が存在し, (2) より a^{-1} も存在するので, (1) より $aa^{-1} = e \in H$. 逆元の存在は (2) より保障される.

..... Q.E.D.

これを G の部分群 (subgroup) という.

群 G の2つの部分集合 S, S' に対する集合 $\{ss' \mid s \in S, s' \in S'\}$ を S と S' の積といい, SS' と書く. 特に, $S = \{g\}$, $S' = \{g'\}$ のときは単にそれぞれ gS' , Sg' と書く.

群 G とその部分群 H , $a \in G$ に対し,

$$\ell_a: H \rightarrow aH, \quad \ell_a(h) = ah, \quad (\text{C.5a})$$

$$r_a: H \rightarrow Ha, \quad r_a(h) = ha \quad (\text{C.5b})$$

をそれぞれ H の a による左移動, 右移動という. 左移動, 右移動は全単射である.

Proof.....

14:39, 25th Apr, 2014

左移動のみを示す．全射性は，定義より明らかに，

$$\ell_a(H) = \{ah \mid h \in H\} = aH.$$

単射性は，任意の $h, h' \in H$ に対して

$$\ell_a(h) = \ell_a(h') \implies h = a^{-1}(ah) = a^{-1}(ah') = h'.$$

..... Q.E.D.

これらより，以下が成り立つことがわかる．

$$|aH| = |Ha| = |H|. \quad (\text{C.6})$$

また，特に以下が成り立つ．

$$aG = Ga = G. \quad (\text{C.7})$$

これを組みかえ定理という．

有限群に対し，その任意の2つの元の積を並べた表を群表または積表という．組みかえ定理より，任意の有限群 G の群表の各行と各列には， G の元が必ず1度，そしてただ1度だけ現れる．

C.2 対称群と交代群

有限群においては，写像の成す群である対称群が重要になる．様々な対称性を表す有限群には，必ずそれと同型な対称群またはその部分群が存在する．

集合 X 上の全単射全体の集合は，合成写像を演算として群を成す．

Proof.....

群が閉じていることは，2つの全単射の合成写像がまた全単射となることによる．結合法則は，合成写像の結合法則による．単位元は恒等写像である．逆元の存在は，任意の元が全単射であることによる．

..... Q.E.D.

これを X 上の対称群 (symmetric group) といい， $S(X)$ と書く．また， $S(X)$ の元を置換 (permutation) といい， $S(X)$ の部分群を X の置換群という．

n 個の元を持つ有限集合 X に対する対称群の性質は，同型なものを除くと明らかに n のみに依存する．それ故，それらを n 次対称群 (symmetric group) といい， S_n と書く．このとき，特に $X = \{1, 2, \dots, n\}$ とすると，任意の $\pi \in S_n$ はその定義域と値をすべて書き下すことで，

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

14:39, 25th Apr, 2014

のように表せる．ただし， $p_i = \pi(i)$ であり，列の並べ方は上下の対応を保てば必ずしもこの順である必要はないことに注意．すると， S_n の 2 つの元の積は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ p_{q_1} & p_{q_2} & \cdots & p_{q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_{q_1} & p_{q_2} & \cdots & p_{q_n} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

また， S_n の単位元， π の逆元はそれぞれ以下のように書け，それぞれ単位置換，逆置換という．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Proof.....

単位置換は明らか．逆置換は，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

..... *Q.E.D.*

S_n の元の値は 1 から n までの数の順列なので，明らかに $|S_n| = n!$ である．また，任意の位数 n の有限群 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ に対して，組みかえ定理より，写像

$$f(g) = \ell_g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ gg_1 & gg_2 & \cdots & gg_n \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

は G から S_n への単射となっている．すると，

$$\begin{aligned} f(a)f(b) &= \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ ag_1 & ag_2 & \cdots & ag_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ bg_1 & bg_2 & \cdots & bg_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bg_1 & bg_2 & \cdots & bg_n \\ abg_1 & abg_2 & \cdots & abg_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ bg_1 & bg_2 & \cdots & bg_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ abg_1 & abg_2 & \cdots & abg_n \end{pmatrix} \\ &= f(ab) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

より f は同型写像となる，すなわち，任意の有限群に対してそれと同型な置換群が存在する．これをケーリーの定理という．

以下の形の $\pi \in S_n$ を特に巡回置換 (cyclic permutation) といい， (p_1, p_2, \dots, p_m) と書く．

$$p_1 \mapsto p_2 \mapsto \cdots \mapsto p_m \mapsto p_1. \quad (p_i \in \{1, 2, \dots, n\}, m \leq n.) \quad (\text{C.13})$$

共通の文字を含まない 2 つの巡回置換は明らかに可換である．また，任意の置換は共通の文字を含まない巡回置換の積に分解できる (紙に 1 から n までの数字を 1 つずつ書いて，各元の置換を矢印で辿れば必ず元の数字に戻る) ．

長さが 2 の巡回置換を特に互換 (transposition) という．任意の置換は互換の積に分解できるが，そのときの互換の数は一意ではない．しかし，それが奇数が偶数かは一意に決まっている．

14:39, 25th Apr, 2014*Proof*長さ n の置換

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

に対して n 変数関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を考えると, 一般には

$$\pi^{-1}f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n})$$

となる (π は x の添え字を直接変えるのではなく, x が表す対象につけられた番号を置換する. それ故, p_i 番目の対象を i 番目に持ってくれば, x_i が指していた値は x_{p_i} となる). そこで, 以下のような式を考えてみる.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) \\ \cdot (x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n) \\ \cdots \cdot (x_{n-1} - x_n).$$

すると, 置換 $\pi \in S_n$ が偶数個の互換の積 π_e と奇数個の互換の積 π_o へ同時に分解されるならば,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \pi_e^{-1}f(x_1, x_2, \dots, x_n) = +f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \pi_o^{-1}f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \iff f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

となるが, これは $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が一般に値を持つことと矛盾する. よって, 置換 $\pi \in S_n$ を互換の積で分解したときの互換の数が奇数か偶数であるかは一意に決まっている.

..... *Q.E.D.*

偶数個の互換の積で表される置換を偶置換, 奇数個の互換の積で表される置換を奇置換という.
 n 次の偶置換全体の集合 A_n は S_n の部分群である.

Proof

e を S_n の単位元とすると, 任意の (i, j) に対して $(i, j)(j, i) = e$ なので $e \in A_n$ であり $A_n \neq \phi$.
 また, 2 つの偶置換の積と偶置換の積は明らかに A_n の元である.

..... *Q.E.D.*これを n 次の交代群という. S_n は A_n により明らかに以下のように分解される.

$$S_n = A_n \cup (1, 2)A_n. \quad (\text{C.14})$$

これより, 奇置換の個数と偶置換の個数は等しく, それぞれ $n!/2$ であることがわかる.

表 C.1: 正多面体の種類と性質 .

名称 (面の数)	面の形	頂点の数	辺の数	1つの頂点に集まる面の数
正4面体	正3角形	4	6	3
正6面体	正4角形	8	12	3
正8面体	正3角形	6	12	4
正12面体	正5角形	20	30	3
正20面体	正3角形	12	30	5

C.3 正多面体回転群

すべての面が同じ正多角形でできていて、各頂点に集まる面の数が等しく、かつ凹んでいない多面体を正多面体 (regular polyhedron) またはプラトンの立体 (Platonic body, Platonic solid) という*)。正多面体は、正4面体 (tetrahedron)、正6面体 (cube)、正8面体 (octahedron)、正12面体 (dodecahedron)、正20面体 (icosahedron) の5つしか存在しないことが示せる。正多面体の種類と性質を表 C.1 に、形を図 C.1 にそれぞれ示す。

正8面体の8つの面の中心を結ぶと正6面体が得られ、正6面体の6つの面の中心を結ぶと正8面体得られる。このように、何らかの操作によって正多面体同士が入れ換わるとき、それらは互いに双対であるという。正6面体と正8面体、正12面体と正20面体はそれぞれ双対である。また、正4面体は自分自身と双対であり、これを特に自己双対という。

双対な正多面体の対称性は明らかに等しいので、以後、正4面体、正8面体、正20面体のみについて考える (これらの正多面体の面はすべて正3角形であることに注意)。また、正多角形も正多面体の特別な場合として扱っていく。それらを特に正2面体 (dihedron) という。

正多面体を不変に保つ回転操作全体の成す群を正多面体回転群という。特に、正4面体、正8面体、正20面体に対する回転群をそれぞれ正4面体回転群、正8面体回転群、正20面体回転群といい、それぞれ T , O , Y と書く。また、正 n 角形を不変に保つ回転操作全体の成す群を n 次の正2面体回転群といい、 D_n と書く。正多面体回転群の元を数えてみる。まず、 D_n については、

- 正多角形の中心を通る垂線の周りの $2\pi/n, 4\pi/n, \dots$ 回転。計 $n-1$ 個。
- n が奇数のとき、正多角形の各頂点と対する辺の中点を通る軸 $\times n$ の周りの π 回転。計 n 個。
- n が偶数のとき、正多角形の各辺と対する辺の中点を通る軸 $\times n/2$ 、各頂点と対する頂点を通る軸 $\times n/2$ それぞれの周りの π 回転。計 n 個。
- 恒等変換。計 1 個。

より $|D_n| = 2n$ 。次に、 T については、

- 各頂点と対する面の中心を通る軸 $\times 4$ の周りの $2\pi/3, 4\pi/3$ 回転。計 8 個。
- 各辺の中点と対する辺の中点を通る軸 $\times 3$ の周りの π 回転。計 3 個。
- 恒等変換。計 1 個。

*)へこんでいない多面体を凸多面体という。

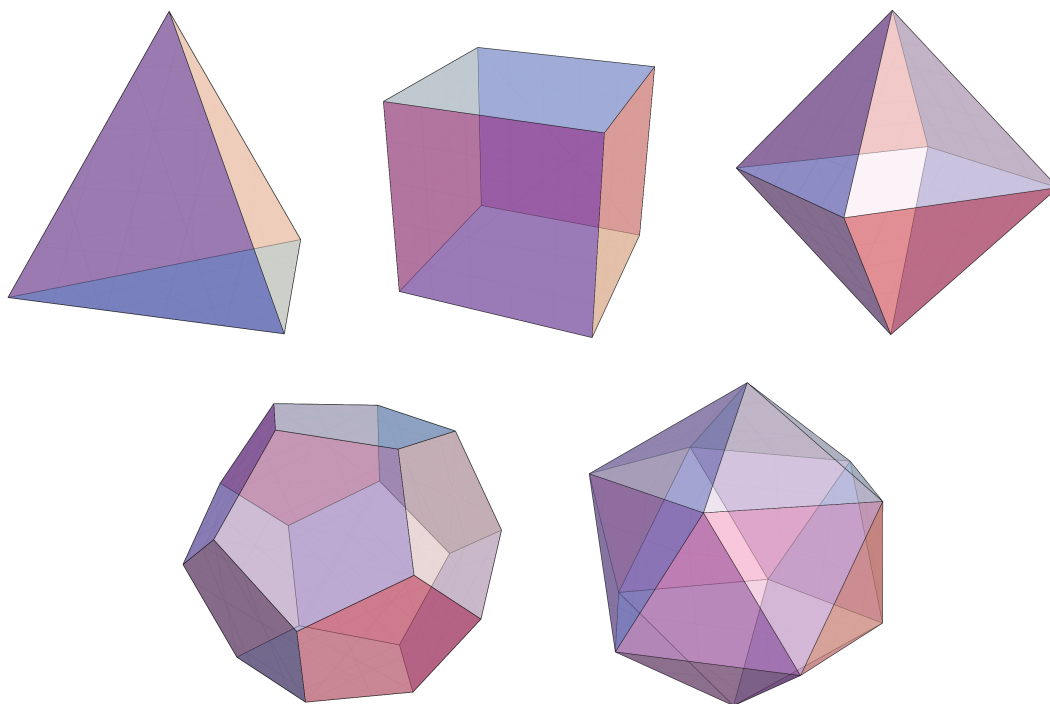
14:39, 25th Apr, 2014

図 C.1: 正多面体の形 .

より $|T| = 12$. また , これらはすべて正 4 面体の 4 つの頂点を入れ替える偶置換なので , $T \simeq A_4$.
 そして , O については ,

- 各頂点と対する頂点を通る軸 $\times 3$ の周りの $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ 回転 . 計 9 個 .
- 各面の中心と対する面の中心を通る軸 $\times 4$ の周りの $2\pi/3, 4\pi/3$ 回転 . 計 8 個 .
- 各辺の中点と対する辺の中点を通る軸 $\times 6$ の周りの π 回転 . 計 6 個 .
- 恒等変換 . 計 1 個 .

より $|O| = 24$. また , これらはすべて正 8 面体と双対な立方体の 4 本の対角線を入れ替える置換
 なので , $O \simeq S_4$. それから , Y については ,

- 各頂点と対する頂点を通る軸 $\times 6$ の周りの $2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ 回転 . 計 24 個 .
- 各面の中心と対する面の中心を通る軸 $\times 10$ の周りの $2\pi/3, 4\pi/3$ 回転 . 計 20 個 .
- 各辺の中点と対する辺の中点を通る軸 $\times 15$ の周りの π 回転 . 計 15 個 .
- 恒等変換 . 計 1 個 .

より $|Y| = 60$. また , $Y \simeq A_5$ である .

付録D リー群とリー代数

正方行列のうち、その行列式が0でないものの全体は群を成し、そのような群とその部分群はリー群と呼ばれる。また、リー群の性質はリー群より定義されるリー代数を用いて理解できる。この付録では、リー群とリー代数の基本的な知識、特に、 $SU(2)$ とその代数について述べる。

D.1 リー群とリー代数

N 次の実 (複素) 正方行列のうち、その行列式が0でないものの全体の集合を N 次実 (複素) 一般線形変換群 (general linear transformation group) といい、 $GL(N)$ と書く。 $GL(N)$ は行列の積を演算として群を成す。

Proof.....

まず、結合法則は明らか。次に、 $A, B \in GL(N)$ ならば、 $\det A, \det B \neq 0$ より、

$$\det AB = \det A \cdot \det B \neq 0$$

となるので、 $AB \in GL(N)$ 。そして、

$$\det \mathbf{1}_N = 1 \neq 0$$

なので、 $\mathbf{1}_N \in GL(N)$ であり、これは明らかに $GL(N)$ の単位元である。それから、 $A \in GL(N)$ ならば、 $\det A \neq 0$ よりその逆行列 A^{-1} が存在して、

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \neq 0$$

となるので、 $A^{-1} \in GL(N)$ であり、これは明らかに A の逆元である。

..... *Q.E.D.*

$GL(N)$ とその部分群をリー群 (Lie group) という。リー群の種類とそれらの群元について表 D.1 にまとめておく。

リー群 G が与えられたとき、任意の実パラメーター t に対して

$$e^{tX} \in G \tag{D.1}$$

を満たす X 全体の集合を G のリー代数 (Lie algebra) といい、 G の名前を小文字に変えて表す ($\mathfrak{su}(N)$ など*)。ここで、リー群 G のリー代数を \mathfrak{g} とすると、任意の行列 X, Y 、スカラー λ, μ に対して、

$$e^{tX}, e^{tY} \in G \implies e^{(\lambda t)X} e^{(\mu t)Y} = e^{t(\lambda X + \mu Y)} \in G$$

*) フラクトゥールを用いて $\mathfrak{su}(N)$ などとする場合もある。

表 D.1: リー群の種類と群元 .

群	呼び方	群元 g
$GL(N, \mathbb{C})$	複素一般線形変換群	複素正則行列
$GL(N, \mathbb{R})$	実一般線形変換群	実正則行列
$SL(N, \mathbb{C})$	複素特殊線形変換群	$\det g = 1$ の複素正則行列
$SL(N, \mathbb{R})$	実特殊線形変換群	$\det g = 1$ の実正則行列
$U(N)$	ユニタリー群	ユニタリー行列
$SU(N)$	特殊ユニタリー群	$\det g = 1$ のユニタリー行列
$O(N)$	直交群	直交行列
$SO(N)$	回転群	$\det g = 1$ の直交行列
$Sp(N, \mathbb{C})$	シンプレクティック群	シンプレクティック行列

$$\therefore X, Y \in \mathcal{G} \implies \lambda X + \mu Y \in \mathcal{G},$$

すなわち, リー代数はベクトル空間を成している . これより, リー代数はいくつかの生成元 (generator) によって張られることがわかる .

D.2 $SL(N)$

$GL(N)$ の元のうち, 行列式が 1 のもの全体の集合を N 次実 (複素) 特殊線形変換群 (special linear transformation group) といい, $SL(N)$ と書く . $SL(N)$ はリー群である .

Proof

まず, $A, B \in SL(N)$ ならば,

$$\det AB = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$$

となるので, $AB \in SL(N)$. 次に,

$$\det \mathbf{1}_N = 1$$

なので, $\mathbf{1}_N \in SL(N)$. それから, $A \in SL(N)$ ならば,

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = 1^{-1} = 1$$

となるので, $A^{-1} \in SL(N)$.

..... *Q.E.D.*

$SL(N)$ のリー代数 $\mathfrak{sl}(N)$ について考えてみる . まず, $\mathfrak{sl}(N)$ の元は明らかに N 次の正方行列でなければならない . 次に, 任意の $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{sl}(N)$ に対して $t \ll 1$ とし, $\det e^{tX}$ を計算してみ

14:39, 25th Apr, 2014

ると,

$$\det e^{tX} \simeq \det(\mathbf{1}_N + tX) = \det \begin{pmatrix} 1 + tx_{11} & tx_{12} & \cdots & tx_{1N} \\ tx_{21} & 1 + tx_{22} & \cdots & tx_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ tx_{N1} & tx_{N2} & \cdots & 1 + tx_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\simeq 1 + t(x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{NN}) = 1 \quad \therefore x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{NN} = \text{Tr } X = 0,$$

すなわち, $\mathfrak{sl}(N)$ の元はトレースが 0 の N 次正方行列でなければならない.

D.3 $U(N)$ と $SU(N)$

 N 次ユニタリー行列, すなわち,

$$U^\dagger = U^{-1} \tag{D.2}$$

を満たす N 次正則行列 U 全体の集合を N 次ユニタリー群 (unitary group) といい, $U(N)$ と書く. また, $U(N)$ のうち, 行列式が 1 の元全体の集合を N 次特殊ユニタリー群 (special unitary group) といい, $SU(N)$ と書く. $U(N)$, $SU(N)$ はリー群である.

Proof.....

まず, $U, V \in U(N)$ ならば, $U^\dagger = U^{-1}$, $V^\dagger = V^{-1}$ より,

$$(UV)^\dagger = V^\dagger U^\dagger = V^{-1} U^{-1} = (UV)^{-1}$$

となるので, $UV \in U(N)$. 次に, $\mathbf{1}_N$ はユニタリーなので, $\mathbf{1}_N \in U(N)$. それから, $U \in U(N)$ ならば, $U^\dagger = U^{-1}$ より,

$$(U^{-1})^\dagger = (U^\dagger)^{-1} = (U^{-1})^{-1}$$

となるので, $U^{-1} \in U(N)$. $SU(N)$ は, これと $SL(N)$ の証明より明らか.

..... *Q.E.D.*

$U(N)$ のリー代数, すなわち $\mathfrak{u}(N)$ について考えてみる. まず, $\mathfrak{u}(N)$ の元が N 次正則行列でなければならないのは明らかである. 次に, 任意の $X \in \mathfrak{su}(N)$ に対して

$$\begin{aligned} (e^{tX})^\dagger &= \left\{ \mathbf{1}_N + tX + \frac{(tX)^2}{2} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots \right\}^\dagger = \left\{ \mathbf{1}_N + tX^\dagger + \frac{(tX^\dagger)^2}{2} + \frac{(tX^\dagger)^3}{3!} + \cdots \right\} \\ &= e^{tX^\dagger} = (e^{tX})^{-1} = e^{-tX} \quad \therefore X^\dagger = -X, \end{aligned}$$

すなわち, $\mathfrak{u}(N)$ の元は N 次反エルミート行列でなければならない. 特に, $SU(N)$ のリー代数 $\mathfrak{su}(N)$ は, トレースが 0 の N 次反エルミート行列でなければならない.

D.4 SU(2) と su(2) のパラメーター表示

SU(2) は Yang-Mills 理論におけるゲージ変換として用いられる, 本論で最も重要となるリー群である. これについて詳しく見ておく.

まず, SU(2) の元の具体的な形を求めてみる. それには, 以下のような 2 次の複素正方行列の一般的な形を仮定し, SU(2) の元となるための条件を課していけばよい.

$$U = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ e + if & g + ih \end{pmatrix}.$$

a, b, c, d, e, f, g, h は任意の実数である. これに $U^\dagger = U^{-1}$, $\det U = 1$ を課すと,

$$U^\dagger = U^{-1} \iff \begin{pmatrix} a - ib & e - if \\ c - id & g - ih \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g + ih & -c - id \\ -e - if & a + ib \end{pmatrix}$$

より $e = -c$, $f = d$, $g = a$, $h = -b$ であることがわかり, SU(2) の任意の元は

$$U = \begin{pmatrix} a_4 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_4 - ia_3 \end{pmatrix} = a_\mu e_\mu \quad (\text{D.3})$$

のように書けることがわかる. ただし, e_μ は四元数の 2 次複素行列表現における基底行列であり, a_μ は $a_\mu a_\mu = 1$ を満たす任意の実数である. これより, SU(2) の元は 3 つのパラメーターを持ち, それらは 4 次元空間における 3 次元球面を表していると思わせる.

su(2) の元の具体的な形も求めてみる. 先と同様に, 以下のように置いてみる.

$$A = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ e + if & g + ih \end{pmatrix}.$$

これに反エルミート行列であるための条件を課すと,

$$A^\dagger = -A \iff \begin{pmatrix} a - ib & e - if \\ c - id & g - ih \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a - ib & -c - id \\ -e - if & -g - ih \end{pmatrix}$$

より, $a = 0$, $g = 0$, $e = -c$, $f = d$ となることがわかり, さらに, トレースが 0 となるための条件を課すと, $h = -b$ となることもわかる. 故に, su(2) の任意の元は

$$A = \begin{pmatrix} ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & -ia_3 \end{pmatrix} = ia_i \sigma_i \quad (\text{D.4})$$

と書けることがわかる. ただし, σ_i はパウリ行列であり, a_i は任意の実数である. これより, 明らかに su(2) の生成元はパウリ行列である. また, 以下が成り立つことに注意.

$$e^{ia_i \sigma_i} = \mathbf{1}_2 \cos a + i \hat{a}_i \sigma_i \sin a. \quad (\text{D.5})$$

ただし, $a := |a_i|$, $\hat{a}_i := a_i/a$ である.

付録 E 数値計算の手法

解析的に行うことが困難な手法であっても、数値計算を用いることで解を求められる場合がある。微分、積分、正規直交化、同次方程式の解法、線形微分方程式の解法などは解析的な計算においては日常的な手順である。数値計算においては、それら 1 つ 1 つがそれなりの行数のコードを持つ、伝統的で洗練された手法である。この付録では、そのような数値計算の手法について詳しく解説する。また、この付録での解説は主に C 言語を想定している。

E.1 多次元配列

空間格子のような多次元配列を組む際、C 言語などのプログラム言語ではポインタを多用して定義する。例えば、 $M_x \times M_y \times M_z$ の空間格子を定義するには、空間格子の (i_x, i_y, i_z) 番目の点を、

$$i = i_z M_{yx} + i_y M_x + i_x \quad (\text{E.1})$$

番目の点に対応させればよい。ただし、 $M_{yx} := M_y M_x$ である^{*)}。このとき、ループ内での i_x, i_y, i_z の範囲をそれぞれ $0 \leq i_x, i_y, i_z < M_x, M_y, M_z$ とすれば、 (i_x, i_y, i_z) と i は 1 対 1 に対応する。特に、 $(i_x, i_y, i_z) = (0, 0, 0)$ は $i = 0$ に、 $(i_x, i_y, i_z) = (M_x - 1, M_y - 1, M_z - 1)$ は

$$\begin{aligned} i &= (M_z - 1)M_{yx} + (M_y - 1)M_x + M_x - 1 \\ &= M_{zyx} - M_{yx} + M_{yx} - M_x + M_x - 1 = M_{zyx} - 1 \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

に対応する。ただし、 $M_{zyx} := M_x M_y M_z$ である。また、逆に、 $i = i_z M_{yx} + i_y M_x + i_x$ に対して (i_x, i_y, i_z) の各要素は以下のように順に求まる^{**)}。

$$\begin{aligned} i_x &= i \pmod{M_x}, \\ i_y &= (i - i_x) / M_x \pmod{M_y}, \\ i_z &= \{(i - i_x) / M_x - i_y\} / M_y. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

このとき、全空間でのループ計算を行うには、簡単には $i = i_z M_{yx} + i_y M_x + i_x$ を $i = 0$ から $i < M_{zyx}$ まで動かせばよい。また、ループ内で i_x, i_y, i_z の添え字を使う場合は、 i_x, i_y, i_z による 3 重のループを組み、その外で i を初期化しておきループ内で i をインクリメントさせればよい。そのとき、ループは位が低いものが最も内側に来なければならないことに注意。例えば、 $i = i_z M_{yx} + i_y M_x + i_x$ の場合は i_x のループを最も内側にする。

^{*)} $i = (i_z M_y + i_y) M_x + i_x$ としてもよいが、 $M_{yx} = M_y M_x$ を予め計算しておけばどちらも足し算と掛け算が 2 回ずつで計算の手数は同じ。

^{**)} C 言語では mod には % を用いる。

E.2 数値微分

数値計算において、関数の微分は差分に置き換えられる。格子間隔 Δx の格子上で定義された関数 $f(x_i) = f_i$ を考える。このとき、点 x_i の周りでの f_i のテーラー展開は

$$f_{i\pm 1} = f(x_i \pm \Delta x) = f_i \pm \left(\frac{df}{dx}\right)_i \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_i \Delta x^2 \pm \dots$$

となり、それぞれの複号の差と和をとることで以下が得られる。

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i = \frac{f_{i\pm 1} - f_i}{\pm \Delta x} + O(\Delta x), \quad (\text{E.4})$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (\text{E.5})$$

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (\text{E.6})$$

これらをそれぞれ1次の1階前進(後退)差分, 2次の1階中央差分, 2次の2階中央差分という。また, 差分を用いて微分を近似する方法を有限差分法 (finite difference method) という。有限差分法では, x_i における微分を求めるのに用いる点は必ずしも x_i のみであるとは限らない。特に, 中央差分では $x_{i\pm 1}$ での値を用いるため, ある格子上で定義された関数の微分を得るには, もとの関数はそれより1周り大きな格子上で定義されていなければならないことに注意。境界での値が定義できない場合は, 前進差分や後退差分を用いなければならない。それには, 簡単には, 1次の前進, 後退差分を用いればよいが, これらは精度が低いので, より精度の高い以下の2次の前進(後退)差分も用いられる。

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i = \frac{-3f_i + 4f_{i\pm 1} - f_{i\pm 2}}{\pm 2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (\text{E.7})$$

また, 数値計算において問題が生じた際, 数値計算の精度が原因であるかを確認するために以下の4次の1階中央差分なども用いられる。

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i = \frac{f_{i-2} - f_{i+2} - 8(f_{i-1} - f_{i+1})}{12\Delta x} + O(\Delta x^4). \quad (\text{E.8})$$

f が多変数関数の場合には, 偏微分と同様に注目する添え字以外の添え字を固定して差分を行えばよい。特に, 3次元格子 (x_i, y_j, z_k) 上で定義された関数 $\varphi(x_i, y_j, z_k)$ の差分は, x, y, z 方向の格子間隔をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ とすれば,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{i,j,k} &= \frac{\varphi_{i+1,j,k} + \varphi_{i-1,j,k} - 2\varphi_{i,j,k}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_{i,j,k} &= \frac{\varphi_{i,j+1,k} + \varphi_{i,j-1,k} - 2\varphi_{i,j,k}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2), \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)_{i,j,k} &= \frac{\varphi_{i,j,k+1} + \varphi_{i,j,k-1} - 2\varphi_{i,j,k}}{\Delta z^2} + O(\Delta z^2) \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

のようになり, これらの和が $\varphi(x_i, y_j, z_k)$ のラプラシアンとなる。また, $\varphi(x_i, y_j, z_k)$ のある1点におけるラプラシアンを計算するには計7点 (7-point stencil) が必要となることに注意。

14:39, 25th Apr, 2014

差分の例として, $M_x \times M_y \times M_z$ の格子上で定義された配列 $f[i]$ をそれぞれの方向に微分し, 結果を $f[i]$ の格子より 1 周り小さい格子で定義された配列 $f_x[j], f_y[j], f_z[j]$ にそれぞれ代入する C 言語のコードを以下に示す.

```

i=MyMx+Mx+1; j=0; // MyMx=My*Mx;
for(iz=1;iz<Mzm1;iz++){
for(iy=1;iy<Mym1;iy++){
for(ix=1;ix<Mxm1;ix++){ // Mxm1=Mx-1; etc.
    fx[j]=(f[i+ 1]-f[i- 1])*perdxh; // perdxh=0.5/dx; etc.
    fy[j]=(f[i+ Mx]-f[i- Mx])*perdyh;
    fz[j]=(f[i+MyMx]-f[i-MyMx])*perdzh;
    i++; j++;
} i+=2;
} i+=Mx2; // Mx2=2*Mx;
}

```

ただし, 空間格子上の点 (i_x, i_y, i_z) が $i = i_z M_{yx} + i_y M_x + i_x$ に対応する.

E.3 数値積分

関数の積分を数値的に求めるには, 簡単には台形公式を用いればよい. しかし, 似たような和である Simpson の公式を用いた方がより正確な値となる. 格子間隔 Δx の格子上で定義された関数 $f(x_i) = f_i$ に対して以下が成り立つ.

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = \left(\frac{1}{3} f_1 + \frac{4}{3} f_2 + \frac{1}{3} f_3 \right) \Delta x + O(\Delta x^5 f^{(4)}). \quad (\text{E.10})$$

ただし, $f^{(4)}$ は区間内のどこかで求めた f の 4 階微分である. これを Simpson の公式または Simpson 則という. 積分公式は, 係数や必要な点の数によっていくつか種類があるが, Simpson の公式は 3 点のみを用いて十分な精度が得られる安定した手法である. このとき, 各係数の和が区間数と等しいことに注意. 式 (E.10) はよく知られた式であるが, Simpson の公式にはもう 1 つ以下のようなものもある.

$$\int_{x_1}^{x_4} f(x) dx = \left(\frac{3}{8} f_1 + \frac{9}{8} f_2 + \frac{9}{8} f_3 + \frac{3}{8} f_4 \right) \Delta x + O(\Delta x^5 f^{(4)}). \quad (\text{E.11})$$

これを Simpson の 3/8 則という.

格子間隔 Δx の格子上で定義された関数 $f(x_i) = f_i$ に対し, そのすべての格子点で Simpson の公式を用いれば, 以下が得られる.

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = \left(\frac{1}{3} f_1 + \frac{4}{3} f_2 + \frac{2}{3} f_3 + \cdots + \frac{2}{3} f_{N-2} + \frac{4}{3} f_{N-1} + \frac{1}{3} f_N \right) \Delta x + O\left(\frac{1}{N^4}\right). \quad (\text{E.12})$$

ただし, N は格子点数であり, Simpson の公式より奇数 (区間数は偶数) でなければならないことに注意. これを拡張 Simpson 則という. また, 最初と最後の 4 点に 3/8 則, 残りに Simpson 則を適用したものに式 (E.12) に足して平均をとれば, 以下も得られる (図 E.1).

14:39, 25th Apr, 2014

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & \frac{3}{8} & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} & & & & & \frac{3}{8} & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} \\
 & & & & & & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \cdots & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \\
 +) & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \cdots & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\
 \hline
 & \frac{17}{24} & \frac{59}{24} & \frac{43}{24} & \frac{49}{24} & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & \frac{49}{24} & \frac{43}{24} & \frac{59}{24} & \frac{17}{24} / 2
 \end{array}$$

図 E.1: もう 1 つの拡張 Simpson 則の導出 .

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = \left(\frac{17}{48}f_1 + \frac{59}{48}f_2 + \frac{43}{48}f_3 + \frac{49}{48}f_4 + f_5 + f_6 + \cdots + f_{N-5} + f_{N-4} \right. \\
 \left. + \frac{49}{48}f_{N-3} + \frac{43}{48}f_{N-2} + \frac{59}{48}f_{N-1} + \frac{17}{48}f_N \right) \Delta x + O\left(\frac{1}{N^4}\right). \quad (\text{E.13})$$

ただし, 格子点数 N は, $3/8$ 則を用いた部分は式 (E.12) と比較して $4/3$ と $2/3$ の項がずれて周期的でなくなるため, 奇数である必要はないが, 代わりに $N \geq 8$ でなければならないことに注意 . これをもう 1 つの拡張 Simpson 則 (alternative extended Simpson's rule) という .

拡張 Simpson 則の C 言語によるコードの例を以下に示す .

```

double simp(int N1,int N2,double h,double *f)
{
    int n; double s=0.0;
    for(n=N1+1;n<=N2-1;n+=2) s+=f[n]; // 4/3 の項
    s+=s;
    for(n=N1+2;n<=N2-2;n+=2) s+=f[n]; // 2/3 の項
    return (s+s+f[N1]+f[N2])*h*0.3333333333333333; // 1/3 の項
}

```

式 (E.12) の各項の係数をそれぞれ掛けながら和をとると効率が悪いので, それぞれの係数ごとに和をとってから掛けて足し合わせていることに注意 . また, もう 1 つの拡張 Simpson 則の C 言語によるコードの例を以下に示す .

```

double asimp(int N1,int N2,double h,double *f)
{
    double s= (f[N1++]+f[N2--])*0.3541666666666667 // 17/48
              +(f[N1++]+f[N2--])*1.2291666666666667 // 59/48
              +(f[N1++]+f[N2--])*0.8958333333333333 // 43/48
              +(f[N1++]+f[N2--])*1.0208333333333333; // 49/48
    for(;N1<=N2;N1++) s+=f[N1];
    return s*h;
}

```

14:39, 25th Apr, 2014

多重積分については、拡張 Simpson 則を各添え字の方向へ次々に適用すればよい。このとき、配列が 1 次元化してあれば、配列の次元に合わせて Simpson 則の関数を複数用意する必要はなく、1 次元配列用の Simpson 則の関数で積分する領域を適当に選べばよい。また、最も低い位から順に積分する場合は、すべてのループにインクリメントを用いればよい。 $M \times M \times M$ の格子上で定義されたスカラー場 ϕ を体積積分するプログラムの例を以下に示す。

```
for(i=0;i<MM;i++) ttphi[i]=asimp(M*i,M*i+Mmax,dx, phi); // x 方向
for(i=0;i<M ;i++) tphi[i]=asimp(M*i,M*i+Mmax,dx,ttphi); // y 方向
printf("intphi=%8.16f\n",asimp(0,Mmax,dx,tphi)); // z 方向
```

ただし、ttemp, temp はそれぞれ MM , M 個の要素を持つ 1 次元配列であり、 $MM=M*M$, $Mmax=M-1$ である (最も低い位から順に積分することに注意)。

E.4 同次方程式の解法

未知数 n の同次連立方程式 $Ax = 0$ を解くには、 A に対してガウスの消去法を行えばよい。すると、 A の階数がわかり、解の自由度 $s = n - \text{rank } A$ もわかる。そのとき、 $s = 0$ ならば、 $Ax = 0$ は自明な解 $x = 0$ しか持たない。一方、 $s > 0$ ならば、 $Ax = 0$ は s 次元の解空間を作る。このとき、その基底を x_1, x_2, \dots, x_s とすると、 x は、

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_s x_s \quad (\text{E.14})$$

と書ける。ただし、 c_1, c_2, \dots, c_s は任意定数である。解空間の基底は、ガウスの消去法を行った後の行列から見出すことができる。

ガウスの消去法は、それ自体が既にアルゴリズムとなっているので、基本的には線形代数の教科書に載っている手順をそのままプログラムにすればよい。ただし、その途中に出てくる割り算には注意しなければならない。数値計算では有限の桁数しか扱えないので、0 に近い値で割り算を行うと誤差が大きくなる。ところが、連立方程式は行を入れ替えても解が変わらないので、適当に大きな係数を持つ行をその都度選んで計算すればよい (解の成分の順序をその都度直すようにすれば、列も入れ替えることができる)。この操作を枢軸選択またはピボット選択 (pivot, 軸, 要) という。枢軸選択では、絶対値が最大の係数を持つ行を選ぶと良いことが知られている。

E.5 常微分方程式の解法

格子上で定義された関数 $f(x_i) = y_i$ に対する 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy_i}{dx} = f'(x_i, y_i) \quad (\text{E.15})$$

において、以下が成り立つ。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5). \quad (\text{E.16})$$

14:39, 25th Apr, 2014

ただし, h は格子間隔であり, k_1, k_2, k_3, k_4 はそれぞれ以下のように書ける.

$$\begin{cases} k_1 = hf'(x_n, y_n), \\ k_2 = hf'(x_n + h/2, y_n + k_1/2), \\ k_3 = hf'(x_n + h/2, y_n + k_2/2), \\ k_4 = hf'(x_n + h, y_n + k_3). \end{cases} \quad (\text{E.17})$$

これを用いると, ある点 x_n における f の値 y_n が与えられればそれ以降の点の値は帰納的に求まる. このようにして微分方程式を解く方法を 4 次の Runge-Kutta 法という. 連立微分方程式の場合は, k_1, k_2, k_3, k_4 を未知関数ごとに用意すればよい. また, 格子間隔の符号を反転させれば逆向きに解くこともできる.

Runge-Kutta 法を用いるには, 初期条件と導関数が必要である. 導関数については, 与えられた微分方程式を式 (E.15) の形に変形すればよい (2 階の場合は連立方程式に置き換えればよい). また, 初期条件については, それが予め与えられていればその点を出発点として Runge-Kutta 法を行えばよい. 与えられていない場合は, 例えば, 解を適当な点の周りでフロベニウス級数展開したものを考え, それを方程式に代入して各次数ごとの係数を 0 と置くことで展開係数を求めていく. そのとき, 展開係数が有限個の (低次の) 係数で表せれば, それらをパラメーターとして Runge-Kutta 法を繰り返し行い, 境界条件を満たす解を見つければよい. このようにして境界条件を満たす解を探す方法を狙い撃ち法またはシューティング法 (shooting method) という.

参考文献

- [1] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, (North-Holland Personal Library, 1982).
- [2] N. S. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2004).
- [3] Ya. Shnir, *Magnetic Monopoles*, (Springer, 2005).
- [4] G. 't Hooft, unpublished.
- [5] E. Corrigan and D. B. Fairlie, Scalar field theory and exact solutions to a classical SU(2) gauge theory, *Phys. Lett. B* **67**, 69 (1977).
- [6] F. Wilczek, Geometry and interactions of instantons, in *Quark Confinement and Field Theory*, (Wiley, 1977) 211 [ISBN/0-471-02721-9].
- [7] R. Jackiw, C. Nohl and C. Rebbi, Conformal properties of pseudoparticle configurations, *Phys. Rev. D* **15**, 1642 (1977).
- [8] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz and Yu. S. Tyupkin, Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations, *Phys. Lett. B* **59**, 85 (1975).
- [9] T. T. Wu and C. N. Yang, *Phys. Rev. D* **12** (1975) 3845.
- [10] J. J. Giambiagi and K. D. Rothe, *Nucl. Phys. B* **129** (1977) 111.
- [11] E. Witten, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 121.
- [12] N. S. Manton, The force between 't Hooft-Polyakov monopoles, *Nucl. Phys.* **B126**, 525 (1977).
- [13] P. Goddard and D. I. Olive, Magnetic monopoles in gauge field theories, *Rept. Prog. Phys.* **41**, 1357 (1978).
- [14] G. 't Hooft, Magnetic monopoles in unified gauge theories, *Nucl. Phys.* **B79**, 276 (1974).
- [15] A. M. Polyakov, Particle spectrum in the quantum field theory, *JETP Lett.* **20**, 194 (1974).
- [16] E. B. Bogomolny, The stability of classical solutions, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976).
- [17] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, An exact classical solution for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 760 (1975).

- [18] E. J. Weinberg, Parameter counting for multimonopole solutions, *Phys. Rev.* **D20**, 936 (1979).
- [19] B. Julia and A. Zee, Poles with both magnetic and electric charges in nonabelian gauge theory, *Phys. Rev.* **D11**, 2227 (1975).
- [20] S. R. Coleman, S. J. Parke, A. Neveu and C. M. Sommerfield, Can one dent a dyon?, *Phys. Rev.* **D15**, 544 (1977).
- [21] G. W. Gibbons and N. S. Manton, Classical and quantum dynamics of BPS monopoles, *Nucl. Phys.* **B274**, 183 (1986).
- [22] N. S. Manton, Monopole interactions at long range, *Phys. Lett.* **B154**, 397 (1985); (Erratum) **B157**, 475 (1985).
- [23] G. W. Gibbons and N. S. Manton, The moduli space metric for well-separated BPS monopoles, *Phys. Lett.* **B356**, 32 (1995) [hep-th/9506052].
- [24] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld and Y. I. Manin, *Phys. Lett. A* **65** (1978) 185.
- [25] W. Nahm, *Self-Dual Monopoles and Calorons*, Springer Lecture Notes in Physics Vol. 201 (Springer, New York, 1984), pp. 189-200.
- [26] N. J. Hitchin, *Commun. Math. Phys.* **83** (1982) 579.
- [27] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, *Nucl. Phys. B* **110** (1976) 153.
- [28] S. A. Brown, H. Panagopoulos and M. K. Prasad, *Phys. Rev. D* **26** (1982) 854.
- [29] N. J. Hitchin, N. S. Manton and M. K. Murray, *Nonlinearity* **8** (1995) 661 [dg-ga/9503016].
- [30] C. J. Houghton and P. M. Sutcliffe, *Commun. Math. Phys.* **180** (1996) 343 [hep-th/9601146].
- [31] H. Garland and N. K. Murray, *Commun. Math. Phys.* **120**, 335 (1988).
- [32] P. Norbury, *Commun. Math. Phys.* **212**, 557 (2000).
- [33] M. F. Atiyah and N. S. Manton, *Phys. Lett. B* **222**, 438 (1989).
- [34] A. Hosaka, S. M. Griffies, M. Oka, R. D. Amado, *Phys. Lett.* **B251**, 1-5 (1990).
- [35] A. Hosaka, M. Oka and R. D. Amado, *Nucl. Phys. A* **530** (1991) 507.
- [36] K. J. Eskola and K. Kajantie, *Z. Phys. C* **44** (1989) 347.
- [37] K. -I. Kondo, N. Fukui, A. Shibata and T. Shinohara, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 065033 [arXiv:0806.3913 [hep-th]].

14:39, 25th Apr, 2014

- [38] N. Fukui, K. -I. Kondo, A. Shibata and T. Shinohara, Phys. Rev. D **82** (2010) 045015 [arXiv:1005.3157 [hep-th]].
- [39] B. J. Harrington and H. K. Shepard, Phys. Rev. D **17** (1978) 2122.
- [40] R. S. Ward, Phys. Lett. B **582** (2004) 203 [hep-th/0312180].
- [41] D. Harland, J. Math. Phys. **48** (2007) 082905.
- [42] F. Bruckmann, D. Negradi and P. van Baal, Nucl. Phys. B **698** (2004) 233 [hep-th/0404210].
- [43] A. Nakamura and J. Sakaguchi, J. Math. Phys. **51** (2010) 043503 [arXiv:0909.1601 [hep-th]].
- [44] D. Muranaka, A. Nakamura, N. Sawado and K. Toda, Phys. Lett. B **703** (2011) 498 [arXiv:1105.2092 [hep-th]].
- [45] 浜中 真志, 『ADHM/Nahm 構成法とその双対性』, 2002 .
- [46] 戸田盛和, 『日評数学選書 楕円関数入門』, 日本評論社 .
- [47] Klein F 1913 *Lectures on the icosahedron* (London : Kegan Paul)
(F. クライン 著, 関口 次郎 / 前田 博信 訳, 『シュプリンガー数学クラシックス 第5巻 正20面体と5次方程式』, シュプリンガー・フェアラーク東京 .)
- [48] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, 丹慶勝市・奥村晴彦・佐藤俊朗・小林誠 訳, 『Numerical Recipes in C』 [日本語版], 技術評論社 .
- [49] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 8.0, 2010, Champaign, IL.