

2013年度原子核三者若手夏の学校

素粒子パート 場の理論 講義録

# 格子QCDシミュレーション入門

—パソコンの上で格子場を楽しむことを目標に—

中村 純 教授

(広島大学 情報メディア教育研究センター)

講義録作成：金沢大学理論物理学研究室

河内比花留 後藤弘光 藤田哲也 松崎功志 八十山朋彦  
魚井英生 遠山国也 松田命 安井慎一郎  
柏瀬翔一 山田雅俊

## 概要

この講義録は2013年度原子核三者若手夏の学校で行われた中村純氏による格子ゲージ理論に関する講義(素粒子パート/場の理論)をまとめたものです。この講義では格子ゲージ理論の基礎と中村氏が開発されているLattice Tool Kitの基本的な使い方について述べられています(有限温度、有限密度の章は時間の都合上省略されています)。

# 目次

第0章	はじめに	3
第1章	格子 QCD の基礎	8
1.1	Introduction . . . . .	8
1.1.1	格子場は何がうれしいのか? . . . . .	8
1.2	Notation . . . . .	11
1.3	Gauge Transformation . . . . .	17
1.3.1	格子上のゲージ変換 . . . . .	17
1.4	Monte Carlo . . . . .	19
1.4.1	数値計算の誤差 . . . . .	19
1.4.2	モンテカルロ法 . . . . .	20
1.4.3	Metropolis アルゴリズム . . . . .	22
1.4.4	1次元量子力学 . . . . .	26
1.4.5	フローチャート . . . . .	29
1.5	Actions . . . . .	33
1.5.1	格子 QCD のラグランジアン (準備) . . . . .	33
1.5.2	格子 QCD のラグランジアン . . . . .	34
1.5.3	スピン型相互作用とゲージ相互作用 . . . . .	35
1.5.4	フェルミオン(クォーク)作用 . . . . .	35
1.5.5	(古典)連続極限 . . . . .	37
1.6	Some Basic Quantities . . . . .	41
1.6.1	Wilson Loop と Polyakov Line . . . . .	41
1.6.2	ゲージ結合定数と格子間隔 . . . . .	44
1.6.3	Strong Coupling Expansion . . . . .	46
1.7	Fermions . . . . .	49
1.7.1	KS(Kogut-Susskind) フェルミオン . . . . .	49
1.7.2	カイラル対称性 . . . . .	49
1.8	Hadron Propagators . . . . .	50
1.8.1	クォークプロパゲータ . . . . .	50
1.8.2	共役勾配法 (Conjugate Gradient Method, CG 法) . . . . .	50
1.8.3	メソンのプロパゲータ . . . . .	52
第2章	有限温度	53
第3章	有限密度	54

<b>第4章 Lattice Tool Kit Fortran90</b>	<b>55</b>
4.1 Lattice Tool Kit . . . . .	55
<b>付録A 古典連続極限 (1.5.5 節) の補足</b>	<b>59</b>
A.1 $SU(N)$ ゲージ理論におけるのプラケットの計算 . . . . .	59

## 第0章 はじめに

はい、どうもありがとうございます。中村です。気楽に皆さんに聞いていただけたらと思います。別に分野を問わず。研究の自分の分野に関係あろうとなかろうと是非皆さんに知っていただきたいと思っています。ここに1. 基礎と書いてあるんですけど、

1. 基礎
2. 有限温度
3. 有限密度
4. LTKf90(Lattice Tool Kit Fortran90)

予定としては基本的な部分、それから有限温度、有限密度。そして、自分で勝手に呼んでるだけなんですけど、LTKf90(Lattice Tool Kit Fortran90)っていうものについての紹介もさせていただきたいと思っております。ただ、時間が限られていると思いますので、2番目(有限温度)と3番目(有限密度)はある意味僕の趣味みたいなもの、自分の研究分野のイントロダクションなので、時間がなければ2番目と3番目は削ってしまいたいと思います。僕はもちろん基礎のところを皆さんに理解して帰っていただきたいんですけども、できればLTKのところも今回は是非やらせていただきたいと思っているので、時間を見て1番目をやって、場合によっては4番目(LTKf90)をやって、時間があったら戻って来ようかなと思っております。それ自身も危ないようだったら、1番目の途中で4番目に飛んでとか。



## 第1章(基礎)の講義内容

- 1.1 Introduction
- 1.2 Notation
- 1.3 Gauge Transformation
- 1.4 Monte Carlo
- 1.5 Action
- 1.6 Some Basic Quantities
- 1.7 Fermions
- 1.8 Hadron Propagators

第1章はこのようになっています。ちょっと1.3と1.4は順番を逆にすれば良かったなと思ったんですけど、1.2を書いているうちにゲージ変換の部分が長くなっちゃったんで分離させたんです。でも、全体としてこんなことがあるんだと頭に入れておいていただければと思っています。ここに来る前、国際会議に出てる時に、こういう色んなスクールに出てる人に話を聞いたんですけども、やっぱり基本的には「スクールの時には黒板でやれ」って言うのでちょっとできるかどうか。最近、あ、授業のときはもちろん黒板を使いますが、しばらくやってないから…。途中でPCが固まってしまうんじゃないかと不安なんですけど、もうちょっと先の方までやって、そこから先は黒板(ホワイトボード)でやっていきたいと思ってるんですけど。



## 昔々、M2の時に立教、都立大、早稲田で 夏の学校素粒子論パートを担当しました

● 崎田文二先生(City Univ. NY)

● 高林武彦先生（名古屋大学）



図 1: 昔話

私も昔々、何年昔か調べたんですけども、修士2年のときだったと思います。あんまり昔で覚えてないんですが、当時、東京にあった小規模校は準備校とかそういうのに回ったことがなかったんだけど、3校合同でやればできないこともないだろうと言って引き受けてしまいました。そのときにちょうどCUNY(The City University of New York)で非常に活躍していらっしゃった崎田文二先生が一時的に帰国していらっしゃったので講義をお願いしました。それから名古屋大学の高林武彦先生にもお願いしました。

崎田先生はお亡くなりになりましたけれども、金沢大学を卒業されて名古屋大学の大学院に行かれて、CUNYへ。当時は講師を囲む会とかはなかったですが、割と長い間滞在して講義をして下さいました。ですから、色々とお話を聞けて、「うーん、僕ねー、実はねー、名古屋大学にどうも行ったけれども、えーなんか物理できないし、ぱっとしないし、というわけでアメリカに行っちゃったんだよー。」とかいうおもしろいお話を色々伺いました。あ、こんなの記録取らないで下さいね<sup>1</sup>。ご本人がいらっしゃらなくても、関係者の人に怒られちゃうかもしれないので。崎田先生はSU(6)で非常に有名な方ですけども、当時、J. L. Gervais, A. Jevicki and B. Sakitaとか、そういうソリトンの量子化を非常に精力的にやられていました。講義では基本的なところから始めて、まあ、やっぱりすごい。ずっと黒板でば一っとやられていましたね。「ここで詰まったんですが、ここでうまくいったんですよ！」とか、そんな感じで、すごく面白かったですね。

それから高林先生は、もう伝説上の雲の上のご高名な大先生なので、まあ、しばらく一緒に暮らせば雲の上の人も親しくなるかなと思ったんですが、やっぱり雲の上の方で。雲の上の人って、つまり別世界。僕らのような下世話な世界には住んでないといった感じで。朝、ごあいさつに行くと、「先生、昨夜はお休みになれましたでしょうか。」「いや、うるさくて全然眠れなかった。」とか言われて、「あっ、それはすみません。」とか言って。

で、その次に実はこういう講演、僕なんかと違って偉い先生に来てもらおうと張り切ったもんだから、何とかして来てもらおうと思って、「その代り、先生たちにやってもらって、僕たちで講義ノートを作りますから。」とか言っちゃってですね。講義ノートを作ったのが、どうもそ

<sup>1</sup>とってしまいました。

れが昨日お話を聞いてると、その後ずーっと皆さんに迷惑をかけることになって…。講義ノートを作る伝統になったみたいで申し訳なかったと思っているんですが(笑)。でもそれは、お二人には喜んでいただけたと思います。崎田先生は、終わった後に、「まだできないのかー！」とか、何度も「ほんとにやる気あんのかー！」とか催促していらっしやった。でも当時は $\text{TeX}$ なんかないし、皆で手書きでやってたわけですから大変だったんですね。

僕が外国に十年ほど流れ歩いていた時に、当時の講義ノート、皆で必死に手書きで書いたやつなくしちゃったんで、どっかに落ちてないかなって思ってたんですけども(笑)。まあいいやつ。どうもこういう余計なおしゃべりが長引くのが問題でして(笑)。

## 📍 **格子ゲージ理論は道具だ！**

- 📍 素粒子論ではいまやっているテーマを  
10年後もやっていることはあまりない

📍 やってるときはそれが一番大切と信じた人が強い

- 📍 道具は磨け

- 📍 道具はたくさん持っていた方がいい



図 2: この講義のメッセージ

で、この講義の一番言いたいメッセージはですね、**格子ゲージ理論、特に数値計算っていうのは道具だ**と。目的じゃないと。これを研究する人ってのはいなくはないんだけど、僕自身はそれは本当はおかしいと思っていて、やっぱり物理ですから基本的には自然界を理解したいってのがあります。自然界を理解するには場の量子論を使ったり、あるいは何か dispersion を使ったりですね。そういうのは色々あると思うんですけども。それはやはりどれも、場の量子論ですら、道具なので、いわんや格子ゲージ理論においてをや。これは数値計算なので、やっぱり道具だと思うんですね、皆さんが研究するための。でも、ただ道具と言っちゃうと貶めるみたいな言い方になっちゃうんですけど、でも、ただ道具なので皆さんが必要だと思った時に使えばいい。

で、これは素粒子論パートだと思うんですけど、統計取ってるわけではないので、無責任に言ってるだけですが、素粒子論で今やってる研究を10年後もやってる人ってたぶん一割もないだろうと。20年後にまだ今と同じ研究分野をやってる人ってたぶん1%くらいしかいないだろうと。ってのは僕の周り、同期の人なんかを見てきた、なんとなくの感想なんですよ。ですから皆さんも試しにですね、自分の大学に帰ったら、あ、ちょっと素面の時にはまずいかもしれないから、お酒の入ったときなんかには酔ったふりなんかしてですね、自分の先生に、「先生って若いころ何やってたんですか？」って聞いて、同じことやってなかったら、「え、どうしてテーマ変わったんですか？」って追及してみると面白いですよ。ほんと純粋数学系の方は割と動かないってこともありますけどねえ。素粒子論で20年間、もつとも、僕はある意味20年近

くやっているのでねえ、そういう意味ではやってることになると思うんですけども、でも僕が大学院の時にやったテーマは全然違うテーマです、もうバリバリの現象論をやってたんです。で、そのあと大学院を卒業してから、なんかバリバリの現象論もどうも息詰まるよなあという気が。今にしてみるとちょっと浅はかではあったんですけども。で、大学院を卒業してからは、今度は逆に二次元の厳密解という、ホントもうピュアな mathematics をしばらくやっていたんですが、で、それがちょっと後で話しますが、ヨーロッパに行って、まさに格子 QCD でハドロンを計算するっていうのがちょうど始まったというところだったんで、それに参加させてもらってきたんです。で、大体、素粒子論っていう分野はどんどん変わっていきますから、この夏の学校に来る前に、ドイツでの lattice の会議にいてですね、昔に比べてすごい人数が多くなってるし、大学院の時から格子ゲージ理論をやってますっていう人がたくさんいて、そういう人たちと話していると、時々彼らは「これが一生続くんです」っていう感じなんです。でも、僕はそんなことはないんだけどなあと内心は思います。だからといって、今やってる事はどうでもいいと言っていると誤解されると困ります。僕も大学院のときからずっと、夏の学校かなんかで色んな友達できて同期、その前後の人たちと付き合いきて、で結局いい仕事をした人たちってのは、馬鹿みたいに今やってるのが一番大切なことだと信じてやってる人たち。やってる時には、これが世界で一番大事だとやった人だけが結局残る。「まあねえ、どうせ僕のやってることなんかくだらないんだけどね」って言うてる人は全員が残らない。ところが、一步間違えて、その分野がある意味解決して次に行っちゃってるのに、まだやってる人たちもやっぱり同じくためなので、是非さっき言ったように皆さんも自分の先生にお酒の席で追及してみると良いと思います。そして、僕は、格子ゲージ理論は数値計算で道具だと思ってるんですけども、道具ってのはやっぱりなまくらな道具では世界と戦うことはできないので自分の持つてる道具は磨かないといけない。他と戦ったときに負けないような道具でないといけない。あるいは、同じ刀だったとしても、他の人は切るのが得意な道具を持っている時に、自分は突くのが得意な道具を作ったとかですね、そういうのが非常にいいですよ。それから、これはもちろん時間との関係もありますからそんな無責任には言えませんが、でも道具はやっぱりたくさん持っていた方がいいと思います。僕は今格子ゲージ理論をやってるんですけども、大学院の時にはバリバリの現象論をやっていたので実験データってのは見てて懐かしい。そういうのをたまたま見ているときに、「あれ？これって格子ゲージ理論の言葉に焼き直したらこういうことだよなあ」と思って一つ仕事ことができました。そんな風に色々自分の幅は可能な限りですけどね、時間は有限だから、広げた方がいいと。こういうことを言っていると年上のあれで嫌なので、はい。

# 第1章 格子QCDの基礎

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 格子場は何がうれしいのか？

- 場の量子論の枠組み

1. 量子化法
2. Cut-off

ここから授業に入るんですけども、その格子場、Lattice Field Theory っていうのは何が嬉しいのか。場の量子論の枠組みなんですね、格子場っていうのは。で、言うまでもないんですけども、量子力学をやっているわけですよ。ですからまあ、量子化の規則っていうのは必要になるわけですよ。それは今でも安全なのは**正準量子化**でしょう。それから、僕が知ってる限りでは、分かっている限りで同等だと思うけれども、正準量子化以外にファインマンの**経路積分**っていうのがあります。これからやる格子量子場理論も経路積分でしかできないこともないんですけども、普通はユークリッド化された経路積分でやります。で、もちろんそれ以外にも**確率過程量子化**もありますよね、それくらいかな。

で、非相対論的な量子力学ならば、量子化規則があればそこから先はシュレディンガー方程式を解こうが何しようがいいんですが、僕たちが素粒子論の道具としてとして使うのは場の量子論なので、場の量子論にはこれ(量子化法)以外に**紫外発散**が本質的に出てきますので、そのcut-offをどうやって入れるのかっていう、この二つを合わせて場の量子論の枠組みが出てくるわけですね。

僕がヨーロッパに行ったときに、今の言葉でいえば純粋なゲージ場、フェルミオン場が入っていない場の格子ゲージ理論が始まって、その後、ほとんど偶然なんですけれども、僕が行ったところの Parisi 先生が、「どうしてそれにフェルミオンを入れてはいけないのか。どうしてクォークを入れてはいけないのか。いくら考えても理由はわからない。だからできるはずだ」と言って始められてたんです。今で言う格子ゲージ理論、格子QCDがヨーロッパで始まった時だったんですけども、そこに参入してきた人たちには大きく分けて2つのモチベーション、2つの別の分野から来て、僕なんかはどっちかっていうとハドロン現象論をやろうと。その時に「実際、なかなか計算できる方法がないぞ」っていうことで、これに非常に惹かれたんです。一方、ここに全然別な、純粋に場の量子論をやっている人たちが入ってきたんですね。っていうのは場の量子論はヨーロッパの、特にドイツ系の人たちだと非常に場の量子論に対して不安を抱いていた。量子化法はいいんですけども、cut-offに関して、dimensional regularizationとかをよく考えると摂動なんですよね。だから摂動をベースにしなくて、cut-offができるんだろうかと。摂動と全く independent に cut-off っていうことができるんだろうかと。さっき言ったように基本的に cut-off と量子化規則を合わせたものが場の量子論ですから、もしも cut-off が摂動に依存しないと入れられないんだったら、場の量子論っていうのは所詮、摂動論を超えられないんじゃない

いかと。それ以外、摂動論と独立に構成できないんじゃないかという非常に大きな不安があったみたいです。僕はあまり意識がなかったので、そういうのを皆から「悩みだったんだよ」と聞いたときは非常に驚いたんですけれども。そういう意味で、Wilsonが、ついこの間お亡くなりになられたけれども<sup>1</sup>、lattice ゲージ理論を作ったのは非常に嬉しかったですね [1]。格子ってのはもう本質的に時間、空間が離散化されます(ごめんなさい。僕、離散化って言ったり discreteって言ったり言葉が混じっちゃうと思います)。



図 1.1: 格子      図 1.2: 格子上の波      図 1.3: 意味がない波      図 1.4: 格子間隔

図 1.1 のように、格子って言うように時間と空間を切ってやるわけですから、その上では一番速い波でも図 1.2 のような波です。図 1.3 のような波ってのは意味がなく、走っていけないわけですね。普通、格子間隔を  $a$  としますが、

$$P_{\max} = \frac{\pi}{a} \quad (1.1)$$

より速い momentum は走っていくことができないわけで、ここで自動的に ultraviolet がカットされてるわけですね。これが格子場の理論の一番たぶん大事な部分ですね。以下が格子場になることで嬉しい点です。

- 場の量子論の Cut-off を与える
- 強結合展開ができる
  - 朝永先生や Polyakov も気がついていた？
- ゲージ変換が自然に定義できる
- ゲージ固定がいらない
- 数値計算ができる
  - (Asymptotic free な理論なら) 連続理論に自然につながる

強結合展開ですが、Wilson の原論文のところで実際に、これを使って閉じ込めを行っています。

また、ゲージ変換が自然に定義できます。

それからゲージ固定ですが、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dA_{\mu} \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Kenneth G. Wilson (June 8, 1936 - June 15, 2013) この講義は 2013 年 8 月 8 日に行われました。

これは発散してしまう。式 (1.2) の積分範囲が

$$\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dA_{\mu} \quad (1.3)$$

となることで解決されます。という説明の仕方をする人もいるし、Wilson のゲージ理論っていうのは、後で何度かやりますが、Notation が、大雑把にいうと

$$U_{\mu}(x) = e^{iA_{\mu}(x)} \quad (1.4)$$

という exponentiate した量で書いているので、仮に  $A_{\mu}(x)$  を無限大にしてしまったとしても、 $U_{\mu}(x)$  自身はコンパクトです。だから、SU(3) だったら 3 行 3 列のコンパクトな行列の空間の中だけで積分していますので、連続理論で出てきた発散の処理が必要ないのでゲージ固定もいりません。

そして最後に、数値計算が非常に自然な形でできます。特に、このことはゲージ変換が自然に定義できるということと関係していて、連続極限までずっと全部ゲージ普遍性を保ったままにする。連続にもっていくということは cut-off を無限大に飛ばすということです。ただ、QED でも QED の電磁場を式 (1.4) のようにコンパクトにして、格子の上に乗せることによって計算することはできますけれども、実は、QED はむしろ単独で (ワインバーグ・サラム理論の中に組み込まないで) やっちゃうと、Asymptotic free な理論でないためにちょっと困るんですね。連続極限をどうとったらいいかかわからないという…。まあ、この中でそれをやろうという人はいないと思うんですけども、「お、あれだったらじゃあまず、自分のやってる QED のあそここのところに使えないか？」と思う人もいるかもしれません。使えないことはないんですが、QED をやろうとすると必ずこの問題が出てきます。

#### 質問

連続極限をとるときに 2 次相転移があるような相互作用は定義できるんですよね？でも湯川相互作用とかはどうなるのでしょうか？

#### 回答

連続極限にもっていったときには 2 次相転移がないといけない。2 次相転移があるときには 相関長が無限大になります。相関長が無限大になると、すごい大雑把にしか見えなくなるので連続極限に行きます。逆にそれが無いものはダメなんですけどね。ですから他の相互作用に入れて、2 次相転移に持ち込むことができれば OK なんです。

### クォーク束縛状態を研究する道具としての格子 QCD

30 年近く前の話になっちゃいますけれど、Parisi 先生というヨーロッパの大天才がいて。僕が「(先生のところに) 行きたいんですけど」って手紙を書いた時には (全然紹介もなにもなくて手紙書いたんですけど)、まだ有名じゃなかったんですけど、僕が行って間もなくから有名になりだして、そういう意味では僕はラッキーだったね。Parisi 先生の所において、僕は色々目からうるこがボロボロ落ちました。やっぱり僕は素粒子論の研究室を出たもので、まあ、今の皆さんはそんな感じじゃないと思いますけど、僕の先生はうるさく「これからは数値計算の時代だ。君たちは勉強しろ。僕にはできなかったけれど。」と言ったんですけど、なんとなく、研究室の中には、「理論屋は紙と鉛筆だよ」っていう風潮があった気がするんです。でも、そ

れにちょっと近いことを Parisi 先生の前で言っちゃったことがあって。そしたら「えっ。」とか言われて、「だって今やりたいことがあるんだろ。やりたい物理があるんだろ。で、それで必要だったら紙 100 枚だろうと計算機だろうと、君がもし、やりたいことがあって、使える道具があるなら、それを使わないのはなんで？」と言われて目からうろこでした。でも、天才のそばに近づくとこんなにあれなのかと、しばしば言ってることがそばで聞いていても分かん。とって親切なんだけれども、たぶんこっちが分からないことが先生には分からない…。それはしばらく前に Zakharov 先生とお話した時も (3 か月も一緒にお仕事した時)、旧ソ連の超エリートだから、物理屋が、理論物理やってる人が、まさかランダウ・リフシツのページで知らないページがあるとは彼は想像ができない。僕がうっかり馬鹿なことを質問すると、ランダウ・リフシツの教科書に書いてあることは理解している前提で、きっと何か深いことを聞いてるんだろうと。もっと他のところを丁寧で、ますます分からないっていう…。ああいう人たちといると勉強にはなりますがすごいです (笑)。

当時アメリカでは Creutz さんとか Rebbi さんとかいう人たちがゲージ理論を数値計算で色々調べ始めて [2]、彼は QCD をやりたいんだったらクォークをやらなくちゃいけない。そしたら、フェルミオンも入ってくる。で、Wilson のゲージ理論で元々フェルミオンが入っている。どうしてフェルミオンも一緒に数値計算しちゃういけないんですかってアメリカに行ってみたら、アメリカは皆、「できない。」という漠然とした答えで、なぜできないのか理論的に説明してくれなかった。「じゃあやろうじゃないか」っていうこと。それは今にして考えてみるとすごく、フェルミオンのプロパゲーターを計算しようと思うと大規模な行列の逆を解かなきゃいけない。それは今でこそ共役勾配法<sup>2</sup>ってのが一番向いてるって分かってるんだけど、当時数学的には存在していたはずだけれども、物理屋でそんなこと知ってる人は誰もいなかった。というわけで、とりあえず大規模逆行列を解くって言って、開発しようじゃないか、そこから始まるわけね。道具がないなら開発しようという感じですよ。道具は磨けというさっきの話と関連するんですけども。

## 相対論的束縛状態は非常に難しい

あとですね、これは僕なんかはモチベーションだったんだけど、相対論的な束縛状態ってのは実はすごく難しいんです。僕は厳密に言えばできてないんじゃないかっていう気がしますが、ただし、クォークモデルのように「束縛状態」を実際に作っているわけではないんですよ。例えば、ある状態を真空に何かオペレーターをかけて作ります。もう一個そういう状態を作ります。で、この間の相関関係を調べてみて、そこに「基底状態、励起状態が存在するか？」と。存在したら、そこにそういう粒子があるだろう、というそういう考え方かな。ただし、今の格子 QCD の数値計算、そうは言っても、クォークモデルの色んなところを参考にして作っているんで、逆にクォークモデルで上手くいかないところをどうするかっていうのが未解決な問題だと思います。

## 1.2 Notation

こっからしばらく Notation に入ります。もちろん、人によって違うわけですが、Notation ですから。何でもいいんですが。じゃあさあ、アラビア語で書いた方がいいのかって言ったら

---

<sup>2</sup>1.8.2 節参照

そんなことはないんですが。経路積分は

$$Z = \int DU D\bar{\psi} D\psi e^{-(S_G + \bar{\psi}\Delta\psi)} \quad (1.5)$$

$U$  はグルーオンの場、 $\psi$  はクォークの場です。 $D$  っていうのは経路積分なので大文字で書いてあります。 $\bar{\psi}\Delta\psi$  のところはちゃんと書くと

$$\bar{\psi}\Delta\psi = \sum_{\alpha} \sum_a \sum_{x,y} \bar{\psi}_{\alpha}^a(x) \Delta_{\alpha\beta}^{ab}(x,y) \psi_{\beta}^b(y) \quad (1.6)$$

です。 $x$  と  $y$  は 4 次元座標、 $a, b$  について書いてるのはカラーの足、 $\alpha, \beta$  はスピノルの足ですが、よく僕らは Dirac の足と言います。 $\bar{\psi}$  と  $\psi$  はグラスマン数で書かれています。グラスマン数っていうのは、場の量子論をファインマンの経路積分で書くのが当たり前になっちゃうと、なんか「これがフェルミオン場」とか、つい言っちゃうんですけども、グラスマン数は正確に言えば、正準量子化に出てくるオペレーターではなくて、グリーン関数を構成するとき便利な数ですね。グラスマン数は非常に便利なので色んな計算をぱぱぱとできちゃう。しかもこういうの ( $\bar{\psi}\psi$ ) を bilinear って言いますが、もちろん、QCD は分かっているうちでは  $\bar{\psi}\Gamma\psi$  という形でしか相互作用は入らない。ただし、effective なモデルを作れば  $\bar{\psi}\psi\psi\psi$  とかですね、Nambu–Jona-Lasinio 理論 [3, 4] みたいに出てくることはあるんですけども。で、グラスマンの場合は積分ができちゃうので

$$Z = \int DU \det \Delta e^{-S_G} \quad (1.7)$$

になります。数値計算のときは実は、皆、無次元化してあるんですね。

4 次元の格子なんて描けませんから、なんとなく 2 次元で描いてるんですけど、まあ、これでももちろん 4 次元のつもりでいるわけです。まず、僕たちの時間と空間がありましたと。その時間と空間を図 1.5 のように書きます。

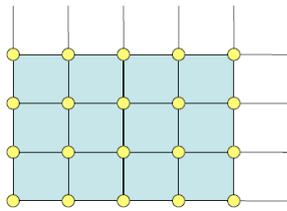


図 1.5: 4次元格子

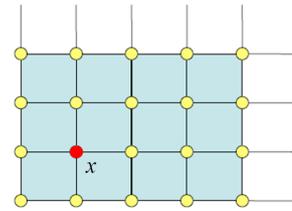


図 1.6: 4次元格子点上の点  $x$

本当は 4 次元なので想像して下さい。そして、図 1.6 のように格子上に点  $x$  があります。その点  $x$  っていうのは、

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (1.8)$$

と書いたり、

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (1.9)$$

と書いたりします。原理的には何でもいいんですが、この  $x_1$  については格子間隔が  $a$  ですから、

$$x_1 = n_1 a \quad (1.10)$$

で、 $n_1$  は整数で書けるとしましょう。  $x_2, x_3, x_4$  も同様です。数値計算をするので

$$x_1 = 1, 2, \dots, N_x \quad (1.11)$$

$$x_2 = 1, 2, \dots, N_y \quad (1.12)$$

$$x_3 = 1, 2, \dots, N_z \quad (1.13)$$

$$x_4 = 1, 2, \dots, N_t \quad (1.14)$$

というのが頭にあるんですが、本当は僕たちの時空間は無限のはずですから、 $-\infty$  から  $+\infty$  に動きます。そして  $U_\mu(x)$  についての

$$U_\mu(x) = e^{iA_\mu(x)} \quad (1.15)$$

と書いて、 $A_\mu(x)$  は僕たちが知ってるゲージ場です。で、ゲージ場ですから  $\mu$  については

$$\mu = 1, 2, 3, 4 \quad (1.16)$$

って言ったり

$$\mu = x, y, z, t \quad (1.17)$$

って言ってもいい。で、場の理論ですから、この  $x$  については4次元空間を考えてあげれば4次元空間の全ての点を動くんだけど、今は discrete な格子の点 (サイト) だけを動いてるとしましょう。で、 $U_\mu(x)$  は  $x$  の関数であり  $\mu$  の関数ですよ。ですから  $U_\mu(x)$  を  $A_\mu(x)$  と書きちゃっても同じですけど Wilson が最初に Physical review の有名な論文 [1] でそう書きちゃった関係で  $U_\mu(x)$  と。まあ、これが Wilson の Notation で、どうして  $U$  について書いたかは知らないんですけど、こう書きますね。だから  $U_\mu(x)$  については  $x$  と  $\mu$  が指定されたその位置と方向での何かゲージ場を表すものです。で、位置  $x$  を与えて、 $\mu$  が1から4の方向を与えますから、図1.7のように一つの辺 (リンク) をちょうど与えることになる。だから **リンク変数** と言う。

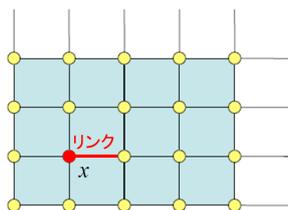


図 1.7: リンク

だけど、これ、人によってなんて言ったら一番分かりやすいかってずいぶん違うんですけどね。数学の人だと、「リンク全体の集合を考えよう。その集合から  $SU(3)$  群へのマップを与えるのが  $U_\mu(x)$  である」という言い方が分かりやすいという人もいます。他にも例えば、「実は  $A_\mu(x)$  が頭にあるんだよね」と思った方が分かりやすい人もいます。あと、エンジニアリング系の

人はリンクって言わないでボンドって言うし、まあ分野によって言い方が違いますよね。でも、サイトはサイトかな？

次はちょっと先走って、まあ、後のために言葉に慣れて下さいっていうためのものなんですけれどね。連続理論で僕たちが知っているのはゲージ変換をすると  $\bar{\psi}(x)\psi(x)$  という同じ点でのものはゲージ不変なんだけれども、点を split しちゃう ( $\bar{\psi}(x)\psi(y)$ ) とゲージ不変じゃなくなっちゃう。でも、これは別に連続場の量子論の教科書に書いてあることで、そういうときにどうしたらいいんですかっていうと、 $\bar{\psi}(x)\psi(y)$  になんか  $Pe^{i\int_x^y A_\mu(x')dx'}$  とような量を間に挟んでやれば、

$$\bar{\psi}(x)Pe^{i\int_x^y A_\mu(x')dx'}\psi(y) \tag{1.18}$$

これはゲージ不変になる。これ自身は、歴史を調べてないから分からないけど、たぶん Wilson より前に知られていたと思います。

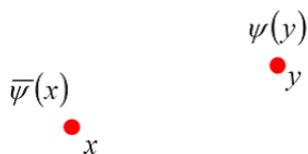


図 1.8: splitされた点

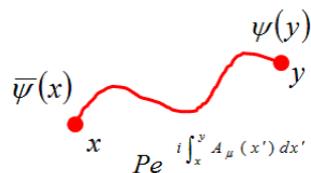


図 1.9: 繋がれた点

これを格子の上でやったら何になるか。格子の上では単位がリンクですから、図 1.9 みたいに連続な線は描けないですよ。そうすると一番上手くやっても図 1.10 ような感じでしょう。つまり、格子の場合、リンクより短い単位はないんで、どっかに  $x$  とあって、 $x$  のすぐそばに  $x'$  てのがあれば、 $x$  と  $x'$  は非常に近いから積分を  $a$  で置き換えることができ、

$$e^{i\int_x^{x'} A_\mu(x)dx} = e^{iA_\mu a} \tag{1.19}$$

となります。よって、 $x$  と  $y$  を繋ぐ線は図 1.11 のようになり、自動的に

$$UU \dots U \rightarrow Pe^{i\int_x^y A_\mu dx_\mu} \tag{1.20}$$

となります。

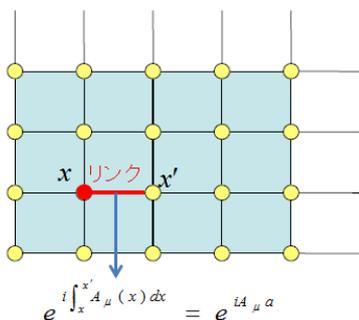


図 1.10: 格子を繋ぐ線

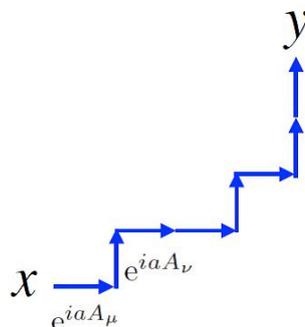


図 1.11: 格子上で  $x$  と  $y$  を繋ぐ線

## 微分を差分にするとみんな当たり前になる

微分するのは格子の上ではもちろん差分になっちゃいます。そういうわけで格子ゲージ理論をやっているとしょっちゅう差分にぶつかるわけで。ちょっとそのウォーミングアップをします。加速度と速度の差分は次のようになります。

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F \\ v = \frac{dx}{dt} \end{cases} \xrightarrow{\text{時間を格子に}} \begin{cases} \frac{v(t+\Delta) - v(t)}{\Delta} = \frac{F}{m} \\ \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta} = v \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} v(t+\Delta) = v(t) + \frac{F}{m}\Delta & t \text{ での } x, v \text{ を与えると } t+\Delta \text{ での } x, v \text{ が決まる} \\ x(t+\Delta) = x(t) + v(t)\Delta & \text{初期条件が必要} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.21)$$

まあこれはいいですよ。

### ● ラプラス方程式

これはちょっと余計な話かもしれませんが、次のように  $(x, y)$  という座標と、そこから  $a$  だけずれた座標があるとします。

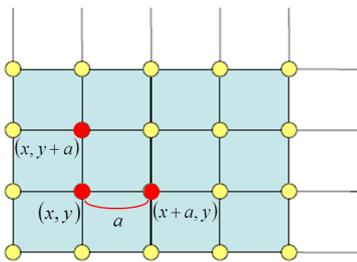


図 1.12:  $(x, y)$  座標

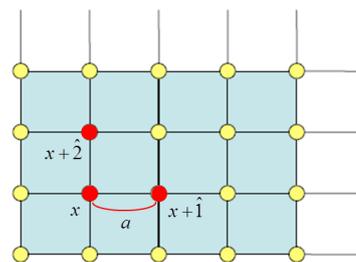


図 1.13: 座標の新しい表記

で、図 1.12 のように、格子点を  $(x, y)$  のようにいちいち書くのは面倒くさいので、まあ Wilson の書き方ですが、図 1.13 のように書くことを許してもらったとしましょう。それでラプラス方程式を書いてみましょう。単に練習ですけども、皆さんが学部の人に話すネタに困ったときは役に立つと思います。 $\phi$  の  $x$  の  $\hat{1}$  方向の 1 階微分は

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\phi(x + \hat{1}) - \phi(x)}{a} \quad (1.22)$$

と書いてもいいし、所詮、間隔は短いので、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\phi(x) - \phi(x - \hat{1})}{a} \quad (1.23)$$

と書いてもいいですよ。では、2階微分を計算してみましょう。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} &\simeq \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi(x + \hat{1}) - \phi(x)}{a} \right) \\ &\simeq \frac{1}{a} \left( \frac{\phi(x + \hat{1}) - \phi(x)}{a} - \frac{\phi(x) - \phi(x - \hat{1})}{a} \right) \\ &= \frac{\phi(x + \hat{1}) - 2\phi(x) + \phi(x - \hat{1})}{a^2}\end{aligned}\tag{1.24}$$

また、 $x$  の  $\hat{2}$  方向の微分は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \simeq \frac{\phi(x + \hat{2}) - 2\phi(x) + \phi(x - \hat{2})}{a^2}\tag{1.25}$$

ラプラス方程式はこれを足してイコールゼロにしなくてはならないので、それから

$$\phi(x) = \frac{\phi(x + \hat{1}) + \phi(x - \hat{1}) + \phi(x + \hat{2}) + \phi(x - \hat{2})}{4}\tag{1.26}$$

となります。だから、ラプラス方程式  $\nabla^2 \phi = 0$  っていうのは差分で表すと上のような式になります。これは何を言ってるのかというと、格子の言葉で言えば、「ある点の場は前後左右の場を足して4で割りなさい」、つまり、「平均しなさい」と。だから、「ラプラス方程式を満たす場っていうのは、自分の前後左右の平均に自分になっていますよ。これが全ての点で成り立つのがラプラス方程式を満たす解なんですよ」ということですね。そして分母の4はどうして出てきたかっていうと、式(1.24)と式(1.25)にある  $\phi(x)$  の係数の2が2回出てきたから4になったわけで、3次元になったら自分の前後左右上下で全部で6人いますから、6で割ることになる。だから、3次元では自分の前後左右上下の平均になります。4次元になったら前後左右上下、見えないけどもう一方向のやつの平均の8で割ったものになります。ですから、自分で簡単なシミュレーションをやってみるとすぐに気付くんですけど、実は、シミュレーションって意外に2次元が難しかったりする。次元が上がると意外に楽だったりする。それはどうしてかっていうと(まあ色んな言い方があるんですけど)、自分は常に周りの人と手を繋いでいて、「その人たちの平均だよ、自分だけ留まってちゃいけないよ」ってなってるわけですが、1次元だと自分が手を繋いでる人が前後にしかいないんだけど、2次元だと4人もいて、その平均になるんだよって、3次元だと6人、4次元だと8人。だから、次元が上がるとそうやって周りで手を繋いでいる人が増えちゃうので、動きづらくなっちゃうんですね。僕たちの言葉で言えば、fluctuationが小さくなっちゃう。だから、次元が小さいほど、5次元に比べて4次元、4次元に比べて3次元、3次元に比べて2次元、2次元じゃなくて1次元なんてなると大変なんですけども、小さくなるほど実はfluctuationが大きくなるので、次元を下げたときは後でやるモンテカルロの計算は、統計をたくさん集めてこないといけないということがあります。このことはたぶん知ってますよね。次元が上がると平均場近似が良くなっちゃうとかですね。

- Rotation の計算

もう一つ、3次元の電磁場について

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}\tag{1.27}$$

というものがあります。この  $x$  方向については

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (1.28)$$

QCD もゲージ場ですから、こういう形のものがいっぱい出てきます。これをさっきと同じ方法で差分に直していくと、

$$B_x = \frac{A_z(x + \hat{2}) - A_z(x)}{a} - \frac{A_y(x + \hat{3}) - A_y(x)}{a} \quad (1.29)$$

となります。これは格子上では図 1.14 のようになります。

rotation の  $x$  成分というのは  $y$  方向と  $z$  方向の差分になってます。あるいは式 (1.15) の  $U_\mu(x)$  というものを用いれば、

$$B_x = U_2(x)U_3(x + \hat{2}) (U_2(x + \hat{3}))^* (U_3(x))^* \quad (1.30)$$

こんな風にただの掛け算になります。電磁場の場合は  $A_\mu$  が実ですので、符号を変えたかったら複素共役をとればいいです。

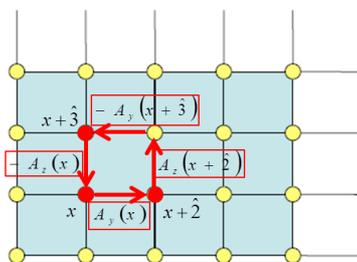


図 1.14: rotation の差分による表示

## 1.3 Gauge Transformation

### 1.3.1 格子上のゲージ変換

連続のゲージ変換はもちろん教科書に書いてあるし、すでにやったと思います。その変換を連続で書いてみると、可換と非可換の場合では一見違ったように見えますね。物理学科の学生で勉強している電場や磁場はマクスウェル方程式に従うし、場の量子論の勉強をはじめると可換と非可換での扱いの違いについて見るわけですが、格子で書くとどちらも同じなんですよね。本質的には連続の場合も同じだと思いますが。

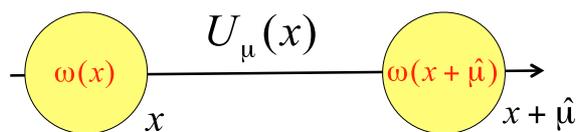


図 1.15: 格子上のゲージ変換

先程説明したように、リンクに対応したところに  $U_\mu(x) = \exp(iaA_\mu(x))$  が存在しています。そして、ゲージ変換の変数  $\omega(x)$  というのはリンク変数ではなく、サイトの変数です。これも場ですから、図 1.15 の様に各サイトに存在します。そして、格子上のゲージ変換というものは次のように表されます。

$$U_\mu(x) \implies \omega^\dagger(x)U_\mu(x)\omega(x + \hat{\mu}) \quad (1.31)$$

これは U(1) の場合にはすぐに確かめられます。

$$\omega(x) = e^{ie\theta(x)} \quad (1.32)$$

と表すことにすると、式 (1.31) は次のようなことをしていることになります。

$$e^{iaA_\mu} \implies e^{-ie\theta(x)}e^{iaA_\mu}e^{ie\theta(x+\hat{\mu})} \quad (1.33)$$

これを慣れ親しんだ  $A_\mu$  の変換としてかけば、

$$A_\mu(x) \implies A_\mu(x) + e\frac{\theta(x + \hat{\mu}) - \theta(x)}{a} \quad (1.34)$$

となります。2項目は連続理論では何を言っているかということ、 $\theta(x)$  の場を  $\hat{\mu}$  方向に1つずらして、 $a$  で割ってください。つまり、 $e\partial_\mu\theta(x)$  ということですね。この  $e$  は  $\theta$  に押し込んでしまってもかまいません。これは普通の電磁気のとおり同じゲージ変換ですね。

今は U(1) を考えていたので、指数の肩の演算を簡単に行ったのですが、一般に SU( $N$ )、非可換な場合には指数の肩が行列になります。QCD の場合には  $3 \times 3$  の行列になっています。この場合、何がかわるかということ、変換は式 (1.31) で何も変わりません。変換を  $A_\mu$  で書きたければ、テーラー展開を用いたら次のように書けます。

$$e^{iaA_\mu} \implies \omega^\dagger(x)e^{iaA_\mu}(\omega(x) + a\partial_\mu\omega(x) + \dots) \quad (1.35)$$

大事なことを言い忘れましたが、ゲージ変換はすべての点で次の関係を満たします。

$$\omega^\dagger(x)\omega(x) = I \quad (1.36)$$

ここで  $a$  が小さいと考えて、 $U_\mu(x)$  を次のようにテーラー展開します。

$$e^{iaA_\mu} = 1 + iaA_\mu(x) + \dots \quad (1.37)$$

すると式 (1.35) の右辺は  $a$  の1次までをとるとすれば、

$$\begin{aligned} & \omega^\dagger(x)(1 + iaA_\mu(x) + \dots)(\omega(x) + a\partial_\mu\omega(x) + \dots) \\ & = I + ia\omega^\dagger(x)A_\mu(x)\omega(x) + a\omega^\dagger(x)\partial_\mu\omega(x) \end{aligned} \quad (1.38)$$

となります。一方、式 (1.35) の左辺は式 (1.37) となるので、 $A_\mu(x)$  がどのように変換したかをまとめると次のようになります。

$$A_\mu \implies \omega^\dagger(x)A_\mu(x)\omega(x) - i\omega^\dagger(x)\partial_\mu\omega(x) \quad (1.39)$$

これが普通、場の量子論の教科書に出てくる非可換の場合のゲージ変換になっているはずです。本質的に式 (1.31) のように  $U_\mu(x)$  を用いて書いてしまえば、可換な場合も非可換の場合も同じ表記として与えられます。

## 1.4 Monte Carlo

これから私たちは量子化規則としてファインマンの経路積分を用います。cut-offはlatticeでするので保証されています。今やったようにゲージ変換を格子の上で定義したので、格子間隔  $a$  がいくら小さくなっていても変わりません。ですから、まだゲージ不変量は何になるかははっきり書いていませんが、ゲージ不変量をいじらずに、ただひたすら格子の間隔を小さくしていけば、それでcut-offは入ってくれます。

### 1.4.1 数値計算の誤差

さて、私たちは数値計算をやりたいと思っています。はじめに書いたように、これから経路積分をしていくのですが、これはものすごい多次元の多重積分です。大雑把に次のように書きました。

$$\int DU \det \Delta e^{-S_G} \quad (1.40)$$

この  $DU$  の意味は、

$$DU = \prod_{x_1=1}^{N_x} \prod_{x_2=1}^{N_y} \prod_{x_3=1}^{N_z} \prod_{x_4=1}^{N_t} \prod_{\mu}^4 dU_{\mu}(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (1.41)$$

です。そして何気なく  $dU_{\mu}$  とかいていますが、これは  $3 \times 3$  行列です。SU(3), SU(2), SU(N) といった条件がつくので、SU(3) の場合には9個ではないんですね。これはSU(3)の生成子の数だけあるので、 $3^2 - 1 = 8$  個になります。このことをふまえて、どれだけの多重積分なのか考えてみると次のようになります。

$$8 \times 4 \times N_x \times N_y \times N_z \times N_t \quad (1.42)$$

最近だと  $N_x = 32$  とやったりします。すると、この積分はおよそ3千万重積分 ( $10^8$  重積分) といった大変多次元の多重積分をやることになるわけです。普通の積分ではとても積分できないので、モンテカルロ法というものを使います。

経路積分の計算をする前にここではゲージ場の理論や場の理論などは忘れて、単純に多次元の積分をやるという方針でやっていきます。まず自由度1の積分を考えます。

$$I = \int f(x) dx \quad (1.43)$$

これを数値的に計算する方法はいくつかありますが、単純には図1.16(a)のように「区間  $[a, b]$  を短冊状に切り、台形の面積を足し合わせる」というものです。次は2次元の積分を考えましょう。

$$I = \int f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.44)$$

これも図1.16(b)のように直方体の体積を足し合わせることで求められるでしょう。基本的にはこのように計算します。

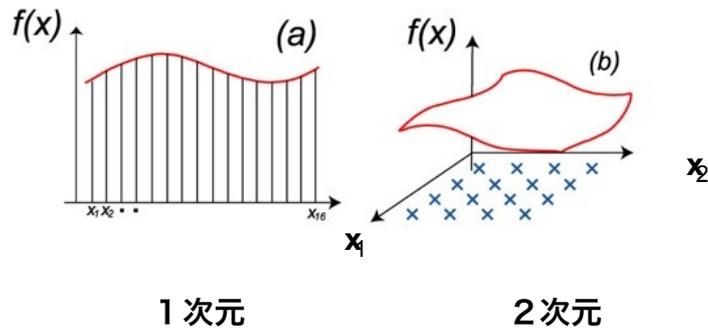


図 1.16: 数値計算の方法

今、次のような多自由度の積分をしなければならないわけですが、

$$I = \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (1.45)$$

この  $n$  が非常に大きいわけです。実際計算するときには、計算時間というものは何個の点を計算するかに依ってしまいます。例えば、1次元を10個に区切ったとして、同じ精度にしようと思うと、2次元の場合には  $10^2$  個の点を計算することになります。そうすると、同じ誤差であるなら、 $n$ 次元ならば  $10^n$  個に区切る必要があることになります。この  $n$  が式 (1.42) で与えられるような数字になるので、これは日本の誇る京コンピューターであろうと不可能です。ですから、このような方法は破綻してしまうわけです。別の言い方をすれば、全部で  $N$  個の点があった場合には、各次元あたり  $N^{\frac{1}{n}}$  個用意する必要があります。今考えている  $n \sim 10^8$  だと、いくら  $N$  を大きくしても  $1/n \sim 0$  ですから

$$N^{\frac{1}{n}} \sim 1 \quad (1.46)$$

となります。つまり、次元の次数を上げていっちゃん各方向には1個分しかないわけです。

## 1.4.2 モンテカルロ法

モンテカルロ法と言った場合には2つのトリックが重なっています。これを今から混乱しないように説明したいと思います。

- Random Sampling
- Importance Sampling

最後にこの二つが統合された話をしますので注意してください。

### Random Sampling

まず Random Sampling ですが、これは僕は数学的に証明はできないけど、先ほどの2次元の場合に言えば、図 1.17 のようにランダムにとってやるようにします。

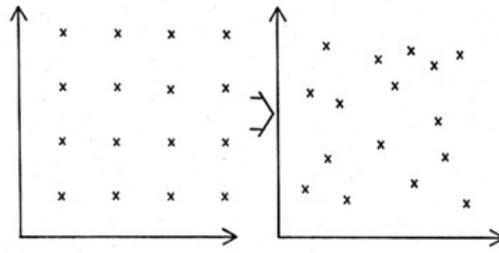


図 1.17: Random Sampling

すると大数の法則から、この誤差が  $1/\sqrt{N}$  となります。したがってどんな次元であろうと誤差はあなたがいくつの点をこの中に振ったかに依るといことです。誤差が次元  $n$  に依ってこない。ここにまず不思議な秘密が一つあります。

### Importance Sampling

しかし、これだけではまだできません。誤差が次元に依らず  $1/\sqrt{N}$  であっても、被積分関数の形が変な形になってしまったらダメなわけです。これに対するトリックとして Importance Sampling を説明します。これをわかりやすく理解するために、1次元の積分に戻して考えたいと思います。Importance Sampling は次元に依らずに成り立つものなので、最後に  $n$  次元に持っていくことを考えます。

数値計算で1次元の積分をします。

$$\int f(x)dx \quad (1.47)$$

このときに図 1.18(a) の様に被積分関数  $f(x)$  がデコボコであるほど難しいわけです。それに対して、この被積分関数  $f(x)$  が平らであれば、より精度よく安全なわけです。

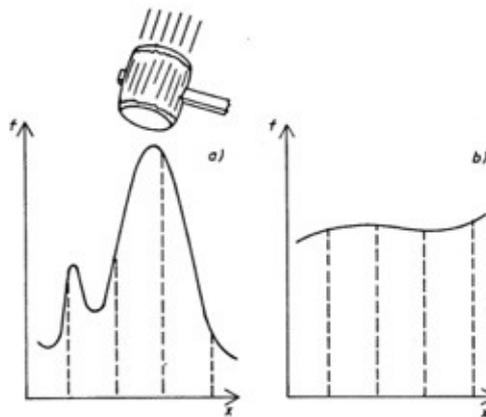


図 1.18: 変数変換

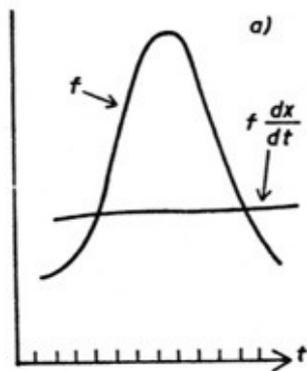


図 1.19: 被積分関数の変化

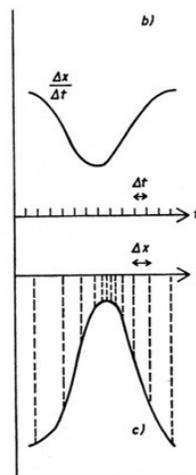


図 1.20: Importance Sampling

それならば、我々は良い事を知っています。この積分の変数を変換することを考えます。

$$\int f(x)dx = \int \underline{f(x(t))\frac{dx}{dt}} dt \quad (1.48)$$

この Importance Sampling は次元に依らずに成り立つので、モンテカルロに限らず、数値計算でこれを用いることでうまくいくこともあります。今は下線部の新たな被積分関数ができるだけ平らであればいいわけです。したがって、 $dx/dt$  は  $f$  が大きくなるときには小さく、小さいときには大きくなるような、 $x$  から  $t$  への変数変換を見つけてやれば、新しい下線部の被積分関数をほぼ平らにすることができることとなります (図 1.19)。その結果を  $t$  で積分すればいいわけです。今  $\Delta t$  の間隔を等間隔にとってやると、

$$\frac{dx}{dt} \sim \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.49)$$

ですから、元の  $x$  空間で見れば、図 1.20 のような対応を見ることができます。したがって、これは何を言っているかという、「 $f(x)$  の大きなところでは  $\Delta x$  を小さくにとって、 $f(x)$  の小さなところでは  $\Delta x$  を大きく取りなさい。」これは「値の大きなところは大切だから、たくさん Sampling しなさい。小さいところはあまり結果に効かないんだから、あんまり Sampling しなくていいよ。Important なところを Sampling しなさい」という、これが名前の由来だと思います。このようなものはしっかりした教科書にいくらでもあります。僕自身はこういうのを始めた頃に、ちょっと CERN に滞在していて、CERN の内部レポートのようなものの中にレクチャーがあって、数値計算をやってる人が書いているレポートで最初に勉強しました。

### 1.4.3 Metropolis アルゴリズム

この Importance Sampling をさっきの Random Sampling とを合わせることはできないかと考えた人たちがいます。現在ではいくつかの方法がありますが、最も有名な方法ものが Metropolis アルゴリズムというものです。

## Metropolis アルゴリズムの方法

先にどうやってやるのかの説明だけします。図 1.21 の様にやります。今積分したいのはこのような形だとしましょう。

$$I = \int e^{-S(x)} dx \quad (1.50)$$

これからやる経路積分をユークリッド化するとこのような形になるし、そもそも統計力学においても  $\text{Tr} e^{-\beta H}$  という形をしているわけです。実際に Metropolis の論文 [5] は統計力学を想定しているんですけども、今は一般的な話をしています。QCD でやる場合には  $\det \Delta e^{-S_G}$  になってしまうわけですが、 $\det \Delta$  の部分を強引に  $e^{\log \det \Delta}$  としてこれと  $S_G$  を合わせたものを  $S$  として考えています。ですからそのようなものをすべてひっくるめて式 (1.50) となっていると思ってください。

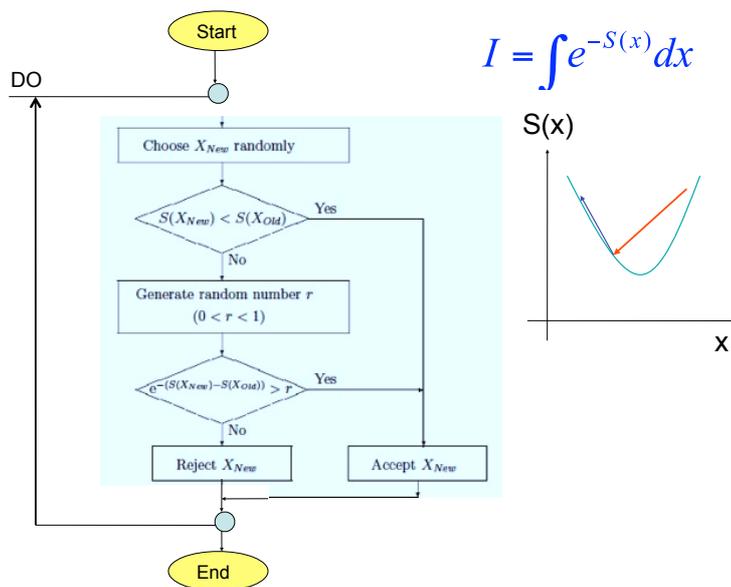


図 1.21: Metropolis アルゴリズム

今、 $x$  をランダムに選んできてください。そして、選んだ  $x$  を  $x_{new}$  としてください。そして、前の  $S(x_{old})$  を  $S(x_{new})$  に変えたときに、この Action が下がったらそれは Accept してください。下がらなかったならば、採用しないとするならば、十分に fluctuate してくれないので次のようにします。Free energy もしくは Action が上がったならば、 $0 < r < 1$  というような一様な乱数を振ってね。  $S(x_{old})$  と  $S(x_{new})$  から、

$$e^{-(S(x_{new}) - S(x_{old}))} \quad (1.51)$$

を計算してね。今 Action が上がった場合なので、つまり、 $S(x_{new}) - S(x_{old}) > 0$  なので、式 (1.51) は 0 と 1 の間の数ですね。それが、

$$e^{-(S(x_{new}) - S(x_{old}))} > r \quad (1.52)$$

であるなら Accept しましょう。ダメだったら Reject して、また新しい  $x$  を作ってね。これを繰り返してる。

この乱数を振る部分はよくわからないかもしれませんが。慣れていたら何を言っているかわかるんですが、私がよく言うのは、今例えば皆さんが付き合っている彼と別れようかどうしようかと思った。いろいろ考えたけど結論が出ない。じゃあ、コインを投げて表だったならば、別れよう。裏だったらもうちょっと付き合おうか。これはコインを投げるので50%で別れようか付き合おうか決めるということですよね。これをもうちょっとデジタル化することもできてですね。0から1までの乱数を振ります。この一様乱数が0.5以下だったら付き合いを続けることにしよう。0.5から1の間だったら別れるとしますよね。これも50%の確率で起こすということですよね。(もしかしたら彼の方がこっそりコンピューターのプログラムを変えようとするかもしれませんが。)これはもっと応用が利くわけです。まあちょっとあの人のいろいろな問題あるしなあ、と考えると0.9以下だったら別れようとしてもいいわけですよね。今、0から1まで一様に出るんだから、10回のうち9回は「別れる」が出ますよね。それでも10回に1回で「付き合い続ける」が出たならば、これは何か天の声かもしれないから、もう少しだけ付き合ってみようとなりますね。このようなことはコントロールできて素晴らしいですね。コインでは1/2しかありませんから。乱数を使えばもっと精密な調整ができる。そんな例でした。

一様乱数を持ってきてある数よりも小さかったら「No」に行くというのは、「式(1.52)の確率で「No」に落としてね。」というようなことによく使われるテクニックなんです。今言ったことは、ある $x$ からスタートしてランダムな別の $x$ のところに動きます。その結果Free energyあるいはActionが下がったならば、それは「OK」。けども、この $x$ の方はランダムに作っているので、それが上がったときにはその増加した $\Delta S$ の確率でRejectしてくれと言っているわけですね。逆に言えばたとえ増加しても1からその確率を引いた確率でAcceptするということですね。

それでこのようなことをぐるぐる繰り返してくれというと、あらあら不思議。簡単な例で、

$$I = \int e^{-S(x)} dx = \int e^{-x^2} dx$$

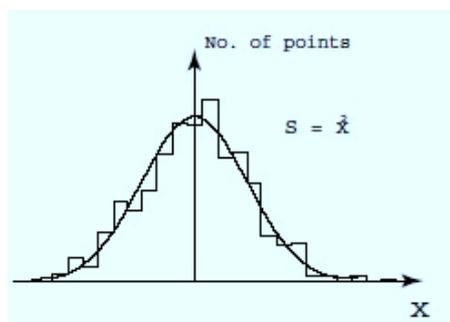


図 1.22:  $S(x) = x^2$  の場合

図 1.22 はぐるぐる回してヒストグラムを作ったものです。Metropolis アルゴリズムでぐるぐる作って出てきた  $x$  の頻度分布を見てやると、回数を増やしていけばどんどんこの被積分関数に近づいていきます。これは何を言っているかということ、例えば、「 $S$  の大きいところはたくさん選んでね。 $S$  の小さいところではあまり選ばないでね。」つまり、「被積分関数に比例した割合で、そこを Sample してね。」だからさっきの Importance Sampling をしっかりやってくれるアルゴリズムなわけです。しかも Random にやっているのだから Random Sampling にもなっているんですね。

## Metropolis の証明

まず、みなさんに、だいたいどうやるのかを掴んでもらうためにちょっと大雑把に話しました。なので、被積分関数とヒストグラムの関係についてもうちょっと正確に話をしたいと思います。まず、 $x_{\text{new}}$  をどうやって作るかについてですが、完全にランダムに作ってもいいのですが、そうではなく、よく使われるのは、例えば次のようなものです。

$$x_{\text{new}} = x_{\text{old}} + h \quad \text{ただし、} h \text{ は } -0.5 \leq h \leq 0.5 \text{ の乱数} \quad (1.53)$$

このように作ると、例えば、

$$x_{\text{old}} = 3 \longrightarrow x_{\text{new}} = 3.2 \quad x_{\text{old}} = 3.2 \longrightarrow x_{\text{new}} = 3 \quad (1.54)$$

こうなったときに、3 から 3.2 が作られる確率と、3.2 から 3 が作られる確率は同じになるわけです。先ほどの Metropolis の説明にはこれが落ちていますが、このことは大事なことです。

今、ある数からある数を作る確率が、

$$P(x_r \rightarrow x_s) = P(x_s \rightarrow x_r) \quad (P_{rs} = P_{sr}) \quad (1.55)$$

となるようにしておいてください。このことを **detailed balance**、**詳細釣り合い** と言ったりします。先ほどのように、全くでたらめに作るものでもこれを満たしますが、あまり効率がよくない。Metropolis の原論文とぴったり同じ説明をします。「ある状態  $r$  からある状態  $s$  にいくときに式 (1.55) を満たすようなアルゴリズムにしてください」、それを論文の中では **Apriori な確率** と書いてあります。私が  $S$  とかいたものが論文では  $E/kT$  となっています。式 (1.53) が  $0 \leq h \leq 0.5$  ならば、これはダメなわけです。このようなことは無しにしてください。つまり、**Ergodic** である。「どの状態も実現されるようにしてください」というものになっています。その結果、私たちの言葉で言えば、 $r$  の状態から  $s$  の状態への変化で Action が下がった場合 (原論文では  $E_r > E_s$  のとき) に調べてみましょう。状態  $s$  であるものの数を  $\nu_s$ 、状態  $r$  であるものの数を  $\nu_r$  としましょう。このとき、

$$r \text{ から } s \text{ に移動する状態の数: } \nu_r P_{rs} \quad (1.56)$$

$$s \text{ から } r \text{ に移動する状態の数: } \nu_s P_{sr} \times \exp(-(E_r - E_s)/kT) \quad (1.57)$$

となります。今、式 (1.57) は  $E_r > E_s$  のとき、私たちの言葉では、「Action が上がった場合には、 $\exp(*)$  の確率でそれを採用しなさい」としています。だから、実際に  $s$  から  $r$  にいく状態の数は  $s$  にある状態の数  $\nu_s$  に Apriori な確率  $P_{sr}$  をかけて、さらに、Metropolis の  $\exp(*)$  の確率をかけた (ここでは Metropolis check といいます) ものが平均としては  $s$  から  $r$  にいきます。その結果、平衡状態に達したとすると、

$$\nu_r P_{rs} = \nu_s P_{sr} \times \exp(-(E_r - E_s)/kT) \quad (1.58)$$

すると Apriori な確率 ( $P_{rs} = P_{sr}$ ) なので、この式 (1.58) から次のことが言えます。

$$\frac{\nu_r}{e^{-\frac{E_r}{kT}}} = \frac{\nu_s}{e^{-\frac{E_s}{kT}}} = C \implies \nu_s = C e^{-\frac{E_s}{kT}} \quad (1.59)$$

したがって、「 $s$  という状態の数というのは、下線部に比例しますよ」ということを言っています。これが証明したかったものです。

[5]N. Metropolis et al. , J. Chem. Phys **212**, 1087

これは1953年の論文で、今はいい時代で、検索をかければ、アメリカ化学会のホームページから見ることができます。この原論文ですが、今は公開されていて落とすことができます。物理の人にとってはすごく読みやすい論文になっています。今これを読んだらすぐに理解できると思います。Metropolisのこの論文というのはすごく有名なんだけど、意外に本当に読んだって人は少ないので、みなさん是非読んでですね、何かあったときに「先生ちゃんとその論文読んでますか」とか言ってみるといいかもしれません。

#### 1.4.4 1次元量子力学

次にこれを使って1次元の量子力学を解いてみよう。実際にやってみると簡単で、Ann.PhysにCreutzとFreedmannという人が次のようなものを出しています。

[6]M. Creutz and B. Freedman, Ann. Phys. **132** 427,

すごく勉強になる、この中にも出てきますけども、離散化したときに測度はどう定義されるのかだとかがよく書かれています。

これを実際にやると、「あっ経路積分っていうのはそういうことなんだな」と実感としてわかるので、コードを書ける人はやってみることをおすすめします。量子力学なので $Z$ は次のようになりますね。

$$Z = \int Dx e^{\frac{i}{\hbar} \int dt L}, \quad L = \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V \quad (1.60)$$

経路積分の $Dx$ の意味というのは、図1.23にあるように「 $t_i$ から $t_f$ までを区切って、各 $x(t_1), x(t_2) \dots$ について積分してその間隔を0に持っていく」というのが経路積分です。素粒子論にきている人は知らないはずはないんですけど、本を読んで頭で理解しているのと自分で実際にやってみるのとでは違う。コードを書くのは理想だし、コードを書かなくても、自分で全部離散化したところまで書いてみるのも大事ですね。

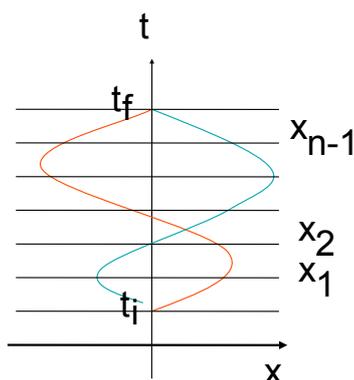


図 1.23: 経路積分の説明

## ユークリッド化、離散化

ここでユークリッド化っていうのが必要で、これはどっちに回すのかでめんどくさいんですが、今はどちらに回しても大丈夫なはず<sup>3</sup>。

$$t \longrightarrow -i\tau \quad (1.61)$$

とすると、

$$L \longrightarrow -\frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V = -H \quad (1.62)$$

$$Z \longrightarrow \int Dx e^{-\frac{1}{\hbar} \int d\tau H} = \int Dx e^{-\frac{1}{\hbar} S} \quad (1.63)$$

となります。積分は  $\int dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} e^{-S/\hbar}$  となつて、 $dx/d\tau$  は次のように置き換えてやります。

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{x_{j+1} - x_j}{a} \quad (1.64)$$

これも多重積分なので、やってみると次のようになるわけです。

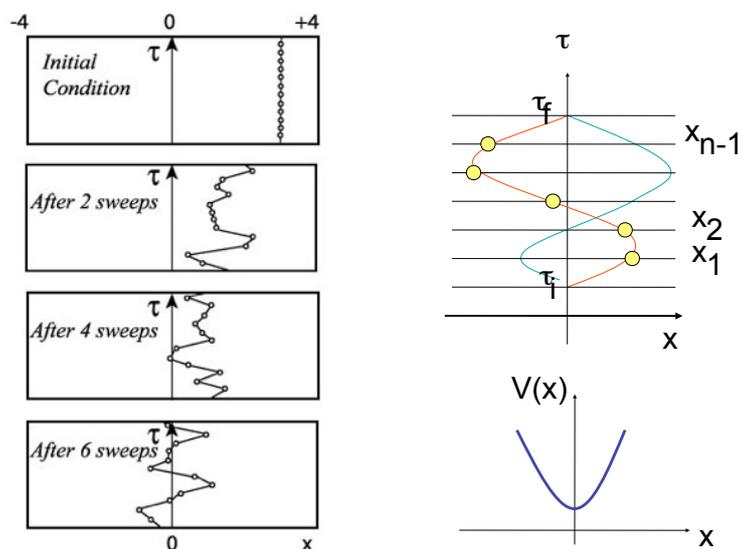


図 1.24: シュミレーション結果

初期値が必要なので、あるところにとって、この初期値について Metropolis をやります。つまり、ランダムに乱数を振ってみて、全体の Action が減少したなら「採用」、増加したならば Metropolis check をやって Accept されたら「採用」。次の点についてももちろん detailed balance が満たされるようにランダムに動かしてみて、同じことをすべてについてやります。そして、これを 1 回やることを 1 sweep とすると、2 回やったものが図 1.24 の左の 2 つ目の図となっていきます。今、図 1.24 右下のような  $V(x)$  を考えているので、初期値から原点に進む方が作用が減少するので、Accept される確率が高くなっています。ですので、6 sweeps くらいまでいくと原点の近くでぐるぐるいくようになります。経路積分というのは図 1.24 右上のように各点で採用された点がつながっていきます。原理的には大きく振動するようなものも考えられるわ

<sup>3</sup> $t \rightarrow i\tau$  としてもよい。

けですが、式 (1.64) が効いてしまうわけです。作用の中に隣同士の差の 2 乗があって、全体にそのマイナスとして入っているの、隣同士すごく離れているものは、速度がものすごく大きくなってしまって、全体の作用  $S$  を大きくしてしまいます。そのようなものが Accept される確率はほとんどないわけです。

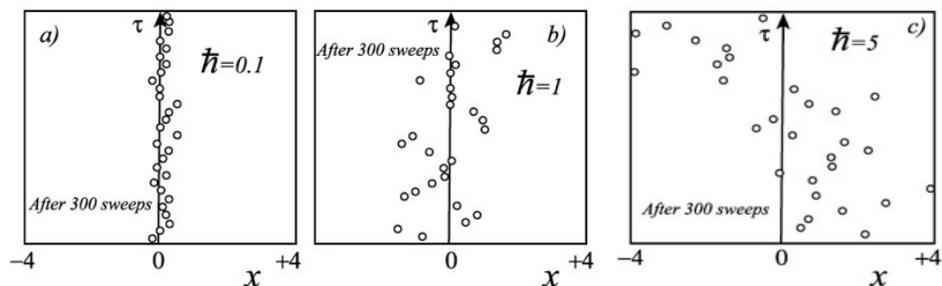


図 1.25:  $\hbar$  を変化させた場合

お遊びはおもしろくって、例えば、プランク定数  $\hbar$  がこの積分には入っているので、もちろんハミルトニアンの次元を調べて入れてもいいんですが、 $\hbar$  の値を変化させてみたものが図 1.25 です。 $\hbar$  を小さくするとほとんどポテンシャルの底の部分に張り付いてしまいます。つまり、プランク定数を小さくするという事は、量子効果が小さくなって、古典的に一番安定しているのはポテンシャルの底の部分だとわかります。(プログラミングでは数値計算を書いた人が神ですから<sup>4</sup>、) プランク定数を大きくしてしまうと、激しく揺らぐというのができます。

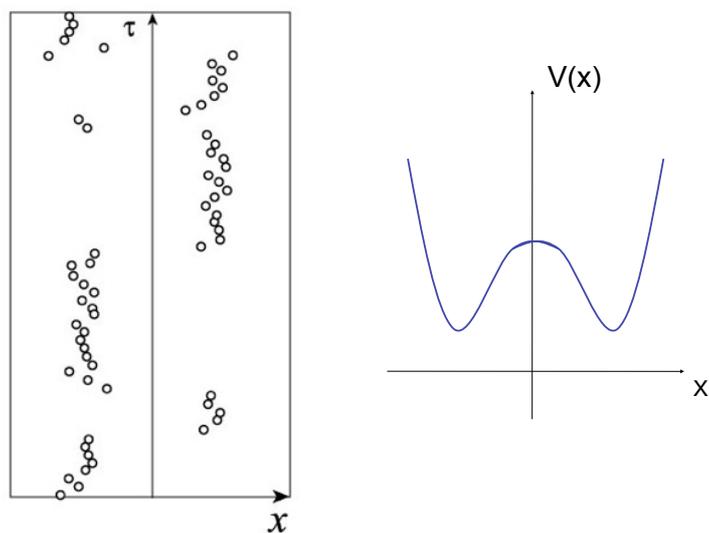


図 1.26: 非調和振動子

次は何をやったかという、例えば、図 1.26 右のようなポテンシャルを与えてやることを考えます。すると両方に局在することが見えますね。これはおもしろくって、この山をうんと高くします。うんと高くすると Metropolis check のところでほとんど Reject されてしまうので、なかなか山を越えられないんだけど、何回もやっているとその確率は 0 ではないので、山を乗り越えることができているわけですね。

<sup>4</sup>神のように物理量を自在に変えることができる！

## 1.4.5 フローチャート

全部の区切った点を変えるのを1回 update したということにします。

### MAIN

実際のコードは図 1.27 ようになります。

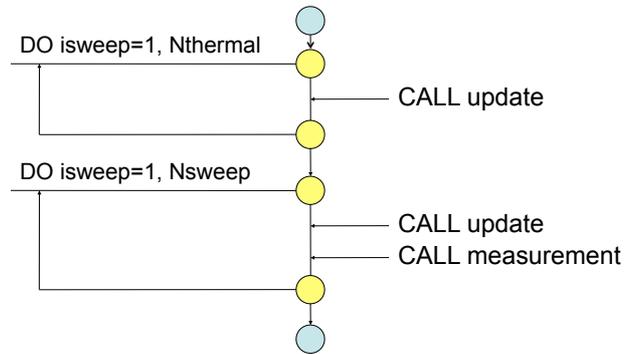


図 1.27: MAIN

みなさん気が付かれていますと思いますが、この update は初期状態に依ってしまいます。だから普通は update というものを熱浴の中であたためるわけですね。十分にあたためて平衡状態に達したら、今のものを1回ごとに update しながら、自分の測定したい測定量を測定します。

### update

もう少し丁寧に描けば図 1.28 ようになります。

これは例ですが、 $r_1$  というのは0から1の乱数です。 $\alpha$  は乱数の幅を決めるものです。このように決めれば detail balance は大丈夫ですよ。実際には無駄をしないためにコード上のテクニックはありますが、何もテクニックなしでこのように書いたってできます。

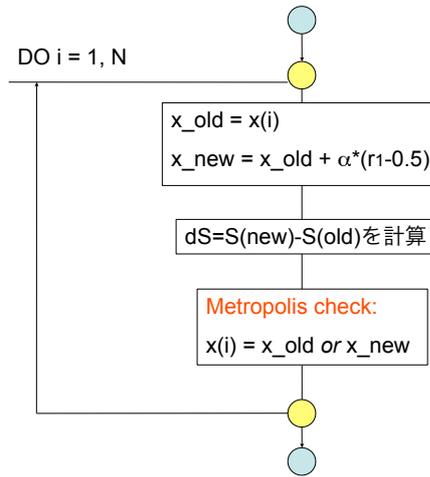


図 1.28: update

### 境界条件の処理

ただし考えなければいけないところがあって、式 (1.64) の速度のところは自分の先が必要になります。  $x(1)$  から  $x(N)$  まで動いているんだけど、「右側が誰?」といったときに端までいってしまったら困るわけです。  $x(N)$  までいったときには速度の計算のときに  $x(N+1)$  が必要になってしまうので、それとして  $x(N+1) = x(1)$  を使ってしまおう。  $x(1)$  まできたときにその隣をどうするのかというときに  $x(0) = x(N)$  を使ってしまおうものを周期境界条件といいます。またそれらにマイナスをつけたものが反周期的条件といいます。

これらは図 1.29 のように表現できます。先に  $x$  に襟を付けておく方法などいろいろあります。周期的、反周期的というのは、

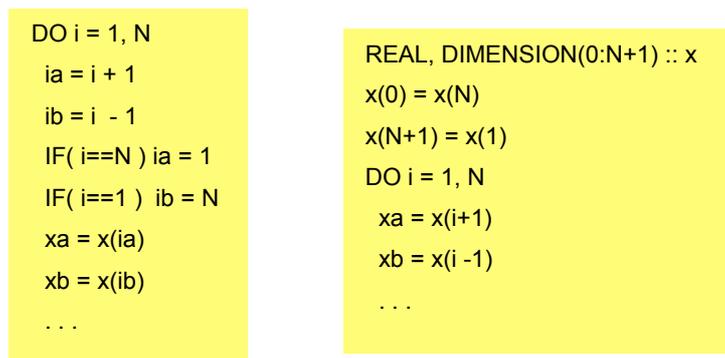


図 1.29: 境界条件の処理

$$f(x_i + aN) = \pm f(x_i) \quad (1.65)$$

と表せるわけです。これは物理の常識なんだけど、一様説明しておきます。

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum e^{ipx} \tilde{f}(p) \quad (1.66)$$

フーリエモードにおいて式(1.65)が言っていることは、

$$f(x + aN) = \frac{1}{N} \sum e^{ip(x+aN)} \tilde{f}(p) = \pm f(x) \implies e^{ipaN} = \pm 1 \quad (1.67)$$

ということです。つまり、

$$\text{周期的} \quad paN = 2k\pi \implies p = \frac{2\pi k}{aN} \quad (1.68)$$

$$\text{反周期的} \quad paN = (2k + 1)\pi \implies p = \frac{(2k + 1)\pi}{aN} \quad (1.69)$$

ということです。これらはどういうところで効いてくるかというと、ボゾンの場合は周期的境界条件を取るので  $p = 0$  が存在しています。フェルミオンの場合は反周期的境界条件をとるのですが、そのときに一番小さいときですら  $p = \pi/aN$ 。  $a$  というのは格子間隔ですが、それだけの運動量を何もしなくても持っているわけです。運動量が持ち上がればエネルギーもそれだけ持ち上がるわけですね。

## 質問

前の Metropolis の話で上の多次元の積分をするとのことでしたが、その時式 (1.50) の積分を計算したのですか？

## 回答

実際は式 (1.50) の積分をやっていたわけではないんですね。被積分関数に確率が比例するように変数  $x$  を作ったんですが、だからと言って、この積分の計算を行っているわけではないんですね。実際に我々が必要なものは、例えばメソンの質量や Polyakov loop ですとか、その他、何か自分達を知りたい測定値を考えるかもしれませんが、それらは期待値  $\langle O \rangle$  となっているはずですよ。その期待値は次のような式で書かれます。

$$\langle O \rangle = \frac{\int O(x)e^{-S(x)}dx}{\int e^{-S(x)}dx} \quad (1.70)$$

例えば Metropolis の話で何をやるのかということ、分子の  $O(x)$  がなければ期待値は 1 となります。分子の積分記号と  $O(x)$  を省いた部分

$$\frac{e^{-S(x)}}{\int e^{-S(x)}dx} \quad (1.71)$$

この確率で  $x(x_1, x_2, \dots, x_N)$  という変数をつくるのが Metropolis の話の内容でありました (実際に QCD の時はグルーオン  $U$  を作っていく)。それでもって自分が計算したい量  $O(x_m)$  を求めてその平均値をとっていきます。

$$\langle O \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N O(x_m) \quad (1.72)$$

それで式 (1.72) で求めた平均値が期待値  $\langle O \rangle$  となっています。この計算は Metropolis の方法でなくとも Heat Bath 法と呼ばれる方法やその他の方法でも計算することができます。ただ、Heat Bath 法では計算出来ない関数系でも Metropolis の方法であればできる場合が多いので、そういった意味では Metropolis の方法は強力なアルゴリズムです。

## 1.5 Actions

### 1.5.1 格子 QCD のラグランジアン (準備)

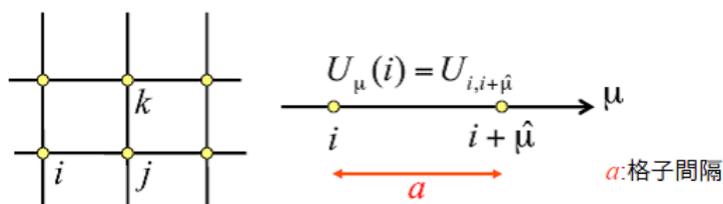


図 1.30: 格子上のゲージ場

まず、僕達の材料としては、変数  $U$  をゲージ場 (QCD ではグルーオン場)、 $\psi$  をフェルミオン場 (クォーク) と表します。また、格子上で  $\mu$  軸の  $i$  と  $i + \hat{\mu}$  の間のリンク変数を  $U_\mu(i)$  としてきましたが、 $i$  と  $i + \hat{\mu}$  の両脇を指定してリンク変数  $U$  を

$$U_\mu(i) = U_{i, i+\hat{\mu}} \quad (1.73)$$

というように二通りの書き方をすることがあります。どちらを使っても OK です。式 (1.73) の右辺の書き方は格子上の三つの格子点  $i, j, k$  で、 $i$  と  $j$ 、 $j$  と  $k$  の間にあるリンク変数  $U$  を掛けて、つなげて表すときに、

$$U_{i,j} U_{j,k} \quad (1.74)$$

というように添え字を使うことで、よりスマートな形に書き表せるので便利です。あるいは  $i$  というサイトに  $\psi_i$ 、 $j$  というサイトに  $\psi_j$  のようなクォーク場があって、その間に  $U$  のゲージ場 (グルーオン場) がある組み合わせの下では、

$$\bar{\psi}_i U_{i,j} \psi_j \quad (1.75)$$

と書き表わすことができます。このほうが割と見やすいので、この後、両方の Notation を混ぜていくと思います。また、 $U$  のエルミート共役を

$$U_{i,j} = U_{j,i}^\dagger \quad (1.76)$$

と定義することにします (ここまではまだ準備段階です)。

次に、ゲージ場  $U$  は

$$U = e^{iA} \quad (1.77)$$

と書いて、それが  $3 \times 3$  のユニタリ行列であったんですが、ある条件を満たすことによって、特殊ユニタリ群  $SU(3)$  の要素になります。

## 特殊ユニタリ群 SU(3)

まず、SU(3) というのは、その要素が  $3 \times 3$  のユニタリ行列であって、そのユニタリ行列の条件に加えて  $\det U = 1$  という性質を持ちます。

$$U^\dagger = {}^t U^*, \quad UU^\dagger = I \quad (\text{ユニタリ行列の条件}) \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \det UU^\dagger = (\det U)(\det U)^\dagger \\ &= (\det U)(\det U)^* \\ &= |\det U|^2 \\ &\longrightarrow \det U = e^{i\theta} \end{aligned} \quad (1.79)$$

このように  $\det U$  は何か位相を持った形で書けるんですが、これが特に  $\det U=1$  のとき、行列  $U$  は SU(3) の要素となります。ここで、もし行列  $A$  がエルミートでかつトレースレスであった場合 (1.77) 式は

$$A^\dagger = A, \quad \text{Tr}(A) = 0 \quad (1.80)$$

$$\implies \begin{cases} \det U = e^{\log \det U} = e^{\text{Tr} \log U} = e^{i \text{Tr} A} = 1 \\ UU^\dagger = e^{iA - iA^\dagger} = e^{iA - iA} = e^0 = I \end{cases} \quad (1.81)$$

とゲージ場  $U$  が SU(3) の条件を満たすようになります。よって、 $U$  は  $A$  がエルミートで、かつトレースレスな条件を満たしていると、それは SU(3) のゲージになってくれます。

### 1.5.2 格子 QCD のラグランジアン

さて、前の節でゲージ場の準備をしたので、ここから格子 QCD について学んでいくことになります。まず、作用  $S$  はゲージパートとフェルミオンパートで分かれてできています。さらに、ゲージパートの作用というのは式 (1.83) で書いてあるような形になっています。

$$S = S_G + S_F \quad (1.82)$$

$$S_G = \beta \sum_{\text{plaquette}} \left\{ 1 - \frac{1}{N_c} \text{Tr}(U_{ij} U_{jk} U_{kl} U_{li}) \right\} \quad (1.83)$$

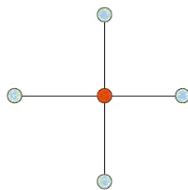
$$\beta \equiv \frac{2N_c}{g^2}, \quad U_{i,j} \in \text{SU}(N_c) \quad (1.84)$$

ゲージパートの作用の中身、式 (1.83) については、まず、格子の中で四つの格子点に囲まれた最小の四角 (**プラケット**) について考えます。先ほどの Notation を用いると、このプラケットは四つの  $3 \times 3$  の行列  $U$  を掛けた形として表せます。そして、掛けたもののトレースをとっていきます。ここで、ゲージ場が全くない場合、つまり、式 (1.83) の  $U$  が単位行列の場合は、式 (1.83) の中のトレースをとってしまおうと 3 になります。さらに、分母の  $N_c$  によって規格化されているので (SU(3) で考えているので  $N_c = 3$ )  $U$  が単位行列の場合は、作用  $S_G$  はゼロになります。つまり、ゲージ場が全くない場合は作用  $S_G$  はゼロになるようにできています。さらに、 $\beta$  は規格化因子  $N_c$  の 2 倍をクォーク・グルーオン間の coupling constant  $g$  の自乗で割った形として表しています。これが Wilson 先生が書いた  $S_G$  の中身です<sup>5</sup>

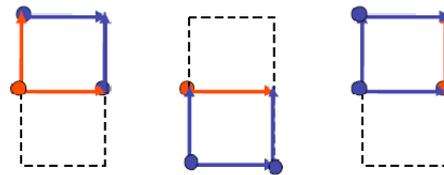
<sup>5</sup>格子ゲージ理論については 30 年くらい前に K.G.Wilson の有名な論文 [1] Kenneth. G. Wilson, Phys. Rev.D10, 2445(1974) で初めて提唱されました。この論文を少し修正したものが [7] Erice lecture Note (1977) です。このノートでは Wilson term というものが付け加えられています。

### 1.5.3 スピン型相互作用とゲージ相互作用

スピン型



$$\sum_i \left( \frac{d\phi(x_1, x_2, x_3)}{dx_i} \right)^2$$



ループ型のため、斜め横の点に属するものとも相互作用。並列化の時に注意を要する

図 1.31: スピン型

図 1.32: ゲージ型

それから、僕自身は大事だと思うので書きましたが、物理で出てくる相互作用には変てこりんなものがあるかもしれません。一番よく出てくる相互作用はスピン型で、自分自身と自分の周りにいる粒子との相互作用です (簡単な例は Ising 模型です)。

$$\sum_i \left( \frac{d\phi(x_1, x_2, x_3)}{dx_i} \right)^2 \tag{1.85}$$

図 1.31 ようなスピン型相互作用で場の理論で一番よく出てくるのは、式 (1.85) のように場  $\phi$  を微分したものの自乗が入ったもので、微分があることによって場  $\phi$  の近くにある場との相互作用が入ってきます。

僕たちがこれからやるゲージ理論において、その時の相互作用はどうなっているかという、先ほどのプラケットの図を用いて書くと、図 1.32 のように赤と青を掛けたもの (ループ) 相互作用となります。ですから、斜めの点同士も相互作用していることとなります (ときどき並列化するとき、斜めの点同士の相互作用を入れ忘れて結果が狂ってしまうことがあります)。昔から例えば、coupling が相転移を起こすところに来てしまうと、モンテカルロ法のスピードがすごく遅くなったり、あるいは有限密度の時に行列式が複素数となって、普通のモンテカルロ法が使えなくなって困ってしまう。そういう時に「素晴らしいアルゴリズムを考えた。これで解決だ！」って昔からよくでるんですね。そういうのは大抵、最初のスピン型相互作用でうまく出来て、あとで少し変形してゲージ型になればこれでおしまいって感じなんです。でも、そういうのでスピン型で出来てゲージ型で出来たというケースは少なくとも QCD 界限で僕は一度も見たことがないですね。

### 1.5.4 フェルミオン (クォーク) 作用

次に、もう一つのフェルミオンパートはどうなっているのか見ていきます。その作用は下の式になります。

$$S_F = \sum_{i,j} \bar{\psi}_i \Delta(i, j) \psi_j \tag{1.86}$$

$$\Delta(i, j) = I - \kappa \sum_{\mu=1}^4 [(1 - \gamma_\mu) U_{i,j} \delta_{i+\hat{\mu}, j} + (1 + \gamma_\mu) U_{i,j} \delta_{i-\hat{\mu}, j}] \tag{1.87}$$

$\kappa$  =hopping parameter

先ほど言ったんですが、K.G.Wilson が physical review で発表した論文 [1] には、式 (1.87) の  $\gamma_\mu$  の左の 1 が入っていません。一般的には

$$\Delta = I - \kappa \sum \left[ (r - \gamma_\mu) U_\mu(x) \delta_{x', x+\hat{\mu}} + (r + \gamma_\mu) U_\mu^\dagger(x') \delta_{x', x-\hat{\mu}} \right] \quad (1.88)$$

$r$  : Wilson term

と書きます。 $r$  は Wilson term と呼ばれています。後で是非やってみてもらいたいのですが、この式の連続極限は QCD の作用になります。ですが不思議なことに、連続極限をとった場合、Wilson term は消えてしまいます。なので、逆に言えば  $r$  はなんでもいい。実際 Wilson も必要だと思ってなくて、そこを最初はゼロとしたんですね。で、そのあとにそれが本質的な役割があることがわかったんですけども。原理的には 0.1 でも 0.5 でもかまわないはずで (1 を超えていいのかわかりませんが) かまわないはずなんですけども (これも考えたことがないのではっきりとわかりませんが) かまわないはずなんですけども…。実際、Erice lecture note[7] にはここをはっきりと 1 としています。その理由として、ちょっと不思議なことが書いてあります (もちろん Wilson は深く考えてそうしたんだと思いますが)。ガンマ行列で

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

$$1 - \gamma_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

$$1 + \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.91)$$

となるので、「 $\mu = 0$  方向において、式 (1.90) によって正の方向に進んでいくときにはフェルミオン場の上の二つの要素のみが進み、式 (1.91) によって負の方向に進んでいくときには下の二つの要素のみが負の方向に進む、というわかりやすいものになる」ということが Erice lecture note[7] にたしか書いてあったような気がします。だけど、それ自体はちょっと変なことを言っています。上で使った  $\gamma_0$  はディラック表現なので、他の表現で使う場合は 0 成分において上の議論は使えません。さらに QCD のカイラル対称性と本質的に絡んでいます。 $r \neq 0$  の値を入れたときにはカイラル対称性を破ってしまうということがあります (もちろん Wilson はそんなこと全部知っているわけですが、不思議なことを述べています)。

また、hopping parameter  $\kappa$  と呼ばれるものがシグマの前についていますが、これは  $i$  から  $\hat{\mu}$  の正の方向、または  $\hat{\mu}$  の負の方向に飛んでいく粒子の強さを表します。実際に連続極限をとってみると、 $\kappa$  は次元  $d$  とクォーク質量に依存していて、クォーク質量が軽くなればなるほど  $\kappa$  は大きくなり、重たいほど  $\kappa$  は小さくなります。それから  $\delta_{x', x \pm \hat{\mu}}$  は Nearest neighbor(最近接) しかありません。それはディラック方程式の中の微分を差分にした時に、こういう Nearest neighbor が出てきます。

さて、Wilson の論文では  $\Delta$  の式が式 (1.87) のように挙げられていました。QCD では、座標  $(i, j)$ 、カラー  $(a, b)$ 、ディラックスピノル  $(\alpha, \beta)$  を持った行列として書きます。

$$\Delta_{\alpha\beta}^{ab}(i, j) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \delta_{ij} - \kappa \sum_{\mu=1}^4 \left[ (1 - \gamma_\mu)_{\alpha\beta} U_{i,j}^{ab} \delta_{i+\hat{\mu}} + (1 + \gamma_\mu)_{\alpha\beta} U_{i,j}^{ab} \delta_{i-\hat{\mu}, j} \right] \quad (1.92)$$

すると、式 (1.92) の第 1 項目はそれぞれの足についての単位行列で表されます。第 2 項目の summation の中についてはディラックスピノルに絡んでくるところが  $(1 \pm \gamma_\mu)$ 、カラーについては  $U_{i,j}^{ab}$ 、座標については  $\delta_{i \pm \hat{\mu}, j}$  となっています。

### 1.5.5 (古典) 連続極限

作用の連続極限をとるときはゲージ場  $U$  とフェルミオン場  $\psi$  を次のように置いておく必要があります。

$$U_\mu(x) = e^{igaA_\mu(na)} \quad (1.93)$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{a^3}{2\kappa}} \psi(na) \quad (1.94)$$

そして、 $a \rightarrow 0$  の連続極限に持って行ったとき、ゲージパートとフェルミオンパートの作用は先に書くと、

$$\lim_{a \rightarrow 0} S_G = \frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{Tr}\{F_{\mu\nu}^2\} \quad (1.95)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} S_F = - \int d^4x [m\bar{\psi}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma_\mu(\partial_\mu + igA_\mu(x))\psi(x)] \quad (1.96)$$

となります。 $F_{\mu\nu}$  の中にはグルーオンの self-interaction、フェルミオンの作用には質量項とフェルミオンとグルーオンとの相互作用項がある。以降はこの作用の連続極限のとり方について述べていきます。

#### ウォーミングアップ: U(1) の場合

ここでは簡単に、ゲージ場  $U$  が U(1) の要素だとして考えていきます。1.5.2 節で紹介したプラケットについて考えます。

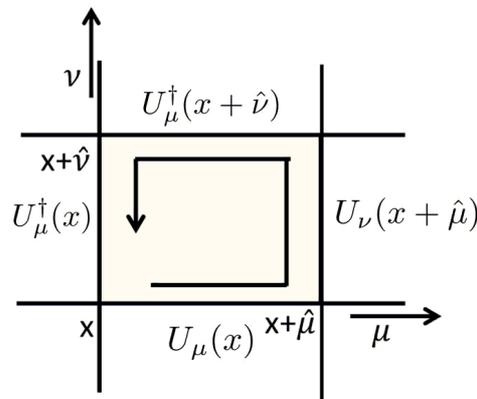


図 1.33: U(1) の場合のプラケット

図 1.33 のプラケットの中を右に一周して回ったとき、それをゲージ場を使って表すと、

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu} &\equiv U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\nu^\dagger(x + \hat{\nu})U_\mu^\dagger(x) \\ &= e^{iagA_\mu(x)}e^{iagA_\nu(x+\hat{\mu})}e^{-iagA_\mu(x+\hat{\nu})}e^{-iagA_\nu(x)} \\ &= e^{ia^2g\left(\frac{A_\nu(x+\hat{\mu})-A_\nu(x)}{a} - \frac{A_\mu(x+\hat{\nu})-A_\mu(x)}{a}\right)} \\ &\simeq e^{iga^2\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)} \end{aligned} \quad (1.97)$$

となります。3列目の式は偏微分に直すために差分を格子間隔  $a$  で割る形に直しました。よって4列目の式は exponential の肩の部分が、 $A$  を  $\mu$  方向へずらしたものと  $\nu$  方向へずらした式になります。さらに QED では exponential の肩のところが  $F_{\mu\nu}$  として表されます。すると  $a$  を 0 に近づけて連続極限に持っていけば

$$(1.97) = e^{ia^2gF_{\mu\nu}(x)} = 1 + ia^2gF_{\mu\nu} - \frac{1}{2}a^4g^2F_{\mu\nu}^2 + \dots \quad (1.98)$$

式(1.98)の第1項目の1は式(1.83)のシグマの中の1と打ち消されます。さらに式(1.83)の中には複数のゲージ場を掛けてそれをトレースしたものを  $N_c$  で規格化する項が入っていましたが、U(1)で考える場合、 $N_c = 1$ で、かつその要素は行列ではなく、数なのでトレースはなくてもよいです。上で整理した  $P_{\mu\nu}$  をプラケットで和をとるとき、あらゆる  $x, \mu, \nu$  について和をとったもの、と書き直せば、

$$\begin{aligned} \sum_{\text{plaquette}} P_{\mu\nu}(x) &= \sum_x \sum_{\mu,\nu} \left( 1 + ia^2gF_{\mu\nu} - \frac{1}{2}a^4g^2F_{\mu\nu}^2 + \dots \right) \\ &= \sum_x \left( 1 - \frac{1}{2}a^4g^2F_{\mu\nu}^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (1.99)$$

となります。第2項目 ( $\mathcal{O}(a^2)$ ) については  $F_{\mu\nu}$  が反対称テンソルであることから、 $\mu, \nu$  で和をとったとき、それが消えてなくなります。また、 $\sum_x$  と  $a^4$  は四次元積分  $\int d^4x$  に取って代わります。

## SU(3) の場合

では次に、これを SU(3) についてやっていきます。先ほど U(1) で考えた場合は exponential の積はその肩をそのまま足すことができましたが、今回はそれができなくなります。つまり、

$$e^X e^Y = e^F \quad (1.100)$$

$$F = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \dots \quad (1.101)$$

となつて<sup>6</sup> $A$  についてただ足しあげるのではなく、交換関係により  $A$  の2次、3次のところが現れてくるようになります(実際は  $A$  の2次の項までで充分)。それで exponential の肩の部分が  $A_\nu(x + \hat{\mu}) - A_\nu(x)$  のところは式(1.102)の展開式を使って置き換えて、 $\psi_n$  と hopping parameter  $\kappa$  はとりあえずは式(1.103)のように定めます。

$$f(x + \hat{\mu}) - f(x) = a\partial_\mu f(x) + \mathcal{O}(a^2) \quad (1.102)$$

$$\kappa = \frac{1}{8 + 2ma}, \quad \psi_n = \sqrt{\frac{a^3}{2\kappa}} \psi(na) \quad (1.103)$$

hopping parameter  $\kappa$  の分母の8は正確には  $2d$  ( $d$  は dimension で今は、 $d = 4$ ) です。

一応、本格的にシミュレーションをする人のために言っておきますが、 $\kappa$  は  $2ma$  がついている為に  $1/8$  より小さい気がするんだけど、使うときには  $\kappa$  は  $1/8$  より大きいところを持ってきます。実際、これは bare なパラメータで、繰り込みに入ってくるので(これがある意味 Wilson fermion の厄介なところなのだけでも)、作用  $S$  からスタートするとき、繰り込みは質量の  $m$

<sup>6</sup>Baker-Campbell-Hausdorff の公式と呼ばれる。

に効くのですが、その効果は  $\kappa + \delta\kappa$  だけ効いてきます。ですので、 $1/8$  よりもう少し大きいところが physical な値となります。基本的には、これだけの公式を用いて根気よく計算していけば、作用からスタートしてその連続極限を出すことができます。その結果が式 (1.95), (1.96) で与えられます。この計算をやってもいいんですけど、今日は別なところで馬鹿丁寧な計算を試みたいので省略します。lattice を本格的にやろうという人は当然計算しておかなければいけないのですが、そうでない人にとっても夏の学校での教養として自分でぜひ手を動かして悪戦苦闘してみるのがいいと思います。講義録のなかに模範解答を入れておきたいですね<sup>7</sup>。

## 作用はユニーク (一意的) ではない

Wilson の作用を出してはみたんですが、ゲージパートの作用だけ見ても一意的ではないんですね。これは難しい問題で、古典連続極限 (naïve classical limit) と言いますが、先ほどの  $U(1)$  や  $SU(3)$  で行ってきた計算は量子力学の知識を応用しているわけではなく、ある意味古典論の範囲で計算していることとなります。古典論の範囲で式を変形して  $a$  をゼロにしたうえで、出てきたものを QCD の作用としてきました。これを「古典連続極限で QCD の作用になる」という言い方をします。しかし、だからと言って「量子力学としてどういうふうにかかれるのか」という証明にならないんですね (僕自身はあまり気にしていないけど)。厳密な証明はできないと思いますので、グリーン関数を計算してみて order by order で一致することを確認するしかないと思います。

ここまでで、古典連続極限で  $a$  の高次のオーダーを落として QCD の作用を出してきたということだったんですが、格子 QCD の作用は  $a$  の高次項が入っていて、その入り方は一意的ではありません。じゃあ、「一意的でないならば、 $a$  の高次の項が減少するようなものを入れようじゃないか」と考えます。すると、一番簡単な場合で次のことが言えます。

$$\square \rightarrow a^4 (F_{\mu\nu}^2 + a^2 F_{\mu\nu}^{(1)} + a^4 F_{\mu\nu}^{(2)} + \dots) \quad (1.104)$$

$$\square\square \rightarrow a^4 (F_{\mu\nu}^2 + a^2 G_{\mu\nu}^{(1)} + a^4 G_{\mu\nu}^{(2)} + \dots) \quad (1.105)$$

$\square$ : Wilson's plaquette

$$\beta(C_0\square + C_1\square\square) \quad (1.106)$$

$\square$  は最もシンプルなプラケットで、もちろん連続極限をとると QCD の作用になっています。他にも  $\square\square$  のようなプラケットも連続極限で QCD の作用になっています。それぞれのプラケットの最低次には  $F_{\mu\nu}^2$  が来ますが、高次の項はそれぞれ違っています。なので、式 (1.106) のようにそれぞれのプラケットに係数をかけて、それらを足してやって、 $\mathcal{O}(a^2)$  の項を打ち消すように係数  $C_0, C_1$  を決めてやることができます。これによって、連続極限に早く到達してくれて、lattice の有限体積効果を減少させることができます (Improved action)。ただし、量子効果を考える必要があります。Improved action には Iwasaki 作用<sup>8</sup>、Syzmanzik 作用、(DBW2 作用) などがあります。

<sup>7</sup>付録 A に載せてあります。

<sup>8</sup>Iwasaki 作用の論文は publish されていません。ですので引用するとき困るのですが…。

質問

プラケットの計算ではゲージ不変性のみから作用が作られているのでしょうか？  
つまり、 $F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$  のようなものは出てこないのですか？

回答

出てきません。たぶん、 $F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$  の場合は対称性が違うんだったと思いますが。lattice では同じ量子数でゲージ不変であること要請しちゃうとすべて  $F_{\mu\nu}^2$  が出てきます。

質問

Iwasaki 作用、Syzmanzik 作用、DBW2 作用の内、実用上どれがよく使われているのですか？

回答

僕は DBW2 作用だと言いたい。なぜならこの作用は僕が作ったから (笑)。Iwasaki 作用の場合は実際にくりこみ群で係数  $C_0, C_1$  を決めなければいけないのですが、Iwasaki さんはそれを数値的にやるのが当時無理だったので、少し強引に摂動を使っています。それをもっときちんと数値繰り込み群をやって求めたのが DBW2 作用です。作り方としてはこれが一番正しい。しかし、実際使うとなると、作用がどこで相転移を起こすのかなど、そういったことを全部調べておかないと 1 つの作用は使えないんです。Iwasaki さんのグループはそういったことを徹底的に調べたので、Iwasaki 作用は安心して使えるのです。だからよく使われます。(でも、Iwasaki 作用での (摂動的に決めた)  $C_0, C_1$  は今の coupling の範囲内であってはずがない。)

## 1.6 Some Basic Quantities

### 1.6.1 Wilson Loop と Polyakov Line

格子上のあるサイトから一周して、元のサイトに戻るような loop を 2 つ考えます。

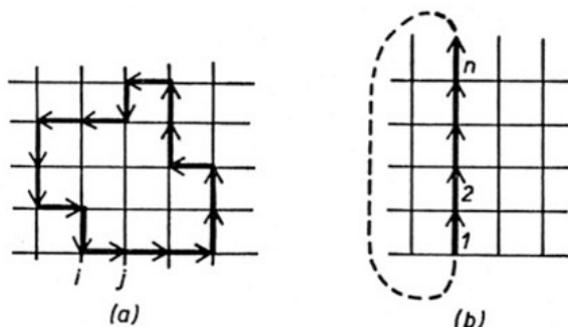


図 1.34: (a)Wilson loop と (b)Polyakov line

$$W = \frac{1}{N_c} \text{Tr}(U_{i,j}U_{j,k}\dots U_{l,i}) \quad ; \text{Wilson loop} \quad (1.107)$$

$$L = \frac{1}{N_c} \text{Tr}(U_{1,2}U_{2,3}U_{3,4}\dots U_{n-1,n}) \quad ; \text{Polyakov line} \quad (1.108)$$

この時、Wilson loop(図 1.34(a)) と Polyakov line(図 1.34(b)) はゲージ不変となることが次のように示されます。

まず、Wilson loop の場合について、ゲージ変換はゲージ場  $U$  の左に  $\omega^\dagger$ , 右に  $\omega$  を掛けていくものであったので、このループのゲージ変換は、

$$U_{i,j}U_{j,k}\dots U_{l,i} \xrightarrow{\text{ゲージ変換}} \omega_i^\dagger U_{i,j} \omega_j \omega_j^\dagger U_{j,k} \omega_k \dots \omega_l^\dagger U_{l,i} \omega_i$$

となります。ゲージ場  $U$  の間にある  $\omega\omega^\dagger$  は単位行列になるので、ゲージ変換したものは、

$$\omega_i^\dagger U_{i,j}U_{j,k}\dots U_{l,i} \omega_i$$

となります。このゲージ変換したものはトレースがかかっているので、トレースの周期性 (cyclicity) を使って、

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\omega_i^\dagger U_{i,j}U_{j,k}\dots U_{l,i} \omega_i) &= \text{Tr}(\omega_i \omega_i^\dagger U_{i,j}U_{j,k}\dots U_{l,i}) \quad (\text{cyclicity}) \\ &= \text{Tr}(U_{i,j}U_{j,k}\dots U_{l,i}) \end{aligned} \quad (1.109)$$

$\omega_i$  を  $\omega_i^\dagger$  の前に持っていけば、トレースは不変となって Wilson loop がゲージ不変となることが示されます。

格子上の隣接格子点でのループをとると、それが不変であることを述べました。それに対して、あるサイトから格子の端まで行った後、周期的境界条件によって初めのサイトに戻る、そのような場合でも同じ理由でゲージ不変になります。この時の図 1.34(b) の線を Wilson line 又は

外部ソースが加わると作用は

$$e^{-S_G} \rightarrow \text{cross} e^{-S_G}$$

図 1.35: 外部ソース入りのゲージ場の作用

Polyakov line と呼びます (Polyakov line と呼んでいる人の方が多いです)。ここで述べた 2 つの loop と line をよく測定で求めます。

今、ゲージ場と couple するような外部ソースを手で導入します。

$$j_\mu = g\delta^3(x_\mu - x_\mu(t)) \quad (1.110)$$

イメージとしては、「何か時間とともに動いていくような単位電荷みたいなものが coupling  $g$  でありました」という感じです。こういうようなカレントが外から入ってきたならば、それがゲージ場  $A_\mu$  と次のような形で相互作用をしているとします。

$$i \int d^4x j_\mu A_\mu = ig \int dx_\mu A_\mu \quad (1.111)$$

$j_\mu$  の中にはデルタ関数が入っているので、四次元の積分が  $x_\mu$  に沿った積分になって、coupling が前に現れている。そして、もともとのゲージ場の作用  $S_G$  に上の相互作用項を付け加えます。

$$\begin{aligned} e^{-S_G} &\rightarrow e^{ig \int dx_\mu A_\mu - S_G} \\ &= e^{igaA_n} e^{igaA_{n-1}} \dots e^{igaA_1} e^{-S_G} \\ &= W e^{-S_G} \text{ or } L e^{-S_G} \end{aligned} \quad (1.112)$$

これは外から何か  $x_\mu(t)$  という line に従って外部ソースを付け加えることによって<sup>9</sup>、作用に何かしらの loop を付け加えたこととなります。ここで、外場を入れた場合の自由エネルギーの変化を見てみましょう。

$$e^{-\Delta F} = \frac{e^{-(F+\Delta F)}}{e^{-F}} = \frac{\int dU e^{-S_G} W}{Z} = \langle W \rangle \quad (1.113)$$

自由エネルギーは  $F = -\log Z = -\log(\int dU e^{-S_G})$  ですから分母は  $Z$  となります。分子は重み  $W$  を入れたので、もともとの自由エネルギー  $F$  から  $\Delta F$  だけ変化しているはずですが、これは Wilson loop の期待値になっています。なので、Wilson loop の期待値は「無限に重たいクォークが loop の上を走ったとき、どれだけエネルギーが増えるか」ということです。また、Polyakov

<sup>9</sup>なぜ外場(外部ソース)を付け加えてもいいかという、外場自身は Dynamical ではなく、ある意味無限に重たい charge だからですね。

line の場合はもっとはっきりしていて、「有限の温度で一個の無限に重たいチャージを持った粒子が直線上を走ったときに、どれだけ自由エネルギーが増えるか」を意味しています。

縦の長さが  $T$ 、横の長さが  $L$  の Wilson loop の期待値の計算をします。

$$\langle W \rangle = \langle \text{Tr}(\square) \rangle = e^{-TV(L)} \quad (1.114)$$

$\square$  : 縦が  $T$ , 横が  $L$  の長さを持つ Wilson loop

これは増えた自由エネルギーに相当し、Wilson loop の長さに比例するでしょうから  $\Delta F = TV(L)$  とします。すると、「自由エネルギーがどれだけ増えるか?」、それは  $L$  の関数になって、「無限に重いクォーク間のポテンシャルでしょう」ということになります。

Polyakov line でも同じで、その期待値は「無限に重いクォーク line が一本ある時のエネルギーがどれだけ増加するか」ということになります。

$$\langle L \rangle = e^{-\Delta F} \quad (1.115)$$

閉じ込め (Confinement) というのは「単独のクォークがあっちゃいけない」と言っています。なので、そういう line を 1 本置いたら自由エネルギーは無限に増えてしまいます。だから、Polyakov line の期待値はゼロになってしまいます。

$$\begin{aligned} \Delta F &= \infty \quad (\text{Confinement}) \\ \implies \langle L \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (1.116)$$

このような量を測定してゼロであれば、たしかに単独のクォークというのは存在できないし、ゼロでなければ存在できるということになります。

図 1.36 は昔、Bali が重いクォークのポテンシャルを計算したものです。たしかにリニアポテンシャル (閉じ込めポテンシャル)、 $V(r) \propto r$  が得られています。  $r \leq r_0$  のところでは負の領域にいます。このような計算はどんどん改善されています。

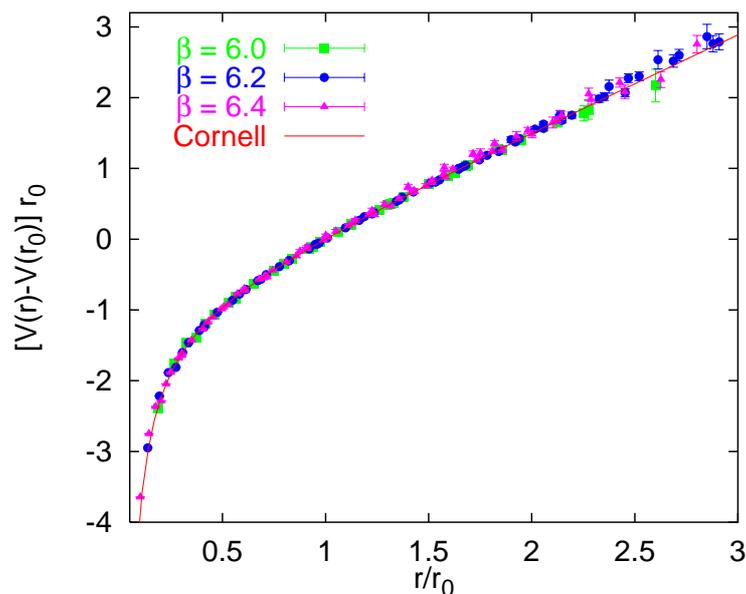


図 1.36: 重クォークポテンシャル [8]

## 1.6.2 ゲージ結合定数と格子間隔

図 1.37 は M. Creutz のゲージ理論が始まった初期のころの論文からとってきたもので、彼らは当時、まだ SU(3) では苦しかったので SU(2) でやってみたいのです。それで、横軸は coupling constant で ( $\beta = 2N_c/g^2 = 4/g^2$  for  $N_c = 2$ )、言いたいことは coupling が小さくなると右へ、大きくなると左へ動くということです。縦軸は格子間隔の二乗に string tension (さっき見たポテンシャルの傾き) を掛けたものになってます。この図の意味は、まず、string tension は物理量なので一定だと思しましょう。そうすると  $4/g^2$  を 0.5 から 3 まで動かすと格子間隔はバァーっと変わってしまいます。それだけではなくて、この後、2-loop scaling をやってみると図に書いてある式が求められますが、それとちゃんと合いますよと示したのがこの有名な論文になります。

[9]M. Creutz, Phys.Rev. D21 2308 (1980)

そしてこの後、20 分から 25 分ぐらいかけて、この図の意味、それから、どんな風にこの式が出てくるのかっていうのを一緒に考えていきたいと思います。

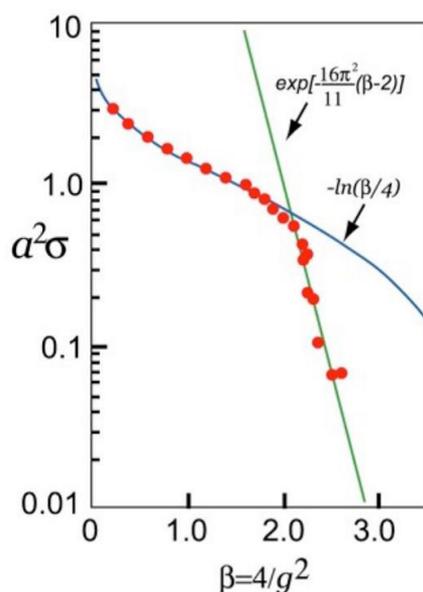


図 1.37: SU(2) ゲージ理論におけるゲージ結合定数と格子間隔の関係 [9]

この講義の最初に言いましたけれども、格子ゲージ理論の最も大事な事は場の量子論にきちんと cut-off を摂動論に頼らずにいれることです。逆に QCD の coupling が無次元なので、次元を持った量は格子間隔  $a$  しか入りません。ですから、例えば質量というのは長さの逆の次元です。もしも、質量を持った量を計算するとしたならば、

$$m = \frac{1}{a} F(g) \quad (1.117)$$

というような coupling の関数を長さで割ったものしかあり得ない。逆に「lattice の上で質量を測りました」と言う時には  $m$  ではなく  $ma$  が出てきます。さて、 $m$  が物理量だとし、ちゃんと

格子ゲージ理論が意味を持っているところで計算すれば、その物理的な質量が cut-off に依ってはいけないはずですから、

$$\frac{dm}{da} = 0 \quad (1.118)$$

になってくれないといけません。そうすると式 (1.117) より、

$$\frac{dm}{da} = -\frac{1}{a^2}F + \frac{1}{a} \frac{dF}{da} = 0 \quad (1.119)$$

$F$  は  $g$  の関数ですから、

$$\frac{dF}{da} = \frac{dg}{da} \frac{dF}{dg} \quad (1.120)$$

とすれば、式 (1.119) は最終的に

$$F = a \frac{dg}{da} \frac{dF}{dg} \quad (1.121)$$

となります。ここで  $a(dg/da)$  は、「coupling を cut-off の log で微分したならばどう振る舞いますか」というのを表しているのので、これを

$$a \frac{dg}{da} = \frac{dg}{d\log(a)} = -\beta(g) \quad (1.122)$$

と書きましょう。それで、一般的にこう書いてしまうと  $F$  が  $g$  の関数としてどうなるかを  $\beta$  関数がコントロールしてくれます。

ところで、 $\beta$  関数は摂動で 2-loop まで計算されています。なので  $\beta$  関数は、

$$\beta(g) = -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 \quad (1.123)$$

となっています (2-loop まで)。また  $\beta_0, \beta_1$  はカラーやフレーバー数で決まっているものです。そうすると、これからすぐわかりますが、式 (1.122) は、

$$\frac{da}{a} = \frac{dg}{\beta_0 g^3 + \beta_1 g^5} \quad (1.124)$$

となります。なので、これを計算すれば良いわけです。したがって、式 (1.124) の両辺を積分すると、

$$\begin{aligned} \log(a) + C &= \int \frac{dg}{\beta_0 g^3 + \beta_1 g^5} \\ &= \int dg \frac{1}{\beta_0 g^3} \frac{1}{1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} g^2} \\ &= \int dg \left[ \frac{a_0 + a_1 g + a_2 g^2}{\beta_0 g^3} + \frac{b_0 + b_1 g}{1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} g^2} \right] \quad * \text{部分分数分解} \\ &= \int dg \left[ \frac{1 - \frac{\beta_1}{\beta_0} g^2}{\beta_0 g^3} + \frac{-\frac{\beta_1}{\beta_0} g}{1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} g^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2\beta_0} g^{-2} - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \log(g) - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \log \left( 1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} g^2 \right) \end{aligned} \quad (1.125)$$

ここで、最後の項を  $g^2$  が小さいとして展開すると

$$-\frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \log \left( 1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} g^2 \right) = -\frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \left( -\frac{\beta_1}{\beta_0} g^2 + \dots \right) \quad (1.126)$$

となります。  $\beta_1$  は  $\beta_0$  より小さいはずですし、しかも  $g^2$  もあるので、この項は無視しても良いとしましょう。それから右辺に定数項を加えても積分の結果は変わらないので、第2項目を

$$-\frac{\beta_1}{\beta_0^2} \log(g) \implies -\frac{\beta_1}{\beta_0^2} \log(g) - \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \log(\beta_0) = -\frac{\beta_1}{2\beta_0^2} \log(\beta_0 g^2) \quad (1.127)$$

とします。そうすると式 (1.125) の計算の結果は

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Lambda} \exp \left[ -\frac{1}{2\beta_0 g^2} - \frac{\beta_1}{2\beta_0} \log(\beta_0 g^2) \right] \\ &= \frac{1}{\Lambda} \exp \left[ -\frac{1}{2\beta_0 g^2} \right] (\beta_0 g^2)^{-\beta_1/2\beta_0} \quad (\Lambda : \text{const}) \end{aligned} \quad (1.128)$$

となります。これからわかることは、  $g^2$  を小さくしていくと指数部分はどんどん小さくなっていく関係があり、また、後の項はその補正になっています。つまり結局は、cut-off は  $g^2$  を小さくしていくと exponential でダウンしていきます。それで、今の lattice で何か物理量を測ったとします。物理量を測ったならば、さっきも言いましたけど、例えば質量に関係したものを測ったならば、  $ma$  という形になります。大雑把な計算の時には、多少のずれは許してもらえるのですが、段々精密な計算になっていくと、例えば、「  $ma$  を測りました、それで coupling を変えてみましょう。それがさっきの 2-loop で計算した結果と合わなければ、その計算は信用できませんね」という話に移ります。

#### 質問

さっきの図 1.37 なんですが、  $a$  の計算で指数部分とベキの項が出ましたよね。そのベキの項が  $g$  の大きいところに効いているのですか？

#### 回答

実際にはですね、ベキの項を入れてみても、ベキなので、そんなに影響はないです。そもそも左側の部分はいままでの議論から来ているものではないです。あの 2-loop の計算は、そうは言っても摂動の計算です。なので、あまり coupling が大きいと駄目なんですよ。

### 1.6.3 Strong Coupling Expansion

今の質問がごもっともだったので、次に図 1.37 の左側の式はどうやって出たか、という話になります。それで strong coupling の計算というのがございます。ですから、coupling が強い時、つまり  $g$  が大きい時、これが必要になります。まず、action っていうのは、こういう形をしていましたね<sup>10</sup>。

$$\int \mathcal{D}U \exp \left[ -\frac{2N_c}{g^2} \square \right] \quad (1.129)$$

<sup>10</sup>  $\square$  はブラケット

そうすると coupling が小さい時は摂動などが使えますが、大きくなると困りましたねということになるのですが、逆に  $g$  が大きくなると  $2N_c/g^2$  が小さくなりますから、

$$\exp\left[-\frac{2N_c}{g^2}\square\right] \simeq 1 - \frac{2N_c}{g^2}\square + \dots \quad (1.130)$$

と展開しても良いでしょう。これはすごい簡単な場合をやっているのですが、実際には strong coupling 展開というのは昔から随分研究されてましたし、有限密度で、基研の大西さんたちが勢力的にやっています。基本的にはこうなのですが、そこではもっと精密な計算をしています。でも、今は大体こんな感じなんだというのだけをつかんでほしいです。それでさっき言ったように、これで Wilson loop の期待値を計算してみましょう。そうすると、

$$\langle \square \rangle \propto \int \mathcal{D}U \square \exp\left[\sum -\frac{6}{g^2}\square\right] \quad (1.131)$$

となりますね。これを展開しましょう。それで展開してもほとんどの項は関係ないのだけれども、sum から 1 つずつ落ちてくるたびに  $6/g^2$  がつくので (図 1.38)、縦軸を  $T$ 、横軸を  $L$  とすると

$$\langle \square \rangle = \left(\frac{6}{g^2}\right)^{T \times L} \quad (1.132)$$

となります。

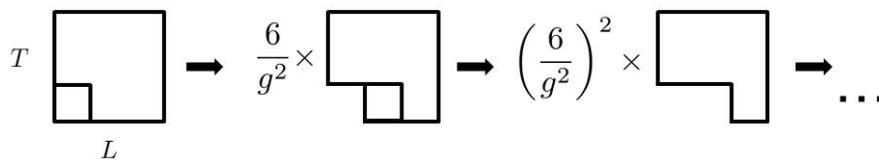


図 1.38: Wilson loop の期待値

ところで、式 (1.132) の左辺はさっき計算しましたが、

$$\langle \square \rangle = e^{-TV} = \left(\frac{6}{g^2}\right)^{T \times L} \quad (1.133)$$

のようになりますね。そうすると両辺の log を取ってみます。

$$L \times \log \frac{6}{g^2} = -V \quad (1.134)$$

このようにポテンシャルが求まります。confinement があつた時には、ポテンシャルは横軸の  $L$  の長さを変えるとそれに比例するはずなので、結局  $\log(6/g^2)$  が string tension になります。なので、さっきの図 1.37 で strong coupling の予言と左側は合っていました。また、右側は 2-loop scaling のふるまいと合っていました。だから、lattice で計算しているのは本当でしょう、というわけで、この論文 ([9]M. Creutz, Phys.Rev. D21 2308 (1980)) は非常に重要ということになるわけです。今はもちろん、より精密な計算もできます。それから、そもそも string tension

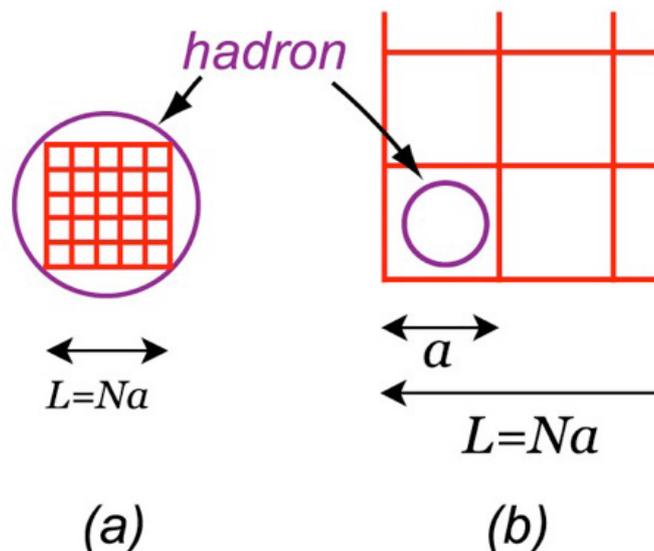


図 1.39: 格子間隔とハドロン

があまり意味がなくなってきた、それはなぜかという、この時代は  $q, \bar{q}$  のペアが入ってなかったのですが、今はそれが入っていますから、そうすると  $q, \bar{q}$  のペアがぶつぶつ切れてしまって、そもそも string tension が危なくなってしまう(曲がってしまう)。ということで、「これは歴史的な論文のご紹介で終わりですね」と思うかもしれないですが、この事は絶対に忘れてはいけません。まず、格子間隔が  $a$  です。それで、いくら最新の lattice の計算ができるようになったって、一辺はまだ百を超える計算なんて数える程しかなくて、普通は十とかそのぐらいなんです。そうすると格子のサイズっていうのは  $L = Na$  で  $N$  に 10 とか 30 みたいな値が入るわけです。だから、調子にのって「格子間隔はできるだけ小さくして、さっきの 2-loop 積分も成り立って、連続極限に近くないといけませんよ」って言って、coupling を小さくし過ぎると格子のサイズがハドロンのサイズより小さくなってしまふことが起こりうるんですね(図 1.39(a))。だから、こうなってはいけません。また、逆に  $a$  をすごい大きくして巨大な lattice をしようとする、今度は格子間隔が大きくなり過ぎて、よく、「格子の間からハドロンが落ちこっちゃうよ」という言い方をします(図 1.39(b))。実際、 $P_{\max} = \pi/a$  が甘過ぎて(小さすぎて)しまって、全然必要な cut-off になってないことが問題になります。(格子の間隔からハドロンが落ちこちるといふ)直感的なイメージは間違っていないです。それで自分の計算している格子間隔がどのくらいなのか、ということで、普通のハドロンですとサイズは 1 fm ぐらいですから、 $a$  が 1 fm を超えてしまうのはいけません。そして、じゃあ格子間隔を 0.01 fm とすれば、もちろん連続極限に近いという意味ではほとんど問題ないけれども、そんなことをしたとするならば、「格子のサイズが 10 なんですよ」とか言われたら格子の全体のサイズが 0.1 fm にはかならないので、これもこれでまずいですね。だから、やっぱり数値計算ではちゃんと常に見て、大きすぎず、小さすぎない所に入っていないといけませんということです。特につらいのが heavy quark をやりたい時です。heavy quark は重たいので、そうするとやっぱりスケールが大きくなってしまって、cut-off が  $\pi/a$  ですから、 $a$  を非常に小さくする必要があります。それで  $a$  を小さくすることは簡単なのだけでも(coupling を変えればいいので)、それをするとさっきの事が起こってしまうので苦しいということですね。

## 1.7 Fermions

### 1.7.1 KS(Kogut-Susskind) フェルミオン

ここからは教養としてさらっとやっています。さっき僕が Wilson fermions を丁寧にやりましたけども、こうなりますね。

$$W(i, j) = cI - \kappa \sum_{\mu=1}^4 \{ (r - \gamma_{\mu}) U_{i,j} \delta_{i+\hat{\mu},j} + (r + \gamma_{\mu}) U_{i,j} \delta_{i-\hat{\mu},j} \} \quad (1.135)$$

$$\kappa = \frac{c}{8r + 2ma}, \quad r : \text{Wilson term (連続極限では効いてない)}$$

さっき式 (1.87) で 1 と書いていた  $r$  は Wilson term と呼ばれるものです。またクォーク質量は  $\kappa$  に入っています。それで  $r = 0, c = 2ma$  とすると形がすごいきれいで、

$$S_F = 2ma \bar{\psi}(x) \psi(x) + \sum_{\mu=1}^4 \{ \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} U_{\mu}(x) \psi(x + \hat{\mu}) - \bar{\psi}(x + \hat{\mu}) \gamma_{\mu} U_{\mu}(x)^{\dagger} \psi(x) \} \quad (1.136)$$

となります。これは連続極限に形が近いから良いんですけども、この場合はさらに簡単にすることができます。 $\psi$  を上手に変えることによって、 $\gamma_{\mu}$  を  $\psi$  の方に押し込んじゃうことができる。だから、一見不思議だけどフェルミオンなのにディラックのガンマ行列がない。その代り、各サイト毎にちょっと不思議な符合が入ってくるという形にできます。これは KS フェルミオン [10, 11] と呼ばれたりします。今は特にアメリカのチームが KS フェルミオンを中心として計算をしています。でも「やっぱり KS フェルミオンには問題があるんじゃないか」と言って、「やっぱり Wilson フェルミオンかな」というような流れにはなっています。

### 1.7.2 カイラル対称性

それからカイラル対称性は知ってますよね。 $\bar{\psi}\psi$  というのは、

$$\begin{cases} \psi \rightarrow e^{-i\theta} \psi \\ \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\theta} \end{cases} \quad (1.137)$$

という変換に対して不変で、 $\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$  というのは、

$$\begin{cases} \psi \rightarrow e^{+i\theta\gamma_5} \psi \\ \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{+i\theta\gamma_5} \end{cases} \quad (1.138)$$

という変換に対して不変になってくれます。それで  $\bar{\psi}\psi$  (質量項) は後者の変換に対して不変でなく、Wilson フェルミオンはこの項を含むためにカイラル対称性を壊しています。そしてカイラル対称性を持つ条件は、

$$S_F = \bar{\psi} D \psi \text{ のとき、 } \{ D, \gamma_5 \} = 0 \quad (1.139)$$

ですが、Wilson フェルミオンは Wilson 項があるために質量をゼロにしても実は駄目なんですよね。なので、「なんとかしてカイラル対称性を持つフェルミオン作用っていうのを作れないか」というのが随分あった。でも、結局全て失敗に終わりました。そして最後は Nielsen・二宮の NoGo 定理 [12, 13, 14]、つまり、「いくつかの尤もな仮定<sup>11</sup>を置けば、こういうフェルミオンは作れないという定理」という形で完成されました。

<sup>11</sup> 格子フェルミオンの作用がローレンツ対称性、エルミート性、フェルミ場の双一次形式、局所性、カイラル対称性を持つ

## カイラルフェルミオンの発見

ところが、こっちの方向は僕はまったく気がつかないんですが、1982年に当時はまったく有名じゃなかった”Ginsparg-Wilson”という論文[15]が出ていました。そこでは  $\{D, \gamma_5\} = 0$  である必要はないんじゃないか、つまり

$$\{D, \gamma_5\} = 2aDR\gamma_5D, \quad R \text{ は } \gamma_5 \text{ と可換な局所演算子} \quad (1.140)$$

のように、右辺に格子間隔  $a$  が入る項なら良いんじゃないか、なぜなら、連続極限を取れば  $a = 0$  になって、右辺が0になるからで、つまり、連続極限ではカイラル対称性が回復するという事です。これは Ginsparg-Wilson 関係式と言って今じゃ大変有名なんですけども、当時は何で有名にならなかったと言うと、たぶん実際にこういう  $D$  を作れるかと考えると、やっぱり作れないだろうと思われたんですね。ところが、それを Neuberger さんが発見しました [16]。

$$D = 1 - \frac{W}{\sqrt{W^\dagger W}} \quad (1.141)$$

## 1.8 Hadron Propagators

### 1.8.1 クォークプロパゲータ

ハドロンプロパゲータというのを作るためには、クォークプロパゲータを組み合わせます。フェルミオン行列  $\Delta$  の逆行列がクォークプロパゲータになります。それで逆行列を求めるには、数学的には Gauss の消去法が教科書に載っていますが、これは  $N \times N$  行列があったとするとこれの3乗 ( $N^3$ ) の演算が必要になるので、あまり現実的ではありません。それから、Gauss の消去法っていうのは  $\Delta$  が疎行列 (ほとんどがゼロ) であることを利用できません。しかし、多くの場合は何も  $\Delta$  の逆行列を全部解く必要はなくて、

$$\Delta \vec{X} = \vec{b} \quad (1.142)$$

という線形方程式が解ければ十分です。なぜならば、

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad i \text{ 番目} \rightarrow \vec{X} = \Delta^{-1} \vec{b} = \begin{pmatrix} \Delta_{1i}^{-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_{ii}^{-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_{ni}^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.143)$$

というような  $\vec{b}$  を取れば、 $\vec{X}$  の答えが求まるからです。

### 1.8.2 共役勾配法 (Conjugate Gradient Method, CG 法)

現代最もよく使われているのが共役勾配法で、これを発展させたものもありますが、基本的にはこれが今のスタンダードです。アイデアは基本的には簡単で、今あなたが解きたいのは

$A\vec{x} = \vec{b}$  という方程式で、 $A$  が対称で正定値だったとしましょう。そこで、

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(\vec{x}, A\vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x}) \quad (1.144)$$

というような関数を作ってみてください。それで今この関数が最小になるところを探せば良くて ( $\nabla f(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$ )、なのでだんだん最小化していけば良いのですが、失敗すると行き過ぎちゃったり、もっと怖いのはこれがある方向に広がっていることがあって、この場合は見つけるのが難しいです。CG法は線形代数の本に必ず載っていますが、CG法というのは色々な変形ができるので、見かけの形が違うこともあります。実際にどうするかというと (図.1.40)、まず残差  $\vec{r}^{(i)}$  と方向ベクトル  $\vec{p}^{(i)}$  というのを用意します。それで探している解をある方向ベクトルに対して  $\alpha$  だけ調節してみる。それを新しい  $\vec{x}$  と定義する。すると恒等式として新しい  $\vec{r}$  も求まる。さらに、 $\beta$  というのをを使って新しい方向ベクトルが決まります。だから、基本的に、ある方向ベクトルの方向に行って、残差を調べて、それにより  $\vec{x}$  も  $\vec{p}$  も改善していく、というような方法となります。これは内積と (行列)  $\times$  (ベクトル) の計算しか出てこないのです。そうすると、さっき僕達が使う QCD の行列はほとんどの成分がゼロと言いましたが、(ゼロ)  $\times$  (何とか) っていうのは計算する必要はなく、計算量を減らせるんですね。それから内積っていうのはかけ算と足し算を交互にやっていくので、これは現代の計算機だと早いんですよ。たいていの現代の計算機では、同時に次々とやっていけるので、こういう計算は現代の計算機に非常に合っています。

## CG法

$$\vec{p}^{(0)} = \vec{r}^{(0)} = \vec{b} - A\vec{r}^{(0)}$$

DO i	
$\alpha^{(i)} = \frac{(\vec{p}^{(i)}, \vec{r}^{(i)})}{(\vec{p}^{(i)}, A\vec{r}^{(i)})}$	$\vec{r}^{(i)} = \vec{b} - A\vec{x}^{(i)}$ Residue, 残差
$\vec{x}^{(i+1)} = \vec{x}^{(i)} + \alpha^{(i)} \vec{p}^{(i)}$	$\vec{p}^{(1)}, \vec{p}^{(2)}, \vec{p}^{(3)}, \dots$
$\vec{r}^{(i+1)} = \vec{r}^{(i)} - \alpha^{(i)} A\vec{p}^{(i)}$	$\vec{r}^{(1)}, \vec{r}^{(2)}, \vec{r}^{(3)}, \dots$
$\beta^{(i)} = \frac{(\vec{r}^{(i+1)}, A\vec{p}^{(i)})}{(\vec{p}^{(i)}, A\vec{p}^{(i)})}$	線形独立 ↓
$\vec{p}^{(i+1)} = \vec{r}^{(i+1)} + \beta^{(i)} \vec{p}^{(i)}$	<div style="text-align: center;"> <p>最大でもN回で収束 計算は (Matrix) <math>\times</math> (Vector) ベクトルの内積</p> </div>

図 1.40: CG 法

### 1.8.3 メソンのプロパゲータ

例として、 $\pi$  中間子を計算しましょう。そうすると、

$$\pi(x) = \bar{u}(x)\gamma_5 d(x) = \bar{u}_\alpha^a(x)(\gamma_5)_{\alpha\beta} d_\beta^a(x) \quad (1.145)$$

のように作れますね。なので、これを使って式 (1.146) を計算しましょう。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{u} \mathcal{D}u \mathcal{D}\bar{d} \mathcal{D}d e^{-S_G - \bar{u}\Delta u - \bar{d}\Delta d} \pi(x)\pi(y)^\dagger \\ & \rightarrow \left[ \pi(x)\pi(y)^\dagger = \bar{u}_\alpha^a(x)(\gamma_5)_{\alpha\beta} d_\beta^a \left( -\bar{d}_{\alpha'}^b(y)(\gamma_5)_{\alpha'\beta'} u_{\beta'}^b(y) \right) \right] \end{aligned} \quad (1.146)$$

それだとぼしてしまったんですが、Matthews-Salam 公式を使って、この積分を計算していきますと、

$$\begin{aligned} (1.146) &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U e^{-S_G} \det\Delta^{(u)} \det\Delta^{(d)} G_{\beta'\alpha}^{(u)ba}(y,x)(\gamma_5)_{\alpha\beta} G_{\beta\alpha'}^{(d)ab}(x,y)(\gamma_5)_{\alpha'\beta'} \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U e^{-S_G} \det\Delta^{(u)} \det\Delta^{(d)} \text{Tr} \left( G^{(u)}(y,x)\gamma_5 G^{(d)}(x,y)\gamma_5 \right) \\ & \quad \left[ G^{(u)} = (\Delta^{(u)})^{-1}, G^{(d)} = (\Delta^{(d)})^{-1} \right] \end{aligned} \quad (1.147)$$

となって、基本的にパイオンだとかいう形になります。これは  $y$  から  $x$  に行つて (プロパゲートして)、 $\gamma_5$  をはさんで、 $x$  から  $y$  に戻つてきて、それでまた  $\gamma_5$  をはさんで、最後に全体としてカラーとディラックの足についてはトレースでつぶしてあります。なので、これを計算すれば良いということです。

— Matthews-Salam 公式 —

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\bar{\psi}A\psi} = \det A \\ & \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi (\bar{\psi}_i \psi_j) e^{-\bar{\psi}A\psi} = (A^{-1})_{ji} \det A \\ & \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi (\bar{\psi}_i \psi_j \bar{\psi}_k \psi_l) e^{-\bar{\psi}A\psi} = \left\{ (A^{-1})_{ji} (A^{-1})_{lk} - (A^{-1})_{jk} (A^{-1})_{li} \right\} \det A \end{aligned}$$

## 第2章 有限温度

時間の都合上、省略

## 第3章 有限密度

時間の都合上、省略

## 第4章 Lattice Tool Kit Fortran90

### 4.1 Lattice Tool Kit

Lattice Tool Kit は単に私が勝手にそう名前を付けているだけです。lattice は基本的に道具です。Fortran90 は C++ の後に作られました。C++ を意識しすぎたためか、同じ記号を使えばいいのに、異なる記号を使っているところがところどころに見受けられます。Fortran90 は残念ながら、日本では 20 年以上経つが、まだ普及していません。この Lattice Tool Kit というのはですね、Fortran90 の Module という機能を使っています。Lattice Tool Kit は工具箱の中にある道具であり、題材ではありません。lattice を研究に使う時には、プログラムを自分で準備すべきなのですが、その時に道具がある程度用意してあると、圧倒的に速いでしょう。Lattice Tool Kit を自分で自由に変形して、自分の目的のために使ってほしい。Lattice Tool Kit はスピードをあんまり意識せずに作りました。どうしてもスピードを意識しすぎると、面白くてのめりこんじゃうということもあるんですけども、非常に読みづらいコードになりがちなんです。ある計算機に調整しても、別の計算機では調整するポイントがまるで変わってしまうので、「どの計算機でも速く計算するように作る」というのは不可能なんです。

この間、ある若い人に「こういうのやりたいんだけど、こんなもの落ちてませんか」と言われたんですが、コードを作った人としてはやっぱり手伝ってやるもんかと思いましたね。一つのコードをつくるのって膨大な時間がかかっているのだから、それをなんか「落ちていたものを拾ってきて使うんだ」というふうに思われると、作っている人はムッとしますよね。そういう言い方はしないほうがいいですよ。僕もうっかり「落ちていたコードを拾う」と言ってしまうことはありますが、それはやっぱり作った人に対して大変尊敬を欠いた言い方ですね。結局、コードを作ろうと思うと、チェックするところとかで膨大な時間がかかるから、皆が同じところで時間を費やすならば、それは元になるものを作るといってあげれば、みんなが時間を節約できるだろうと思います。こういう時に、「落ちていたものを拾ってきた」と言われると、それはムッとしますよね。やっぱり完全にバグを落として複雑なフローを作るのってのは膨大な時間がかかります。僕自身だって過去にいろんな人にプログラムを見せてもらって、勉強させてもらって、使わせてもらっている訳で、基本的に、実は自分で別の文を書くとしても、元になるものはあるということです。圧倒的に楽なんです。書いているとすぐに書けるようになるから。全く同じ条件でやって数値的に同じような結果がでればそれで安心できるので、そういう意味で元があると仮に違うものをつくるにしても、時間が圧倒的に節約できるはずなんです。

Lattice Tool Kit を使うのに「1 回 300 円」とか言いませんので、自由に使ってもらっていいんですけども、でもその代りできるだけ Lattice Tool Kit で勉強してほしいなと思います。全てのコードはできるだけ読めるように、ブラックボックス化しないように、そういうのホワイトボックスと専門家は言うんですけど、できるだけホワイトボックス化して、それをまた使えるようにしました。

モジュールの話を全然知らないとプログラムを多分使えないし、その後の話もついてこれないので説明していきます。モジュールっていうのは C++ のクラスと同じことで、あるいは C

を知っている人は構造体を知っていると思うんですけども、構造体に演算を入れることができる。例えば、

```
Module:Data structure + operand
c-----c
program ex1
c-----c
use vec_def
  TYPE(vector) p, q, r
  p = vector(0.5, -1.5); q = vector(0.5, 0.5)
  r = p + q
  write(*,*) r
end
```

を見てください。普通、僕たちは使う変数の型を宣言している訳です。その型の宣言っていうのはC++やFortran90だと自分で自由な型を作れるんですね。この場合ではTYPE(vector)のpとqとrという変数を今から使いますよ、ということです。その初期値には、2次元ベクトルなので、例えば、pには(0.5,-1.5)、qには(0.5,0.5)というものを入れますよ、ということです。そして中で演算が定義してあるのでp+qとすれば、pとqはvector twoというモジュールで作ったtypeなので、この演算も同じ型で定義されていて、p+qという演算ができます。ベクトルを次のように定義します。

```
MODULE   v e c _ d e f
  TYPE   v e c t o r
         r e a l   x, y
  END TYPE

  INTERFACE OPERATOR(+)
    MODULE PROCEDURE vadd
  END INTERFACE

  CONTAINS

  FUNCTION vadd(a,b) RESULT(c)
    TYPE(vector), INTENT(IN):: a, b
    TYPE(vector) c
    c %x = a%x + b%x
    c %y = a%y + b%y
  END FUNCTION

END MODULE
```

ベクトルは二つの実変数から定義されます。+という演算が指定されたらvaddを呼んでください。vaddの演算とはa,bが入ってcが出ていきます。今、a,b,cは全てベクトルtypeです。C++と違ってモジュールでは%は成分を表します。要するに、モジュールはベクトルの型や演算を

定義することができます。これは最近の言語では必ずできます。構造体と同じようにもっと複雑なものも作れちゃうんですが、僕たちがしたいのは数値計算なので、複雑なのを作っちゃうと演算が遅くなってしまいます。これは今の LTK 一部反省点です。QCD のプラケットの例では、SU(3) 行列という型の演算が定義されます。4つのリンク変数の積が必要です。例えば、g\_field1 という型の変数を用意します。

```
TYPE(g_field1)  staple, temp1, temp2, temp3
  t emp1 = u(nu)
  t emp2 = nu.gshift.u(mu)
  t emp3 = temp1 * temp2
  t emp1 = mu.gshift.u(nu)
  staple = staple + (temp3.prod1.temp1)
```

staple, temp1, temp2, temp3 を用意します。t emp1 = u(nu) は  $\nu$  方向のリンク変数  $U$  を temp1 に代入してくださいという意味。t emp2 = nu.gshift.u(mu) は  $\mu$  方向のリンク変数  $U$  を  $\nu$  方向にシフトさせてくださいという意味。staple というのは3つのリンク変数の積のことで、最後の一つのリンク変数は、それに関わるすべての staple を用意してから積を計算したほうが便利なのが多いです。演算の順序の定義ができないので、しつこいようですが、括弧をしっかり書いてください。次のは感じだけつかんでもらえればいい。

```
parameter( NC=3 )
```

```
TYPE g_field0
```

```
SEQUENCE
```

```
  COMPLEX*16, DIMENSION
```

```
    (NC,NC,-NDW+1:NX+NDW,-NDW+1:NY+NDW,
```

```
  &
```

```
    -NDW+1:NZ+NDW,-NDW+1:NT+NDW) :: g
```

```
  INTEGER parity, direction
```

```
END TYPE
```

```
TYPE g_field1
```

```
SEQUENCE
```

```
  COMPLEX*16, DIMENSION(NC,NC,NV/NBUSH) :: g
```

```
  INTEGER parity, direction
```

```
END TYPE
```

g\_field0 と g\_field1 があるのですが、例えば g\_field0 っていうのは color が  $3 \times 3$  です。Lattice の配列は、普通 1 から  $N_x$  まであるんですけど、周期境界条件を課したり並列化するときのためにちょっとふちをつけておく。必要なふちの大きさは場合によって異なってくるが、今はどう

でもよい。この点は少し反省しており、つぎのバージョンでは直したいと思っています。リンク変数ごとに parity と direction がついているんですけど、スピードが遅くなり、しかもなくてもよいので次の時はこれはずそうと思う。g\_field0 は x、y、z、t と割とはっきりと書いているが、一方、g\_field1 は計算を速くするために通し番号をつけている。

```

c-----
c      FUNCTION  gadd(a,b) RESULT(c)
c-----
c      TYPE(g_field1), INTENT(IN):: a, b
TYPE(g_field1) c

      do i = 1, NV/NBUSH

          c %g( 1, 1, i) = a%g( 1, 1, i) + b%g( 1, 1, i)
          c %g( 1, 2, i) = a%g( 1, 2, i) + b%g( 1, 2, i)
          c %g( 1, 3, i) = a%g( 1, 3, i) + b%g( 1, 3, i)
          c %g( 2, 1, i) = a%g( 2, 1, i) + b%g( 2, 1, i)
          c %g( 2, 2, i) = a%g( 2, 2, i) + b%g( 2, 2, i)
          c %g( 2, 3, i) = a%g( 2, 3, i) + b%g( 2, 3, i)
          c %g( 3, 1, i) = a%g( 3, 1, i) + b%g( 3, 1, i)
          c %g( 3, 2, i) = a%g( 3, 2, i) + b%g( 3, 2, i)
          c %g( 3, 3, i) = a%g( 3, 3, i) + b%g( 3, 3, i)

      enddo

      END FUNCTION

```

このプログラムは a と b を読み込んで、c を計算するというものです。言い忘れていましたけど、a と b っていうのは lattice 上すべての点を表しています。

最初に言ったように lattice は道具であるということを意識して、何かに役立てる人は役立てください。また lattice を使わない人も常識として勉強してみてください。



## 付 録 A 古典連続極限 (1.5.5 節) の補足

### A.1 SU(N) ゲージ理論におけるのプラケットの計算

ここでは SU(N) ゲージ理論のゲージ場に対するプラケットの計算を示す。プラケットを次のように定義する。

$$P_{\mu\nu}(x) \equiv U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x) \quad (\text{A.1})$$

ここで、リンク変数は

$$U_\mu(x) = e^{iagA_\mu(x)} \quad (\text{A.2})$$

ただし、

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \quad (\text{A.3})$$

$T^a$  は SU(N) 群の生成子で、 $N \times N$  行列であり、次の性質を持つ。

$$\text{tr } T^a = 0, \quad \text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}, \quad (T^a)^\dagger = T^a, \quad (\text{A.4})$$

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (\text{A.5})$$

これよりプラケットを計算すると、

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(x) &= e^{iagA_\mu(x)} e^{iagA_\nu(x+\hat{\mu})} e^{-iagA_\mu(x+\hat{\nu})} e^{-iagA_\nu(x)} \\ &= \left( e^{iagA_\mu(x)} e^{iagA_\nu(x+\hat{\mu})} \right) \left( e^{-iagA_\mu(x+\hat{\nu})} e^{-iagA_\nu(x)} \right) \\ &\equiv e^{X_1} e^{X_2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ここで、Baker-Campbell-Hausdorff の公式

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= e^F \\ F &= X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \dots \end{aligned}$$

および、

$$A_\mu(x + \hat{\nu}) = A_\mu(x) + a\partial_\nu A_\mu(x) + \dots \quad (\text{A.7})$$

を用いると  $X_1$  は

$$\begin{aligned} X_1 &= iagA_\mu(x) + iagA_\nu(x + \hat{\mu}) + \frac{1}{2}[iagA_\mu(x), iagA_\nu(x + \hat{\mu})] + \dots \\ &= iag(A_\mu(x) + A_\nu(x + \hat{\mu})) + \frac{1}{2}(iag)^2[A_\mu(x), A_\nu(x + \hat{\mu})] + \dots \\ &= iag(A_\mu(x) + A_\nu(x) + a\partial_\mu A_\nu(x) + \mathcal{O}(a^2)) + \frac{1}{2}(iag)^2[A_\mu(x), A_\nu(x) + a\partial_\mu A_\nu(x)] + \dots \\ &= iag(A_\mu(x) + A_\nu(x) + a\partial_\mu A_\nu(x)) + \frac{1}{2}(iag)^2[A_\mu(x), A_\nu(x)] + \mathcal{O}(a^3) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となる。同様に  $X_2$  は

$$X_2 = -iag(A_\mu(x) + A_\nu(x) + a\partial_\nu A_\mu(x)) + \frac{1}{2}(iag)^2[A_\mu(x), A_\nu(x)] + \mathcal{O}(a^3) \quad (\text{A.9})$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(x) &= e^{X_1} e^{X_2} \\ &\equiv e^{X_3} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

とすると、

$$\begin{aligned} X_3 &= \left\{ iag(A_\mu(x) + A_\nu(x) + a\partial_\mu A_\nu(x)) + \frac{1}{2}(iag)^2[A_\mu(x), A_\nu(x)] + \mathcal{O}(a^3) \right\} \\ &\quad + \left\{ -iag(A_\mu(x) + A_\nu(x) + a\partial_\nu A_\mu(x)) + \frac{1}{2}(iag)^2[A_\mu(x), A_\nu(x)] + \mathcal{O}(a^3) \right\} \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{2}(iag)^2 \underbrace{[A_\mu(x) + A_\nu(x), A_\mu(x) + A_\nu(x)]}_{=0} + \mathcal{O}(a^3) \right\} + \dots \\ &= ia^2g(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig[A_\mu(x), A_\nu(x)]) + \mathcal{O}(a^3) \\ &= ia^2gF_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^3) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

よってブラケットは

$$P_{\mu\nu}(x) = e^{ia^2gF_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^3)} \quad (\text{A.12})$$

となる。ゲージ場の格子作用は

$$S_G = \beta \sum_{\text{plaquette}} \left\{ 1 - \frac{1}{N} \text{Tr} P_{\mu\nu} \right\} \quad (\text{A.13})$$

で与えられるので

$$\begin{aligned} \sum_{\text{plaquette}} \text{Tr} P_{\mu\nu}(x) &= \sum_x \sum_{\mu, \nu} e^{ia^2gF_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^3)} \\ &= \sum_x \sum_{\mu, \nu} \text{Tr} \left( 1 + (ia^2gF_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^3)) + \frac{1}{2}(ia^2gF_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^3))^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$= \sum_x \left( N - \frac{1}{2}a^4g^2(\text{Tr}\{F_{\mu\nu}^2\}) + \dots \right) \quad (\text{A.15})$$

を得る。 $ia^2gF_{\mu\nu}$ の項は $F_{\mu\nu}$ が反対称テンソルであるから $\mu, \nu$ で和をとった際に消える。 $\mathcal{O}(a^3)$ の項にある $a^3, a^4$ に比例する項は $SU(N)$ の生成子 $T^a$ に比例するので、トレースをとると式(A.4)の性質から消える。また、 $N \times N$ の単位行列に比例する部分はトレースをとると $N$ の因子を出す。よって、ゲージ場の格子作用の古典連続極限は

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} S_G &= \lim_{a \rightarrow 0} \beta \sum_x \left\{ 1 - \frac{1}{N} \left( N - \frac{1}{2}a^4g^2(\text{Tr}\{F_{\mu\nu}^2\}) + \dots \right) \right\} \\ &= \int d^4x \text{Tr}\{F_{\mu\nu}^2\}, \quad \left( \beta = \frac{2N}{g^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

となって連続理論のゲージ場の作用を得る。

## 参考文献

- [1] K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).
- [2] M. Creutz, Phys. Rev. Lett. **43**, 553 (1979).
- [3] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 1 (1961).
- [4] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124**, 1 (1961).
- [5] N. Metropolis et al. , J. Chem. Phys **212**, 1087 (1953).  
<http://dx.doi.org/10.1063/1.1699114>
- [6] M. Creutz and B. Freedman, Ann. Phys. **132**, 427 (1981).
- [7] K. G. Wilson "Quarks and strings on a lattice" (1974)  
Erice Lecture Note, "New phenomena in subnuclear physics" ed. A. Zichichi, Plenum Press.
- [8] G. S. Bali, Phys. Rep. **343**, 1 (2001).
- [9] M. Creutz, Phys. Rev. D**21**, 2308 (1980).
- [10] L. Susskind, Phys. Rev. D**16**, 3031 (1977).
- [11] J. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D**11**, 395 (1975).
- [12] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B**105**, 219 (1981).
- [13] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B**185**, 20 (1981).
- [14] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B**193**, 173 (1981).
- [15] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, Phys. Rev D**25**, 2649 (1982).
- [16] H. Neuberger, Phys. Lett. B**427**, 353 (1989).