

場の理論の位相的ソリトンとその役割

2014 年度原子核三者若手夏の学校 素粒子パート（場の理論）講義録

衛藤 稔（山形大学）

2014 年 8 月 8 日 8:45-12:00, 18:45-22:15

概要

この講義録は、2014 年度原子核三者若手夏の学校において行われた講義のうち、衛藤稔氏による位相的ソリトンに関する講義（素粒子パート/場の理論）をまとめたものです。この講義では、位相的ソリトンに関する基礎的な内容から始めて、古典解やモジュライ空間、量子効果および応用についてキルク（ドメインウォール）とポーテックスを題材に解説されています。

講義録作成^{*1}：松野寛樹、阿部田将史、束紅非、谷口太基
（東京工業大学素粒子論研究室）

^{*1} この講義録では、話し言葉をそのまま文書に起こしています。読みにくい部分もあるかもしれませんがご了承ください。

目次

0	Introduction	3
0.1	場の古典論と場の量子論	3
0.2	古典的ソリトン	4
0.3	ソリトンの一般的性質	4
0.4	安定性	5
0.5	代表的なソリトン	5
0.6	具体例 1	6
0.7	具体例 2	10
0.8	具体例 3	14
0.9	具体例 4	14
0.10	まとめ	15
0.11	場の量子論におけるソリトン	16
1	Kinks	17
1.1	1 + 1 次元	17
1.2	Classical kinks	18
1.2.1	キンクと反キンク	27
1.2.2	モジュライ空間	34
1.2.3	Sine-Gordon 模型	36
1.2.4	非線形シグマ模型	41
1.3	Quantum kink	46
1.3.1	ゼロモードの取り扱い	56
1.3.2	Couple with fermions	58
1.3.3	脱線：ポリアセチレン	63
1.3.4	Quantum sine-Gordon kink and duality	64
1.4	ドメインウォール	68
1.4.1	ブレーンワールドシナリオへの応用	69
1.4.2	格子ゲージ理論への応用	71
1.4.3	ドメインウォールと重力	72
1.5	Supersymmetry and domain wall	75
1.5.1	Extended SUSY	79
1.5.2	量子効果	86
1.5.3	Nambu-Goldstone fermion	89
1.5.4	SUSY breaking via domain wall	92
1.5.5	Domain wall in supergravity	97
2	Vortices	102
2.1	Global vortex	102
2.2	Derrick の定理	106

2.3	Local vortex	109
2.4	モジュライ空間	120
2.5	ポータックスの散乱	126
2.6	渦紐のダイナミクス	128
2.7	Fermions	131
2.8	Superconducting string	131
2.9	Semi-local vortex	132
2.10	Lump	132
2.11	電弱 vortex string	132
2.12	Non-Abelian vortex	132
3	Monopoles	132
3.1	Monopoles in electromagnetism	132
3.2	't Hooft-Polyakov monopole	133
3.3	BPS monopole	133
3.4	Montonen-Olive duality	133
4	Kink, vortex and monopole	134
	参考文献	134

おはようございます。みなさんもう完全に疲れきっているけど*2、僕は1日目であれなんですけど、まあ、よろしく願います。で、私事で恐縮なんですけどなんか昨日からお腹の調子が悪くて、トイレの回数が半端ないので、ちょっと途中でトイレ休憩なんてあるかもしれないですけど許してください。昨日から水だけで生きてるので、最初元気がないかもしれないんですけど、最初座りながらやらせてください。最後まで体力がもつかどうか…。だんだんエンジンがかかってくると思うんですけど、それまでゆっくりやらしていただきます。なんか質問があったら願います。

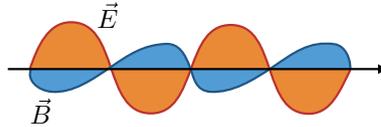
で、まあタイトルはこんな感じで、位相的ソリトンって聞いたことがあると思いますけども、そんなにちゃんと勉強したことがある人はいないんじゃないかってことで、なるべく基礎から、意義といますか、そういうことに関して、僕が知ってることを皆さんにお伝えできたらなと思います。で、徐々に徐々にということでもまずは簡単などころからなんですけども、イントロダクションですね。

*2 本講義は夏の学校の最終日に行われた。

0 Introduction

0.1 場の古典論と場の量子論

古典論：光=波



量子論：光=粒子



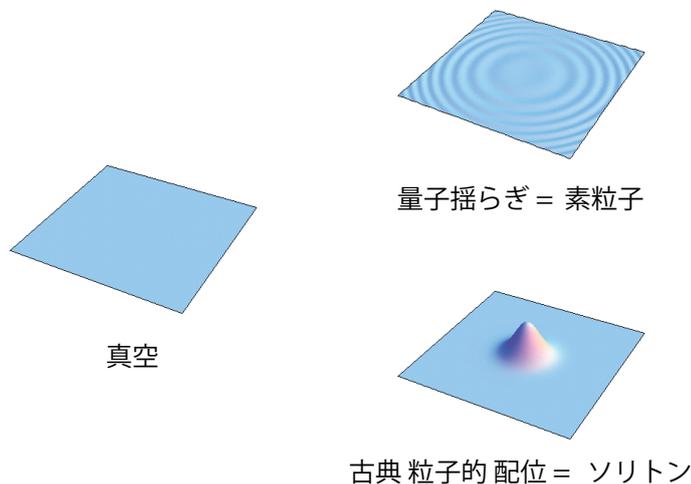
我々素粒子やると必ず場の理論っていうのを勉強すると思いますけども、場の理論には場の古典論と場の量子論があります。古典論って例えば光、電磁場ですね。電磁場だと、光は波としてこう伝わっていくと。まあこれはこれで意味が完全にあるわけですね。同様にこれを量子化すると、光が粒子となって、光子として現れるということです。まあどっちも意味があると。

で、古典場っていうのは色々あるわけですね。スカラー場とかスピノル場とかベクトル場とか。量子化すると、スカラー粒子とか、フェルミオン粒子とか、ベクトル粒子、それぞれ出てくるわけです。で、場の量子論、我々が大学院生になって習う、まあその前からやる人もいますけども、この場の量子論ってのはまずは素粒子の性質とその相互作用の基本理論として、確立されてるわけです。

場の量子論でも、例えば QED (量子電磁力学) とか、摂動論が適用できるようなものは具体的な計算が比較的容易にできます。けども摂動論が適用できないような、低エネルギーで強結合になってしまう QCD (量子色力学) とかは、具体的な計算をしようとする手計算は難しいと。なのでコンピュータを使って計算するとかそういうことがやられてると思います。まあ、こっちは難しいんですけども、こっち (摂動論が適用できるようなもの) で普通、何やるかっていうと、通常の摂動論では真空からの励起として素粒子を考えるわけですね。真空っていうのは例えば ϕ っていう場があったとしたら、時空の点によらず一定であると。

$$\phi(x^\mu) = \text{const.} \quad (0.1.1)$$

だから真空っていうのはなんか平ったいのっぺりした場があると。



ここにそよそよと、ゆらぎを考えるとまあイメージとして、これは素粒子であると。で量子化すると粒子が出てくるわけですけども、実は、場の理論にはその量子化する前に粒子的なものが存在します。それはもう既に古典的な場の理論に存在する場の配位で、ソリトンと呼ばれているわけですね。ソリトンって数学の用語でいうと1+1次元のものを考えますけども、ここで僕が言ってるソリトンっていうのは場の量子論でもうちょっと拡張された、何次元においても、なんか点粒子的なものを一般にはソリトンという。で、もうちょっとこう、ドメインウォールみたいな壁みたいなやつも、もう拡張してそういうのも含めてもソリトンと言ってしまいます。特に今日はこのソリトンの中でも、位相的って呼ばれるその形容詞がついてるソリトンについてお話をしたい。

0.2 古典的ソリトン

まずは古典的なソリトンっていうのを考えて、しばらく古典的ソリトンについて解説していきます。

1. 場の方程式の非自明な解： $\partial_\mu \phi \neq 0$
2. 有限の質量 M
3. 有限なサイズ ℓ
4. 安定な状態

まずは、真空とは違うんですね。場の方程式の、非自明な解。

$$\partial_\mu \phi \neq 0 \quad (0.2.1)$$

どこでものっぺりというわけではないと。なんかこう、ポコっとある。ポコっとある粒子的なものなんで、質量と大きさがあるわけですね。で、なにか有限の質量をもっている。それから有限のサイズをもっている。で、これが、何もなければこんなポコっと飛び出た山は、すっとなくなってしまおう方が安定に思えるんだけど、そうできない何かがあるわけですね。だからこの状態で安定なんです。真空よりはエネルギーが高い。けど、真空には落ちていけないというなんか、隠されたメカニズムがあると。

0.3 ソリトンの一般的性質

ソリトンの一般的な性質ですけども、まず、場を ϕ としますと、場の真空周りの質量ってのは、ポテンシャルの2階微分が起因するんですね。

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\langle \phi \rangle_{\text{vac}}} \sim m_\phi^2 \quad (0.3.1)$$

で、実は、まあなんかどんな場の理論を考えても、そこにソリトンがあると、だいたい典型的なサイズさっき言った ℓ というのは、この基本粒子の質量の逆数で大体出てきます。

$$\ell \sim \frac{1}{m_\phi} \quad (0.3.2)$$

あとで具体例で見ますけども、大体こんな感じ。一方で、この場の理論に入ってるスカラー場 ϕ の結合定数を g としますと、ソリトンの典型的質量は大体

$$M \sim \frac{m_\phi}{g} \quad (0.3.3)$$

と。結合定数の逆数で効いてくるというわけですね。大体こんな性質をもっています。

0.4 安定性

安定性、さっき真空には消えていかないと言うのはそれは実は、位相的安定性というふうに守られているんですね。トポロジカルソリトン、今日出てくるものには大雑把に分けて2種類あって、1つは位相欠陥型、もう1つはテクスチャー型というのがあります。それぞれ、位相的な電荷というのをもっていて、真空の電荷は0で、ソリトンの電荷は0じゃないんですね。なので、壊れられないという、まあ基本的なものです。トポロジカルソリトンってのはよく知られてるけども、トポロジカルでないソリトンっていうのも世の中にはあります。ノントポロジカルソリトン。そういうのも、安定なものがあるんですけども、そういうのは例えば Noether 電荷とかで守られているというのがあります。今日はあんまりこっちは出てきませんが、例えば、Q ポールとか呼ばれる、Coleman [1] が見つけたそういう配位、バリオン生成とかに関係してくるようなものがあります。今日は主にトポロジカルソリトン、っていうかこっちしかやりません。

0.5 代表的なソリトン

代表的なソリトン

4+1 次元

インスタントン

3+1 次元

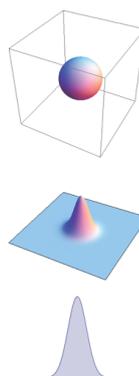
磁気単極子 (モノポール)
スカーミオン (バリオン)

2+1 次元

ポーテックス (量子渦)
 Σ 模型 lump (塊)

1+1 次元

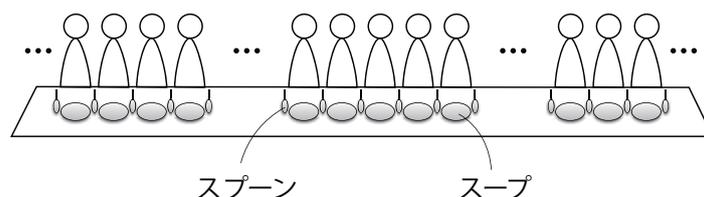
キンク (折れ曲がり)



代表的なソリトン、まあみなさんも名前ぐらいはもちろん聞いたことがあると思いますけども、インスタントンですね。普通は4次元 Euclidean で考えますけども、ソリトンって言いたいときは5次元時空で、4次元空間の部分に局在化した粒子的な、そういうソリトンです。4次元 Euclid でももちろんソリトンと、広く言うこともあります。それから3+1次元には、いわゆる磁気単極子 (モノポール) ですね。それから、スカーミオンとかいうものもあります。これは、バリオンですね。パイオンとかの有効理論で、ソリトンを作ると。パイオン場でソリトンを作るとバリオンが出るという恐ろしい理論で、非常に有名です。こういうのは3次元空間の中で、こう、点状のものです。それから、次元を下げて2+1次元にすると、ポーテックス (量子渦) って呼ばれますけども、こういうのがある。それから、非線形シグマモデルみたいのを考えると、lump と呼ばれる、英語で lump って塊って意味らしいんですけども、こういうものがあります。これは2次元、平面の中にポコっとあるものですね。1+1次元になるとキンクと呼ばれるソリトンがあります。キンクっていうのは折れ曲がりって意味ですね。で、何かの場が折れ曲がったところにエネルギーがたまってるという、空間1次元に局在化したソリトンになる。で、今日やるのは、緑に色が変わってるものについてお話をしたいと思います。インスタントンまではちょっと準備が追いつかなかったので、これ (緑色の部分) についてお話をしたいと思います。た

ぶん、上から順にポピュラリティが高いということで、どんな人でもたぶんインスタントは勉強すると思うので、まあここで敢えてやる必要も無いかなっていうのがあります。で、逆に言うところの下から、まあどうかな、一番下と一番上がたぶん簡単で真ん中が複雑になってくるとい感じかもしれませんけども、今日は順番としてはまず低次元からこうやっていく、という感じでやっていきたいと思います。低次元の良さは、あとでちょっと言いますけども、簡単ですね。で、ほとんどすべてのアイデアがここに詰まっているので、教育的には非常にここでやるのがいいかなって感じがします。

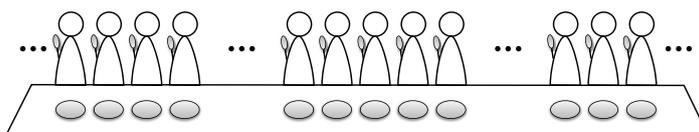
0.6 具体例 1



具体例ですけども、1次元ソリトン、つまりキルクですね。で、ちょっと場の理論の前に、感覚を掴んでもらいたいで、ちょっと、おもちゃの話をして。ソリトンっていうのは、対称性に非常に強く関係してると。そこで、一番簡単な対称性、 \mathbb{Z}_2 対称性、例えば左手と右手、鏡で映して一緒だというようなそういう模型を考えましょう。こんな状況があったとします。すごく大きなパーティーがあったとする。で、テーブルがこう、あって、ものすごい長いテーブルがあったと。そこに、スープとスプーンが各自の前に置かれていると。こういう状況をちょっと想像してみましょう。

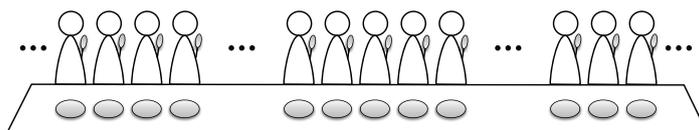
この系の \mathbb{Z}_2 対称性は何かという、恣意的なんですけども、この各人の左側と右側に対称にスプーンが置かれてるわけですね。つまり、左右に違いがないですね。左手のスプーンと右手のスプーン、どちらが自分用かわからないっていうのがこの系の対称性です。で、通常のパーティーのように長い挨拶があったので、皆さん空腹状態でイライラしてるというわけですね。対称性が高い状態でエネルギーが高くなっている。で、まあ「いただきます」と。「皆さんどうぞ」って言ったら、いっせいにスプーンを取ります。どうなるでしょうか？で、2つの解があると思います。

全員が右手でスプーンを取った場合



1つは、全員が右手で、まあ右利きの人が多かったと。こう取ると、このように皆さんスプーンを取って、スープを飲めると。

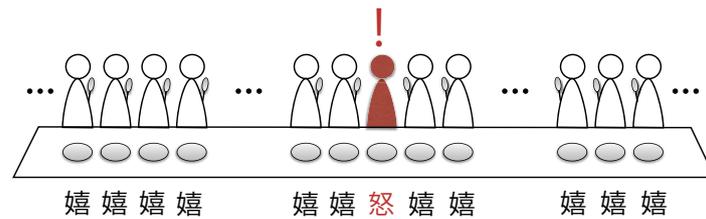
全員が左手でスプーンを取った場合



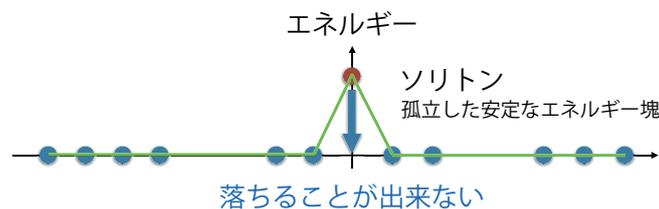
もしかしら、左利きが多い国だったら、左手でこういう状態になったかもしれません。いずれにしる皆さん満足で嬉しいというわけですね。とにかくスープが飲めて嬉しいというわけです。ここで重要なのは、怒ってた状態から皆さん喜んだ状態になって、対称性が右か左かに破れたんですね。これが対称性の自発的破れ。

このスープの話は有名な話なんですけども、もう1度重要なところを抽出すると、系にはもともと対称性があった。もともとの人や食器の配置がそれにあたる。で、初期状態は対称的だが不安定ですね。みんなスープを飲みたいけど飲めない状態である。こう、おあずけされてるわけです。で、やっと、なんかのきっかけに、より安定な状態に移るんです。すると、対称性が破れると。つまりスープが飲める状態になったというわけです。これを対称性の自発的破れというわけです。

しかし、こういつもうまくいくとは限らないですね。例えば、テーブルが非常に長かったとします。もう無限に長いようなテーブルがあったとします。そうすると、右端の人は、左端の人がどっちを取るかなんて見えないわけですね。逆も然り。左の人は右の人がまったく見えないじゃないかと。そうすると、相関がないですね、見えないから。ずっと向こうにいる人が右手のスプーンを取ろうが左手のスプーンを取ろうがこっちにいる人は知らない、どうでもいいわけですね。

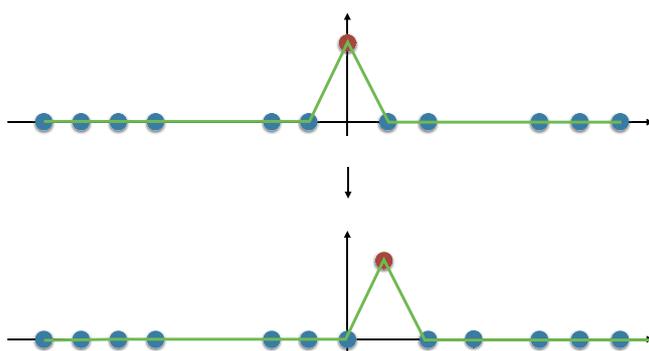


そうすると、まあご想像の通り、こっち側にいる人は左手でスプーンを取ったと。こっち側にいる人は右手でスプーンを取ったと。みんな嬉しいわけですね。ところが1人だけ、スプーンがなくなっちゃって、おーい、俺スプーンがねえよと。怒ったままの人がいるわけですねここに。これが、ソリトンです。つまり、この人たちの怒りのエネルギーを縦軸にとって、横軸にこの人たちの座標をとると。



そうするとこの人たち（スプーンを取れた人たち）は、嬉しいから、エネルギー低いわけですね。でこの人（スプーンを取れなかった人）だけもう怒り心頭、ですね。このようにここだけエネルギーが高いわけですね。これソリトン。これ落ちることができないんです。スプーンがないから。だから、安定なんですね。

隣の人からスプーンを奪っても（借りても）



平行移動するだけでなくならない

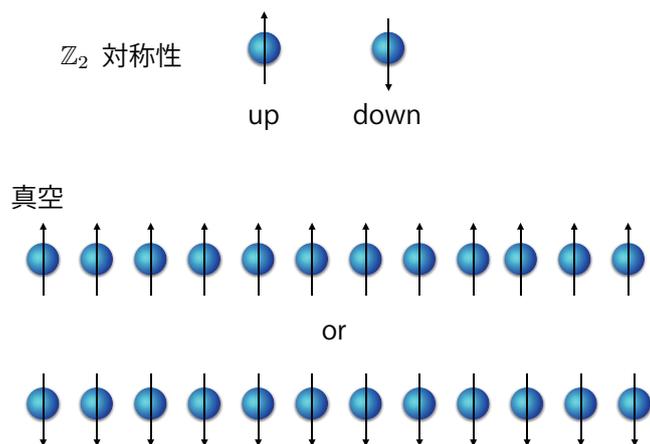
じゃあ、おいお前よこせよと。隣の人からこうスプーンを奪ったとしても、隣の人が今度スプーンがなくなるだけでその人が怒るだけなんです。だから、なくなんない。奪うとか借りても、なくならないというわけです。

ここにエッセンスが、いくつかある、詰まっていたわけなんですけども、結局真空かソリトンかってのは、何が状態を決めているのかという、重要だったのは境界条件ですね。左の端の人がどっちのスプーンを取ったかっていうことでその隣の人はどう取るかっていうのが決まってくると。右も同じ。ということで、トポロジーが重要になってくる。境界のトポロジーですね。いま1次元空間を考えてるので、境界は左端と右端の2点ですね。離散的な2点がある。境界条件は、人が左手のスプーンを取るか右手のスプーンを取るかというこの2つです。境界2点と状態2つの対応があると。

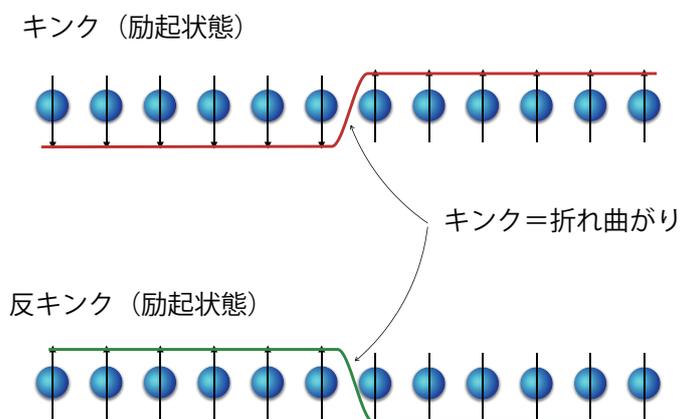
で、左手系の真空っていうのは、境界のトポロジーとして、左端の人も右端の人も左手で取ったというのが、みんな左手で持てると。まあ局所的にもしかしたらごちゃごちゃとあるかもしれないけども、そういうのは時間が経つにつれて、「ああ俺ちょっとこっちだから」って言って、渡してけば最終的には真空に落ちる。右も同じですね。全員右手で持っていればいいと。

キルクっていうのは、ソリトンっていうのは、左端の人が左手で取って、右端の人が右手で取ったと。こういう条件だとすると、必ずどっかで足りなくなってしまう。これがさっき言ったソリトンなんですけども、反ソリトンは逆ですね。右端の人が左手で取って左端の人が右手で取る。こうするとどっかで1人2つになるので、より嬉しいという、あの、ネガティブな怒り度が生まれるので、反ソリトン、という解釈をしましょう。

1次元スピン系 (強磁性)



ほとんど同じなんですけども、もうちょっと物理っぽく言うと、1次元スピン系で、上向きか下向きかっていうのがあって強磁性だとすると、隣り合うスピンは揃った方がいいというんで、真空としては上向きですらっと並んだ場合か、下向きですらっと並んだ場合があると。



でもこれも境界で、例えば左端で下向きになりなさい、右端で上向きになりなさいなんていうことをすると、どっかでこう、エネルギーが高い場所が生まれてしまうんですね。反キルクはその逆です。こっちが上向きでこっちが下向き。そうすると、この矢印をこうなぞってみると、下向きから上向きに変わると。もしくは上向きから下向きに変わるということでここに折れ曲がりが見えてきますね。なのでキルクと呼ばれてるわけですね。大体今日の話はこれを理解してもらえば終わったと思って、帰って俺ソリトンわかったよって言って結構だと思います。あとはもうどうでもいい話だと思って聞いてください。

0.7 具体例 2

2次元ソリトン：量子渦

かなり強引な簡単化だが…

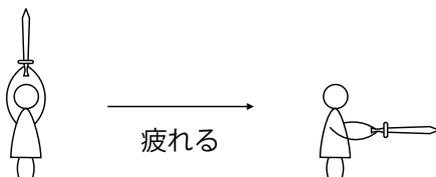


剣を上段に振りかざした人



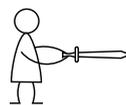
回転対称

いま1次元の話をしましたけど、2次元に上げてどういう具体例が考えられるかなというのを、ちょっと考えてみました。かなり強引かもしれませんが、剣を持ってる人がいたとします。で、この人、上段構えが大好きで、上に構えてるわけですね。こう、ものすごい振りかぶってると。この人は上に振りかぶってるので、こうくるくるくるっていう回転対称性があるというわけですね。まあ顔の裏表とかあるんだけど、そういう細かいことは気にしないでとにかく上に上がってるということは変わらないという $U(1)$ 対称性です。



だけど、上段は疲れるので、中段ぐらいにこう、したいと。これでもまあ敵からは身を守れるだろうというわけですね。だから、上段は不安定で、中段構えは安定であると。で上段構えは回転対称性があるけども、こっちは中段にしたことによって、もう回転対称性はなくなっちゃってるんですね。これはすごくさっきの話に似てると。ということで何が破れたかっていうと、回転対称性が、すなわち $U(1)$ 対称性が自発的に破れたというわけです。あの、これ僕が考えた話なんで、どっかに理論的な穴があるかもしれないですけどもまあ、感覚で受け取ってください。

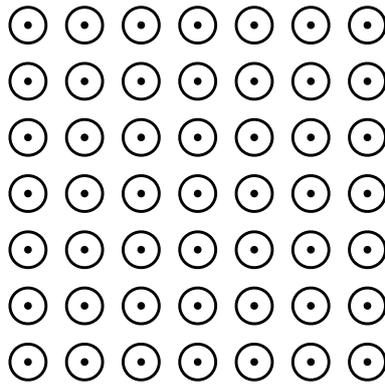
横から見た図



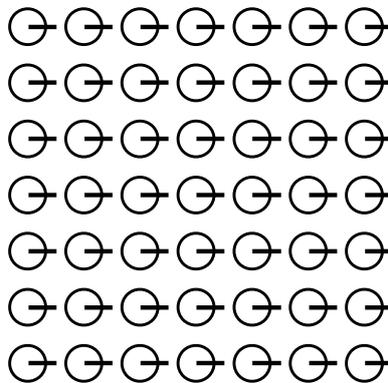
上から見た図



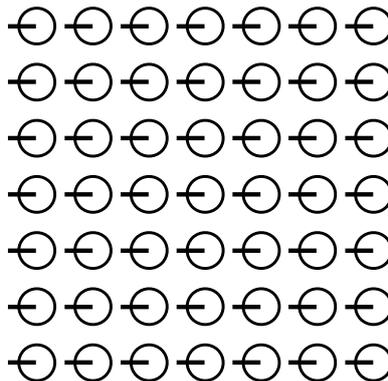
これ上から見た図をこう模式的に表すことにして、この人をこう表すことにしましょう。じゃあ、こんな人がたくさんいたらどうなるかというわけですね。



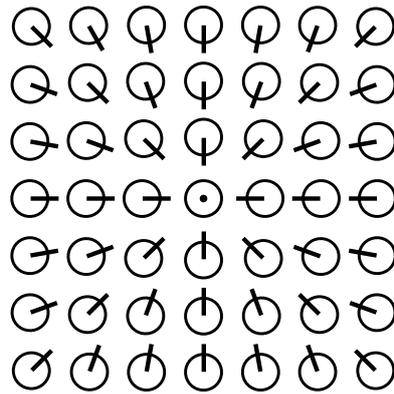
この人を2次元空間にたくさん並べると。こういう、剣を振りかぶった人、マスゲームみたいのがあるというわけですね。だけど、皆さん疲れるので、中段構えにしたいと。じゃあどうすっかって話ですね。あの、この人たち剣は持ってるけど平和主義で戦いたくないとします。



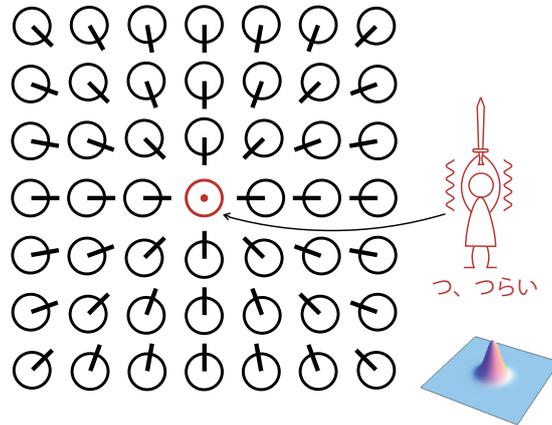
そうすると、みんなこうやったらいいんじゃないかと。なるべくこう剣と剣がぶつかり合わない。まあちょっと信頼関係が重要ですけども、あの、こうなると。剣と剣が当たると喧嘩になるので、みんな同じ方向を向きたいと。でも向き方は自由ですよ。



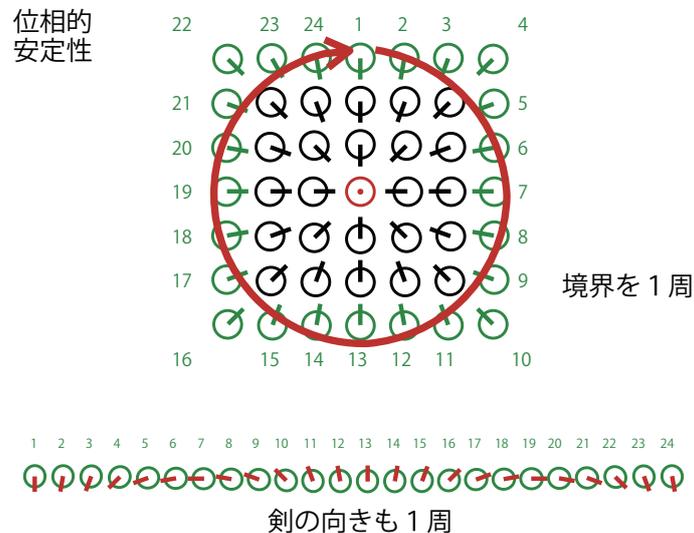
例えばこういうこともあっていいと。まったく逆に左に向くと。いま右と左やりましたけど、360°どこでもいいじゃないですか。何も状況は変わらないですね。そうすると真空っていうのは、さっきは2点しかなかったんだけど、今は360°、すなわち円ですね。真空の空間っていうのをもし考えたとしたらそれは円であると。さっきは2点だったというわけですけどもそれが円になったと。じゃあ、こうなればいいわけですけども、世の中そうそうはうまくいかないというのがさっきの話でした。



励起状態として、例えばこういうことがあってもいいじゃないかと。周囲の人とはなるべく当たりた
くないので、隣り合う人どうしはなるべく平行でなると。隣り合う人はどこを見てもなるべく平行
になってるんですけども、よく見ると、左下の人と例えば右上の人は反対向きになっているんですね。
まあでも、なるべく当たらないように調整した結果こうなると。ここで注目すべきは、ここ（中心）
です。



この人は、どっちに剣を下ろしても、剣があるんですね。だから振りかざしたまま、上げた拳を下げ
られないという状態になると。こう、つらいわけですね。これが、2次元ソリトンです。ここでも
重要だったのは、何がこの状態を作ってしまったのかというと、境界条件ですね。



ここでの境界っていうのは、この端っこの人たちです。で、この人たちを時計回りに番号をつけてい

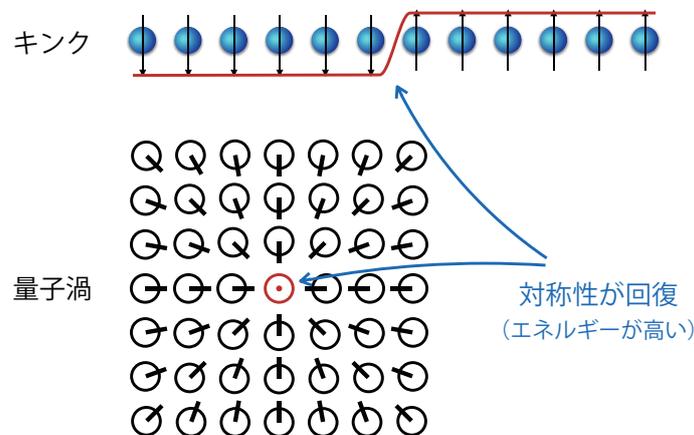
く。こうしてみましよう。これを、ここだけ切り取って、1次元に並べてみると、まあこうなってますね。1番目の人は一番下を向いてるわけですね。隣の人はちょっと傾いてだんだん9時の方向に、7番目の人が9時の方向を向いて、13番目の人が12時の方向を向いて、こうなってますね。で、1周するともちろんもとに戻ってるというわけで、こうなってるんだけど、よく見ると剣の向きが1周してるんですね。つまり、境界を1周すると、真空の中で1周したというわけです。

2次元平面の境界は S^1 ですね。真空の空間、さっき言った剣を振りかざす方向は、 360° あるということで S^1 。これはまさに破れた対称性の空間そのものです。重要なのは、この境界と真空の空間がおんなじだというわけですね。さっきも、キंकの場合は、境界の空間が2点で、真空の空間が右手か左手かという2点だったんですね。ということで、座標 (x, y) にいる人の振りかざした剣の角度を $\theta(x, y)$ とすると、この (x, y) を決めると、振りかざしてる角度が決まるわけですね。じゃあこの写像は何を与えてるかっていうと、 (x, y) を境界にとれば、この θ を決めることで、境界の S^1_{∂} から真空の S^1_V への写像を与えてるわけですね。

$$\theta : S^1_{\partial} \longrightarrow S^1_V \quad (0.7.1)$$

結局、 S^1 を S^1 に巻きつけるわけですから、なんででしょうね例えば、サララップの芯か何かに輪ゴムを巻きつけるのと同じで、写像は巻きつき数で分類されるわけですね。それが、位相的不変量といわれて、まあトポロジカル電荷。これは保存します。時間がたっても、なくならない。っていうことはあとで具体的に示しますけども。ということで、真空と、巻き付いてる状態っていうのは全然違うんだと。エネルギーが高くなってるとだけども、巻きつき数のおかげで、壊れられないというふうになってるといことです。

位相欠陥

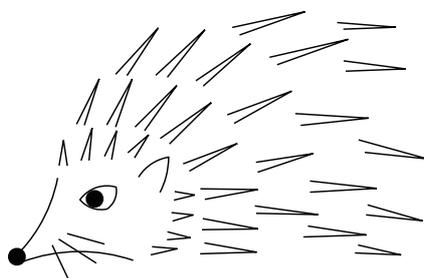


いまやった例をもう1度思い出すと、キंकの場合はこうでした。2次元の場合はなんかぐるっと回ると空間の中でぐるっと回るので、ポーテックスと呼ばれています。で、巻きつき数ってのは結局整数になってしまうんですね。何回巻くかということですから必ず1とか、2とか、-1とか-2です。で、通常の古典渦っていうのがありますけども、例えば排水口とかにできる渦っていうのは渦度っていうのがある。なんでもいい実数でいいんですけども、ここにできたのは対称性の破れっていうか巻きつき数に関係してるので、渦度、渦の強さが離散的な値なんですね。なんで量子渦と呼ばれます。で、注目すべき点は、ソリトンの場所ですね。キंकにしるポーテックスにしる、そこで対称性が回復してるんですね。対称性が回復してる時はエネルギーが高い。だからそこにエネルギーが集まってるというわけです。だからソリトンの中心では対称性が回復してるということで、ここに欠陥があるというわけで、こういうのが位相欠陥タイプのソリトンと呼ばれています。

0.8 具体例 3

	境界		真空多様体
1次元ソリトン:	2点	$\xrightarrow{\text{キンク}}$	2点
2次元ソリトン:	S^1	$\xrightarrow{\text{ポーテックス}}$	S^1
3次元ソリトン:	S^2	$\xrightarrow{\text{モノポール}}$	S^2

具体例として例えば3次元の場合、例えばモノポールというのがあると言いましたけども、これは、順々にいくと、1次元ソリトンは境界が2点で真空多様体が2点、これを結ぶ写像がキンク。で、2次元ソリトンは S^1 を S^1 に巻きつける。それがポーテックス。では3次元ソリトンなんで、3次元空間の境界は S^2 ですね。真空多様体が S^2 であるようなものをもってれば、モノポールっていうのができるというわけで、ある種のこういう写像を与えるものがモノポールです。

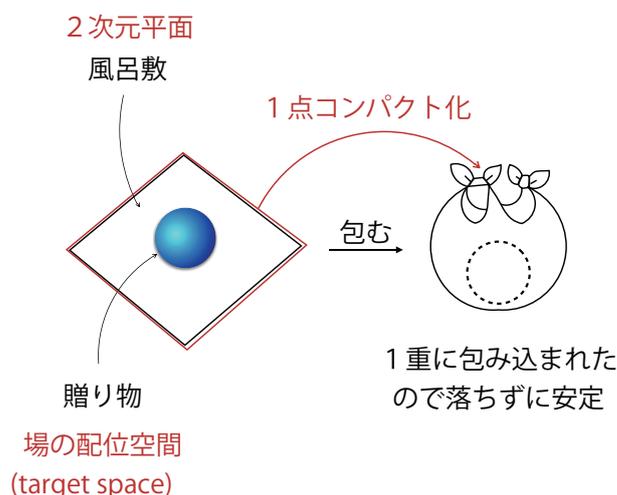


よくヘッジホッグって言われますけども、 S^2 上の点は、原点からの単位長さのベクトルを、それを針とみなすと表すことができますから、境界の S^2 のまわりをぐるっと回ったときにその針が、例えば、放射状になっているとその写像は非自明で、ハリネズミのようになっているということで、こういうのをモノポールといいます。まあいい例はあまり思い浮かばなかったんで、3次元はこれだけです。

0.9 具体例 4

さっきテクスチャー型っていうのがあると言いましたけども、こっちの方がもしかしたらマイナーかもしれませんが、いま見てきたように位相欠陥型のソリトンっていうのは、対称性の自発的破れと密接に関係してたわけです。けども対称性の自発的破れとは直接関係のない位相的ソリトンもあると。それはテクスチャー型と呼ばれています。テクスチャーって辞書で調べたら織物って書いてありましたけども、まあ我々日本人は風呂敷と言った方がたぶんイメージしやすいと思います。

というのは、こう風呂敷の包み方ってのはいろいろあるらしいんですね。いずれにしろ風呂敷の目的はものを包んで持ってくるというわけですね。で、ものを包んで持ってくるんで、落っこちたらしょうがないわけですね。だから落っこちないように包むということが求められているわけです。誰かに贈り物があって、風呂敷で包むということをするんですね。



で、この贈り物は、我々の言葉では場の標的空間ですね。例えば、 S^2 だったりとか。まあなんでもいいですけども、今は球状のものを贈りたいとします。で、風呂敷は2次元平面ですね。これを包むと。ふっとうやるわけですね。こうやって1重に例えば普通は包むわけですけども、こうすると落とさずに安定にできると。ということで、ものを包むということは、平面のこの端っこを結んで1点コンパクト化すると。平面を1点コンパクト化すると S^2 になるので、ちょうど S^2 をこの S^2 に移すという写像が得られるわけですね。そこにもやっぱり何重に包んだかという巻きつき数が現れるというわけです。

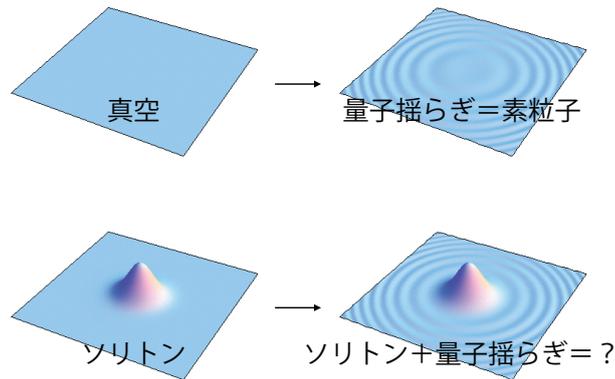
dim	1点コンパクト化		配位空間
1	S^1	$\xrightarrow{\text{sine-Gordon キンク}}$	S^1
2	S^2	$\xrightarrow{\text{lump}}$	$S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$
3	S^3	$\xrightarrow{\text{スカーミオン}}$	$S^3 \simeq \frac{SU(2)_L \times SU(2)_R}{SU(2)_{L+R}}$

で、1次元でもあります。例えば、1次元空間をコンパクト化すると S^1 になりますね。それを S^1 の空間に巻きつけるようなソリトンが、あとでちょっと見ますけども、sine-Gordon キンクっていうのがこれに対応しています。で、 S^2 を S^2 に移す、まあ S^2 っていうのはトポロジ的に複素射影空間 $\mathbb{C}P^1$ と等しいですけども、複素次元1の多様体に巻きつけるものをこれを実は lump といいます。これもあとでちょっと紹介します。3次元では実はスカーミオンに対応してると。3次元空間を、カイラル対称性の破れ、まあメソン（パイオン）ですね、これ S^3 の空間に位相的に等しいですけども、ここに移すというのがスカーミオン。まあこれは今日はちょっとやらないんですけども。

0.10 まとめ

こういうのを、位相的ソリトンといって、いま2つ出てきたのは位相欠陥型、重要だったのは空間の境界のトポロジーですね。テクスチャー型っていうのは、1点コンパクト化された空間のトポロジーが重要だと。これをどっかに持っていきたい贈り物とか、破れた対称性の真空の空間にどう巻きつけるかということでソリトンが現れるというわけです。

0.11 場の量子論におけるソリトン



じゃあ場の量子論におけるソリトンっていうのは大体どんなものかという、普通我々が場の理論で勉強するのは、のっぺりしたこの真空の周りのゆらぎを考えます。でも、いま見てきたように、ソリトンっていうのが、場の古典論の段階であると。そうすると、その周りのゆらぎっていうのも考えられるじゃないかと。それが、場の量子論におけるソリトンです。で、ソリトンと量子ゆらぎなんで、量子化されたソリトンと、量子化された、つまり粒子の相互作用を与えるような理論になっているだろうと予想がつくわけです。

で、普通真空周りで場を量子化すると素粒子のダイナミクスが記述できるわけですけども、ソリトン周りで場を量子化するというのを考えると、繰り返しになりますけども、素粒子とソリトンの相互作用、およびソリトンバックグラウンドでの素粒子のダイナミクスが記述できることになるんだろうねというのがナイーブな予想です。まあでも、そもそも、場の量子論におけるソリトンっていう定義に本当に意味があるのかっていうのはこれは非自明なクエスチョンで、というのは、量子論的ゆらぎがソリトンの典型的サイズよりももう大きくなっちゃったら、場の古典論的な配位っていうのはもう意味がないじゃないかと。当然ですね。こういう時は、どういう意味がでてくるんだろうなあっていうのは不思議です。

だから、さっき言った、ソリトンの基本的性質を思い出したいと思うんですけども、典型的サイズは、基本粒子の質量の逆数。

$$\ell \sim \frac{1}{m_\phi} \quad (0.11.1)$$

質量スケールがこれしか入ってないので、大体こんなものだろうと。で、ソリトンの典型的質量っていうのは、さっき言ったように、基本粒子の質量を結合定数で割ったものだったということでした。

$$M \sim \frac{m_\phi}{g} \quad (0.11.2)$$

そうすると、弱結合だと、ソリトンの Compton 波長を考えたら、これの逆数ですから

$$\lambda_{\text{Compton}} \sim \frac{1}{M} \sim g\ell \quad (0.11.3)$$

だということで、この結合定数が非常に弱ければ、量子効果は非常に弱いだろうと。

$$\lambda_{\text{Compton}} \ll \ell \quad (0.11.4)$$

すなわち、量子効果は無視できるので、たぶんソリトンが生き残るだろうというふうに予想できるわけですね。

じゃあ、強結合のときは。繰り返しますが、古典場の方程式の解ではあるんだけど、強結合になっちゃうともはや摂動論が適用できないっていうので、量子論におけるソリトンの存在自身がよくわからなくなるというわけですけども、もう1度これを思い出すと、ソリトンの典型的質量は(0.11.2)でした。強結合になると、このナイーブな表式をもって言うと、どんどん軽くなってくんですね。で、ついには m_ϕ よりも軽くなっちゃったら、どうすんだと。量子化したときに出てくる、まあ強結合なんでそんな量子化っていうことはできてないんですけども、でも可能性として、ソリトンの方が軽くなっちゃうんじゃないかと。そしたらソリトンを基本粒子と思うべきじゃないかというふうに思えてくるわけですね。強結合になると、なんかソリトンと素粒子の役割が変わってくるんじゃないかということになるわけですね。面白いことができる。ということで、弱結合だったらその量子効果は古典的なソリトンに対して量子補正を与えるだけだと。生き残るんだと。だけど強結合になってくともうぐちゃぐちゃになって、どうなるかわからないけれどもこの式が示唆することは、劇的に見方が変わって、ソリトンをより基本的なものだと思ってしまうというふうになってくるだろうという感じです。ということで、こういうこととお話ししたいと思っていますが、イントロダクションは大体こんなところですよ。次に行きます。

1 Kinks

いま言ったアイデアを、具体的に場の理論で確かめたいと思います。それには、やっぱり高次元になればなるほど難しいので、これを具体的に確かめるために、 $1+1$ 次元は非常によいテスト場所です。で、キंकっていうものについて考えていきたいと思います。これまでは非常に適当な話だったんですけど、ここからは場の理論にのっとった話をしていきたいと思います。

1.1 $1+1$ 次元

はい、では、 $1+1$ 次元ですね。そういうことなんで以下ではしばらく $1+1$ 次元に限った話をします。理由は、

1. シンプルだから、モデルが簡単だからですね。単純だと。
2. まあ意外と重要なこととして計算できると。
3. それから、基本的なアイデアを知るには十分なんです。
4. そうだけじゃなくて物性などでは実際に $1+1$ 次元系は存在しますから、そこにはほんとにキंकっていうのが現れる。実在してます。
5. これも講義の最後の方に出てくると思いますけども、ある状況においてはこの $1+1$ 次元がダイレクトに $3+1$ 次元に直結してます。

こんな理由からここをしっかりと見とくのは悪くないだろうと。

6. まあ隠れた理由としては、キंकの話は普通の大学院生は特別に興味がない限りは聞かない話だと思うので、これを機会に聞いておくのはいいんじゃないかなっていう。教養としていいかなという、そういうことですね。

こういう理由が思いついたので、これを具体的にやっつけていこうと思います。

1.2 Classical kinks

まずは、古典的なキंकですね。最も単純な理論は、実スカラー場 1 つ。 $\phi(x^\mu)$ というのを考えます。 $\mu = 0, 1$ ですね。 Lorentz 不変な理論っていうのは、こういう Klein-Gordon みたいな理論で、キंकが欲しいので、 ϕ^4 理論を考えます。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (1.2.1)$$

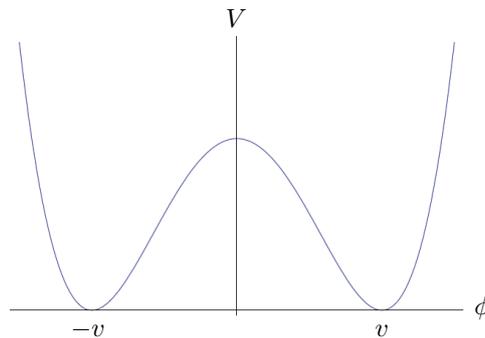
$$V(\phi) = -\frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{\lambda v^4}{4} \quad (1.2.2)$$

$$= \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \quad (1.2.3)$$

ポテンシャル (1.2.2) の第 1 項がこっそり $-m^2$ ってなって、普通質量項 + なんですけども、ここわざと $-$ にしてます。そのかわり、 ϕ^4 のところを正にして、ポテンシャルが底なしにならないようにしてあるというんですね。第 3 項は調整項で、真空のエネルギーを 0 にするために勝手につけ加えています。この v っていうのは 2 つの結合定数の比で、

$$v = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \quad (1.2.4)$$

と書けます。こういうふううまくやるとくと、(1.2.3) のようになって、いわゆる Higgs ポテンシャルの 1+1 次元版が出る。

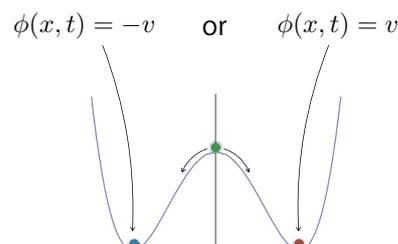


期待してるポテンシャルがこんな感じで、2 つの真空 v と $-v$ というのがあるんですね。 \mathbb{Z}_2 対称性は、もともと理論には、このポテンシャルの形から分かるように、 ϕ を $-\phi$ に変えても何も変わらないという対称性が系がもってる \mathbb{Z}_2 対称性。

$$\mathbb{Z}_2 : \phi \rightarrow -\phi \quad (1.2.5)$$

これが真空にいくとどうかと。

真空 (ローレンツ不変な配位)



\mathbb{Z}_2 対称性があるためには、場の配位が $\phi = 0$ にいけばいいんじゃないかと。ここならば \mathbb{Z}_2 対称なんですけども、さっきのスープの話からわかるように、対称性が高いところはエネルギーが高いわけですね。そうすると、どっちかに落ちるしかないということで、 $\phi = -v$ か $\phi = +v$ かということで対称性が破れると。自発的に破れるというわけです。いずれにしてもどちらの真空でも \mathbb{Z}_2 対称性が自発的に破れて、 \mathbb{Z}_2 対称性を尊重してるのは $\phi = 0$ っていう不安定な場所のみなんです。

よくやるように、 ϕ という場を真空のまわりで、ゆらぎを η としますと、

$$\phi = \pm v + \eta \quad (1.2.6)$$

と展開すると、 η に関して

$$\mathcal{L}_\eta = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \left(v^2 \lambda \eta^2 \pm v \lambda \eta^3 + \frac{\lambda}{4} \eta^4 \right) \quad (1.2.7)$$

と書けます。そうすると真空のまわりでは、この η^2 の係数が括弧の中のポテンシャルでちゃんと + 出てきて、質量項として現れてますね。

$$m_\phi^2 = 2v^2 \lambda = 2m^2 \quad (1.2.8)$$

ポテンシャルの底なんで、2 次の微分が正で出てるというわけです。ちょっとだけ見ておくと、1+1 次元ですから、場の質量次元は 0 ですね。 m は 1。 λ は 2 になって、真空期待値 v は場と一緒に、0 になっています。

それで、真空で \mathbb{Z}_2 対称性が自発的に破れてるということで、トポロジカルソリトンがあるだろうと。それがキंकというのはすぐわかるんですけども、これは真空とは違って、非自明な配位なわけですね。ということは、いま古典的な理論を考えるので、古典場の場の方程式の解で非自明なものを探すということになります。

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + \lambda(\phi^2 - v^2)\phi = 0 \quad (1.2.9)$$

時間によらない静的な解を得ようと思えば、 ϕ は空間のみの関数だとすれば、単なる常微分方程式になって、この常微分方程式を解けばいいんですね。ただし、どう解くかという境界条件を指定する。 $x = +\infty$ で $\phi = +v$ にいって、 $x = -\infty$ で $\phi = -v$ にいくか、その逆かということで、ねじれを作るわけですね。そういう境界条件をおいて解くわけです。

静的で非特異な解を求めたい。

$$\begin{aligned} \text{簡単な常微分方程式} \quad & \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \lambda(\phi^2 - v^2)\phi \\ \text{境界条件} \quad & \phi(+\infty) = \pm v \quad \wedge \quad \phi(-\infty) = \mp v \end{aligned}$$

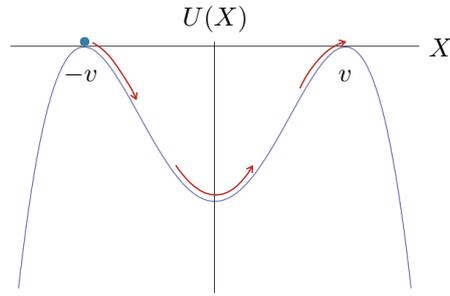
そういう解が本当に存在するかどうかというのを簡単に理解することができます。ちょっと変数を読みかえて、 ϕ を X として、なんかの位置だと思えます。この x を T として、時間だと思えましょうと。そうするとこれをこの変数で書き直すと

$$\frac{d^2 X}{dT^2} = -\frac{dU(X)}{dX} \quad (1.2.10)$$

になると。ここで

$$U(X) = -\frac{\lambda}{4}(X^2 - v^2)^2 \quad (1.2.11)$$

です。そうするとこれは、普通の Newton の運動方程式と同じで、ポテンシャル U の中を動く粒子 X の位置座標を支配する方程式がこれだというわけですね。



U っていうのは、もともとあったポテンシャルを -1 倍したものですから、こんな形になってるんですね。ポテンシャルがあるのでエネルギーは保存してる系なんですけども、例えば時刻 $T = -\infty$ で $X = -v$ にいたとします。で、これをこっそり、ゆっくりずらすと、 $X = -v$ から出発したものはまあ左側に転がっちゃうこともあるかもしれませんが、右側に転がるわけですね。右側に転がったとしたら、エネルギーは保存してるので、無限大の時間をかけて $X = +v$ に到達すると。ということはまあ当然ありますよね。こうってこういくと。だから、こういう解を見つけるのは我々得意なわけですから、この描像だけでもあるってわかるし、実際解けます。

余計な見た目の自由度を減らしたいために、もう 1 回変数変換して無次元座標を作っておきましょう。

$$\rho = mx, \quad \varphi = v\phi \quad (1.2.12)$$

そうすると、場の方程式、時間によらない場の方程式はパラメータ 1 個も入ってない、こんな感じになってしまうんですね。

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} = \varphi(\varphi^2 - 1) \quad (1.2.13)$$

だから、解の変化のスケールは $\mathcal{O}(1)$ だと。この変数で見て $\mathcal{O}(1)$ 。すなわち、

$$\ell \sim \frac{1}{m} \sim \frac{1}{m_\phi} \quad (1.2.14)$$

だから非自明な解があったとしたら、そのスケールは、さっき基本粒子の質量分の 1 だと言いましたが、それはこっから見て取れるわけですね。エネルギーはどうかというと、この変数で書いてやると、

$$M = \frac{m^3}{\lambda} \int d\rho \left[\frac{1}{2}(\varphi')^2 + \frac{1}{4}(\varphi^2 - 1)^2 \right] \simeq \frac{m_\phi^3}{\lambda} \quad (1.2.15)$$

まったくパラメータに依存しないものに全体に m_ϕ^3/λ というのが掛かっています。これは積分して $\mathcal{O}(1)$ になってるわけなんですけども、大体この基本粒子の質量で決まるスケールを結合定数 λ で割ったと。これがさっき言った一般的な性質です。

厳密解が存在して、場の方程式は

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \lambda(\phi^2 - v^2)\phi \quad (1.2.16)$$

もう 1 回スケールしてない変数で書きましたけれども、これを解くテクニックとしては 1 つは、エネルギー積分してやればいいわけですね。 ϕ の x 微分を掛けてやると、こういうものになります。

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2) \right] = 0 \quad (1.2.17)$$

そうすると、この [...] は x に依存しない定数だということなんで、こうなりますね。

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2) = \text{const.} \quad (1.2.18)$$

定数なんで、 x によらず何かある値ですけども、じゃあ $x \rightarrow \infty$ で見たら $\phi \rightarrow +v$ ですから、第2項は0だし、 v っていう一定値になりますから第1項も0になると。ということでこの定数は0だというわけですね。ということで、これを書き直すと

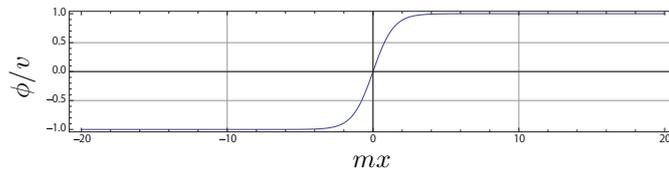
$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2} (\phi^2 - v^2)} \quad (1.2.19)$$

になると。±2つ出てきますけども、2階微分方程式だったのが1階微分方程式になるという1次元ならではの特殊なことがあります。

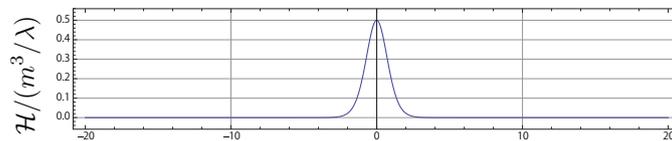
で、これ解けます。普通に積分してやればよくて、積分すると、厳密解はこの±の符号に対して+の方が \tanh の関数で書けると。

$$\text{キंक: } \phi(x) = v \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right] \quad (1.2.20)$$

ここに x_0 っていうのは定数で、1回積分してやったことによって入ってくる積分定数ですね。



解は $x_0 = 0$ とおいたら \tanh なんて図のようになると。これ座標は mx で書いてて縦軸は ϕ/v なんて、 $x = -\infty$ で $\phi = -v$ にきて、 $x = +\infty$ は $\phi = +v$ にいってると。

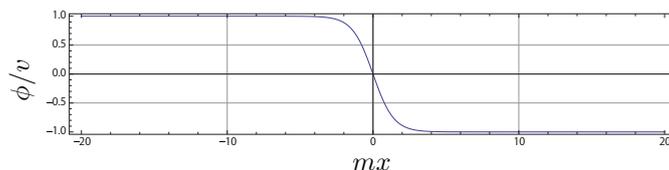


λ/m^3 っていうので無次元化したエネルギーを見ますと、こういうふうになって、 $x = 0$ に局在した粒子的な配位があるというわけですね。

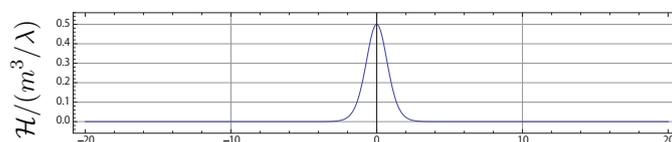
反キंकの場合は、- がつきます。それだけです。あと全部一緒。

$$\text{反キंक: } \phi(x) = -v \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right] \quad (1.2.21)$$

ここ - がつくんで、上下が反転します。



反転して、逆に $x = -\infty$ で $\phi = +v$ で $x = +\infty$ で $\phi = -v$ になると。



でもエネルギーで見ちゃうと同じですね。キルクと反キルクはエネルギーでは同じになっています。質量は、キルクも反キルクも厳密解があるので厳密に計算できて、

$$M_{\text{kink}} = M_{\text{anti-kink}} = \frac{2\sqrt{2} m^3}{3 \lambda} \quad (1.2.22)$$

となります。

トポロジカル電荷、トポロジカル電荷って言うてますけども、そのほんとなんなんだと。電荷っていうのは、なんか保存量に関係してるんですね。ここでは、トポロジカルカレントっていうのを考える。それはですね、こんなもんです。 ϕ の微分を反対称テンソルでつぶしたようなものですね。

$$j^\mu \equiv \frac{1}{2v} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (1.2.23)$$

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu} \quad (1.2.24)$$

そうすると、これの発散をとると、あきらかにここは反対称なんで、0 になりますね。

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.2.25)$$

ということで、勝手にこんなもんとってきたんだけど、これは保存カレントになってるというわけですね。じゃあその 0 成分の空間積分がこの保存カレントの電荷で、具体的には、 $1/2v$ っていうのは規格化ですけども、 $\phi/2v$ の $x = +\infty$ と $x = -\infty$ での値の差になってくるんですね。

$$Q = \int dx j^0 = \left[\frac{\phi}{2v} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} \quad (1.2.26)$$

境界での値、トポロジーが重要になってくるというわけです。

キルクの場合は、 $\phi(+\infty) = v$ で、 $\phi(-\infty) = -v$ ですから、トポロジカル電荷は

$$Q = \frac{v - (-v)}{2v} = +1 \quad (1.2.27)$$

反キルクの場合はこの逆で、

$$Q = \frac{-v - (v)}{2v} = -1 \quad (1.2.28)$$

というふうに出て、これは保存カレントなんで、キルクとか反キルクは安定に存在しているということの意味している。

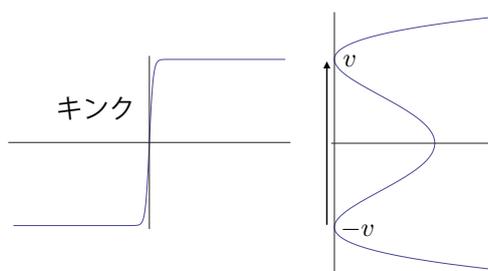
もうちょっと安定性について議論したいんですけども、いま言ったように、この場の配位、解はトポロジカル電荷、保存量で分類されます。

$$Q = 0 \quad : \text{真空、キルク-反キルク}$$

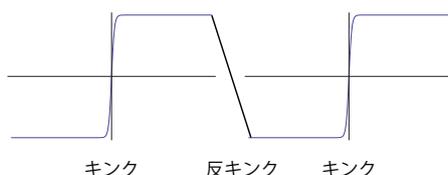
$$Q = +1 \quad : \text{キルク}$$

$$Q = -1 \quad : \text{反キルク}$$

いま見た ϕ^4 理論では 3 つの異なる状態があって、それぞれトポロジカル電荷で分類して、トポロジカルセクターというふう呼ばれてますけども、 $Q = 0$ っていうセクターは、真空もしくはキルク-反キルクが同じ個数だけあるような状態です。それから $Q = +1$ っていうのはキルクが 1 個ある状態もしくはキルクと反キルクのペアがついててもいいですよ。 $Q = -1$ っていうのは反キルクの状態ですね。ちなみに、 $Q = N$ ($|N| > 1$) っていう状態は ϕ^4 理論ではありません。 $N > 1$ っていうような、キルク 2 個っていう状態っていうのは実は作れません。



その理由は簡単で、キルク 1 個っていうのは、このポテンシャルをちょっと 90 度横にして書いたものとキルクを書いたものですね。 $x = -\infty$ で $\phi = -v$ で、 $x = +\infty$ で $\phi = v$ にいくと、下から上へ橋渡ししてるのがキルクですけども、もしもキルクを 2 個置こうと思ったら、1 回上がってるので、もう 1 回つなごうと思ったら、どうしても反キルクを置かなきゃいけないんですね。



だから ϕ^4 理論には、キルク 2 個置くには反キルクを真ん中に挟まなきゃいけないくて、結局このトポロジカルセクターは +1、トポロジカル電荷は +1 になってしまって、 ϕ^4 理論っていうかキルクにはよくあることなんですけども、有限個しか置けないということがあります。

もちろん Q は保存電荷なので、1 を 0 にするような遷移はないわけですね。で、もうちょっと別の見方でいまの安定性を考えてみたいと思います。今日の講義のキーワードの 1 つとして **Bogomol'nyi** 平方完成っていうのがあるんですけども、これをちょっと見ていこうと思います。Hamiltonian を、時間依存性はもう無視したもんですけども、書いてみました。

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \quad (1.2.29)$$

これが与えられた Hamiltonian ですね。これよく見ると、ここ 2 乗でここも 2 乗になってるので、平方完成できるわけですね。

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\phi^2 - v^2) \right]^2 \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{d\phi}{dx} (\phi^2 - v^2) \quad (1.2.30)$$

平方完成なんでここ + にしても - にしてもいいんですけども、そうするとお釣りの項、cross term が出てきます。質量はこれを積分したもんですから、空間積分してやりますと、結局いま平方完成した部分とお釣りの部分を一緒に積分してやると。

$$E = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\phi^2 - v^2) \right]^2 \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{d\phi}{dx} (\phi^2 - v^2) \right\} \quad (1.2.31)$$

そうすると、2 乗の積分してるので正定値なので、残りの積分よりもエネルギーが絶対大きいというふうに言えますね。

$$E \geq \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int dx \frac{d\phi}{dx} (\phi^2 - v^2) \quad (1.2.32)$$

これ $\frac{d\phi}{dx}(\phi^2 - v^2)$ というふうになってるので、実際積分ができて、

$$E \geq \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left[\frac{\phi^3}{3} - v^2 \phi \right]_{\phi(-\infty)=\mp v}^{\phi(+\infty)=\pm v} \quad (1.2.33)$$

こういうふうにできるといわけです。このように、エネルギーっていうか質量が下からバウンドされてるわけですね。ですから、無限遠での境界条件を決めると、これで決まる量を計算すると、さっきちょっと出てきた

$$\frac{2\sqrt{2} m^3}{3 \lambda} \quad (1.2.34)$$

になりますけども、これよりも絶対大きいということになるわけですね。だから、この境界条件をもつ場の配位の中で最低のエネルギーをもつものはこのエネルギーをもつもので、それより小さいものはないということなんで、このエネルギーをもったものは安定であるということがわかります。ちなみに等式が成り立つのは $[\dots]^2 = 0$ になるときですから、

$$\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(\phi^2 - v^2) = 0 \quad (1.2.35)$$

ですね。これはさっき見た、エネルギー積分して出てきた 1 階の微分方程式そのものですね。これは Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield っていう人の頭文字をとって **BPS** 方程式というふうに呼ばれてて、いまこの理論からわかるように **BPS** 状態っていうのはエネルギーの下限をヒットしてるということで安定であるということがわかります。

いま ϕ^4 理論でやりましたけども実は 1 次元は非常に特殊で、ポテンシャルによらず同じ議論ができます。空間にしか依存しない配位のエネルギーの表式は

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \phi'^2 + V \right] \quad (1.2.36)$$

で与えられますけども、これを無理やり平方完成してやると。

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\phi' \pm \sqrt{2V} \right)^2 \mp \phi' \sqrt{2V} \right] \quad (1.2.37)$$

そうすると、この部分は 2 乗なんで、結局

$$E \geq \mp \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \sqrt{2V} \quad (1.2.38)$$

になるということで、このバウンドがサチるのは $(\dots)^2$ が 0 になるときですから、BPS 方程式は

$$\phi' \pm \sqrt{2V} = 0 \quad (1.2.39)$$

質量は

$$M = \left| \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \sqrt{2V} \right| \quad (1.2.40)$$

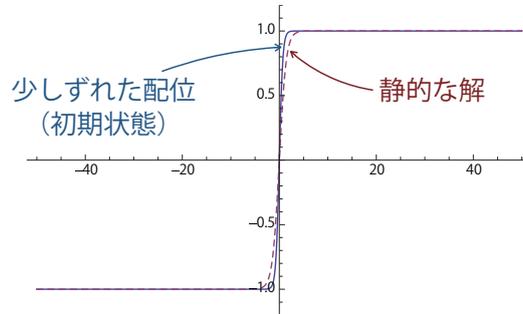
$x = \pm\infty$ での ϕ の値だけで決まるというようなものになっています。ここからわかることとして、あとで重要になってくるんですけども、 $\phi' = \mp \sqrt{2V}$ なので、2 乗すると

$$\frac{1}{2} \phi'^2 = V \quad (1.2.41)$$

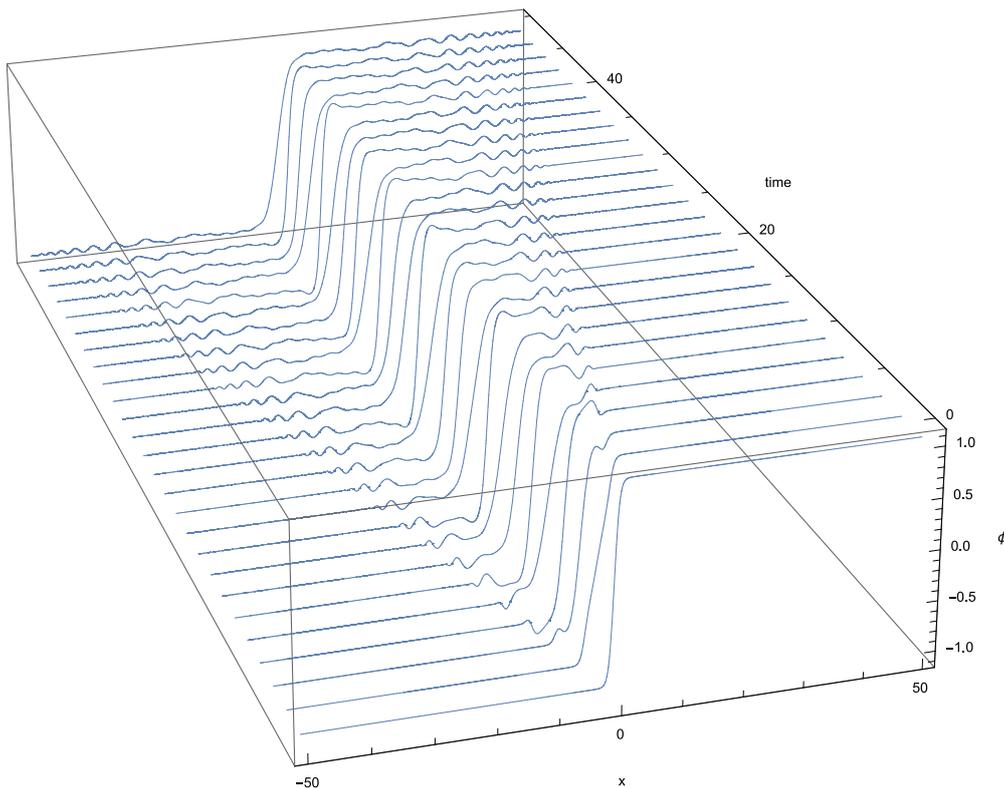
というわけですね。ということは、運動項からくるエネルギーと、ポテンシャルからくるエネルギーが同じだということで、いわゆるビリアル定理みたいになってるということです。

$$\int dx \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 = \int dx V \quad (1.2.42)$$

で、ちょっと安定性の確認を、簡単な数値計算で見てみましょう。



点線のほうが厳密な tanh の解です。勝手に手でそこから少しずらした状態を用意して、それを時間に依存した運動方程式 (1.2.9) の初期状態としてこの青い線を入れて、解いてみます。



これどうなるかっていうと、エネルギーを勝手に与えてるので揺らぐわけですね。で、 $x = 0$ あたりに不自然に溜まったエネルギーは radiation として逃げてくど。けども、大ざっぱな構造はなくなるんないんですね。だからキックそのものはなくなるというわけです。

キングのエネルギー密度、Hamiltonian を

$$\mathcal{E}_{\text{kink}} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \quad (1.2.43)$$

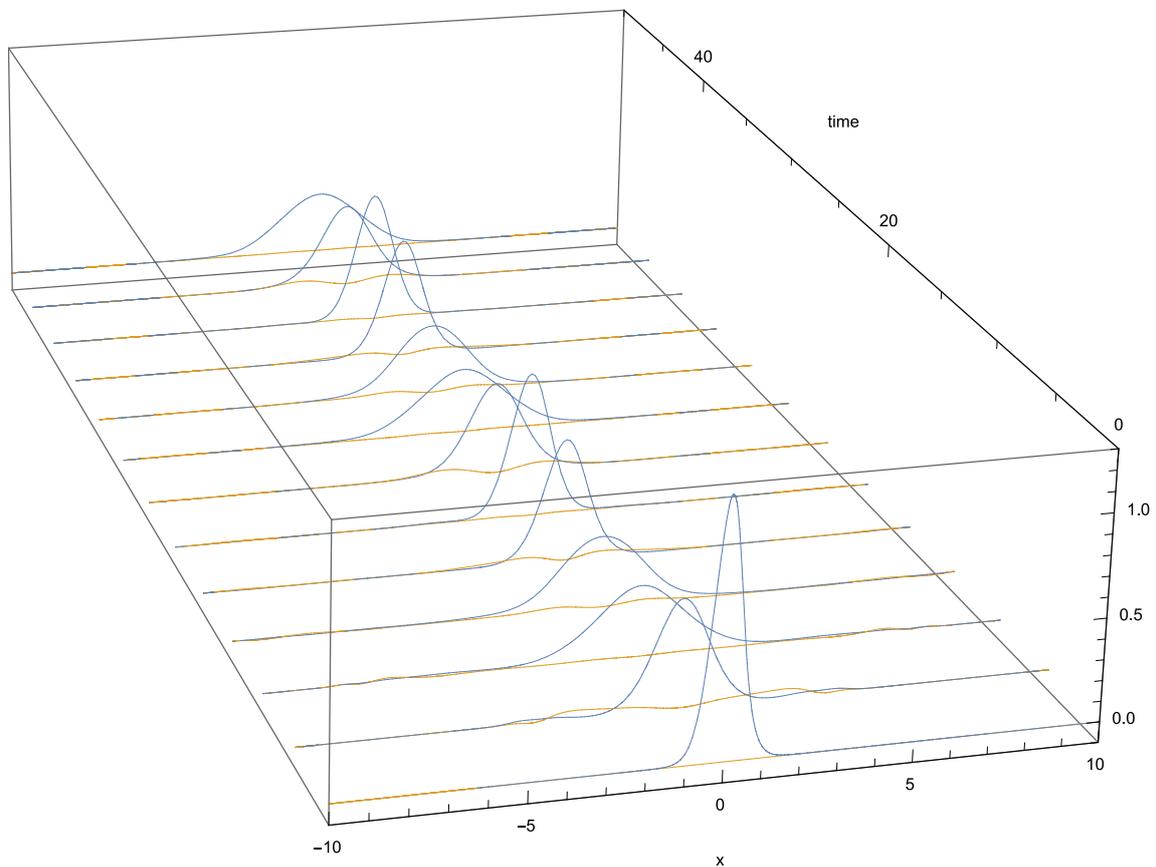
として、radiation のエネルギー密度を

$$\mathcal{E}_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (1.2.44)$$

というふうに定義するならば、全エネルギーは、このキングのエネルギーと radiation のエネルギーに分割できますね。

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_{\text{kink}} + \mathcal{E}_{\text{rad}} \quad (1.2.45)$$

それをいまのシミュレーションに対してやってみると、こんなふうになります。



青いのがキングのエネルギーで、下にひよこひよこっと出る紫みたいのが radiation のエネルギーです。キングのエネルギーはふらふら振動しています。それに合わせて radiation が出て、この radiation は基本粒子と同じ質量を持っていて、 m_ϕ が小さければだいたい光速で伝わるということなんですけども、ここにある局在してるエネルギーはやっぱりなくなっていないというわけですね。

いままで radiation は除いて静的なキルクを考えましたけども、動いてるキルクを作りたければ、ブーストすればいいということで Lorentz ブーストすると、単純に

$$x \rightarrow \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (1.2.46)$$

と変わるだけです。

$$\phi(x, t) = v \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}} \right] \quad (1.2.47)$$

$$0 \leq u \leq 1 \quad (1.2.48)$$

u はブーストした速度です。こっからわかることは、まずキルクの大きさってのは、 x にかかっている部分ですね。 x にかかっている係数が $1/\sqrt{1 - u^2}$ 倍されてるので、この逆数が大体キルクの典型的長さですから、

$$l_u = \sqrt{1 - u^2} l_0 < l_0 \quad (1.2.49)$$

$\sqrt{1 - u^2}$ 倍されてるのでこれはまさに Lorentz 収縮が起きてると。質量の方も計算してみると、

$$M_u = \int dx \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + V \right] = \frac{M_0}{\sqrt{1 - u^2}} > M_0 \quad (1.2.50)$$

今度は止まっているソリトンの $1/\sqrt{1 - u^2}$ ということで、動いてる普通の粒子とまさにおんなじように Lorentz 収縮するし、エネルギーも大きくなるというふうになって、まさに粒子的になってますというわけです。

これってずーっと続けてくんですかね…一旦休憩とってもいいんだっけ。半分って何時？…いま半分？そっか、少し休憩入れますか。えー、普通何分入れるんですか？ 10 分。じゃあ 10 分休憩入れましょう。

～～休憩～～

はい、それじゃあ続けます。後ろ見ながらだと、首が痛いんで。皆さんに背中を向けることになって申し訳ないんですけども。テンションはだんだん上がってきたんですけど体力はだんだんなくなってきてるんで、いま平衡状態…。

1.2.1 キルクと反キルク

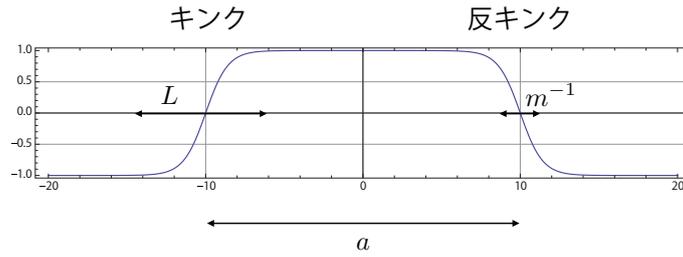
今までキルク 1 個の話をしてきたんですけども、じゃあ相互作用はどうか、ということでもう少し話をしたいと思います。あんまり近づいているとそもそもキルクと反キルクは潰れちゃうので、意味がないので、キルクと反キルクが自我を保てるぐらい離れているとします。キルクの典型的なスケールは m^{-1} なので m^{-1} よりもキルクが十分離れている状況を考えてみましょう。

$$a \gg m^{-1} \quad (1.2.51)$$

そうすると、十分離れていればお互いの影響は少ないので、キルクと反キルクを足してやり、ちょっと帳尻を合わせておくために -1 をつけてやると、十分、すごくいい解になります。

$$\phi_{k\bar{k}}(x; a) = v \left\{ \underbrace{\tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right]}_{\phi_k} - \underbrace{\tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right]}_{\phi_{\bar{k}}} - 1 \right\} \quad (1.2.52)$$

というのは、 \tanh というのは中心から離れると指数関数的に定数になってしまうので、 a っていうのは互いの距離ですね、これが十分大きければ影響ないということです。



こんな感じになっております。キंकと反キंकがあって、キंकの典型的なサイズが m^{-1} で、それよりも十分大きく離しておこうと。じゃあキंकが反キंकから受ける力を計算したい。そこでエネルギー運動量テンソルを見ます。で、キंकの運動量…キंकというのはここですね。大体 $x = -a/2$ のところにある。キंकの運動量っていうのは、エネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (1.2.53)$$

の空間部分、 $-T_{01}$ の、キंकを中心に大体 L の幅だけ積分してやると。

$$P_k = \int_{(-a-L)/2}^{(-a+L)/2} -T_{01} dx \quad (L \gg m^{-1}) \quad (1.2.54)$$

この L はやっぱり m^{-1} よりも十分大きくなきゃいけないですね。けどあんまり大きいと今度は反キंकのほうが入ってきてしまうと困るので a よりも小さい、けども m^{-1} よりも大きい領域でとってやると、こいつの運動量とみなしていいだろうと。

これは簡単な式なので T_{01} を実際やってみると、時間微分と空間微分を掛け算したものになる。

$$P_k = \int_{(-a-L)/2}^{(-a+L)/2} -T_{01} dx = - \int_{(-a-L)/2}^{(-a+L)/2} \dot{\phi} \phi' dx \quad (1.2.55)$$

運動量がわかれば、その時間微分を計算してやれば力がわかるというわけですね。ということで、この式をもう 1 回時間で微分すると、ここで運動方程式を 1 回使いますとこんな感じに書き換えることができます。

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{dP_k}{dt} \\ &= - \int_{(-a-L)/2}^{(-a+L)/2} (\ddot{\phi} \phi' + \dot{\phi} \phi'') dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \phi'^2 + V \right]_{(-a-L)/2}^{(-a+L)/2} \end{aligned} \quad (1.2.56)$$

これは積分できます。これやってみてもらえれば分かるんですけども、これを計算するのに、キंकが十分離れてて、手で止めておくとします。キंकを固定したまま a を変化させたときに、どう力が変わっていくかというのを見たいと思います。したがって運動項は 0。そうすると後ろの 2 項だけになるんですけども、この $-\phi'^2/2$ と V は一緒なんですね。さっきのピリアル定理です。キंकと反キंकの個々に対してはピリアル定理を使ってもいいので、これを使います。

さっきの重ね合わせの解を代入しますと、こんなものが得られます。

$$F_k = \left[-\phi'_k \phi'_k + V(\phi_{k\bar{k}}) - V(\phi_k) - V(\phi_{\bar{k}}) \right]_{(-a-L)/2}^{(-a+L)/2} \quad (1.2.57)$$

F_k はバックグラウンド解で決まっているわけですね。 ϕ_k というのは (1.2.20) で、 $\phi_{\bar{k}}$ というのは (1.2.21) で、これは全部わかっているわけですね。それを左側にあるキクの左手側と右手側の値をとってきて、引き算すればいいわけです。いま $x = -(-a + L)/2$ (キクの右手側) のところで考えてみましょう。そうすると、キクってというのは $-v$ から v へいくのでキクの右手側は v ですね。 v からのちょっとしたずれを δ_k^+ として、

$$\phi_k^+ = \phi\left(\frac{-a + L}{2}\right) = v + \delta_k^+ \quad (1.2.58)$$

同じように $\phi_{\bar{k}}$ のほうは v から $-v$ へいくので、反キクはキクの右手側にあったので、この場所は反キクの左手側になるわけですね。ちょっとわかりづらいですね。

$$\phi_{\bar{k}}^+ = \phi\left(\frac{-a + L}{2}\right) = v + \delta_{\bar{k}}^+ \quad (1.2.59)$$

キクの右手側は反キクの左手側、お互いに v なんです。 v からのずれをそれぞれ δ としています。どちらも中心はほとんど v なんですけれども、そこから δ だけずれているとします。それぞれのずれを δ_k^+ 、 $\delta_{\bar{k}}^+$ として、ポテンシャルに代入してやります。そうすると $\phi_k + \phi_{\bar{k}} - v$ というのは $v + \delta_k^+ + \delta_{\bar{k}}^+$ となって、この δ は小さいので展開してやるとこうなります。

$$\begin{aligned} V(\phi_{k\bar{k}}) &= V(\phi_k + \phi_{\bar{k}} - v) \\ &= V(v + \delta_k^+ + \delta_{\bar{k}}^+) \\ &= V(v) + V'(v)(\delta_k^+ + \delta_{\bar{k}}^+) + \frac{1}{2}V''(v)(\delta_k^+ + \delta_{\bar{k}}^+)^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.2.60)$$

同様に $V(\phi_k)$ も計算してやると、こうなりますね。

$$\begin{aligned} V(\phi_k) &= V(v + \delta_k^+) \\ &= V(v) + V'(v)\delta_k^+ + \frac{1}{2}V''(v)(\delta_k^+)^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.2.61)$$

$V(\phi_{\bar{k}})$ についても同様です。 δ の 0 次と 1 次と 2 次をそれぞれ足しあわせてやると。

結局計算するとこんな感じになります。

$$F_k = -(\phi_k^{+'}\phi_{\bar{k}}^{+'} - \phi_{\bar{k}}^{-'}\phi_k^{-'}) + m_\phi^2(\delta_k^+\delta_{\bar{k}}^+ - \delta_{\bar{k}}^-\delta_k^-), \quad m_\phi^2 = V''(\pm v) \quad (1.2.62)$$

ここに知っている解

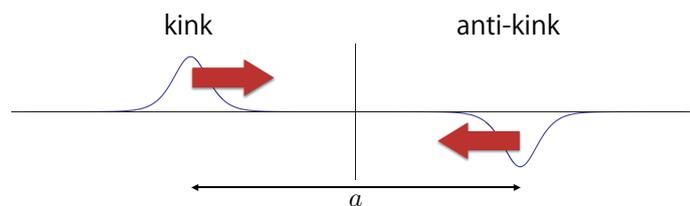
$$\phi_k = v \tanh\left[\frac{m}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right] \quad (1.2.63)$$

$$\phi_{\bar{k}} = -v \tanh\left[\frac{m}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right] \quad (1.2.64)$$

をポンと代入してやってリーディングを拾ってくるんですね。ちょっとこの計算は面倒くさくてここには書いてませんが、だいたいリーディングではこんな指数関数になった力が計算できます。

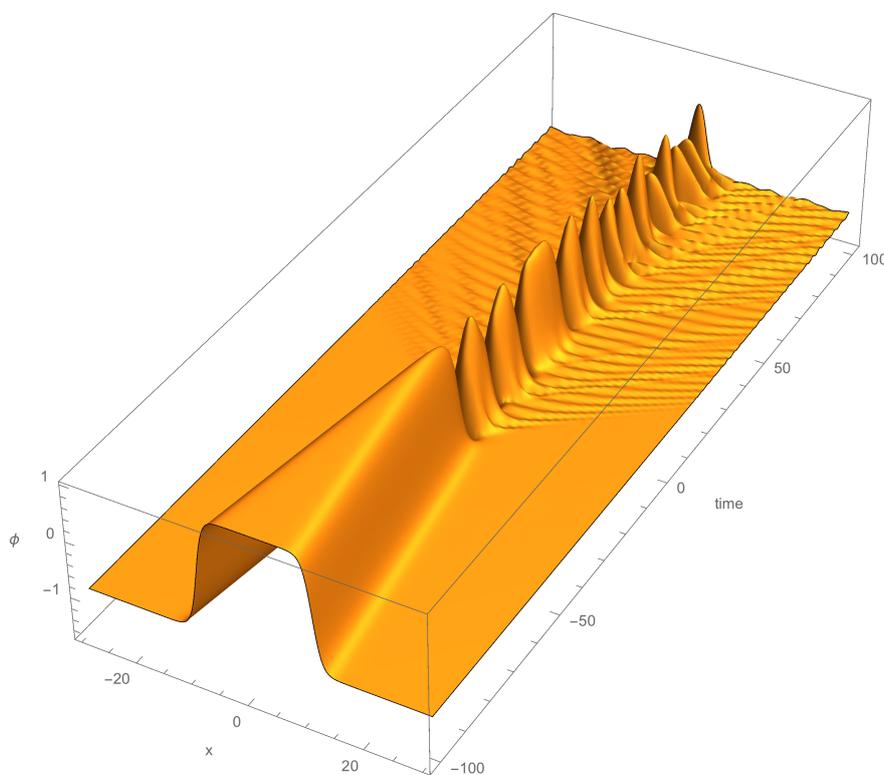
$$F_k = \frac{4m_\phi^4}{\lambda} \exp(-m_\phi a) \quad (1.2.65)$$

だから、キクと反キクは十分離れていると、ほとんど相互作用ってないんですね。予想通り a がでかければでかいほど、力はなくなって、これは引力です。というのは、これはキクにかかる力なので、左側にあるキクが右側にある反キクから受ける力なので、反キク側に引っ張られている。ですから、引力になっています。



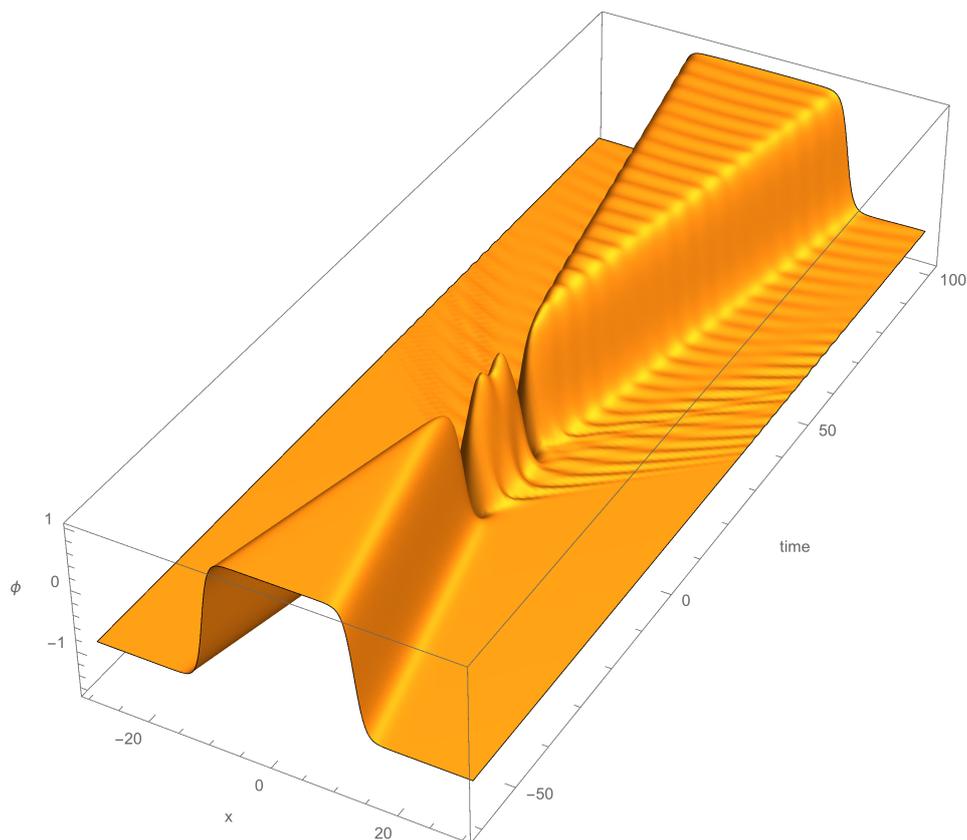
ということで、反キंकの方にも同じ力が作用して、キंकは反キंकの方に、反キंकはキंकの方に引っ張られて同じ力がリーディングで (1.2.65) となるというわけです。これをよく見てみると、指数関数型なんで質量 m_ϕ のスカラー粒子が伝える湯川型のポテンシャルと同じ形をしているわけですね。感覚としてはキंकと反キंकの間に質量 m_ϕ のスカラー粒子が飛んで、粒子を交換して力が働いているというようなイメージです。

じゃあ、動的だったらどうかと。今は静的な解だったんですけども。キंकと反キंकはトポロジカル電荷が正味でゼロなので潰れるだろうと思いますね。お互い速度を光速の $1/10$ ぐらいでぶつけてみる、というのを数値計算してみると、だいたい、こうゆっくりと近づいてきて、なくなるんですね。



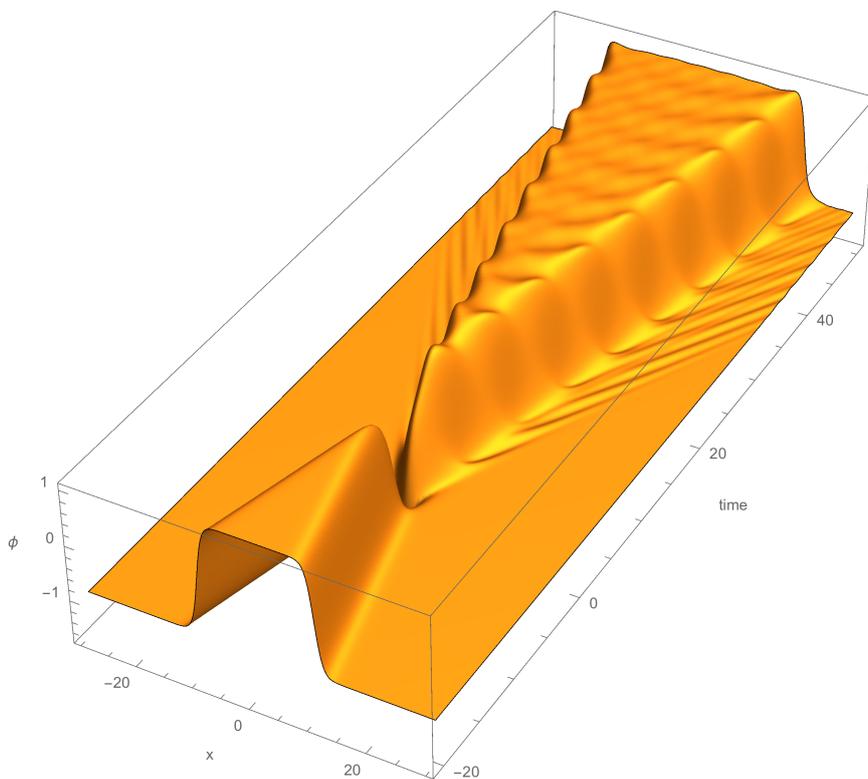
図：光速の $1/10$ の初速度でぶつけた場合。

ここでなんかバウンスしながら radiation を吐いて、こうずっと振動があって、かなりこれ長いこと振動して消えていくと。Radiation はだいたい光速で飛んでいくので、境界の影響をなくすためには、数値計算はやりたい秒数と同じくらい長い空間を用意しなきゃならなくて大変なんですけども。そうじゃないと反射してきてしまうので。これが速度が遅い時です。速度をちょっと速くするとどうなるのかというと、



図：光速の $1/5$ の初速度でぶつけた場合。

バウンスするんですけども、さっきと同じかと思うと、跳ね返ると。ということで、キンクと反キンクはトポジカル電荷が0なんで衝突したらなくなっちゃうかなと思いきや、いつもそうとは限らないんですね。もっと速くすると、光速の半分くらいですけども、



図：光速の $1/2$ の初速度でぶつけた場合。

1 回もバウンスなく反射されると。こういう性質を持っています。

あとよくやるのは、ソリトンが与えられたら、その周りのモード展開というのを考えます。そして、例えばモード展開して解のまわりのスペクトラムを見た時にタキオニックモードが出たら、その中心はやばいと、不安定であったということなんですけども、まあ今はトポロジカル電荷で守られているので、確実にタキオニックが出ないことは確信しているんですけども、やったらどうなるのか、やってみましょう。

$\phi(x, t)$ をバックグラウンドのキंक解とゆらぎに分けます。

$$\phi(x, t) = \phi_k(x) + \varphi(x, t) \quad (|\varphi| \ll v) \quad (1.2.66)$$

バックグラウンドは x にしかよらない。ゆらぎは x と t によっています。で、これは十分小さいゆらぎだと思って、運動方程式にこれをぶち込んで、 φ の 1 次まで取ってくると、このように線形化された方程式が得られます。

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \lambda(3\phi_k^2 - v^2)\varphi = 0 \quad (1.2.67)$$

このゆらぎ、 φ の固有モードを見つけないので、 $e^{-i\omega t}$ という振動数と $f_\omega(x)$ に分けて、この ω というものはどういうものが許されるのか、ということ調べます。

$$\varphi(x, t) = e^{-i\omega t} f_\omega(x) \quad (1.2.68)$$

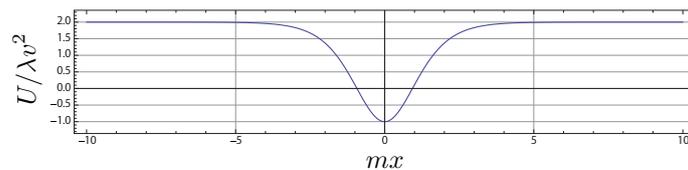
これをポンと代入しますと、 f_ω というのはこんな形の Schrödinger 型の方程式を満たすことがわかります。

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] f_\omega = \omega^2 f_\omega \quad (1.2.69)$$

Schrödinger ポテンシャルは何かというと、 $U(x)$ はいま、元の方程式に入っていた

$$U(x) = \lambda(3\phi_k^2 - v^2) \quad (1.2.70)$$

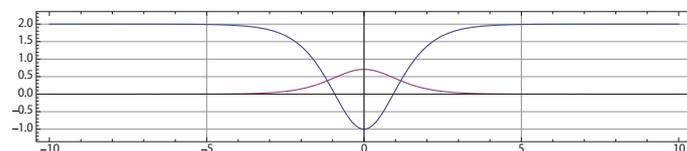
です。



この ϕ_k っていうのはバックグラウンドのキंकのことなので、これは x に依存したこんな形をしています。そうすると、高さは有限なので上の方は散乱モードになって、だけども凹んでいるので、束縛状態がありそうですね。それを求めてみましょう。

基底状態ですけども、これは実は $\omega = 0$ になるということがわかります。その波動関数は厳密にわかって、このようになります。

$$f_0(x) = A_0 \operatorname{sech}^2 \frac{mx}{\sqrt{2}} \quad (1.2.71)$$



波動関数を書いてみると、ポテンシャルに対して、中心に局在する基底状態があると。これはゼロモードです。これは何かって言うと、平行移動と関係しています。キंक解 (1.2.20) っていうのは、さっきちらっと見せましたけれども、積分定数 x_0 がありますね。この積分定数は並進対称性が破れたことによるゼロモードです。南部-Goldstone モードです。こういうのを解のモジュライパラメータっていうんですね。つまりこの x_0 はなんでもいいんで、これは解のパラメータですけども、その x_0 をちょっとずらしたときにどれだけ解が変形するかっていうと、 \tanh を微分すると sech が出てきます。つまりこの $f_0(x)$ はこの ϕ_k を x_0 で微分したものになっていますね。

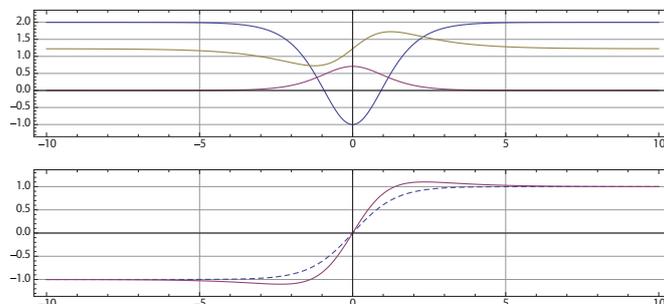
$$f_0(x) \propto \frac{d\phi_k}{dx_0} \quad (1.2.72)$$

もちろん平行移動にはエネルギーは必要ないので、これが massless モードですね。

実は第一励起状態もわかっていて、振動数と波動関数が

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}m = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}m_\phi \quad (1.2.73)$$

$$f_1(x) = A_1 \sinh \frac{m}{\sqrt{2}}x \operatorname{sech}^2 \frac{m}{\sqrt{2}}x \quad (1.2.74)$$



となっています。これはノードが一個あるこういうやつですね。これは何かって言うと、この点線ってのがバックグラウンドでこの f_1 を付け加えると解が少し変形します。これは解の変形モード、解の形をぐにっと変える shape モードとかですけども、解を変形するのに必要なエネルギーが ω です。これも中心に局在した波動関数になっている。

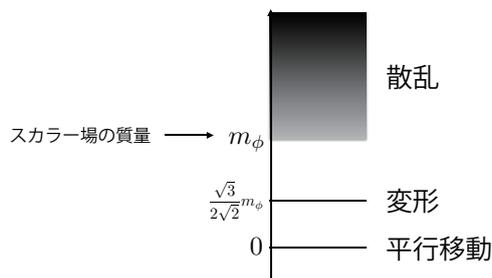
もっと上だともはや束縛状態がなくて散乱状態で、エネルギーは

$$\omega^2 = p^2 + 2m^2 = p^2 + m_\phi^2 \quad (1.2.75)$$

で、この $2m^2$ は何かって言うと基本粒子の質量の 2 乗ですね。基本粒子の質量は $\sqrt{2}m$ なので。つまり基本粒子の散乱ですね。ということで波動関数はこのようになります。

$$f_p = e^{ipx} \left(3 \tanh^2 \frac{m}{\sqrt{2}}x - 1 - \frac{2p^2}{m^2} - i \frac{3\sqrt{2}p}{m} \tanh \frac{m}{\sqrt{2}}x \right) \quad (1.2.76)$$

厳密解で全部解けています。



ということでスペクトラムがどうなっているかということ、一番底にゼロモードがあってその上に変形モードがあって、さらにその上にスカラー場の質量 m_ϕ のところから上に散乱モードがあるというふうになっていますね。この $\sqrt{3}/(2\sqrt{2})$ というのは1より小さいので m_ϕ より低いところに変形モードがあるというふうになっています。この計算は後でキルクを量子化するときに必要なってきます。ということでタキオニックモードがないということで、予想されたようにキルクは安定であると。微小揺らぎに対しても安定であるというわけです。

1.2.2 モジュライ空間

トポロジカルソリトンをやるとよくモジュライ空間っていうのが出てくるんですけども、それもここで簡単に説明しておきます。バックグラウンド解はこれで与えられています。

$$\phi_k = v \tanh \frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \quad (1.2.77)$$

この x_0 というのは積分定数だったんですけども、これをモジュライパラメータといって、 x_0 というのは実数ならなんでもいい。これを1個決めると解が1個決まる、ということで解の空間というものを考えることができます。解の空間の中の座標が x_0 というもので、解の空間のことをモジュライ空間といいます。運動方程式の解は無数個あって、いま言ったように抽象的な解の集合を考える。今の場合は、キルク1個のモジュライ空間は

$$\mathcal{M}_k = \mathbb{R} \quad (1.2.78)$$

となる。まあ、 $-\infty$ と $+\infty$ を含めてもいいんですけど。

モジュライ近似 [2] というのがテクニックとしてあるので、ここで紹介しておきます。モジュライパラメータ x_0 というのはさっき言ったように translational ゼロモードですね。キルクに閉じ込められている。キルクに局在したモードで、キルクから出られないのでこの x_0 をパラメータから場に格上げします。場なんだけどもキルクに局在しているので空間方向の依存性はないとして、 x_0 を t の関数として拡張することにします。

$$x_0 \rightarrow x_0(t) \quad (1.2.79)$$

そうするとこのキルク上の場だと思ったら、この $x_0(t)$ はどんな理論に従うだろうか。その有効理論を求めてみましょう。元々の作用がこうありました。

$$S = \int dt dx \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}_k(x; x_0(t))^2 - \frac{1}{2} \phi_k'(x; x_0(t))^2 - V(\phi_k(x; x_0(t))) \right] \quad (1.2.80)$$

バックグラウンド解をこう代入してあげるわけですね。ただしバックグラウンドが元々はパラメータ x_0 という定数によってただただだけれども、この x_0 をいま時間の関数と思っています。そうすると、この運動項の時間微分が $x_0(t)$ を叩くわけですね。

ちょっと見てみると、 ϕ_k の時間微分は結局 $x_0(t)$ の時間微分になります。 $x_0(t)$ の時間微分になるんですけども必ず $x - x_0(t)$ のコンビネーションになるので、解を1回微分する形になります。

$$S = \int dt dx \left[\frac{\phi_k'^2}{2} \dot{x}_0^2 - \frac{\phi_k'^2}{2} - V(\phi_k(x; x_0(t))) \right] \quad (1.2.81)$$

ここでキルクの質量は何かっていうと、

$$M = \int dx \left[\frac{\phi_k'^2}{2} + V(\phi_k(x; x_0(t))) \right] \quad (1.2.82)$$

でこれは定数です。 x_0 を $x_0(t)$ に格上げしようがしまいがキンクの質量は M なので。運動項の空間積分をすると $\phi_k^2/2$ と V は一緒なので、運動項部分は半分に分けてポテンシャル部分を出したとしたらここは $M/2$ っていうわけですね。ここでピリアル定理を使った。そうすると作用はこんな感じになる。

$$S = \int dt \left(-M + \frac{M}{2} \dot{x}_0^2 \right) \quad (1.2.83)$$

Free ですね、当然。 M っていうのはキンクの質量なので落としたとすると、ちょうど有効作用は単なる微分の 2 次が来てるだけ。

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{M}{2} \dot{x}_0^2 \quad (1.2.84)$$

ここに質量がちょうど来てるのが当然ですね。キンクの質量は M なので $-M/2$ という係数になっているわけです。

それでこれは、点粒子だと思ったら、相対論的粒子の作用を時間微分が小さいと思って展開すると

$$\begin{aligned} S &= -M \int dt \sqrt{1 - \dot{x}_0^2} \\ &= -M - \frac{M}{2} \dot{x}_0^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.2.85)$$

高次の微分項を無視すると、有効理論が得られます。有効理論は free なので当然解は t の 1 次関数っていうのが答えですね。

$$\ddot{x}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = ut + X_0 \quad (1.2.86)$$

等速直線運動ですね。それを元の解にもう 1 回戻してやると、

$$\phi_k \simeq v \tanh \frac{m}{\sqrt{2}} (x - ut) \quad (1.2.87)$$

という解が出てくるわけですが、我々は既にブーストした厳密解を知っているわけですね。

それとどういう関係にあるかっていうと、いま、得られた近似解は (1.2.87) で、真の解のブーストした解は

$$\phi(x, t) = v \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}} \right] \quad (1.2.88)$$

で、この u が光速より十分遅いという近似で展開すると、リーディングに近似解が出てきます。

$$\phi(x, t) \simeq v \tanh \frac{m}{\sqrt{2}} (x - ut) \quad (u \ll 1) \quad (1.2.89)$$

つまりソリトンの動きが十分遅くて、Lorentz 収縮しないよと、Lorentz 収縮の変形を忘れた近似で出てくるのが、モジュライパラメータを場に格上げしてその運動方程式を解いて、それを代入して得られた運動する解と、そういうわけですね。このモデルでは、どんな速度でもいような解がわかっているの、有効理論を求めてからそれを代入してと、すごく遠回りをしてますが、もっと次元が上がったりだとか、いまソリトン 1 個ですけどソリトンが複数個現れたら、モジュライ空間は複雑になります。その時にソリトンがどういう運動をするのかっていうのは解くのが難しくって。で、ちょっと続きを言っておくと、モジュライ近似は結局何がわかったかっていうと、十分ゆっくり動くソリトンの運動を記述することができるわけですね。面白いのは、場の理論っていうのは無限自由度なんだけれども、有効理論っていうのは時間のみの関数になっちゃったんで、モジュライパラメータの量子力学なんですね。それは有限自

自由度です。無限自由度の理論のソリトンの運動を有限自由度の量に置き換えた。ということで、すごく簡単化してます。こういうのは次元が上がって例えばモノポールとかインスタントンとかやっても同じで、マルチモノポール解だとかマルチインスタントン解だとかがどう散乱するのかとかを見るときに場の理論そのもので解くのは難しい。だけでも自由度を有限に限定してしまっただけで解いてやることによって、解の変形などはしない程度にゆっくりなときはこれで十分いい近似解が得られると、いうふうにやります。そうすると解の空間、モジュライ空間の量子力学となって、そうすると解の空間がどういう多様体なのか、というのが必要になってきて、多様体がどんな多様体なのか、その多様体がわかったら、運動を記述したいと思えば、計量を求めなければならないですね。計量がわかれば測地線がわかる。測地線がわかればソリトンの運動がわかる、っていうわけでそういうプログラムが走っていくわけです。

1.2.3 Sine-Gordon 模型

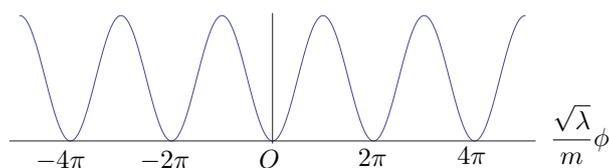
いままで ϕ^4 模型だったんですけども、特別な模型として、sine-Gordon 模型というのを考えます。これは色々な意味で特別です。

1. まず ϕ^4 理論とよく似ているっていう特徴があります。
2. それから、ちょっと違うと言ったんですけども、これは位相欠陥型と言うよりはテクスチャー型ソリトンとみなすことができます。
3. ϕ^4 と違うのはキंकと反キंकを好きな数だけ置けます。
4. 一番重要なのは厳密に解ける。可積分系なんですね。

Sine-Gordon 模型のスカラーポテンシャルというのはこういうふうに書けます。

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\frac{m^4}{\lambda} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi\right) - 1 \right] \\ &= \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\lambda^2}{6!m^2}\phi^6 \dots \end{aligned} \quad (1.2.90)$$

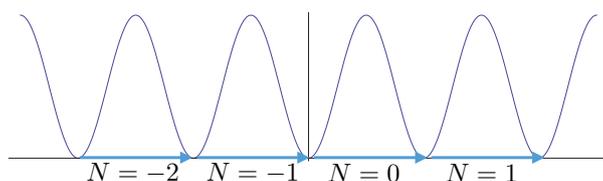
4次まで見れば ϕ^4 理論と同じ。ただ、6次8次…とあると。基本粒子の質量は m 、結合定数は λ です。

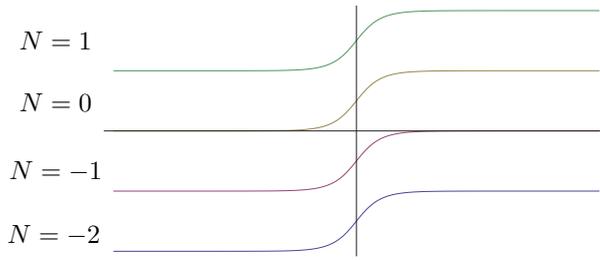


\cos は周期的なんで、 $\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi$ でスケールすると、 2π の周期をもちます。

これだけたくさん真空があるので、あるところからあるところに移るキंकっていうのがいっぱいあるわけですね。無限個あります。一般解はこうやって書けます。

$$\phi_k^{(N)} = \frac{2v}{\pi} \tan^{-1} \exp m(x - x_0) + Nv \quad \left(v = \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}} \right) \quad (1.2.91)$$





N は整数なら何でもよくて、 $N = 0$ に対応するのは 0 から 2π に行くやつです。当然反キックもこれと同じ数だけ、同じ種類だけあります。

キックの質量は先ほど一般の BPS 質量公式というのをやったんで、 $\sqrt{2V}$ の $-\infty$ と $+\infty$ での積分をしてやればいいと。これを計算すると

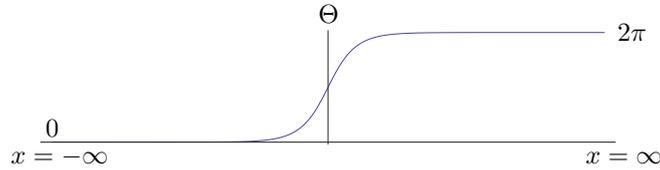
$$M_k = \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \sqrt{2V} = \frac{8m^3}{\lambda} \tag{1.2.92}$$

となって、やはり結合定数分の 1 になります。トポロジカル電荷なんですけども、この場合は位相欠陥と思うよりは、スケールされた $\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi$ というのを新しい場の変数だと思つと、

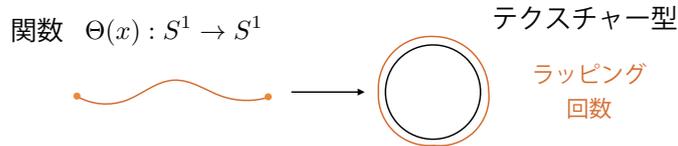
$$\Theta = \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi, \quad V = -\frac{m^4}{\lambda}(\cos \Theta - 1) \tag{1.2.93}$$

ということなんで、 2π の周期性があるので、 Θ と $\Theta + 2N\pi$ を同一視すると、結局この場の範囲は、 $-\infty$ から $+\infty$ ではなくて、 0 から 2π でいいだろうと。つまり S^1 だと思えるわけですね。

そうすると、この Θ っていう関数が何を与えるかっていうと、 $x = -\infty$ から $x = +\infty$ を 0 から 2π に移しているわけですね。



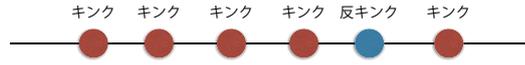
0 と 2π を同一視しているんで結局、 $x = -\infty$ と $x = \infty$ を一点コンパクト化したと思つと 1 次元空間は S^1 と同型になります。 $\Theta(x)$ という関数は S^1 を S^1 に移していると考えられるわけですね。



何回巻くかということが何個キックを出すかということになります。ラッピング回数は何回でもいいので、sine-Gordon では、何個もキックを置くことができます。

ϕ^4 理論 $Q = -1, 0, +1$ しかなかった

sine-Gordon 理論

 $Q \in \mathbb{Z}$ 

ϕ^4 理論との対比で言うと、 ϕ^4 理論の場合は $-1, 0, +1$ というトポロジカルセクターしかなくってキルクの隣には必ず反キルクがいなければならなかったんですね。Sine-Gordon ではトポロジカル電荷はラッピング回数なので、キルクの隣にキルクを置いてもいいんです。ということでソリトンの理論としてはよりバラエティーがあると。

非常に素晴らしいのは、例えばキルクとキルクの散乱というのが厳密解で解けます。横軸に x 、縦軸に時間をとったんですけども、プロットしてるのは ϕ の 1 階微分ですね。キルクのあるところがポコっとでるように。これは時間が進むにつれて、最初は直線的に進んできて、散乱されていく様子が描かれています。これは厳密解

$$\phi_{kk} = \frac{2v}{\pi} \tan^{-1} \frac{u \sinh m\gamma x}{\cosh mu\gamma t} \quad (1.2.94)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad (1.2.95)$$

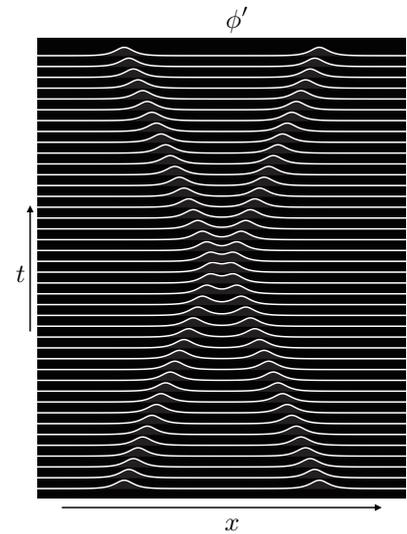
で、パラメータ u はキルクと反キルクの速度ですね。こんなふうに書いてしまうと。この状態の全体の質量も計算することができます

$$E = 2\gamma M_k > 2M_k \quad (1.2.96)$$

となります。よって、ただ単に静的に 2 個キルクがあるときよりもエネルギーが高くなっているというわけです。ちょっと見てもらうとわかりますけども、もし相互作用がなかったとしたら、ポコっとした山の頂点は斜め上にまっすぐになるはずですね。だけど、ちょっとずれてますね。それは相互作用があって、これ説明してないですけれども、この場合キルクと反キルクは引力で、キルクとキルクは斥力になっています。ですからキルクとキルクが衝突後ちょっと前に進みますね。これは少し速くなったから。それは斥力が働いているということを意味しています。この時間のずれというのが計算できて、

$$\delta t = -\frac{2}{mu\gamma} \log |u| \quad (1.2.97)$$

になる。重要なこととして、キルクとキルクがぶつかっているんですけども、全く波が立っていないんですね。小さな波が。キルクは形を保ったまま。Radiation がない、ということは驚くべきことだと思います。



キंकと反キंकもそうですね。これも厳密解がわかっています。こんな感じ。

$$\phi_{k\bar{k}} = \frac{2v}{\pi} \tan^{-1} \frac{\sinh mu\gamma t}{u \cosh m\gamma x} \quad (1.2.98)$$

$$E = 2\gamma M_k > 2M_k \quad (1.2.99)$$

これも ϕ の微分をプロットしているんですけども、反キंकは凹んでいるところで、キंकは膨らんでいるところです。反キंकとキंकが進んでいるけれども、衝突して透過しているんですね。反キंकの軌跡を追ってみると、散乱後反キंकがちょっと前に出ているのでこれは引力のせいで加速された分少しずれがある。そのずれが

$$\delta t = -\frac{2}{m\gamma} \log |u| \quad (1.2.100)$$

で、キंकとキंकの場合は radiation がなくても、そういうことがあってもいいかなという気がしないでもないんですけども、キंकと反キंकの場合は、潰れるどころか単に透過する。しかも no radiation ということで、さっきの ϕ^4 の場合は、キंकと反キंकをぶつけると radiation を出しましたけれども、sine-Gordon の場合はキंकと反キंकをぶつけると、単に入れ替わって、反キंकとキंकになるということです。

これはキंकと反キंकなんですけれども、さらに驚くべきことにキंकと反キंकの束縛状態っていうのも見つかっています。それは、ブリーザーモードっていうんですけども。ちょっと図がわかりにくいんですけど。これは ϕ の微分ではなくて ϕ そのものをプロットしているんですけども、こんな感じです。

$$\phi_{k\bar{k}} = \frac{2v}{\pi} \tan^{-1} \frac{\sin ms\tilde{\gamma}t}{s \cosh m\tilde{\gamma}x} \quad (1.2.101)$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{1+s^2} \quad (1.2.102)$$

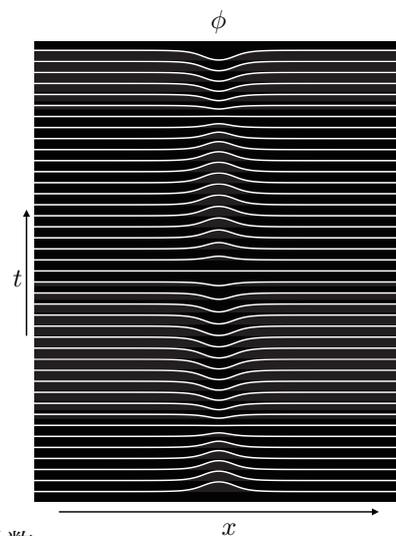
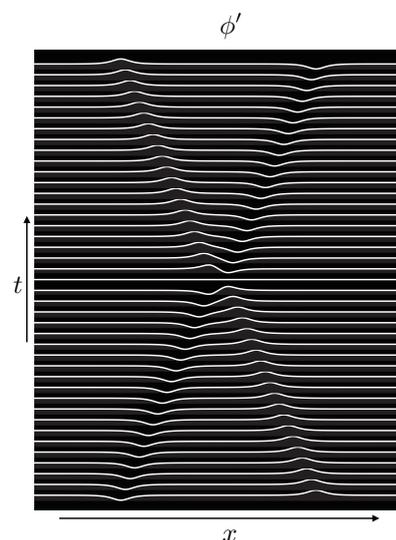
s っていうパラメータはなんでもいいパラメータです。キंकと反キंकが近づいていって、透過して反キंकとキंकになって、またキंकと反キंकになってと振動するだけです。振動数はこの s というパラメータで決まっています、この s を決めると振動数

$$\omega = ms\tilde{\gamma} \quad (1.2.103)$$

が決まって、どのぐらいのピッチで振動するかと。それからエネルギーを計算できて、

$$E = 2\tilde{\gamma}M_k < 2M_k \quad (1.2.104)$$

となって、結合状態というからにはキंकと反キंकの個々の質量の足し算よりも小さくなって欲しいんですけども、実際小さくなっています。 s が大きくなると軽くなるというふうになっている。どんな軽いものもできてしまうというわけです。これもずっと永遠に潰れない束縛状態ですね。これに限らず、もっとキंकとか反キंकを追加していても厳密解を求めることができます。求める方法はいろいろあるわけですけども、可積分系でよく知られている Bäcklund 変換とか、そういう方法を使うと好きなだけキंकとかを入れることができます。いま sine-Gordon 模型をやったんですけども…



(質問) すみません、 ϕ^4 のときにキックと反キックの衝突をやったときはどうやって数値計算したんですか。それはその相対的な位置を時間に依存させて、初期条件を与えて衝突させたんですか。

(回答) 最初に、いろんな方法があると思いますけれども、ただ単に静的な解、重ね合わせの解を初期条件として入れておいて、

(質問) それは十分に離れた時の解を用意しておいて？

(回答) はい。もう1個は重ねあわせたやつを、それぞれブーストしておく。それを、重ね合わせで初期条件としておく。

(質問) さっき書いた a というその相対距離を、内側に行ってどんどん小さくなるように初期条件を与えて数値計算して出るといっていいんですか？

(回答) 初期条件しか与えられないんですけども、初期条件を与えるときは a というのを時間に依存していると思って、その微分みたいなのがノンゼロになって、速度があるよって与えてやると。

(質問) その時、数値計算して radiation があつたと思うんですけども、ただ単に十分離れたときの解を使ったからとかそういうことではないんですか？ 近似解を使ったから radiation が起きたという可能性はないんですか？

(回答) ああそういう。例えば、sine-Gordon の場合も同じことができ、厳密解は知っているけれども重ね合わせとしてやることもできる。この場合も sine-Gordon では radiation は出さない。答えになっているかわからないですけども、 ϕ^4 のときと同じレベルのことを sine-Gordon でやると波は立たないという例があつて、近似解…まあそれをもって近似解が悪いからってというような具体例になっているかわからないけれども、ただ、時間を含めた偏微分方程式だったら、初期条件ってなんでもいいわけですね。つまり、時間に依存しない解から始めなくてもいいわけですね。なんでもいいから好きな配位を与えて、そこからやりなさいと言っているの。近似解が悪かつたっていう概念というか、何から始めてもいいので、そういう状態から始めたら radiation が起きたっていう感覚なんですけれども。

(質問) 自分的には十分離れたところで正しいものを使って、その衝突っていうのはどこまで妥当かというのかわからないんですけども。それは今の論理だと…

(回答) えーとつまり、どこまで妥当かというの運動方程式の解としては妥当かと思うんですけどもその解釈という意味ですかね。解釈が、キックと反キックを本当にちゃんと記述しているかと思つていいかという質問ですよ、多分ね？ それはいいんじゃないですか。だってキックと反キックって、例えば、じゃあどれぐらいの誤差が、ずれがあるかというのがあると思うんですけども、指数関数的に小さいので、要は重ねあわせした時の重なり部分がどれくらい悪さをしているか、その重なりは指数関数的に小さいので a が十分大きければほんとうに小さい。それが、数値計算の求める精度よりも小さければ問題ないと。

(質問) もう1つ質問があるんですけども、sine-Gordon のときのキックと反キックが束縛する解で、言ったかもしれないんですけど s というのは何に対応しているんですか。

(回答) s ですか。 s は $ms\tilde{\gamma}$ で周波数。もしくは広さって言っても。

(質問) その図で s がどこに対応するのは…

(回答) あーこれは、 s を何にとつたかな。忘れちゃったけど、 s を決めるとこのブリーザーの幅が決まってくるわけです。 s を大きくすると多分小さくなるんじゃないかな。 s を0にすると…すごく離れてる、確かそうだったと思います。逆かもしれないけど。すごく広くて周波数がすごく…あつ。 s 、周波数…あつ、えーと、すみません。よく考えないと。あとで、また。まあそのブリーザーの大きさに関連しています。

1.2.4 非線形シグマ模型

あと重要な例として、シグマ模型ですね。それを今回ここでやってくんですけども。実3成分の場を考える。

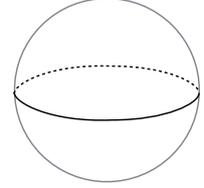
$$\vec{n}(x^\mu) = (n_1(x^\mu), n_2(x^\mu), n_3(x^\mu)) \quad (1.2.105)$$

ただし大きさは1に制限しておく。

$$|\vec{n}| = 1 \quad (\vec{n} \in S^2) \quad (1.2.106)$$

つまり、非線形シグマ模型ですね。

$$\mathcal{L} = \frac{2}{g^2} \int d^2x \partial_\mu n_i \partial^\mu n^i \quad (1.2.107)$$



この S^2 上にしか \vec{n} の値は取れないと。

これは $O(3)$ シグマ模型と呼ばれてますけれども、 CP^1 シグマ模型とも呼ばれています。というのは、いま3つの座標から複素座標を作っておく。

$$\phi = \frac{n^1 + in^2}{1 + n^3} \quad (1.2.108)$$

ちょうど $n_3 \rightarrow 1$ つまり北極で、 $n_3 \rightarrow -1$ っていうことは $n_1 = n_2 = 0$ じゃないといけないので、 $\phi = 0$ です。 $n_3 \rightarrow -1$ だと、 $\phi = \infty$ になります。だから球を立体射影した座標が ϕ です。 ϕ と \vec{n} の関係はこういう関係にある。

$$n^1 = \frac{2\text{Re}\phi}{1 + |\phi|^2}, \quad n^2 = \frac{2\text{Im}\phi}{1 + |\phi|^2}, \quad n^3 = \frac{1 - |\phi|^2}{1 + |\phi|^2} \quad (1.2.109)$$

なので先ほどの \vec{n} で書いた Lagrangian を ϕ で書くとこんな形になって、

$$\mathcal{L} = \frac{2}{g^2} \int d^2x \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*}{(1 + |\phi|^2)^2} \quad (1.2.110)$$

いわゆる Fubini-Study 計量という形をしていると。ちなみに S^2 というのはコンパクトな多様体なのでパッチが2つ必要ですね。上から覆うものと下から覆うものなんですけど、下から覆う座標は

$$\phi' = \frac{1}{\phi} \quad (1.2.111)$$

で座標変換してやると、 ϕ' で全く同じ Lagrangian になります。

$$\mathcal{L} = \frac{2}{g^2} \int d^2x \frac{\partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi'^*}{(1 + |\phi'|^2)^2} \quad (1.2.112)$$

ϕ で書くと北極はカバーできて南極はカバーできてないんだけど、 ϕ' でやると南極はカバーできて北極はカバーできない、そういう座標です。

これにですね、余談なんですけども、 CP^1 は Kähler 多様体なので Kähler ポテンシャルというのを書くことができますが、

$$K(\phi, \phi^*) = \frac{2}{g^2} \log(1 + |\phi|^2) \quad (1.2.113)$$

なので Kähler 計量は K を ϕ と ϕ^* で微分してやって書くことができます。

$$\begin{aligned} K_{\phi\phi^*} &= \partial_\phi \partial_{\phi^*} K(\phi, \phi^*) \\ &= \frac{2}{g^2} \partial_\phi \frac{\phi}{1+|\phi|^2} \\ &= \frac{2}{g^2} \frac{1}{(1+|\phi|^2)^2} \end{aligned} \quad (1.2.114)$$

Lagrangian は

$$\mathcal{L} = K_{\phi\phi^*} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* \quad (1.2.115)$$

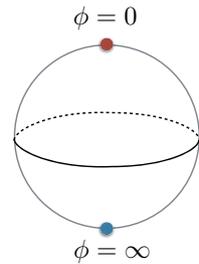
となると。まあ余談です。

これに超対称的なポテンシャルを入れて massive $\mathbb{C}P^1$ シグマ模型というのを考えると、

$$\mathcal{L} = \frac{2}{g^2} \left[\frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*}{(1+|\phi|^2)^2} - \frac{m^2 |\phi|^2}{(1+|\phi|^2)^2} \right] \quad (1.2.116)$$

$$V = \frac{2}{g^2} \frac{m^2 |\phi|^2}{(1+|\phi|^2)^2} \quad (1.2.117)$$

超対称的な質量項としてはこの V が入るということが知られています。Massless の場合は第 1 項のみの場合で、 S^2 上の全ての点が真空なんですけども、このポテンシャルを入れると、これよく見ると、正定値なのでこの $V=0$ 、超対称性を考えると超対称真空になってるわけですけども、 $V=0$ を与える点だけが真空として残って、残りはリフトされているわけですね。これが 0 になる場所はどこだろうというと、 $\phi=0$ になる場所、つまり北極点。あと分子が ϕ^2 で分母が ϕ^4 なので $\phi=\infty$ 、すなわち南極も 0 になる。ということで離散的な真空が 2 つある。するとキンクが作れます。



実際にキンクを作ってみたいんですけども、これは Bogomol'nyi 平方完成することで簡単にできます。分母はもうほとんどないものと思ってよくて、分子について平方完成していきます。

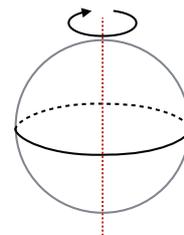
$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{g^2} \int dx \frac{|\phi'|^2 + m^2 |\phi|^2}{(1+|\phi|^2)^2} \\ &= \frac{2}{g^2} \int dx \left[\frac{|\phi' \pm m\phi|^2}{(1+|\phi|^2)^2} \mp \frac{m(\phi'\phi^* + \phi\phi'^*)}{(1+|\phi|^2)^2} \right] \\ &\geq \mp \frac{2}{g^2} \int dx \frac{m(\phi'\phi^* + \phi\phi'^*)}{(1+|\phi|^2)^2} \\ &= \pm \frac{2}{g^2} \left[\frac{m}{1+|\phi|^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2m}{g^2} \end{aligned} \quad (1.2.118)$$

Cross term が出て、正定値の部分があるので、エネルギーは cross term よりは大きくて、そして積分ができてしまいます。実際積分すると、表面項のみで求められて $2m/g^2$ となります。BPS バウンドは等号が成り立つときです。

$$\phi' = \mp m\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \exp(\mp m(x - x_0) + i\alpha) \quad (1.2.119)$$

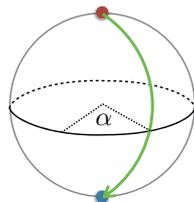
ϕ というのは複素変数なので虚部がありますね。 x_0 と α はなんでもいい積分定数です。

なんでこんなものが現れたかという、 x_0 のほうはさっきと同じ平行移動。 α の方は何かというと、これは位相ですね。これ位相なんで $0 \leq \alpha < 2\pi$ 、 S^1 ですから $\mathbb{R} \times S^1$ というのがモジュライ空間になっています。そもそも $\phi\phi^*$ や $|\phi|$ しか出てきていないので、球面であることからわかるように、ちょうど massive CP^1 シグマ模型というのは、北極と南極を結ぶ軸に関する剛体回転の対称性があるんですね。



$$U(1) : \phi \rightarrow e^{i\theta} \phi \quad (1.2.120)$$

その剛体回転の固定点が真空になっているんですけども、真空は固定点なので対称性を破りません。



ところが、キルクっていうのは、写像としては北極から南極への S^2 上のフローを与えるんですね。フローを与えると S^2 上のどこを通過してきたフローかということで、 $U(1)$ 対称性がキルクによって破られるんです。だから、 x_0 が translation ゼロモードなのと同じように、この $U(1)$ 対称性が破れたことによって、位相 α というのが現れてきたわけです。つまりどの角度から流れたかということで、系の対称性は真空でも破れていないんですけども、それがキルクによって破られたことによって、キルクに局在するゼロモードが現れたというのが x_0 と α です。

さっきやったモジュライ近似というのを、同じように x_0 と α を複素に組んで ψ という場として、

$$\psi \equiv mx_0 + i\alpha \quad (1.2.121)$$

ψ を時間の関数と思ってさっきやったことと全く同じことをしますと解けます。

$$\phi = e^{mx+\psi} \quad (1.2.122)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{g^2} \int dx \frac{|\phi|^2}{(1+|\phi|^2)^2} |\dot{\psi}|^2 &= \frac{2}{g^2} |\dot{\psi}|^2 \int dx \frac{e^{2(mx+\psi)}}{(1+e^{2(mx+\psi)})^2} \\ &= \frac{1}{2g^2} |\dot{\psi}|^2 \int dx \frac{1}{\cosh^2(mx+\psi)} \\ &= \frac{1}{2g^2} |\dot{\psi}|^2 \left[\frac{\tanh(mx+\psi)}{m} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{M_k}{2} \frac{m^2 \dot{x}_0^2 + \dot{\alpha}^2}{m^2} \end{aligned} \quad (1.2.123)$$

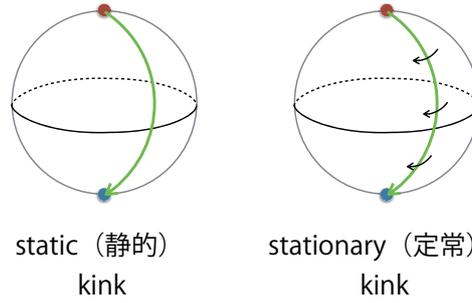
積分は解けて、どうなるかという、やっぱりキルク質量の $1/2$ に \dot{x}_0^2 っていうのが出たのと、位相部分の $\dot{\alpha}^2$ というのが出てこういう感じになります。どちらも free なんですね。ゼロモードなので。

有効作用がこうなると。

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{M_k}{2} \frac{m^2 \dot{x}_0^2 + \dot{\alpha}^2}{m^2} \quad (1.2.124)$$

運動方程式を解くと当然 x_0 と言うのは平行移動ですから時間の 1 次関数になります。 α も free なので時間の 1 次関数としてこう出てくると。 α は平行移動なので、 S^2 のなかをグルグル回っている解になっていますね。

そういうものがあるだろうというのがここからわかるわけですが、実はそういうのは Q キンク [3] と呼ばれていて、トポロジカル電荷、つまりキンクの電荷と Noether 電荷があるんですね。



ぐるぐるまわっているんで、左は静的なキンクなんですけども、右は定常なキンクとして、トポロジカル電荷だけでなく、Noether 電荷も持ったソリトンというのがあります。これを Q キンクと呼んでいる。

実際、 $U(1)$ 対称性を

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi \quad (1.2.125)$$

と書くと、Noether カレントっていうのはこのように計算できますね。

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \text{c.c.} \\ &= \frac{2i}{g^2} \frac{\phi \partial^\mu \phi^* - \partial^\mu \phi \phi^*}{(1 + |\phi|^2)^2} \end{aligned} \quad (1.2.126)$$

Noether 電荷はこのようになるわけです。

$$Q = \frac{2}{g^2} \int dx i \frac{\dot{\phi} \phi^* - \phi \dot{\phi}^*}{(1 + |\phi|^2)^2} \quad (1.2.127)$$

この $\dot{\phi}$ はさっきのやつを入れると、 α が時間の 1 次関数になれば時間微分が α の部分を拾ってきて、この Noether 電荷を出すというわけで、さっきのモジュライ近似で α を時間に依存させた解は Q キンクとなります。

Q キンクの質量はモジュライ近似を使わなくてもちゃんと計算できます。Bogomol'nyi 平方完成をまたします。

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{g^2} \int dx \frac{|\dot{\phi}|^2 + |\phi'|^2 + m^2 |\phi|^2}{(1 + |\phi|^2)^2} \\ &= \frac{2}{g^2} \int dx \frac{1}{(1 + |\phi|^2)^2} \left[|\dot{\phi} \pm im \sin \alpha \phi|^2 + |\phi' - m \cos \alpha \phi|^2 \right. \\ &\quad \left. \pm im \sin \alpha (\dot{\phi} \phi^* - \dot{\phi}^* \phi) + m \cos \alpha (\phi' \phi^* + \phi'^* \phi) \right] \\ &\geq \frac{2m}{g^2} \cos \alpha \int dx \frac{\phi' \phi^* + \phi \phi'^*}{(1 + |\phi|^2)^2} \mp \frac{2m}{g^2} \sin \alpha \int dx \frac{\dot{\phi} \phi^* - \phi \dot{\phi}^*}{i(1 + |\phi|^2)^2} \end{aligned} \quad (1.2.128)$$

平方完成のときにちょっと工夫して、時間微分の方も今度は平方完成します。そのときに、大きさ 1 のパラメータ $\sin \alpha$ と $\cos \alpha$ を α を任意として入れることができ、あとはいつもどおり計算できます。で、最後の部分がトポロジカル電荷と Noether 電荷になってます。

$$T = \int dx \frac{\phi' \phi^* + \phi \phi'^*}{(1 + |\phi|^2)^2} \quad Q = \frac{2}{g^2} \int dx \frac{\dot{\phi} \phi^* - \phi \dot{\phi}^*}{i(1 + |\phi|^2)^2} \quad (1.2.129)$$

(質問) 第 2 項に i がついているのは…不等号の意味がわからないんですが。

(回答) $\dot{\phi}\phi^* - \phi\dot{\phi}^*$ が純虚なので全体で実数です。

バウンドはこうなります。

$$E \geq \frac{2m}{g^2} T \cos \alpha \mp mQ \sin \alpha \quad (1.2.130)$$

α は手で入れたものなのでなんでもいいんですね。このバウンドが最も厳しくなるのは、 α を適当に選ぶと、この量が一番大きくなるのは

$$\tan \alpha = \mp \frac{g^2 Q}{2T} \quad (1.2.131)$$

のときで、最もきついバウンドはトポロジカル電荷と Noether 電荷で

$$E \geq \sqrt{\frac{4m^2}{g^4} T^2 + m^2 Q^2} \quad (1.2.132)$$

と与えられる。で、どういう意味かは置いといて、根号の中の第 1 項を磁氣的として第 2 項を電氣的と呼べば、これはモノポールとダイオンのときの Bogomol'nyi 平方完成に非常に平行で、 Q キンクってのは 1+1 次元のダイオンでダイオニックキンクと言ってもいいでしょう。

等号が成立するのは

$$\phi' = m \cos \alpha \phi, \quad \dot{\phi} = \mp im \sin \alpha \phi \quad (1.2.133)$$

ですね。これを解いて

$$\phi = \exp(m \cos \alpha x \mp im \sin \alpha t) \quad (1.2.134)$$

ただし、 α というのは

$$\cos \alpha = \frac{\frac{2m}{g^2} T}{\sqrt{\frac{4m^2}{g^4} T^2 + m^2 Q^2}} \quad (1.2.135)$$

$$\sin \alpha = \mp \frac{mQ}{\sqrt{\frac{4m^2}{g^4} T^2 + m^2 Q^2}} \quad (1.2.136)$$

で決まっている。これは簡単に解ける。だいたいこれで…

(質問) 非線形シグマ模型の話で、始めに超対称非線形シグマ模型の話がありましたけれど、ボソニックなものしか見てないんですけどスーパーパートナーはなんか面白いことがあったりするんですか。

(回答) 基本的にはフェルミオンは 0 としてしまうので何もないけども、フェルミオンと結合していると後でちょっと出てくるんですけども、フェルミオンのゼロモードがキンクに局在してキンクがフェルミオニックなチャージをもつというのがあります。それは、並進対称性が破れると超対称性も破れるので、超対称性の破れに起因する南部-Goldstone フェルミオンになっていると。

すみませんだいぶ時間使いましたけれども、だいたいまあ、僕が知っている古典的な場の理論におけるキンクっていうのはこんなもんです。あとはこれを量子化してどうなるかということを見たいと思います。

1.3 Quantum kink

これまでは古典的な配位としてのキंक、いま ϕ^4 理論とか sine-Gordon モデルとか色々やってきたけれども、ここで見たように結合定数分の 1 の質量の依存性をしていました。

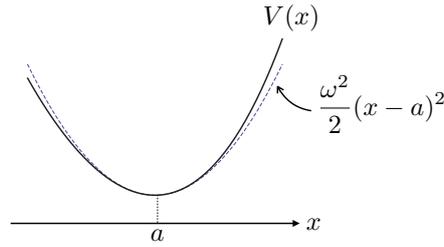
$$M_k \sim \frac{m^3}{\lambda} \quad (1.3.1)$$

最初に言ったように、Compton 波長が大体

$$\lambda_{\text{comp}} \sim \frac{1}{M_k} \quad (1.3.2)$$

なので、弱結合だったらこれはすごく小さいわけですね。小さいということは量子補正が小さい、ということで古典的な場の理論における配位は量子論においても意味があるだろうと。だから、期待としては弱結合ではソリトンの存在そのものをかき消してしまうような劇的な効果はない。以下ではまずは弱結合領域において量子効果を摂動的に扱って、古典的キंकが量子論に入れるとどうなるか、つまり量子補正を見ようということです [4, 5]。

ちょっとその前に軽い復習ですけども、1 粒子の量子力学を考えます。点線が調和振動子ですけども、そこからわずかにずれているとします。



調和振動子からのずれを展開してやって、このずれが小さければ摂動として扱えます。

$$V(x) = V(a) + \frac{V''(a)}{2}(x-a)^2 + \lambda \frac{V'''(a)}{6}(x-a)^3 + \dots \quad (1.3.3)$$

そうすると、真空というのは $x = a$ にポコっとあるわけですけども、量子力学ではゆらゆら揺らいでしまうというわけなんで、まあそれでも λ 、調和振動子からのずれが小さければ、リーディングとしては古典的なエネルギーに量子補正プラス摂動的な相互作用の補正が来るだけです。 ω というのは底でのポテンシャルの 2 階微分です。

$$E_n = V(a) + \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.4)$$

$$\omega^2 = V''(a) \quad (1.3.5)$$

ということで、量子論における真空のエネルギーというのは古典的な真空のエネルギーに、 $\hbar\omega/2$ 、これが量子補正になるわけですね。

$$E_0 = V(a) + \frac{1}{2}\hbar\omega + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.6)$$

以下では $V(a)$ の部分をキंकに変えます。キंकに変えてどういう補正が出るかというのを、準古典的な扱いで見ようというわけです。

それに続くために、いま 1 粒子を考えてきたんですけども N 粒子の場合を考えますと、 N 個の粒子があって、ポテンシャルが N 個の粒子の座標で書かれているとします。

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad V(\vec{x}) \quad (1.3.7)$$

この極小が $\vec{x} = \vec{a}$ で与えられたとしますと、このポテンシャルをやっぱり展開して、調和振動子とそこからの小さなずれというふうにやります。

$$V(\vec{x}) = V(\vec{a}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\vec{x}=\vec{a}} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.8)$$

どういうモードがあるかっていうのは $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ を対角化して、固有値を見ればいいわけですね。その対角化する基底を $\{\xi_i\}$ として、その固有値を ω_i^2 とすれば、この系のエネルギーは古典的なエネルギーにこういうものが補正としてくつつくわけですね。

$$E_{\{n_i\}} = V(\vec{a}) + \hbar \sum_i \omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.9)$$

n_i というのは i 番目の調和振動子の励起数ですね。

ということでこの場合はほとんど何も変わらずに、単に調和振動子を N 個くっつけただけと。これが、零点振動がくっついたのが量子補正です。

$$E_0 = V(\vec{a}) + \sum_i \frac{\hbar \omega_i}{2} + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.10)$$

このように量子的配位は古典的配位に量子補正を加えたものとして理解できるわけです。

場の理論にいきましょう。以下では量子効果を追っていきたいので、光速は $c = 1$ としますが \hbar は残しておきましょう。1+1 次元です、相変わらず。こういう Lagrangian がありますね。

$$L = \int dx \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi) \right), \quad \dot{\phi} = \partial_0 \phi, \quad \phi' = \partial_x \phi \quad (1.3.11)$$

これからは、第 1 項を運動項と言って、第 2 項と第 3 項のマイナス、空間微分を含めたものをポテンシャルと呼ぶことにします。

$$T = \int dx \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \quad (1.3.12)$$

$$U = \int dx \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right) \quad (1.3.13)$$

実際そうすると Lagrangian は

$$L = T - U \quad (1.3.14)$$

となって、運動方程式はこのようになります。

$$\ddot{\phi} = -\frac{dU}{d\phi}, \quad (\text{Newton's EOM}) \quad (1.3.15)$$

これを量子化するわけですけども、静的な解はポテンシャルの極小値ですね。これです。

$$\frac{dU}{d\phi} = 0 \quad \left(-\phi'' + \frac{dV}{d\phi} = 0 \right) \quad (1.3.16)$$

この解を

$$\phi = \phi_0(x) \quad (1.3.17)$$

として、このまわりで展開することを考えましょう。ですからこうなります。

$$U[\phi] = U[\phi_0] + \frac{1}{2} \int dx \varphi(x) \left(-\nabla^2 + \left. \frac{d^2 U}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} \right) \varphi(x) + \dots \quad (1.3.18)$$

ここで φ は

$$\varphi = \phi - \phi_0 \quad (1.3.19)$$

で、 ϕ の ϕ_0 からのずれ、ゆらぎですね。 $-\nabla^2 + \left. \frac{d^2 U}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0}$ がさっき言ったポテンシャルみたいなもので、ここを対角化して、固有値を読み出せばどういふものがあるかわかりますね。

だからモード展開して、 φ_i を固有値 ω_i^2 をもつ状態として

$$\left(-\nabla^2 + \left. \frac{d^2 U}{d\phi^2} \right|_{\phi(x)=\phi_0} \right) \varphi_i(x) = \omega_i^2 \varphi_i(x) \quad (1.3.20)$$

φ というのを φ_i で展開したものを、係数を c_i としますと

$$\varphi = \sum_i c_i \varphi_i \quad (1.3.21)$$

Lagrangian を c_i っていうので書いてやると、調和振動子の部分と補正となりますね。

$$L = \sum_i \frac{1}{2} \dot{c}_i^2 - \left(U[\phi_0] + \sum_i \frac{\omega_i^2}{2} c_i^2 \right) + \dots \quad (1.3.22)$$

これと書いてますけれども、実際には無限個の、無限自由度です。象徴的に書いてます。これを量子化するとどうなるかっていうと、調和振動子だと思うわけですね。調和振動子分の補正が来るだろうと。ですから、古典的な配位に量子補正としてはこういうのがくっついてくるだろうと。

$$E_{\{n_i\}} = U[\phi_0] + \hbar \sum_i \left(\frac{1}{2} + n_i \right) \omega_i + \dots \quad (1.3.23)$$

もちろん、 $\hbar \sum_i (\frac{1}{2} + n_i) \omega_i$ は場の理論では発散するような量を含んでる。そこは適当にあとで考えると、表式としては

$$E_{\{0\}} = U[\phi_0] + \sum_i \frac{\hbar \omega_i}{2} + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.24)$$

ということで、 $\sum_i \hbar \omega_i / 2$ を計算すればいいというわけですね。

強調したいのは $\phi = \phi_0(x)$ は

$$\frac{dU}{d\phi} = 0 \quad (1.3.25)$$

の解でした。これはスカラーポテンシャルで書けば、こういう運動方程式でした。

$$-\phi'' + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (1.3.26)$$

ですから当然 $\phi_0 = \text{const.}$ っていう真空でやってもいいわけですけど、そうすると通常の摂動論が得られますね。ここでやりたいのは ϕ_0 としてキルクを選んで、そのまわりで展開してやろうということです。そうすると、それが量子化されたキルク、quantum kink (量子キルク) と呼ばれるものです。

じゃあいまやったプログラムを ϕ^4 を例にやってみましょう。というのは具体的に計算できるものなので。 ϕ^4 なんてこうなりますね。

$$L = \int dx \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 - \frac{m^4}{4\lambda} \right] \quad (1.3.27)$$

$$U[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right], \quad v = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \quad (1.3.28)$$

この U の ϕ での変分が 0 ということですから、古典的な場の方程式が出てくるということです。

$$\frac{dU}{d\phi} = -\phi'' - m^2\phi + \lambda\phi^3 = 0 \quad (1.3.29)$$

真空は

$$\phi = \pm v \quad (1.3.30)$$

ということです。

あまりにも簡単すぎるかもしれませんが、まず練習として $\phi_0 = +v$ と選んでいまやったことをやりましょう。この v のまわりで展開したものを

$$\varphi = \phi - v \quad (1.3.31)$$

としてやりますと、 $U[\phi]$ というのはこうなりますね。

$$U[\phi] = 0 + \int dx \varphi \frac{1}{2} (-\nabla^2 + 2m^2) \varphi + m\sqrt{\lambda} \int dx \varphi^3 + \frac{\lambda}{4} \int dx \varphi^4 \quad (1.3.32)$$

補正が $\sqrt{\lambda}$ とか λ がついてますね。 λ が十分小さければ $m\sqrt{\lambda} \int dx \varphi^3 + \frac{\lambda}{4} \int dx \varphi^4$ は十分小さくなって摂動的に扱うことができると期待できます。だから $\int dx \frac{1}{2} \varphi (-\nabla^2 + 2m^2) \varphi$ を対角化すればいいわけですね。つまり

$$(-\nabla^2 + 2m^2) \varphi_n = \omega_n^2 \varphi_n \quad (1.3.33)$$

を解けばいいだけなんで、簡単に解けるわけです。

固有状態は

$$\varphi_n = e^{ik_n x} \quad (1.3.34)$$

と、 n 番目の固有状態はこういうふうに書いて、分散関係はこういう形で、

$$\omega_n^2 = k_n^2 + 2m^2 \quad (1.3.35)$$

で、 k_n として許されるものはもちろん無限系ではなんでもいいわけですけど、とりあえず長さ L というふうにしておいて、それに周期境界条件を入れておいて、最後に $L \rightarrow \infty$ とするようにしましょう。

そうすれば許される k_n はこういうふうになっています。

$$k_n L = 2n\pi \quad (1.3.36)$$

結局、いま調和振動子のばね定数が決まったので、 $\{E_{\{N_n\}}\}$ への補正が決まったというわけですね。

$$E_{\{N_n\}} = 0 + \hbar \sum_n \left(N_n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{k_n^2 + 2m^2} + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.37)$$

励起を全部 0 にしたのが真空に対する量子補正ということで、これはよく知られた ϕ^4 理論での発散を含んでいるものです。

$$E_{\text{vac}} = E_{\{0\}} = 0 + \sum_n \frac{\hbar}{2} \sqrt{k_n^2 + 2m^2} + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.38)$$

これは発散するんですけども、とりあえずこの発散は無視します。というのは、以下では真空ではなくてキルクに興味があるわけですね。キルクっていうのは真空からどうずれたかってことなので、キルクにも発散があって真空にも発散があってその発散が打ち消しあうものであれば、まあいいだろうと。ということなんで、そういうものを計算していきましょう。

ここからやりたいのは $\phi_0 = v$ じゃなくて

$$\phi_k = v \tanh \frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \quad (1.3.39)$$

にして、キルクにしようというわけですね。停留点でのポテンシャルの値は先ほどの U っていうポテンシャルにバックグラウンドの解 ϕ_k を入れたものですから、これはただ単にキルクの質量が出てくるだけです。

$$U[\phi_k] = \int dx \left[\frac{1}{2} \phi_k'^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi_k^2 - v^2)^2 \right] = \frac{2\sqrt{2} m^3}{3 \lambda} = M_k \quad (1.3.40)$$

パラメータ x_0 がありますけれど、簡単のためここでは $x_0 = 0$ とします。まあ平行移動しただけなんで一緒だと。

ϕ_k からのゆらぎを φ として、ポテンシャルを展開しますね。

$$\varphi = \phi - \phi_k \quad (1.3.41)$$

$$U[\phi] = U_k + \int dx \frac{1}{2} \varphi (-\nabla^2 - m^2 + 3\lambda \phi_k^2) \varphi + \lambda \int dx \left(\phi_k \varphi^3 + \frac{1}{4} \varphi^4 \right) \quad (1.3.42)$$

そうすると 2 次の項と λ に比例した項が出てきます。先ほどの場の定数を決めるのは 2 次の項の部分ですから、ここを対角化すればいいんですね。

$$(-\nabla^2 - m^2 + 3\lambda \phi_k^2) \varphi_n = \omega_n^2 \varphi_n \quad (1.3.43)$$

これは、さっき出てきた、 ϕ^4 まわりでモード展開したときの Schrödinger 方程式そのものです。ですからもう知っていて、固有値はゼロモードと変形モードと散乱モードというふうになっていますね。表記を簡単にするために $z = mx\sqrt{2}$ としたり、運動量 p を規格化した $q = \sqrt{2}p/m$ と書いておくとこんなふうになると。

$$\omega_0^2 = 0 : \quad \varphi_0 = \frac{1}{\cosh^2 z} \quad (1.3.44)$$

$$\omega_1^2 = \frac{3m^2}{2} : \quad \varphi_1 = \frac{\sinh z}{\cosh^2 z} \quad (1.3.45)$$

$$\omega_q^2 = m^2 \left(\frac{q^2}{2} + 2 \right) : \quad \varphi_q = e^{iqz} (3 \tanh^2 z - 1 - q^2 - 3iq \tanh z) \quad (1.3.46)$$

厳密にわかっているというのが強みです。

ちなみに連続スペクトルのところは、 $z = -\infty$ と $z = +\infty$ のところでこんななってます。

$$\varphi_q \rightarrow \begin{cases} e^{iqz}(2 - q^2 + 3iq), & (z \rightarrow -\infty) \\ e^{iqz}(2 - q^2 - 3iq), & (z \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (1.3.47)$$

位相のずれがあるんですね。先ほど Schrödinger ポテンシャルで粒子が飛んできて散乱された時の位相のずれですね。同じですけどもこれを $\delta(q)$ としてやって、

$$\delta(q) = -2 \tan^{-1} \frac{3q}{2 - q^2} \quad (1.3.48)$$

となります。 q にどんな値が許されるかという周期境界条件 (周期 L) をおいて、位相のずれを含めて

$$q_n \frac{mL}{\sqrt{2}} + \delta(q_n) = 2n\pi \quad (1.3.49)$$

となるように選べば良いと。最後に $L \rightarrow \infty$ とするということをします。

ということで、キングのまわりでの量子補正っていうのは \hbar の 0 次が古典的キングで、そこに \hbar の 1 次として量子ゆらぎが来るわけですね。

$$E_{\text{kink};\{N_n\}} = M_k + \hbar \sqrt{\frac{3}{2}} m \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) + m\hbar \sum_{q_n} \left(N_{q_n} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{2} q_n^2 + 2} + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.50)$$

$\omega_0 = 0$ ですからゼロモードはなくて最初に来るのは変形モードのゆらぎ。と、散乱状態の補正が入ってきているというわけです。

ということで、各モードの励起を 0 にしたものが量子キングそのもののエネルギーということでしたから \hbar の 1 次の補正は

$$E_{\text{kink};\{0\}} = M_k + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} m\hbar + \frac{m\hbar}{2} \sum_{q_n} \sqrt{\frac{q_n^2}{2} + 2} + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.51)$$

ですね。 $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} m\hbar$ は変形モードの部分ですから有限ですけども、 $\frac{m\hbar}{2} \sum_{q_n} \sqrt{\frac{q_n^2}{2} + 2}$ は無限大を含んでいます。けども、さっき言ったように真空からのずれをキングだと思ふことにすれば、差をとってやれば、有限が出ればなんかいいなど。

$$\text{量子キングの質量} : M_k^q = E_{\text{kink};\{0\}} - E_{\text{vac}} \quad (1.3.52)$$

ただし $\infty - \infty$ なので注意が必要になります。注意深く計算していきたいと思います。

計算をするために、有限系 L にしたんですけどもさらにそれを離散的に分割して $2N$ 点にします。最後に N, L を無限大にもっていくことにします。これは計算テクニックです。

真空とキング両方やらなきゃいけないんですけども、真空の方はいま自由度が $2N$ 点になったので $2N$ 個のスペクトラムがあると。

$$(\omega_n^{(v)})^2 = (p_n^{(v)})^2 + 2m^2 \quad (1.3.53)$$

$$p_n^{(v)} L = 2n\pi; \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \quad (1.3.54)$$

これを満たすようにスペクトラムが決まります。 $p_n^{(v)}$ というのは真空まわりの展開の運動量ですね。キング周りの場合も同じようにやると、ゼロモードと変形モードとそれ以外に先ほど、これは散乱モード

を離散的に書いたものなんですけれども、この $p_n^{(k)}$ というのはキंकまわりという意味なんですけれども、この条件

$$(\omega_0^{(k)})^2 = 0 \quad (1.3.55)$$

$$(\omega_1^{(k)})^2 = \frac{3}{2}m^2 \quad (1.3.56)$$

$$(\omega_n^{(k)})^2 = (p_n^{(k)})^2 + 2m^2 \quad (1.3.57)$$

$$p_n^{(k)}L + \delta(p_n^{(k)}) = 2n\pi; \quad n = \pm 2, \dots, \pm N \quad (1.3.58)$$

を満たすように選ばないと。離散化したので有限個の自由度でやっています。真空は n が ± 1 から $\pm N$ なんですけれども、キंकの散乱モードは ± 2 から $\pm N$ になっています。というのはゼロモードと変形モードを合わせて 2 個と数えてやって、全体で合わせて確かに $2N$ 個になっているからです。

零点振動の差を計算をしたいんですけれども、キंकのゼロモードから真空の $n = -1$ のものを引いたものと、キंकの変形モードから真空の $n = +1$ のモードを引いて、残り $n = \pm 2, \pm 3, \dots$ のところを集めました。

$$\begin{aligned} \Delta E_0 &= \frac{\hbar}{2} (\omega_0^{(k)} - \omega_{-1}^{(v)}) + \frac{\hbar}{2} (\omega_1^{(k)} - \omega_1^{(v)}) \\ &\quad + \hbar \sum_{n \geq 2} (\omega_n^{(k)} - \omega_n^{(v)}) \end{aligned} \quad (1.3.59)$$

\pm があるのでおなじなので $n \geq 2$ だけにして $\hbar/2$ の $1/2$ はなくなっています。まず順々に計算していきましょう。まず右辺 1 行目ですけれども、ここは有限ですね。有限項なので計算していきますと、 L^{-1} のオーダーで補正がついていますが一番大きな部分、主要部はゼロモードと変形モードと粒子の質量ですね。

$$\begin{aligned} (1.3.59) \text{ 右辺 1 行目} &= \frac{\hbar}{2} (0 - \sqrt{2}m) + \frac{\hbar}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}m - \sqrt{2}m \right) + \mathcal{O}(L^{-1}) \\ &= m\hbar \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \sqrt{2} \right) + \mathcal{O}(L^{-1}) \end{aligned} \quad (1.3.60)$$

基本粒子の質量を引いて、 $\hbar/2$ が頭につきます。

次に (1.3.59) 右辺 2 行目ですね。こっちに $\infty - \infty$ が入っている。真空の方はこういう量子化条件で

$$p_n^{(v)}L = 2n\pi \quad (1.3.61)$$

キंकまわりの方はこういう量子化条件

$$p_n^{(k)}L + \delta(p_n^{(k)}) = 2n\pi \quad (1.3.62)$$

がついてますね。ここで $p_n^{(k)}$ から $p_n^{(v)}$ を引いてやると、その差はもちろん位相のずれになりますね。 $-\infty$ から $+\infty$ でキंकによって散乱された粒子の位相がどう変わっていくかっていう量です。これを $p_n^{(k)} - p_n^{(v)}$ で展開していきますと

$$\begin{aligned} (p_n^{(k)} - p_n^{(v)})L &= -\delta(p_n^{(k)}) \\ &= -\delta(p_n^{(v)}) - \delta'(p_n^{(v)})(p_n^{(k)} - p_n^{(v)}) + \dots \\ &= -\delta(p_n^{(v)}) + \mathcal{O}(L^{-1}) \end{aligned} \quad (1.3.63)$$

真空での位相のずれに L^{-1} の補正がつきますというふうになります。 $\delta(p_n^{(k)})$ を $p_n^{(v)}$ のまわりで展開したんですね。 L が無限大に広げれば $\mathcal{O}(L^{-1})$ はなくなって、 $-\delta(p_n^{(v)})$ が残るわけです。

$\omega_n^{(k)}$ と $\omega_n^{(v)}$ の差ですから、ちゃんと書いてやるとこうなって、これを展開してやって、文字が似ているのでごちゃごちゃしてありますが違いは k になっているか v になっているかですね。 $p_n^{(k)} - p_n^{(v)}$ で展開していきますと、

$$\begin{aligned}\omega_n^{(k)} - \omega_n^{(v)} &= \sqrt{(p_n^{(k)})^2 + 2m^2} - \sqrt{(p_n^{(v)})^2 + 2m^2} \\ &= \frac{p_n^{(v)}}{\sqrt{(p_n^{(k)})^2 + 2m^2}} (p_n^{(k)} - p_n^{(v)}) + \dots \\ &= -\frac{p_n^{(v)}}{\sqrt{(p_n^{(v)})^2 + 2m^2}} \frac{\delta(p_n^{(v)})}{L} + \mathcal{O}(L^{-2})\end{aligned}\quad (1.3.64)$$

$p_n^{(k)} - p_n^{(v)}$ はさっき計算した $-\delta(p_n^{(v)})/L$ になりますから、第1項が第1主要項で L^{-2} の補正がついています。ということで、ここまで来てやっと $L, N \rightarrow \infty$ にすることで和の $1/L$ が積分になると。

$$\sum_{n \geq 2} (\omega_n^{(k)} - \omega_n^{(v)}) = -\frac{1}{L} \sum_{n \geq 2} \frac{p_n^{(v)} \delta(p_n^{(v)})}{\sqrt{(p_n^{(v)})^2 + 2m^2}} + \mathcal{O}(L^{-2}) \quad (1.3.65)$$

積分を計算するとこんななって

$$\begin{aligned}\rightarrow & -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dp \frac{p\delta(p)}{\sqrt{p^2 + 2m^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dp \frac{1}{\sqrt{p^2 + 2m^2}} \frac{d\delta(p)}{dp} - \frac{1}{2\pi} \left[\delta(p) \sqrt{p^2 + 2m^2} \right]_0^\infty\end{aligned}\quad (1.3.66)$$

部分積分しただけですね。ここで位相のずれの関数はわかっているので、 $\delta(p)$ とかその微分とかは計算できます。

$$\delta(p) = -2 \tan^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{mp}{m^2 - p^2} \right) \quad (1.3.67)$$

$$\begin{aligned}\delta'(p) &= \frac{-3\sqrt{2}m(p^2 + m^2)}{(p^2 + 2m^2)(p^2 + m^2/2)} \\ &= \frac{-3\sqrt{2}m}{p^2 + 2m^2} + \frac{-3\sqrt{2}m^3}{2(p^2 + 2m^2)(p^2 + m^2/2)}\end{aligned}\quad (1.3.68)$$

$\delta(0+)$ とか $\delta(+\infty)$ もここからわかるんですけども、このことを使って計算していきます。

$$\delta(0+) = 2\pi, \quad \delta(+\infty) = 0 \quad (1.3.69)$$

(1.3.66) の第1項と言ってるのは

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dp \frac{1}{\sqrt{p^2 + 2m^2}} \frac{d\delta(p)}{dp} \quad (1.3.70)$$

ですね。(1.3.68) 式を代入して計算していきます。そうすると、こうなって積分できます。

$$\begin{aligned}(1.3.66) \text{ 右辺第1項} &= -\frac{3\sqrt{2}}{2\pi} m \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 2m^2}} - \frac{3\sqrt{2}}{4\pi} m^3 \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 2m^2}(p^2 + m^2/2)} \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2\pi} m \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 2m^2}} - \frac{m}{\sqrt{6}}\end{aligned}\quad (1.3.71)$$

ここで、以下の式を使いました。

$$\int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 2m^2}(p^2 + m^2/2)} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}m^2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{p^2 + 2m^2}} \right]_0^\infty = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}m^2} \quad (1.3.72)$$

1つめの積分は置いておいて (1.3.66) 第2項にいきます。(1.3.66) 第2項と言ってるのは

$$-\frac{1}{2\pi} \left[\delta(p) \sqrt{p^2 + 2m^2} \right]_0^\infty \quad (1.3.73)$$

ですね。これは $\delta(p)$ の式 (1.3.67) を使って計算しますと、

$$\delta(p) \sqrt{p^2 + 2m^2} \Big|_{p \rightarrow \infty} - \delta(p) \sqrt{p^2 + 2m^2} \Big|_{p \rightarrow 0+} = 3\sqrt{2}m - 2\sqrt{2}\pi m \quad (1.3.74)$$

と出ますね。これは $p \rightarrow \infty$ にしなきゃいけないので、展開

$$\delta(p) = -2 \tan^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{3} \frac{mp}{m^2 - p^2} \right) \rightarrow 3\sqrt{2}m \frac{1}{p} + \mathcal{O}(p^{-3}) \quad (1.3.75)$$

を使うんですけども $\delta(p)$ からだいたい $1/p$ が出てきて $\sqrt{p^2 + 2m^2}$ からだいたい $\mathcal{O}(p)$ がかかってくるので有限になると。こうやって第2項も求められたと。

$$(1.3.66) \text{ 右辺第2項} = -\frac{3\sqrt{2}}{2\pi} m + \sqrt{2}m \quad (1.3.76)$$

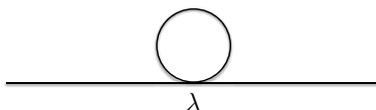
ということで、全部合わせると

$$\begin{aligned} \Delta E_0 &= m\hbar \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \sqrt{2} \right) - \frac{m\hbar}{\sqrt{6}} + m\hbar \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2\pi} + \sqrt{2} \right) - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} m\hbar \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 2m^2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \right) m\hbar - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} m\hbar \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 2m^2}} \end{aligned} \quad (1.3.77)$$

となります。有限の部分とまだ実行していない積分がありますね。この積分は一般に発散します。1+1次元なので、だいたい $1/p$ の積分ですから対数発散を含むんですね。

じゃあ、キルクのエネルギーから真空のエネルギーを引いて、対数発散が残っているから良くないじゃないかと、ってことなんですけれども実はこれを消すことができます。というのは、願いとしては量子論にいてもキルクは残っていて欲しいんですけども、なので発散を処理するわけですけども、処理するときにもそもそも理論をいじって発散を処理するときには真空セクターももちろん一緒に動くので、キルクセクターだけを変なことにするっていうのはやってはいけませんね。真空セクターも一緒に何かする、ということですね。だから真空セクターを変更することでキルクセクターの発散を処理しなければならぬ。

実はこれまでループ補正を考えていなかったんですね。



ϕ^4 理論には λ の1次にループがありますね。これはもちろん真空セクターにあったんですけども、これを考えていなかったと。これ計算できます。4次元なら2次元発散ですけども2次元なんで対数発散になります。ということはこの対数発散でさっきの対数発散を何とかできそうだと。

ということでこれ実際に計算してみますと、 k_0 のところを先に積分して

$$\begin{aligned} \text{---}\bigcirc\text{---} &= -3i\lambda \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^\mu k_\mu - 2m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{3\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 2m^2}} \\ &= \frac{3\lambda}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 2m^2}} \end{aligned} \quad (1.3.78)$$

となって対数発散します。ということで、この部分を相殺するために counter term を入れればいけないかと、っていうか普通入れますね。

$$\mathcal{L}_{\text{ct}} = \frac{1}{2} \delta m^2 \phi^2, \quad \delta m^2 = \frac{3\lambda}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 2m^2}} \quad (1.3.79)$$

その効果は真空セクターにも出るけども、もちろんキंकセクターにも出る。

ということで、真空セクターのずれは、counter term を入れたことによる積分のエネルギーが出てくると。

$$E_{\text{vac}} = 0 + \sum_n \frac{\hbar}{2} \sqrt{k_n^2 + 2m^2} - \frac{\delta m^2}{2} \int dx \phi_{\text{vac}}^2 + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.80)$$

ただし ϕ_{vac} という真空の情報を入れています。キंकの方は ϕ_{k} を counter term に入れたものの積分が入ってくる。

$$E_{\text{kink}} = M_{\text{k}} + \sum_n \frac{\hbar}{2} \sqrt{k_n^2 + 2m^2} - \frac{\delta m^2}{2} \int dx \phi_{\text{k}}^2 + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.81)$$

欲しいものはこのずれです。キंकから真空を引いたものと。

$$E_{\text{kink}} - E_{\text{vac}} = M_{\text{k}} + \Delta E_0 - \frac{\delta m^2}{2} \int dx (\phi_{\text{k}}^2 - \phi_{\text{vac}}^2) + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.82)$$

$M_{\text{k}} + \Delta E_0$ がさっきループ補正なしでやったもので対数発散があった部分です。余計に項がついてると。

この項は $v^2 \tanh^2$ から v^2 というのを引いた形ですから、 $1/\cosh^2$ の積分はできちゃって、実際に計算すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (\phi_{\text{k}}^2 - \phi_{\text{vac}}^2) = -2\sqrt{2} \frac{m}{\lambda} \quad (1.3.83)$$

となって、 $E_{\text{kink}} - E_{\text{vac}}$ は古典的な質量にループ補正を考えていない時の表式とループ補正がちょうど相殺して

$$\begin{aligned} E_{\text{kink}} - E_{\text{vac}} &= M_{\text{vac}} + \left(\frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \right) m\hbar - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} m\hbar \int_0^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 2m^2}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda\hbar}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 2m^2}} \right) \left(-2\sqrt{2} \frac{m}{\lambda} \right) + \mathcal{O}(\lambda) \\ &= M_{\text{vac}} + \left(\frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \right) m\hbar + \mathcal{O}(\lambda) \end{aligned} \quad (1.3.84)$$

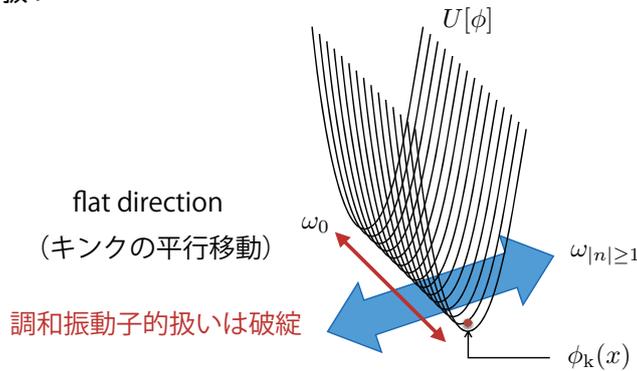
有限の部分と $\mathcal{O}(\lambda)$ のものがくっつくと。

ということで、これで量子キクの計算ができました。結局古典的な質量に量子補正として \hbar の 1 次のところだけがくっつくことがわかりました。これだいたい

$$\frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \simeq -0.47 \quad (1.3.85)$$

なので量子論の範囲、まあ摂動論が適用できるという範囲のもとで小さな量子補正を、 \hbar に比例したのを受けただけで、ちょっと軽くなって生き残ると。以上の計算はすごく古い 1974 年の非常に有名な Dashen-Hasslacher-Neveu [6] っていうやつが最初で、僕のボスは坂井典佑さんって人だったんですけども、その人に聞いたら坂井さんがポストドクの頃には必須の、必読の論文だったと聞いてました。古典的名著だそうです。はい。ということで期待通り、 λ が小さければ量子補正がちょこっと入ってくるだけで量子キクは生き残るということがわかったわけですね。

1.3.1 ゼロモードの取り扱い



ちょっとだけ、実はナイーブな扱いをしたのはゼロモードです。ゼロモードっていうのはポテンシャルが持ち上がってないんですね。Flat direction があると、 $U[\phi]$ というのが図のような形になっていて、赤い矢印方向がゼロモード、青い矢印方向を massive 方向と思うと、もちろん flat direction なんで $U[\phi]$ は持ち上がってないんですね。持ち上がってないっていうことは、ゼロモードに関しては調和振動的な扱いは破綻しているわけですね。なのでほんとは、ちゃんと扱わなければならなかったのをやっていなかったと。ただ $\omega_0 = 0$ なので、キク質量への補正という意味ではさっきの計算で結果的に良かったということなんですけど、モードの取り扱いとしては本当はちょっと注意しなければならない。

やっぱりずれを φ としてキクまわりで展開すると。

$$\phi = \phi_k + \varphi \quad (1.3.86)$$

$$\varphi(t, x) = \sum c_i(t) \varphi_i(t) \quad (1.3.87)$$

$$\left(-\nabla^2 + \frac{d^2 U}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_k} \right) \varphi_i = \omega_i^2 \varphi_i \quad (1.3.88)$$

同じように、モードの方程式が出てくるわけですけども、ここで先ほどまでは massless と massive を区別してなかったんですけども、massless のところは特別にっていうか、そもそも調和振動的な扱いができないんで、 $\phi(t, x)$ というのは $\phi_k(x - x_0(t))$ プラス massive モードで展開したものというふうに、

$$\phi(t, x) = \phi_k(x - x_0(t)) + \sum_i c_i(t) \varphi_i(x - x_0(t)) \quad (1.3.89)$$

こう扱ったほうがいいと。これを量子化することになります。

ということで、 $\dot{\phi}$ は、時間微分が平行移動の部分、 $x_0(t)$ をヒットする部分があって、あと massive モードの中にも平行移動の部分があるのでこうなる。

$$\dot{\phi}(t, x) = \dot{x}_0(t) \frac{d\phi_k(x - x_0(t))}{dx_0} + \sum_i \left[\dot{c}_i(t) \varphi_i(x - x_0(t)) + c_i(t) \dot{x}_0(t) \frac{d\varphi_i(x - x_0(t))}{dx_0} \right] \quad (1.3.90)$$

ここで注意してほしいのは $d\phi_k/dx_0$ というのがゼロモードの波動関数なので massive モードとは直交しているわけですね。そこで $\int dx \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$ を計算してみると、ちょうど massive モードの固有関数 φ_i とゼロモードの固有関数は直交しているので、ゼロモードと massive モードが分離します。

$$\begin{aligned} L &\supset \int dx \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \\ &= \left[\int dx \frac{1}{2} (\phi'_k)^2 \right] \dot{x}_0^2 + \sum_i \frac{1}{2} \dot{c}_i^2 \quad \left(\int dx \varphi_i \frac{d\phi_k}{dx_0} = 0 \right) \end{aligned} \quad (1.3.91)$$

ということでまずは第2項について今やった量子化の手続きをやって、第1項は何かって言うと、 $M_k^{\text{cl}}/2$ が出るだけです。

ビリアル定理を使えば

$$\int dx \frac{1}{2} (\phi'_k)^2 = \frac{M_k^{\text{cl}}}{2} \quad (1.3.92)$$

が出るので結局 L はこういうふうに展開されることになります。

$$L = -M_k^{\text{cl}} + \frac{M_k^{\text{cl}}}{2} \dot{x}_0^2 + \sum_i \left(\frac{1}{2} \dot{c}_i^2 - \frac{\omega_i^2}{2} c_i^2 \right) + \mathcal{O}(\lambda) \quad (1.3.93)$$

\dot{x}_0 というのは2乗しか無いので free だと。で、 x_0 を場として扱って、共役運動量

$$P = M_k^{\text{cl}} \dot{x}_0 \quad (1.3.94)$$

が出て、これはもちろん Hamiltonian と交換して運動量は保存しています。

ということなんで、量子状態としては運動量 P の状態に massive モードがいくつか励起している状態っていうのをかけたもの、作用させたものを $|P, \{n_i\}\rangle$ と表すことにします。1個も massive モードが励起していないのが $n_i = 0$ になるんで、

$$|P, \{0\}\rangle \quad (1.3.95)$$

と書いて、普通は量子キंकって呼ぶんですかね。変形モードだけ励起したのが excited quantum kink

$$|P, \{1, 0, \dots, 0\}\rangle \quad (1.3.96)$$

これだけキंकのまわりに局在しているんですね。だから、原子の中にトラップされた電子を励起しているみたいな、同じ原子なんだけども内部状態が励起されているというようなイメージでしょうか。あとはまわりの φ っていう素粒子の散乱状態が2番目、3番目、…っていうところを励起していく。

$$|P, \{0, n_2, n_3, \dots\}\rangle \quad (1.3.97)$$

ということでゼロモードまで含めて量子化するとこのようになると。

1.3.2 Couple with fermions

次はフェルミオンがあるとどうなるかと。あと 20 分ですか、ちょっと、立っていられるかどうか不安ですけど…頑張らしましょう。フェルミオンを入れた理論、さっきちょっと質問がありましたけど、まあ超対称性入れなくても、適当に調整すれば超対称性になりますけども、いまは超対称性とは関係なしに 1 + 1 次元のフェルミオンと湯川結合した理論を考えます。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 + i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - g\phi\bar{\psi}\psi \quad (1.3.98)$$

古典的にはフェルミオンは 0 とおくので、 ϕ の古典的な運動方程式には影響しません。ということでキルク解はキルク解として残ります。

真空セクターは $\phi = v$ で、当たり前のことを言うんですけども、Dirac 方程式は湯川結合から来る $g\phi\bar{\psi}\psi$ っていうのがありますけども、 $\phi = v$ とおくと $M = gv$ がフェルミオンの質量項に来て、

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - M\psi = 0 \quad (1.3.99)$$

これを解けばいいんですね。モード展開しますと、

$$\psi(t, x) = \chi_k e^{-i\omega(k)t} \quad (1.3.100)$$

χ_k の k っていうのはモードっていうか、運動量を指定する数ですね。これ、下付きの文字なんですけども χ っていうのが小さいので下付きの文字に見えませんが、これをボーンとぶちこんで、

$$(-i\gamma^0\gamma^1\partial_x + M\gamma^0)\chi_k = \omega(k)\chi_k \quad (1.3.101)$$

こんなふうにしますね。いま 1 + 1 次元なんで、注意っていうかあまり馴染みがないかもしれませんが、ガンマ行列と荷電共役は

$$\gamma^0 = \sigma_1, \quad \gamma^1 = i\sigma_3 \quad (1.3.102)$$

$$\chi^C = -i\gamma^1\chi \quad (1.3.103)$$

と書けるんですけども。荷電共役に対してもやってみると

$$(-i\gamma^0\gamma^1\partial_x + M\gamma^0)\chi_k^C = -\omega(k)\chi_k^C \quad (1.3.104)$$

$\omega(k)$ のところが $-\omega(k)$ になっています。

平面波解は

$$\chi_k = u e^{ikx}, \quad \omega^2(k) = k^2 + M^2 \quad (1.3.105)$$

となって、普通に量子化するんですね。

$$\psi = \sum_k \left[b_k(t)\chi_k(x) + d_k^\dagger(t)\chi_k^C(x) \right] \quad (1.3.106)$$

$$\bar{\psi} = \sum_k \left[b_k^\dagger(t)\bar{\chi}_k(x) + d_k(t)\bar{\chi}_k^C(x) \right] \quad (1.3.107)$$

と書いて、生成消滅演算子

$$\{b_k, b_p^\dagger\} = \delta_{k,p} \quad (1.3.108)$$

$$\{d_k, d_p^\dagger\} = \delta_{k,p} \quad (1.3.109)$$

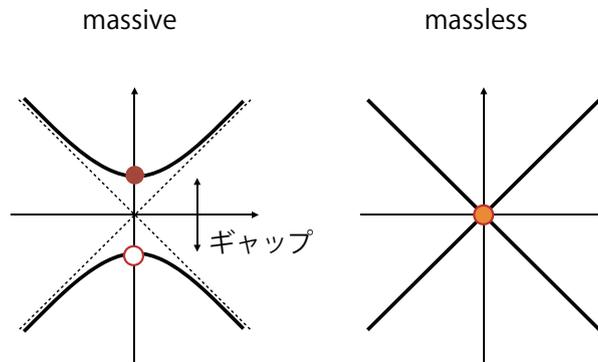
で書けるわけです。反交換関係で量子化していく、これが普通の真空まわりの量子化ですね。

これをやっぱりキंकまわり $\phi = \phi_k(x)$ でやると。そうするとさっき $M = gv$ と書いたものが $M = g\phi_k$ になりますね。

$$(-i\gamma^0\gamma^1\partial_x + g\phi_k\gamma^0)\chi_k = \omega(k)\chi_k \quad (1.3.110)$$

$$(-i\gamma^0\gamma^1\partial_x + g\phi_k\gamma^0)\chi_k^C = -\omega(k)\chi_k^C \quad (1.3.111)$$

ϕ_k は x の関数になっていますから、キंक解で与えられるんでこれを解いてやる必要があると。さっき言ったように χ と χ^C っていうのは、 χ が ω の固有状態であれば χ^C っていうのは $-\omega(k)$ の固有状態なので、フェルミオンと反フェルミオンは $\omega(k) \neq 0$ のものに対しては常にペアで現れます。ところが、もしもゼロモードがあったとしたら、二つの運動方程式は全く同じ方程式ですね。そうすると振動数も、負の振動数、正の振動数っていうわけじゃなくてゼロなんで、そもそも χ 、 χ^C を区別する本質的な理由はないということに注意してください。



Massive モードはただ、粒子と反粒子のギャップが開いているわけですがけれども、massless になると中心部分が励起してますね。そもそも違いがないと。

1 + 1 次元のフェルミオンっていうのはさっき言ったみたいに 2 成分です。その上成分を u_k と書いて、下成分を v_k と書く。

$$\chi_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \quad (1.3.112)$$

そして Dirac 方程式にポーンと代入しますとこうなりますね。

$$\left(-\frac{d}{dx} + g\phi_k\right)v_k = \omega(k)u_k \quad (1.3.113)$$

$$\left(\frac{d}{dx} + g\phi_k\right)u_k = \omega(k)v_k \quad (1.3.114)$$

方程式 (1.3.114) に、(1.3.113) の微分演算子をもう 1 回掛けます。そうすると、 u_k に対しては

$$\left(-\frac{d}{dx} + g\phi_k\right)\left(\frac{d}{dx} + g\phi_k\right)u_k = \omega(k)^2u_k \quad (1.3.115)$$

v_k に対しては同様に

$$\left(\frac{d}{dx} + g\phi_k\right)\left(-\frac{d}{dx} + g\phi_k\right)v_k = \omega(k)^2v_k \quad (1.3.116)$$

になります。

$\omega = 0$ の場合は右辺は 0 になりますね。そうすると u と v は (1.3.113)、(1.3.114) からわかりますけれども独立になる。

$$\left(-\frac{d}{dx} + g\phi_k\right) \left(\frac{d}{dx} + g\phi_k\right) u_0 = 0 \quad (1.3.117)$$

$$\left(\frac{d}{dx} + g\phi_k\right) \left(-\frac{d}{dx} + g\phi_k\right) v_0 = 0 \quad (1.3.118)$$

方程式として couple してない。そうすると、これ解くの簡単ですね。 $-\frac{d}{dx} + g\phi_k$ は微分演算子 $\frac{d}{dx} + g\phi_k$ の adjoint なので、 $\frac{d}{dx} + g\phi_k$ の adjoint の adjoint が $\frac{d}{dx} + g\phi_k$ ということですが、だから

$$\left(\frac{d}{dx} + g\phi_k\right) u_0 = 0 \quad (1.3.119)$$

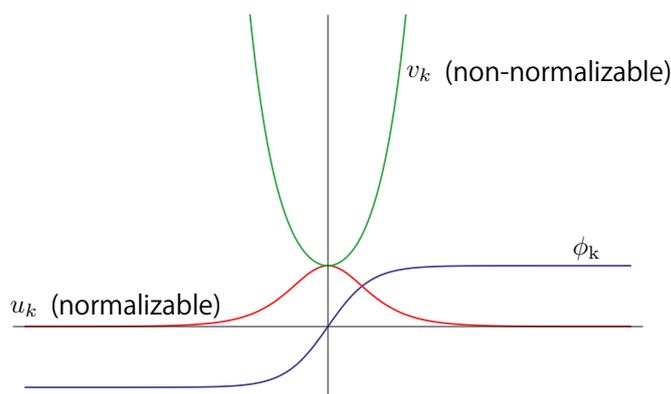
$$\left(-\frac{d}{dx} + g\phi_k\right) v_0 = 0 \quad (1.3.120)$$

ならこれが満たされるわけですね。ということでゼロモードの波動関数が解けました。

$$u_0 = \exp\left(-g \int^x \phi_k(y) dy\right) \quad (1.3.121)$$

$$v_0 = \exp\left(g \int^x \phi_k(y) dy\right) \quad (1.3.122)$$

2 つあるんですね。独立なんで。



なんですけれどもこれ見てみると、実はキंक ϕ_k を与えたときに u_0 というのは ϕ_k を適当な、例えば原点から x まで積分したものが $u_0(x)$ で、 v_0 は符号が逆になっているので、片方は規格化可能なんですけど、もう片方は規格化不可能なんです。もちろん物理的なモードではないということですね。

ということでキंकには u_0 だけが、こういうゼロモードが存在します。

$$\chi_0 = \begin{pmatrix} e^{-g \int^x \phi_k(y) dy} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.123)$$

これの荷電共役とってみると、

$$\chi_0^C = -i\gamma^1 \chi_0 = \sigma_3 \chi_0 = \chi_0 \quad (1.3.124)$$

ですから χ_0^C と χ_0 は完全に一致していて、さっき言ったゼロモードに関しては χ_0 と χ_0^C は区別する理由はないというのがここに現れていますね。ということでキंकにはフェルミオンゼロモードが局在するということがわかりました。

ボソンの massless モードもあったわけですが、そちらは対称性の破れという理由があったんですね。ただフェルミオンの massless モードは特に対称性には直接的には関係していない。むしろトポ

ロジー、キルクが $x = \infty$ で $\phi = +v$ だとか $x = -\infty$ で $\phi = -v$ だとかで、真ん中に 0 を通りますよね絶対。 $\phi = -v$ から $\phi = +v$ に行くので。 $\phi = 0$ ってことは湯川結合がそこで質量 0 ってことを意味していますから、なんかゼロモードがありそうだよ、っていうのがあって、なんとなくそんなイメージがあって、実際あった。ただし、さっきコメントしましたけども、超対称性がある場合は、超対称性を 2 回やると平行移動になりますから並進対称性が破れたときには超対称性も破れます。そういう意味では平行移動のボソンのなゼロモードとここで現れたフェルミオンのなゼロモードは実は超対称性の多重項を組むんですね。というのは、後でやるんですけども、超対称性は全部は破れないんですね。BPS 状態っていうのはいくつか超対称性を残すのでそういう意味では残った超対称性の多重項です。反キルクの場合は逆ですね。 u_0 のほうが発散します。下成分だけになります。

$$\chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{g \int^x \phi_{\bar{k}}(y) dy} \end{pmatrix} \quad (1.3.125)$$

ということでキルクと反キルクにそれぞれゼロモードが一個ずつ局在すると。

ということで、キルクの時にやったように量子化します。ゼロモードの生成消滅演算子を a って書いて、粒子と反粒子を b と d^\dagger で書くとこんな感じになります。

$$\psi = a\chi_0 + \sum_k [b_k\chi_k + d_k^\dagger\chi_k^C] \quad (1.3.126)$$

$$\bar{\psi} = a^\dagger\bar{\chi}_0 + \sum_k [b_k^\dagger\bar{\chi}_k + d_k\bar{\chi}_k^C] \quad (1.3.127)$$

量子化条件は

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad \{b_k, b_p^\dagger\} = \delta_{k,p}, \quad \{d_k, d_p^\dagger\} = \delta_{k,p} \quad (1.3.128)$$

ということで、結局ボソンのなモードの励起とフェルミオンのな励起を掛けてやることができ、ということでキルク周りの状態が決まってくると。

$$|P; \{n_i^b\}, \{n_j^f\}\rangle \quad (1.3.129)$$

そういうわけです。

量子キルクと呼ばれているものは励起が全部ゼロ。ボソンもフェルミオンもゼロ。

$$|P; \{0\}_b, \{0\}_f\rangle \quad (1.3.130)$$

エネルギーは、今日はもう計算しないんですけども、さっきやったボソンのなものとフェルミオン場からの量子補正もありますね。

$$M_k^q = M_k^{\text{cl}} + \Delta E_b - \Delta E_f + \dots \quad (1.3.131)$$

超対称性を入れてやれば $\Delta E_b - \Delta E_f$ が消えたりします。これはあとでちょっと見ます。 $|P; \{0\}_b, \{0\}_f\rangle$ という状態はすべての消滅演算子で消して 0 になる状態として定義されているわけですね。

$$\text{ボソン} \quad c_k |P; \{0\}_b, \{0\}_f\rangle = 0 \quad (1.3.132)$$

$$\text{フェルミオン} \quad a |P; \{0\}_b, \{0\}_f\rangle = 0 \quad (1.3.133)$$

$$b_k |P; \{0\}_b, \{0\}_f\rangle = 0, \quad d_k |P; \{0\}_b, \{0\}_f\rangle = 0 \quad (1.3.134)$$

通常のフェルミオンとかボソンの量子化と一緒に、基底状態と一緒にです。

ちよっともう massive などころは忘れて、フェルミオンのゼロモードについて少し話をしますと、 $|P, 0\rangle$ というのを記号を変えて $|P, -\rangle$ とします。すなわち、

$$a |P, -\rangle = 0 \quad (1.3.135)$$

で、

$$a^\dagger |P, -\rangle = |P, +\rangle \quad (1.3.136)$$

と定義しますと、もちろん

$$a |P, +\rangle = |P, -\rangle, \quad a^\dagger |P, +\rangle = 0 \quad (1.3.137)$$

当然フェルミオンは 1 個しか励起できないので。ところで $|P, -\rangle$ と $|P, +\rangle$ はゼロモードの励起なので、励起してもエネルギーは変わらない。しかもさっき、粒子と反粒子は、 χ_0 と χ_0^C は区別できないって言ってたんで $|P, -\rangle$ と $|P, +\rangle$ は区別できるかっていうと区別できないんですね。で、ちょっと面白いことがあって、フェルミオン数を見てみよう。

$$Q_f = \frac{1}{2} \int dx (\psi^\dagger \psi - \psi \psi^\dagger) \quad (1.3.138)$$

フェルミオン数を計算してみますとこうなりますね。

$$\begin{aligned} Q_f &= \frac{1}{2} \left[a^\dagger a + \sum_k (b_k^\dagger b_k + d_k d_k^\dagger) \right] - \frac{1}{2} \left[a a^\dagger + \sum_k (b_k b_k^\dagger + d_k^\dagger d_k) \right] \\ &= a^\dagger a - \frac{1}{2} + \sum_k (b_k^\dagger b_k - d_k^\dagger d_k) \end{aligned} \quad (1.3.139)$$

\dagger のついてないやつを右に持っていきますと飛び越すごとに 1 が出ますけども、 b 、 d に関しては $1/2$ と $-1/2$ が出てキャンセルするんですね。普通そうです。ところが、 a に関しては $-1/2$ が残っちゃうんですね。ということでこのフェルミオン数 Q_f を $|P, -\rangle$ に掛けるとなんと $-1/2$ が出てくる。 $|P, +\rangle$ に掛けると $+1/2$ が出てくる。

$$Q_f |P, -\rangle = -\frac{1}{2} |P, -\rangle \quad (1.3.140)$$

$$Q_f |P, +\rangle = +\frac{1}{2} |P, +\rangle \quad (1.3.141)$$

ということで、これ有名なフラクショナルフェルミオン数 [7] で、量子キルクはフェルミオン数 $\pm 1/2$ をもつという変なことになっています。

ただこれはそう言ってもいいんだけど、結局 $|P, -\rangle$ と $|P, +\rangle$ を区別できないので、フェルミオンが入ると量子キルクはフェルミオンの局在化のおかげで、2 重に縮退すると。量子キルクは 2 個あるというふうに解釈されます。

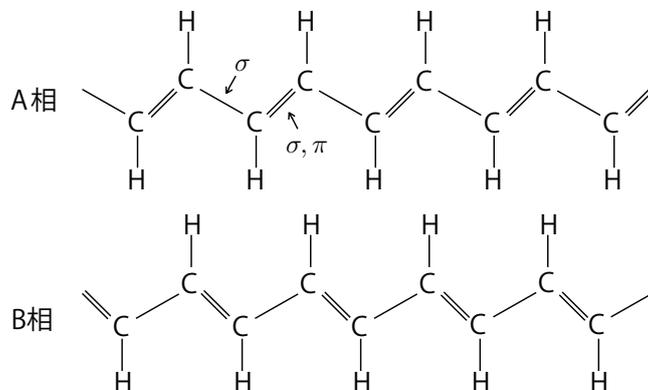
(質問) フラクショナルフェルミオン数は 2 次元だから出るということではない？

(回答) いや、そうじゃないと思います。何次元でも、ええ。

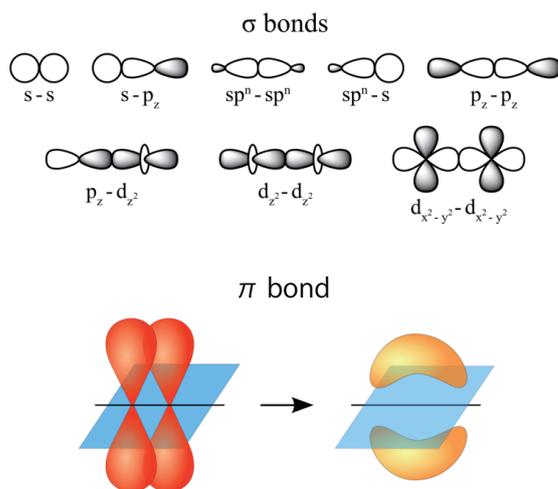
いま 1 個のフェルミオンを考えましたけども、フェルミオンが何個もあるような結合をさせれば 2^N に縮退した量子キルクが出るというわけですね。

1.3.3 脱線：ポリアセチレン

ちょっと脱線、僕も耳学問程度にしか知らないのですがこれは、間違ってたらすみませんが、こういうフラクショナルフェルミオンっていうのは現実で見つかるんだか見つかってないんだか、そんな感じらしいです。ポリアセチレンっていうのがあって、まあ、CとHですね。



A相とB相があるらしくて、1重線のところに σ 結合があって、2重線のところに σ と π の2重結合があると。で、2重結合がどっちに付いているかというので対称性が破れます。ということはこれをくっつけると、キンクが生まれると。

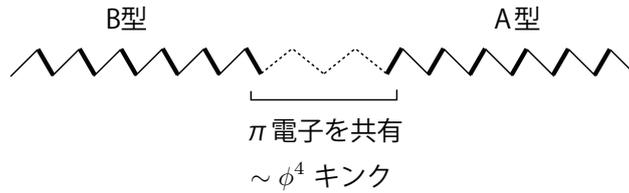


©wikipedia *3

で、Wikipedia 見たら σ とか π ってのはこんなもんだから(笑) Wikipedia 見てなんとなく大学1年生の頃の話思い出したんですけども、まあこんなもん。こういう縦方向に波動関数がつながってるか(図上部)、こうなってるのをくっつけるか(図左下→図右下)の違いらしいんですけども。

*3 σ bonds: by CCoil (own work) [CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)], via Wikimedia Commons

π bond: by Vladsinger (retouched picture: the original is by JoJan) [CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)], via Wikimedia Commons



この B 型と A 型をくっつけると、ここ（凶ギザギザの真ん中辺り）、 π 電子がどっかで共有されてると。ということでちょうど、キンクになっていますね。で、2 重結合のほうがもちろん 1 重結合よりは距離が近くなって、何もないうちからのずれっていうのを場とみなして、無限系にもっていくと ϕ^4 理論みたいになって、本当に tanh のキンクみたいなのが出せるみたいなんです。これは中性なんですけども、電子を与えたりだとか、ホールをドーピングすることによって電荷を与えることができ、こういうものに電流が流れると。キンクが電流を流すと。で、ノーベル賞、白川さんでしたっけ。これ 1 次元系なのでフェルミオンのゼロモードが局在して、ただ、3 次元中にある 1 次元なのでスピンの数とかいろいろ違いますけれどもフラクショナルフェルミオンも、まあ、見つかっているみたいです。

きりがいいからこれでおしまいにしましょうか。最後は強結合に行ったらどうなるのかっていうのをちょっと見るために、sine-Gordon 模型っていうので量子化するというのをざっと紹介して、キンクの話を終えて、次元を徐々に上げていこうかなと思います。じゃあちょっともう限界なんでここで午前中は終わりにします。

～～休憩～～

では、午前中の続きをさせてもらいたいと思いますけども、あとどれぐらい残ってるのかなあ思ったらですね、全然終わってなかったというか、用意したトラベは結構あって、

1. Introduction (44 pages)
2. Kinks (222 pages) ← now is in page 126
3. Vortices (158 pages)
4. Monopoles (33 pages)
5. Kinks, vortices and monopoles (17 pages)

あまり気づいてなかったんですけど、ちょっと終わりそうもないんで、いけるとこまで行って、いけなかったところはすいませんっていう感じになると思いますけども。だんだん少なくなってくるのは、準備がどんどん終わってって、1. と 2. あたりで基本的なことは全部やっちゃうので、パッパッと行けるといってもいいんですけども、ほんとにモノポールまで行けるのかどうかあまり自信がないんですけど、まあ、できるだけやって行きたいと思います。

1.3.4 Quantum sine-Gordon kink and duality

それで、午前中最後終わったのは量子キンクについての話をして、フェルミオンと結合したらどうなるかということを行いましたけども、sine-Gordon キンクを量子化したらどういうことが起きるかというのを話したいと思います。もう詳しい計算は全部すっ飛ばしますけども、 ϕ^4 と同じようにやると、古典的な質量に量子補正と摂動項が加わるということです ($\hbar = 1$ としている)。

$$M_k = \frac{8m^3}{\lambda} - \frac{m}{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m}\right) \quad (1.3.142)$$

この $-\pi/\lambda$ が量子補正ですね。今この量を

$$\gamma' \equiv \frac{\lambda}{m^2} \left(1 - \frac{\lambda}{8\pi m^2}\right)^{-1} \quad (1.3.143)$$

っていうのでうまく書くことができ、これの逆数をとると

$$(\gamma')^{-1} = \frac{m^2}{\lambda} - \frac{1}{8\pi} \quad (1.3.144)$$

になるので、

$$M_k = \frac{8m}{\gamma'} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m}\right) \quad (1.3.145)$$

となります。

それで、sine-Gordon で特徴的だったのはブリーザーモードがあるということですね。キंकと反キंकの束縛状態。これは古典的には

$$\phi_{k\bar{k}} = \frac{2v}{\pi} \tan^{-1} \frac{\sin ms\tilde{\gamma}t}{s \cosh m\tilde{\gamma}x}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{1+s^2} \quad (1.3.146)$$

で書いて、 $0 \leq s < \infty$ というパラメータで、うようよしてたやつですね。その古典的なキंक質量っていうのは2キंक質量の和を $1+s^2$ で割ったものだと。

$$M_B = \frac{2M_k}{1+s^2} \quad (1.3.147)$$

つまり2キंक質量より小さい束縛状態を作っている。この状態に対しても、同じように量子効果が計算されていて、その結果だけ言うと、 s は0から ∞ まで走れるので、連続的に無限個あるんですけども、量子効果を入れると量子化されると。それは

$$M_B^{(n)} = 2M_k \sin \frac{n\gamma'}{16}, \quad n = 1, 2, \dots < \frac{8\pi}{\gamma'} \quad (1.3.148)$$

で書けると、 \sin の中が上がると、0から1まで上がってくんですけども、そこまで許される。この n は自然数ですね。 $8\pi/\gamma'$ を超えると $\pi/2$ を超えるので、これより小さいところまで許されるということになります。

$\lambda/m^2 \ll 1$ と思って展開してみますと、 \sin 関数なんて簡単に展開できて、

$$M_B^{(n)} = m \left[n - \frac{n^3}{3!} \left(\frac{\lambda}{16m^2}\right)^2 - \frac{16n^3}{4! \pi} \left(\frac{\lambda}{16m^2}\right)^3 + \dots \right] \quad (1.3.149)$$

となります。一番軽いモードっていうのは $n=1$ のときですね。 $n=1$ のときに $\lambda \rightarrow 0$ とすると、

$$M_B^{(1)} \rightarrow m \quad (1.3.150)$$

になります。高次の項が全部落ちるので。そうすると、このブリーザー解の質量が $\lambda \rightarrow 0$ の極限では sine-Gordon の場 ϕ を量子化したときの粒子そのものに一致するということになります。これが一番小さいやつですね。これを偶然と思わないで、必然と思しましょう。つまり、 λ をずっと弱くしていったときには、ブリーザーモードの一番軽いモードは基本粒子そのものであるというふうに解釈する。ブリーザー解は場の揺らぎでしたけれども、フラフラしているので、何となく場の揺らぎみたいなもんだから、そう見てもいいかなあという気はするんですけども。

じゃ、そんなことが本当にいいのかということで、この Dashen-Hasslacher-Neveu という人達の古い論文 [8] では、本当の粒子、sine-Gordon 場を量子化した 2 つの粒子の結合状態の質量を計算して、 M_1 は sine-Gordon 粒子の質量ですけれども、 M_2 は結合状態のエネルギー、質量で、 $2M_1$ から M_2 を引いて、 M_1 で割ったという計算をすると、

$$\frac{2M_1 - M_2}{M_1} = \epsilon^2 + \frac{4}{\pi}\epsilon^3 + \left(\frac{12}{\pi} - \frac{1}{12}\right)\epsilon^4 + \dots, \quad \epsilon = \frac{\lambda}{16m^2} \quad (1.3.151)$$

のように書けるということが計算されました。ところで、さっきブリーザーモードの一般の公式 (1.3.149) は与えられているわけですね。ここから $n = 1$ 、 $n = 2$ を入れて、同じことをしてみると、全く同じ式になります。

$$\frac{2M_B^{(1)} - M_B^{(2)}}{M_B^{(1)}} = \epsilon^2 + \frac{4}{\pi}\epsilon^3 + \left(\frac{12}{\pi} - \frac{1}{12}\right)\epsilon^4 + \dots \quad (1.3.152)$$

ということで、ブリーザー解を基本粒子と同一視する、ということが良さそうだ。

ところで、 n ってというのは

$$n < \frac{8\pi}{\gamma'} = \frac{8\pi m^2}{\lambda} - 1 \quad (1.3.153)$$

ということだったので、 λ がどんどん大きくなって、

$$\lambda \geq 4\pi m^2 \quad (1.3.154)$$

になっちゃったら、もう (1.3.153) を満たすのは $n = 0$ しかなくなっちゃう。ということは、強結合に行ったらブリーザー解がいなくなるということを意味してると。今はブリーザー解を基本粒子と同一視したので、それもいなくなってしまうんじゃないかと。実際に、 $4\pi m^2$ よりもうちょっと低い $\lambda = 2\pi m^2$ で、キクの質量が

$$M_k = \frac{8m}{\gamma'} = \frac{3m}{\pi} < m \quad (1.3.155)$$

です。ということは、この時にもはやキクが基本粒子より軽くなってるんですね。だから、 $\lambda \geq 4\pi m^2$ でブリーザーがなくなるのは辻褄が合っていますね。

ということで、強結合ではキクの方がより軽くなって、基本的自由度になるんじゃないかということが強く示唆されているわけですね。もちろん強結合というのは摂動論が使えないので、一般的には解析が難しいので、何かアイデアがないかというのがいわゆる **duality** (双対性) です。この双対性とは何なのかっていうのはこれから説明していきますけども、ここで本当に双対なのかを計算するのは大変なのでしななんですけど、傍証みたいなのを見ることにします。 $\lambda = 4\pi m^2$ の付近でものごとを見ましょう。そこで

$$\frac{\lambda}{4\pi m^2} = \frac{1}{1 + \delta/\pi} \quad (1.3.156)$$

δ が小さい数と思って書くこととします。それで、ブリーザー解の質量を δ で書いてやるとこういうふうになります。

$$M_B^{(1)} = M_k \left(2 - \delta^2 + \frac{4\delta^3}{\pi} + \dots \right) \quad (1.3.157)$$

$\delta = 0$ なら、ちょうど $M_B^{(1)} = 2M_k$ になって、ブリーザーはキク 2 個の束縛状態になっているということがここから何となくわかるんですけども。こういう公式があったと覚えといてください。

いきなりなんですけどもここで一旦 sine-Gordon を忘れて、まったく関係ない massive Thirring 模型

$$\mathcal{L}_{\text{MT}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \quad (1.3.158)$$

というフェルミオンの理論を考えたい。 g というのは 4 フェルミ結合ですけども、 $g > 0$ であれば、粒子と反粒子の相互作用は引力ですから、粒子-反粒子の束縛状態があります。そこでこの理論において、束縛状態の質量っていうのを g が十分小さいと思って計算してやると、

$$\tilde{M}_B = M \left(2 - g^2 + \frac{4g^3}{\pi} + \dots \right) \quad (1.3.159)$$

となります。 M というのは基本粒子の質量です。

これを (1.3.157) と見比べてみると、ブリーザーモードの δ で展開した表式と massive Thirring 模型の束縛状態の表式が全く同じ形をしてるんですね。もしも、 $\delta = g$ と思ったら、本当に同じものだと。そうすると、ブリーザーモード解の質量と massive Thirring 模型の束縛状態の質量が一致するわけですね。

$$\delta = g \quad (1.3.160)$$

$$\text{sine Gordon ボソン (ブリーザー)} = \text{massive Thirring 束縛状態} \quad (1.3.161)$$

ブリーザーモードが先程のボソンだと同定したので、sine-Gordon 模型の素粒子が massive Thirring 模型の束縛状態となっています。さらに sine-Gordon キンクが massive Thirring 理論の基本粒子に対応しているというのは自然です。こう同定しようというわけですね。

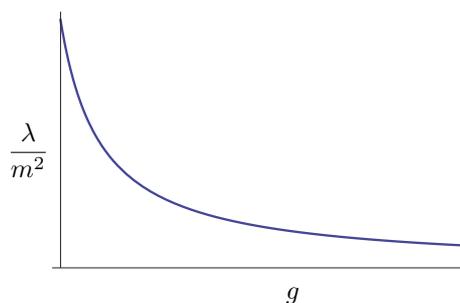
$$\text{sine Gordon キンク} = \text{massive Thirring フェルミオン} \quad (1.3.162)$$

こう同定としたとすると、massive Thirring で結合定数を $g = 0$ に切ると、さっきブリーザーがなくなっちゃったよというのは massive Thirring の方では引力がなくなっちゃうので、束縛状態がなくなるというので非常に納得がいくというわけですね。ということで、強結合に行くと、どんどん軽くなってく。で、キンクがより基本的な役割を果たすようになってくる。Sine-Gordon の枠組みでやると、それは強結合になっちゃうんだけども、massive Thirring 模型に行くと、同じ物理を表すような別の理論があって、そっちでは基本粒子になってると [9, 10]。

しかも、 $\delta = g$ にしましたから、sine-Gordon の結合定数 λ と massive Thirring 模型の結合定数 g は

$$\frac{\lambda}{4\pi m^2} = \frac{1}{1 + g/\pi} \quad (1.3.163)$$

の関係にあります。



strong-weak duality!

横軸を g で、縦軸を λ/m^2 にしてみると、こうなるんですね。ということで、 g が小さいときは λ が大きい、 g が大きいときは λ が小さいということなので、これは強弱双対性になってる。ということで、強結合に行くと、劇的に見方が変わって、摂動論が使えないんだけど弱結合の違う理論があって、そっちでものごとを考えていいんじゃないかというふうになってる。これが面白い、ソリトンの重要な役割の1つだと思います。大体これで、弱結合のときの量子キクの性質と強結合に行ったときにどうなるかということをおお体説明しました。

1.4 ドメインウォール

次に、キクってというのは $1+1$ 次元で粒子的なソリトンですけども、高次元に行っても、そういうものがあるわけですね。全く同じ性質を持ったものがあります。ただし、 $1+1$ 次元で粒子的だと、そのまま 2 次元に持っていくと広がりを持った物体になりますね。例えば $2+1$ 次元の ϕ^4 理論を考えます。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2, \quad \mu = 0, 1, 2 \quad (1.4.1)$$

ただ単にさっきやったのを $\mu = 0, 1$ だったのを 2 も付け加えたというだけですね。だけど、この理論で x だけに依存した解というのを考えると、その運動方程式はこうなります。

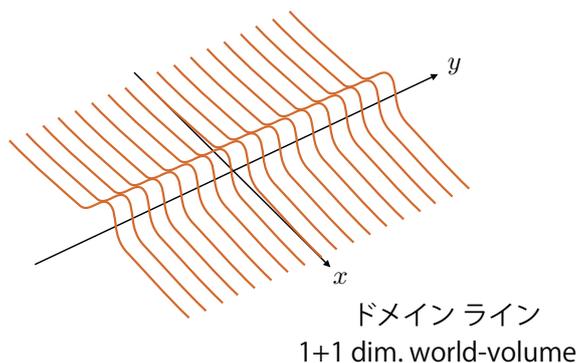
$$-\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \lambda(\phi^2(x) - v^2) = 0 \quad (1.4.2)$$

運動方程式自身は $1+1$ 次元の運動方程式と全く同じなので、 $1+1$ 次元の方程式の解がわかれば、この方程式の解にもなると。

というわけで、 $1+1$ 次元ではこういう \tanh 型のドメインウォール解

$$\phi(x) = v \tanh \frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \quad (1.4.3)$$

があったわけですけども、これは 2 番目の座標 y によってないので、 2 番目の座標の方向には自明に伸びているんですね。



$y = \text{一定}$ の線で見ると、どっかにポコッと局在しているけれども、 y 方向に沿ってはまっすぐ伸びてる。ひも状になっているので、 $1+2$ 次元のドメインラインというふうに使われています。

これは空間次元をどんどん上げていくことは自明にできて、 $1+3$ 次元ではドメインウォール、 $1+4$ 次元になるとなると呼ばれるのかちょっとわかんないですけど、通常（メン）ブレーンと言ったりします。高次元でこういうものをご利益みたいのがあるのかというと、1つは

1. ドメインウォールによるブレーンワールドの実現

っていうのがある。もう1つは

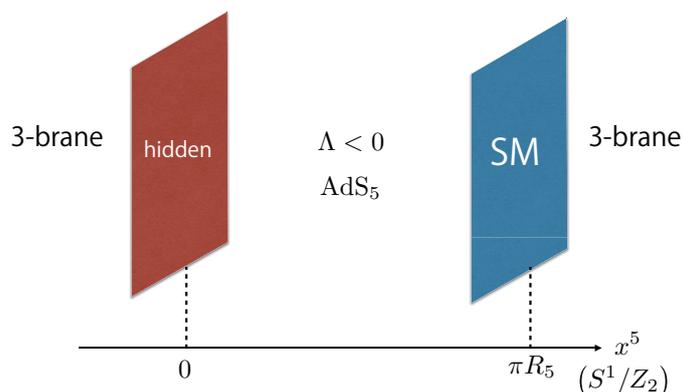
2. ドメインウォールフェルミオン（格子計算）

というのが、全く別のところ、格子 QCD とか計算する時に出てくるドメインウォールフェルミオンとかいうのも関係しています。ちょっとそれを説明したいと思います。

1.4.1 ブレーンワールドシナリオへの応用

まずは、ブレーンワールドシナリオへの応用ですけども、ブレーンワールドシナリオって何だったかっていうと、時空の次元は $3+1$ より大きいと。なぜそんなことを考えるかですけども、いろいろ理由はあると思うんですけども、例えば総合作用の統一。例えば Kaluza-Klein 理論で電磁気と重力を統一しようというときに、5次元方向を使います。それから重力を量子化しようと思って超弦理論だって言ったら、必然的に時空の次元は $3+1$ より大きくなきゃいけない。それから、ヒエラルキー問題、いわゆるゲージヒエラルキー問題ですけども、これを解決する 1つの理由としてブレーンワールドを理由にすることができます。もともとヒエラルキー問題を解決するために、ブレーンワールドが考えられたんですね。ヒエラルキー問題というのは、Planck スケール ($M_{\text{Pl}} = 10^{18}\text{GeV}$) と電弱スケール ($M_{\text{EW}} = 10^3\text{GeV}$) がものすごい違うと。こういうものを解消するために、超対称性とか、Randall-Sundrum 模型 [11] とかそういうのいろいろあったわけです。

ここではこの Randall-Sundrum について、ちょっとだけ解説します。



5次元の理論を考えますね。Minkowski 空間と 5次元方向が S^1/Z_2 という orbifold になってて、orbifold の固定点、端っこに 3-ブレーンがあると。その間は負の宇宙項が入っているんで、反 de Sitter (AdS) 空間になっているというようなセッティングです。で、我々はブレーンのどっちかに住んでいます。例えば、今 SM 側に住んでいるとして、そうすると計量はこんな感じになりますね。

$$ds^2 = e^{-2kx^5} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - (dx^5)^2 \quad (k = \sqrt{-\Lambda/6}) \quad (1.4.4)$$

k は bulk の宇宙定数 Λ で決まってくるような量です。

ざっと言うと Randall-Sundrum 模型っていうのは bulk と hidden sector (Standard Model ではないブレーン) と Standard Model brane の 3つからなっていて、

$$S_{\text{RS}} = S_{\text{bulk}} + S_{\text{hid}} + S_{\text{SM}} \quad (1.4.5)$$

$$S_{\text{bulk}} = M_5^3 \int d^4x \int_0^{\pi R_5} dx^5 \sqrt{g_5} \left(\frac{1}{2} R_5 - \Lambda \right) \quad (1.4.6)$$

$$S_{\text{hid}} = \int d^4x \int_0^{\pi R_5} dx^5 \sqrt{g_5} \mathcal{L}_{\text{hid}}^{(4)} \delta(x^5) \quad (1.4.7)$$

$$S_{\text{SM}} = \int d^4x \int_0^{\pi R_5} dx^5 \sqrt{g_5} \mathcal{L}_{\text{SM}}^{(4)} \delta(x^5 - \pi R_5) \quad (1.4.8)$$

bulk は 5 次元の Planck 質量 M_5 が掛かってて普通の Einstein 作用があつて負の宇宙定数が入っていると。Hidden sector っていうのは原点に局在してるので、デルタ関数的に 4 次元的作用があると。Standard Model brane の方はある離れたところ、 S^1 の半径を R_5 としていますけども、 $x^5 = \pi R_5$ のところに局在した 4 次元作用です。これらのデルタ関数的なものを手に入れてブレーンを表現しているというわけです。

5 次元方向を積分して、4 次元の有効理論にしてやろうというわけですね。

$$S_{\text{eff}} \supset \left[M_5^3 \int_0^{\pi R_5} dx^5 e^{-2kx^5} \right] \int d^4x \sqrt{-g_4} R_4 \quad (1.4.9)$$

Bulk の $[\dots]$ のところは 5 次元方向に依存したワープファクター e^{-2kx^5} を積分してやると 4 次元の Planck 質量の 2 乗 M_{Pl}^2 が出てきます。5 次元の Planck 質量と 4 次元の Planck 質量は

$$M_{\text{Pl}}^2 = \frac{M_5^3}{k} (1 - e^{-2k\pi R_5}) \quad (1.4.10)$$

というふうに関係してて、 R_5 が十分大きければ、 $M_{\text{Pl}}^2 = M_5^3/k$ になります。Standard Model のセクターは、例えば Higgs 場みたいなものを見てみると、

$$S_{\text{SM}} \supset \int d^4x \sqrt{-g} e^{-4k\pi R_5} \left[e^{2k\pi R_5} g^{\mu\nu} D_\mu H D_\nu H^\dagger - \frac{\lambda}{4} (|H|^2 - v^2)^2 \right] \quad (1.4.11)$$

$e^{-4k\pi R_5}$ は 5 次元の determinant の部分から来てるんですけども、 $e^{2k\pi R_5}$ がワープファクターですね。これを 4 次元の理論だと思いたければ、通常は運動項を普通の形にするためにどうしたらいいかという、場をリスケールするんですね。

$$H \rightarrow e^{k\pi R_5} H \quad (1.4.12)$$

場をリスケールすると、運動項は通常形になります。

$$S_{\text{SM}} \supset \int d^4x \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} D_\mu H D_\nu H^\dagger - \frac{\lambda}{4} (|H|^2 - e^{-2k\pi R_5} v^2)^2 \right] \quad (1.4.13)$$

そのおつりがどこに現れるかということ、リスケールしたことによって最後の項 $e^{-2k\pi R_5} v^2$ に現れるんですね。今はスカラーでやりましたけれども、とにかく同じようなことを全部やると、質量スケールをもった結合は全部 $e^{-k\pi R_5}$ 倍されます。

ということで、元々の理論が v だったのが、4 次元に行くと、

$$v \rightarrow e^{-k\pi R_5} v \quad (1.4.14)$$

という因子が出てくるということで、何がうれしいかということ、5 次元の理論に 5 次元の Planck スケール M_5 しかなかったとしても、 $e^{-k\pi R_5}$ のような因子のおかげで、4 次元の理論にそれよりもずっと小さい質量スケールが出てこれるというのが元々の Randall-Sundrum 模型だったわけですね。

ただし、今みたいに Randall-Sundrum に関する研究の多くでは、いま見たようにデルタ関数としてある意味人工的にブレーンの種を入れるわけですね。この点を改善しようと思えば、何か場の理論の枠組みでやろうとしたら、ドメインウォールを考えるのが自然じゃないかと。ということで、パッとブレーンでやるというアイデアが出てくるわけです。ブレーンの起源をデルタ関数として手に入れるということからもう 1 歩進もうと思って、高次元時空中のドメインウォール膜と同定することで、場の理論の枠組みでブレーンワールドシナリオを自然に扱おうという、そういう方向性です。良い点をいくつか挙げると、

1. ブレーンの起源は運動方程式の解なんですね。ダイナミカルに場の理論を解いて出てきます。
2. さらに、今まで見てきたようにドメインウォールには massless のボソンやフェルミオンが自然に局在するんですね。物質場が勝手に局在してくれると。
3. さらに、後でちょっと言いますが、超対称性を自然に破ることができるので、超対称性とも組み合わせれば、ブレーンがあるということ自体で、超対称性を破れるということになります。

これがドメインウォールのブレーンワールドシナリオへの応用だったんですけども、もう 1 つは格子ゲージ理論への応用です。

1.4.2 格子ゲージ理論への応用

僕は格子ゲージ理論全く知らないのもたまたま耳学問で申し訳ないんですけども、格子ゲージ理論でフェルミオンを格子に乗っけようと思うと、カイラルフェルミオンをどうやって格子に乗っけるかというのが難しいらしいです。何でできないかっていうのは僕詳しく知らないですけども、そうらしいと。このことにドメインウォールが一役買っているらしいです。って、青木さんの教科書 [12] に書いてありました。このことを理解するために、1 + 1 次元、午前中にやった話を思い出すと、1 + 1 次元では、

$$\gamma^0 = \sigma_1, \quad \gamma^1 = i\sigma^3 \quad (1.4.15)$$

で、キルクってというのは

$$\phi_{\text{K}}(x^1) = v \tanh \frac{m}{\sqrt{2}} x^1 \quad (1.4.16)$$

で与えられて、キルク上には

$$\chi_0 = \begin{pmatrix} e^{-\int^x \phi_{\text{K}}(y) dy} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4.17)$$

という massless フェルミオンが乗っかっていました。反キルクの場合は

$$\phi_{\bar{\text{K}}}(x^1) = -v \tanh \frac{m}{\sqrt{2}} x^1 : \quad \chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\int^x \phi_{\bar{\text{K}}}(y) dy} \end{pmatrix} \quad (1.4.18)$$

という massless フェルミオンが乗っかっている、という話をしましたね。これは 1 + 1 次元です。

このキルクに局在したゼロモードは、やってみればわかりますけども $-i\gamma^1 = \sigma^3$ の ± 1 の固有値をもった固有状態ですね。

$$-i\gamma^1 \chi_0 = \pm \chi_0 \quad (1.4.19)$$

当然、(1.4.17) のように下成分が 0 なら +1 で、(1.4.18) のように上成分が 0 なら -1 ということだったんですけども、全く同じことが 1 + D 次元でも言えます。例えば、ドメインウォールフェルミオンを作りたいときは、5 次元時空を考えるので $D = 4$ としますと、1 + 4 次元ガンマ行列ってというのは

$$\Gamma^0, \Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \Gamma^4 \quad (1.4.20)$$

で、第 4 方向に垂直なドメインウォール $\phi_{\text{DW}}(x^4)$ を考えるとしましょう。そうすると、ドメインウォールに局在する massless フェルミオンというのは (1.4.19) とのアナロジーで理解してもらえらると思うんですけども、 $-i\Gamma^4$ の ± 1 の固有状態になっています。

$$-i\Gamma^4 \chi_0 = \pm \chi_0 \quad (1.4.21)$$

というゼロモードがどっかにあります。

ところで5次元と4次元のガンマ行列の関係は

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (1.4.22)$$

$$\Gamma^4 = i\gamma_5 = i(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) \quad (1.4.23)$$

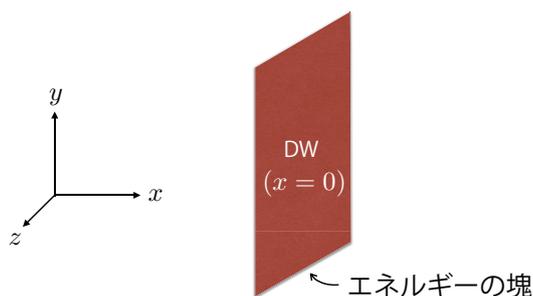
ということで、5次元時空で(1.4.21)という固有状態にあったフェルミオンゼロモードは、4次元の言葉でいうとこれはまさに γ^5 の ± 1 の固有状態

$$\gamma_5\chi_0 = \pm\chi_0 \quad (1.4.24)$$

だったので、まさにカイラルフェルミオンになっている。ということで、5次元ドメインウォールを考えると、ドメインウォール上にはカイラルなフェルミオンが乗っかって、反ドメインウォールには -1 の固有値をもつフェルミオンが乗っかる、ということが1+1次元の話からすぐわかる。5次元にただけです。こういうことを考えることで、格子QCDとかやるときに一役買ってるみたいです。原理は1+1次元でやったときと同じですね。それをどこに応用してるかっていうのの違いだけだと思います。

1.4.3 ドメインウォールと重力

あとはドメインウォールに関する物理として面白いのはドメインウォールと重力の関係 [13] だと思いますけども、これからは4次元の話をしていきましょう。4次元中に本当にドメインウォールがあったとします。 $x=0$ にこうあったと。



そうすると、このドメインウォールの近くにある粒子が受けるドメインウォールからの重力はなんと斥力だということが知られています。これが非常に驚きというか、そんなことがあるのかということなんですけれども、パッと理解しようと思うとだいたいこんな感じで、 ϕ^4 で考えてみましょう。

4次元の ϕ^4 理論で考えて、

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (1.4.25)$$

がエネルギー運動量テンソルで、 T_{00} 成分はビリアル定理を使うと

$$T_{00} = \frac{1}{2}(\phi'_k)^2 + V(\phi_k) = (\phi'_k)^2 \quad (1.4.26)$$

となります。11成分を計算すると、ビリアル定理を使うと打ち消し合って0になると。

$$T_{11} = (\phi'_k)^2 + \left(-\frac{1}{2}(\phi'_k)^2 - V(\phi_k)\right) = 0 \quad (1.4.27)$$

T_{22} と T_{33} も計算すると、

$$T_{22} = \left(-\frac{1}{2}(\phi'_k)^2 - V(\phi_k)\right) = -(\phi'_k)^2 \quad (1.4.28)$$

$$T_{33} = \left(-\frac{1}{2}(\phi'_k)^2 - V(\phi_k)\right) = -(\phi'_k)^2 \quad (1.4.29)$$

他のところは全部 0 というわけですね。

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \quad (1.4.30)$$

T_{22} と T_{33} が $-$ になっているというのがポイントで、

$$T_{\mu\nu} = \sigma \text{diag}(+1, 0, -1, -1), \quad \sigma(x) = (\phi'_k)^2 \quad (1.4.31)$$

となっていて、もちろん (1.4.31) の形になったのは、ドメインウォールが平坦だと仮定してるので、 $2+1$ 次元の Lorentz 対称性が保たれているからなんですけども、 $T_{22} = T_{33} < 0$ ということは負の圧力になってると。そこでこの非相対論的極限を考えると、 g_{00} の部分ですけれども、

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G(T_0^0 - T_i^i) = -4\pi G\sigma \quad (1.4.32)$$

が負になってるということですね。 $\sigma = (\phi'_k)^2$ はドメインウォールの張力です。ということで、普通の重力と逆になってるので、斥力になってるといのはだいたい理解できるんですけども。

ただ、これは重力とは全く結合させてない理論でドメインウォールを解いてそうじゃないかと言っているだけで、非常にナイーブな議論ですね。だから、重力が斥力になるんだと言われて、ちょっと疑わしいわけです。もうちょっと正確な議論も知られていて、以下簡単のため、ドメインウォールの厚みが非常に薄かったとします (thin wall 極限)。そうすると、デルタ関数的なドメインウォールになってるわけですけれども、

$$T_{\mu\nu}(x) = \sigma(1, 0, -1, -1)\delta(x) \quad (1.4.33)$$

こういう解を考えると、 $x = 0$ の周りで重力の方程式を解くと、計量が

$$ds^2 = (1 - \kappa|x|^2)dt^2 - dx^2 - (1 - \kappa|x|^2)e^{2\kappa t}(dy^2 + dz^2), \quad \kappa = 2\pi G\sigma \quad (1.4.34)$$

というふうに書けることが知られています [14]。ドメインウォールの周りで、(1.4.34) のような空間となっています。

もうちょっと見てみると、ドメインウォールに平行なスライスを見てみましょう。つまり、 x が一定のところですね。そうすると、適当にパラメータをリスケーリング

$$\tilde{t} = (1 - \kappa|x|)t, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{1 - \kappa|x|} \quad (1.4.35)$$

して書くと、計量が

$$ds_{\parallel}^2 = d\tilde{t}^2 - e^{2\tilde{\kappa}\tilde{t}}(d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2) \quad (1.4.36)$$

という感じになります。ワープファクター $e^{2\tilde{\kappa}\tilde{t}}$ が掛かってるので、ドメインウォールの中なんで $2+1$ 次元なんですけれども、これは $2+1$ 次元の de Sitter 時空にあるような計量になってる。ドメインウォールの中というのはポテンシャルが高くなってる場所にあるので、エネルギーが高いから、正のエネルギーで埋め尽くされているので、インフレーション計量が出てきているというのは当然です。

一方で、ドメインウォールに垂直なスライス、 y, z が一定のところで見ると、先ほどの計量の t, x だけで見たら、

$$ds_{\perp}^2 = (1 - \kappa|x|)^2 dt^2 - dx^2 \quad (1.4.37)$$

になります。これは $1+1$ 次元の Rindler 空間の計量というふう知られていて、これはどういときに出てくるかってというと、Minkowski 時空を原点 $x = 0$ から一定加速度

$$a = 1/\kappa \quad (1.4.38)$$

で遠ざかっている系に乗っている人の計量です。実際に、座標変換

$$\tau = \frac{1 - \kappa|x|}{\kappa} \sinh \kappa t, \quad \xi = \frac{1 - \kappa|x|}{\kappa} \cosh \kappa t \quad (1.4.39)$$

してみると、平坦な Minkowski に戻るというわけです。

この Minkowski になる座標 τ 、 ξ は \cosh と \sinh で書かれているので、

$$\xi^2 - \tau^2 = \left(\frac{1}{\kappa} - |x| \right)^2 \quad (1.4.40)$$

の関係式になって、これは $x = 0$ にある試験粒子が一定の加速度 $1/\kappa$ で加速されているという関係式になっています。ということは、(1.4.40) の人から見れば、ドメインウォールは $x = 0$ のところにあるわけですが、一定の加速度で遠ざかっているというふうに見えて、逆にドメインウォールから見れば、すべての粒子は一定の加速度で遠ざかっているように見えるということで、重力が斥力になっているというのが、先ほどのナイーブな議論と同じ結論となるというわけです。

この計量 (1.4.34) は一部分だけではなくて、全体的に

$$ds^2 = dt_*^2 - dx_*^2 - dy_*^2 - dz_*^2 \quad (1.4.41)$$

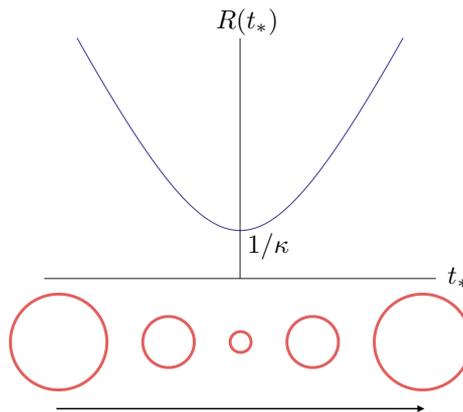
のようにフラットに移すことができます [15]。ある座標変換をするとこんなふうになると。そうすると、この座標でのドメインウォールの位置というのは

$$x_*^2 + y_*^2 + z_*^2 = \frac{1}{\kappa^2} + t_*^2 \quad (1.4.42)$$

というふうになっていて、(1.4.40) と非常によく似ているんですけども、4次元まで含めればこういうふうになっていて、これは3次元球面ですね。半径の2乗が $1/\kappa^2 + t_*^2$ で決まる球面になってると。

ということで、粒子から見ると、ドメインウォールは球形に見えると。

$$R(t_*)^2 = \frac{1}{\kappa^2} + t_*^2 \quad (1.4.43)$$



その球の半径は t_* に依存してて、無限の過去で無限に大きかった球面がだんだん小さくなって、 $t_* = 0$ で $1/\kappa$ になって、また大きくなってく。だから、ちょうどものを上に投げて落ちてくるように、広がるように加速度がある。だから、どっかに止まって、もう1回広がってく。こういうふうにドメインウォールが粒子からは見えるということが知られています。非常に奇妙なんですけれども、重力まで含めてドメインウォールを考えると、こんなことになります。この話はそれでおしまいです。

1.5 Supersymmetry and domain wall

BPS っていうのをいろいろやってきたんですけども、BPS っていうのは超対称性 (supersymmetry, SUSY) と非常に関係があるということをここでちょっと説明しようと思います。今まで、キルクやドメインウォールの性質やその応用をいろいろ見てきたわけなんですけども、一番重要なのはやっぱり BPS ということですね。これは 2 階の微分方程式というのが 1 階の微分方程式に落ちたんだと。

$$-\phi'' + \frac{dV}{d\phi} = 0 \leftarrow \phi' = \pm\sqrt{2V} \quad (1.5.1)$$

この 1 階微分方程式の解はすべてが 2 階微分方程式の解になっています。さらに、

$$M \geq \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)} d\phi \sqrt{2V} \quad (1.5.2)$$

はエネルギーバウンドの下限になっていて、ビリアル定理

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 = V \quad (1.5.3)$$

を満たすようになっていると。こういう特別なことがあって、いろんなとこにビリアル定理を使っているんですけども、重要な BPS の性質から来ていますね。それが超対称性のある理論に行くと、もっと自然に BPS という概念が出てくるということをちょっと説明しようと思います。

4 次元の話をしてきたんで、引き続き 4 次元で、一番簡単な Wess-Zumino 模型っていうのを簡単に話します。しばらくちょっと超対称性の簡単なイントロダクションをさせてもらいますけども、超対称性っていうのはボソンとフェルミオンの間の対称性なので、ボソンとフェルミオンがいる理論を考えます。

$$\begin{aligned} \text{複素スカラー場} &: \phi \\ \text{Weyl フェルミオン場} &: \psi_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2) \end{aligned}$$

4 次元の Weyl フェルミオンですね。一番簡単な、まずは free な理論を見てみましょう。複素スカラー場と Weyl フェルミオンがいるんですね。

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \quad (1.5.4)$$

記法は Wess-Bagger [16] とかに書いている記法とほとんど一緒です。計量の符号が違ったりしますが、いま almost-negative でやってます。例えば

$$\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi = \psi_{\dot{\alpha}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \psi_\alpha \quad (1.5.5)$$

と、こういうふうにし上げるというルールですね。多分スタンダードな記法でしょう。σ と反対称テンソルを

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = (1, \sigma^i)_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} = (1, -\sigma^i)^{\dot{\alpha}\alpha} \quad (1.5.6)$$

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad \psi_{\dot{\alpha}}^\dagger = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta}}^\dagger, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon^{\alpha\beta} = -i\sigma_2 \quad (1.5.7)$$

$$\psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta, \quad \psi^{\dot{\alpha}\dagger} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta}}^\dagger, \quad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -i\sigma_2 \quad (1.5.8)$$

こういうルールで話をしたいと思います。詳しくは Wess-Bagger とか見てください。

超対称性はさっきも言ったようにボソンのものとフェルミオンのものを入れ替える

$$|B\rangle \Leftrightarrow |F\rangle \quad (1.5.9)$$

ので、変換するとスピン（統計性）が変わるということですから、変換パラメータ ϵ_α は Grassmann になってなきゃいけない。そこで、 $\delta\phi$ っつてのを一番簡単な $\epsilon\psi$ という、超対称変換のパラメータを ϵ_α とし、全体的にはボソンになってなきゃいけないので、 $\epsilon\psi$ という変換です。* というのは、その† とつたものですね。

$$\delta\phi = \epsilon^\alpha \psi_\alpha = \epsilon\psi \quad (1.5.10)$$

$$\delta\phi^* = \psi^\dagger_\alpha \epsilon^{\dagger\alpha} = \epsilon^\dagger_\alpha \psi^{\dagger\alpha} = \epsilon^\dagger \psi^\dagger \quad (1.5.11)$$

そこで、スカラー場の Lagrangian は運動項しかないんですけども、その超対称変換をしてみると、

$$\delta(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^*) = \partial_\mu \phi \epsilon^\dagger \partial^\mu \psi^\dagger + \epsilon \partial_\mu \psi \partial^\mu \phi^* \quad (1.5.12)$$

となりますね。これがフェルミオン場の Lagrangian の微小変換と相殺しなければならないので、これを打ち消すように、フェルミオンの変換を決めます。そうすると、

$$\delta\psi_\alpha = -i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi, \quad \delta\psi^\dagger_\alpha = i(\epsilon \sigma^\mu)_\alpha \partial_\mu \phi^* \quad (1.5.13)$$

で良いと。

微分が入ってくるわけです。っていうのはフェルミオンの運動項は微分 1 個しか入っていないので、微分 2 個出すためには絶対微分が入ってなきゃいけないんですけども、こういうふうにしておけば、実際フェルミオンの運動項を超対称変換してやると、

$$\delta(i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi) = -\epsilon \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \partial_\nu \phi^* + \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \epsilon^\dagger \partial_\mu \partial_\nu \phi \quad (1.5.14)$$

となりますね。ガンマ行列の Clifford 代数

$$\{\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\nu\}_\alpha^\beta = 2\eta^{\mu\nu} \delta_\alpha^\beta, \quad \{\bar{\sigma}^\mu, \sigma^\nu\}_\alpha^\beta = 2\eta^{\mu\nu} \delta_\alpha^\beta \quad (1.5.15)$$

を使ってやると、

$$\begin{aligned} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \epsilon^\dagger \partial_\mu \partial_\nu \phi &= \psi^\dagger \left(\frac{\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu}{2} + \eta^{\mu\nu} \right) \epsilon^\dagger \partial_\mu \partial_\nu \phi \\ &= \epsilon^\dagger \psi^\dagger \partial^\mu \partial_\mu \phi \\ &= -\epsilon^\dagger \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \phi + \partial_\mu (\epsilon^\dagger \psi^\dagger \partial^\mu \phi) \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

になって、同様に

$$\epsilon \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \partial_\nu \phi^* = \epsilon \partial_\mu \psi \partial^\mu \phi^* + \partial_\mu \left(\frac{\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu - \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu}{2} \psi \partial^\mu \phi^* \right) \quad (1.5.17)$$

ですから、ボソニックな部分と足し合わせてみますと、すべての変換が全微分になると。

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\epsilon^\dagger \partial^\mu \psi^\dagger - \frac{\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu - \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu}{2} \psi \partial^\mu \phi^* \right) \quad (1.5.18)$$

ということで、作用がこの変換の下で不変になってるということなんで、結局こうやって超対称変換を決めることができます。まとめると

$$\delta\phi = \epsilon\psi \quad (1.5.19)$$

$$\delta\psi_\alpha = -i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi \quad (1.5.20)$$

となるというわけですね。

この変換が閉じた代数になっているかどうかのをちゃんと確かめなきゃいけないので、2 回順番を変えてやって引き算すると、

$$\begin{aligned} (\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)\phi &= \delta_2(\epsilon_1\psi) - \delta_1(\epsilon_2\psi) \\ &= -i(\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger - \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\partial_\mu\phi \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

というものが出てきます。微分というのは平行移動の生成子ですから、平行移動が出てくるというわけですね。これは ϕ に関するもので、 ψ についても同様にやると、

$$\begin{aligned} (\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)\psi_\alpha &= -i\delta_2((\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)_\alpha\partial_\mu\psi) + i\delta_1(\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)_\alpha\partial_\mu\psi \\ &= -i(\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)_\alpha\epsilon_2\partial_\mu\psi + i(\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)_\alpha\epsilon_1\partial_\mu\psi \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

となりますが、細かい計算はいいかな。

これもやっぱり平行移動になってほしいので、こういう Fierz 恒等式

$$\chi_\alpha\xi_\eta = -\xi_\alpha\chi_\eta - \xi\chi_\eta\alpha \quad (1.5.23)$$

を使って変形していきますと、(1.5.22) の第 1 項を 2 つに分解してやると、こんな感じになる。

$$(\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)_\alpha\epsilon_2\partial_\mu\psi = -\epsilon_{2\alpha}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger - \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger\partial_\mu\psi_\alpha \quad (1.5.24)$$

さらに簡単な関係式

$$\xi\sigma^\mu\eta^\dagger = -\eta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi \quad (1.5.25)$$

を使ってやると

$$(\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)_\alpha\epsilon_2\partial_\mu\psi = \epsilon_{2\alpha}\epsilon_1^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger\partial_\mu\psi_\alpha \quad (1.5.26)$$

ということで、この計算を戻すとこんなふうになりますね。

$$(\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)\psi = -\left(\epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger - \epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger\right)\partial_\mu\psi + \left(\epsilon_{2\alpha}\epsilon_1^\dagger - \epsilon_{1\alpha}\epsilon_2^\dagger\right)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \quad (1.5.27)$$

第 1 項の方は平行移動になって、もう 1 個の方は $\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi$ なので、これは運動方程式を使うと 0 になる。On-shell で消えると。On-shell じゃないと閉じてないというわけですね。

On-shell じゃないと閉じてないのはそもそもなんでかという、最初に用意したこの ϕ というのは複素スカラーなんで自由度が 2 個、 ψ^α というのは自由度 4 つあるんですね。

d.o.f.

$$\begin{array}{ll} \phi & 2 \\ \psi_\alpha & 4 \end{array}$$

ということで、ここにもう 2 個加えて off-shell でやった方が超対称性が綺麗に書けるということで、普通に ϕ, ψ の他に補助場 F (自由度 2) っていうのを入れておくといいというわけです。

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + |F|^2 \quad (1.5.28)$$

これで自由度が合ったので、もう 1 回作り直すと、off-shell の超対称変換が

$$\delta\phi = \epsilon\psi \quad (1.5.29)$$

$$\delta\psi_\alpha = -i(\sigma^\mu\epsilon^\dagger)_\alpha\partial_\mu\phi + \epsilon_\alpha F \quad (1.5.30)$$

$$\delta F = -i\epsilon^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \quad (1.5.31)$$

となります。そうすると、Lagrangian の変分はやっぱり全微分になって、

$$\delta\mathcal{L} = \partial^\mu V_\mu \quad (1.5.32)$$

$$V^\mu = \epsilon\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi\partial_\nu\phi^* - \epsilon\psi\partial^\mu\phi^* + \epsilon^\dagger\psi^\dagger\partial^\mu\phi + i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\epsilon F \quad (1.5.33)$$

と書けますから、作用はもちろん超対称変換の下で不変のままですけども。

なぜ F を入れたかっていう元々の理由は閉じていることですが、実際に今の超対称変換をやってみると、

$$\begin{aligned} (\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)\phi &= -i(\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger - \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\partial_\mu\phi \\ (\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)\psi_\alpha &= -i(\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger - \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\partial_\mu\psi_\alpha \\ (\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)F &= -i(\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger - \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\partial_\mu F \end{aligned} \quad (1.5.34)$$

ϕ の場合はさっきと同じで、 ψ の場合は運動方程式で消えるっていうところはそもそも現れない。その代わりに F の超対称変換をやってみるとこうなって、全部同じようになってる。ということで、off-shell でカイラル多重項ってものを普通作って、

$$X = \{\phi, \psi_\alpha, F\} \quad (1.5.35)$$

でやりますね。これをカイラル多重項といいます。

こんな基本的なことをここで話していいのちょっと迷ったんですけども訳があって、スーパーカレント、超対称変換のカレントってものを計算しましょう。そのときに、 J_α^μ っていうスピノル的なカレントですけども、Noether カレントを計算するときに、場の変化の部分に加えて、作用がどれだけ全微分で消えるかという情報が必要なわけですね。

$$\epsilon^\alpha J_\alpha^\mu + \epsilon_{\dot{\alpha}} J^{\mu\dot{\alpha}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu X)}\delta X - V^\mu \quad (1.5.36)$$

で、

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu X)}\delta X &= \delta\phi\partial^\mu\phi^* + \delta\phi^\dagger\partial^\mu\phi + i\psi^\dagger\bar{\sigma}\delta\psi \\ &= \epsilon\psi\partial^\mu\phi^* + \epsilon^\dagger\psi^\dagger\partial^\mu\phi + i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu(-i\sigma^\nu\partial_\nu\phi + \epsilon F) \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

は作用の変分ですね。計算してみるとこんな感じになって、一方で V_μ ってものは

$$V^\mu = \epsilon\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi\partial_\nu\phi^* - \epsilon\psi\partial^\mu\phi^* + \epsilon^\dagger\psi^\dagger\partial^\mu\phi + i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\epsilon F \quad (1.5.38)$$

でしたから、これ計算して J_α^μ を見出すと

$$J_\alpha^\mu = (\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\psi)_\alpha\partial_\nu\phi^* \quad (1.5.39)$$

となります。

それで、カレントがわかれば保存電荷がわかるので、保存電荷を定義するんですね。 $\sqrt{2}$ っていうのは記法の問題ですけども、時間成分のカレントを積分して超対称電荷を作ることができます。

$$Q_\alpha = \sqrt{2} \int d^3x J_\alpha^0 = \sqrt{2} \int d^3x (\sigma^\nu\bar{\sigma}^0\psi)_\alpha\partial_\nu\phi^* \quad (1.5.40)$$

もちろん、確かめとして、超対称変換を電荷で計算してみると、

$$\begin{aligned}
[Q_\alpha, \phi] &= \sqrt{2} \int d^3y (\sigma^\nu \sigma^0 \psi)_\alpha [\partial_\nu \phi^*(t, \mathbf{y}), \phi(t, \mathbf{x})] \\
&= \sqrt{2} \int d^3y (\sigma^0 \sigma^0 \psi)_\alpha [\partial_0 \phi^*(t, \mathbf{y}), \phi(t, \mathbf{x})] \\
&= -i\sqrt{2} \psi_\alpha(t, \mathbf{x})
\end{aligned} \tag{1.5.41}$$

量子化条件によって、 $[\partial_\nu \phi^*(t, \mathbf{y}), \phi(t, \mathbf{x})]$ の 0 微分だけ拾ってきて、 $\sigma^0 \sigma^0 = 1$ ですから、 $[\partial_0 \phi^*(t, \mathbf{y}), \phi(t, \mathbf{x})]$ がデルタ関数を出して、このようになります。実際に、超対称変換は

$$[\epsilon Q + \epsilon^\dagger Q^\dagger, \phi] = -i\sqrt{2} \delta \phi \tag{1.5.42}$$

となって、当たり前ですけれどももさっき定義した超対称変換のルールが出てくると。

すべての場 X に対して超対称変換すると、ちゃんと

$$[\epsilon Q + \epsilon^\dagger Q^\dagger, X] = -i\sqrt{2} \delta X \tag{1.5.43}$$

これ交換子をとると、超対称変換になっていると。超対称電荷がわかったら、代数をもう一回計算し直すと、 X っていうのはカイラル多重項に入っている ϕ とか ψ とか F ですがけれども、すべてに対して計算してみると、

$$\left[[\epsilon_2 Q + \epsilon_2^\dagger Q^\dagger, \epsilon_1 Q + \epsilon_1^\dagger Q^\dagger], X \right] = 2 \left(\epsilon_2 \sigma^\mu \epsilon_1^\dagger, \epsilon_1 \sigma^\mu \epsilon_2^\dagger \right) [P_\mu, X] \tag{1.5.44}$$

$[\epsilon_2 Q + \epsilon_2^\dagger Q^\dagger, \epsilon_1 Q + \epsilon_1^\dagger Q^\dagger]$ はちょうど $\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1$ みたいなもんですから、(1.5.34) で計算したのになってるんですね。全部微分になってると。ということでここから超対称変換の代数を読み取ることができて

$$\{Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}^\dagger\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \tag{1.5.45}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 \tag{1.5.46}$$

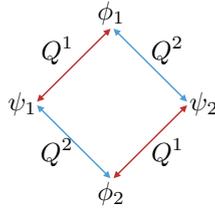
$$\{Q_{\dot{\alpha}}^\dagger, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\} = 0 \tag{1.5.47}$$

$\{Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}^\dagger\}$ が P_μ つまり平行移動に比例している、他の $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$ と $\{Q_{\dot{\alpha}}^\dagger, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\}$ は全部 0 という交換関係です。

1.5.1 Extended SUSY

ちょっと脇道にそれますけれども、後で使うと思うので、いま Q というのはスピノルの脚しか持っていなかったんですけども、何個もあるよっていう場合でもいいですね。それは extended SUSY といって、その足を a とか b で表すと、 \mathcal{N} まで一般には考えてもいいと。 $\mathcal{N} = 1$ の場合は $\mathcal{N} = 1$ 超対称性と呼ばれてて、 $\mathcal{N} = 2$ のときは $\mathcal{N} = 2$ 超対称性っていいですね。

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha^a, Q_{\dot{\alpha}b}^\dagger\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \delta_b^a \\
\{Q_\alpha^a, Q_\beta^b\} &= 0 \quad (a, b = 1, 2, \dots, \mathcal{N}) \\
\{Q_{\dot{\alpha}a}^\dagger, Q_{\dot{\beta}b}^\dagger\} &= 0
\end{aligned} \tag{1.5.48}$$



$\mathcal{N} = 1$ のときは、 ϕ というスカラー場と ψ というフェルミオンがある超対称変換で入れ替わるわけですね。そういうのが 2 個、カイラル多重項が 2 個あったとします。そうするとそれぞれ、 ϕ_1 と ψ_1 が多重項を組んで、 ϕ_2 と ψ_2 が多重項を組むと。2 番目の超対称性が何を变えるかという、 ϕ_1 と ψ_2 を入れ替えるんですね。だから、 $\mathcal{N} = 2$ にすると、スカラー場 2 個とフェルミオン 2 個だと。こういうのをハイパー多重項といたりします。代数は例えば (1.5.48) のような形になっています。

ところが、 $\mathcal{N} = 2$ 以上になると中心電荷 (central charge) っていうのを代数に入れることができます。中心拡大と呼ばれてて、単純に $\mathcal{N} = 1$ を $\mathcal{N} = 2$ 代数に拡張したのが (1.5.48) なんですけども、 $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$ と $\{Q_\alpha^\dagger, Q_\beta^\dagger\}$ のところに 0 じゃない中心電荷を入れることができます。

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^a, Q_{\dot{\alpha}b}^\dagger\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \delta_b^a \\ \{Q_\alpha^a, Q_\beta^b\} &= 2\sqrt{2}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{ab}Z \end{aligned} \quad (1.5.49)$$

$$\{Q_{\dot{\alpha}a}^\dagger, Q_{\dot{\beta}b}^\dagger\} = 2\sqrt{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{ab}Z \quad (1.5.50)$$

この Z のことを中心電荷というんですけども。例えば、今は $\mathcal{N} = 2$ の場合を書いてますけども、そこでこういうふうに中心拡大したら、 Q^1 と $Q^{2\dagger}$ を

$$A_\alpha = \frac{1}{2}(Q_\alpha^1 + \epsilon_{\alpha\beta}(Q_\beta^2)^\dagger) \quad (1.5.51)$$

$$B_\alpha = \frac{1}{2}(Q_\alpha^1 - \epsilon_{\alpha\beta}(Q_\beta^2)^\dagger) \quad (1.5.52)$$

というふうに線形結合します。

そうすると、 $\{A_1, A_1^\dagger\}$ を計算することが簡単にできて、これちょこっと計算すると

$$\begin{aligned} \{A_1, A_1^\dagger\} &= \frac{1}{4} \{ (Q_\alpha^1 + \epsilon_{\alpha\beta}(Q_\beta^2)^\dagger), (Q_\alpha^{1\dagger} + \epsilon_{\alpha\beta}(Q_\beta^2)) \} \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{11}^\mu + \sigma_{22}^\mu) P_\mu + \sqrt{2}Z \\ &= M + \sqrt{2}Z \end{aligned} \quad (1.5.53)$$

というふうになります。同様に全部やると、

$$\{A_\alpha, A_\beta^\dagger\} = (M + \sqrt{2}Z)\delta_{\alpha\beta} \quad (1.5.54)$$

$$\{B_\alpha, B_\beta^\dagger\} = (M - \sqrt{2}Z)\delta_{\alpha\beta} \quad (1.5.55)$$

上の A_1, A_1^\dagger というのは $\alpha = \beta = 1$ ということで書いてますけども、他の成分に対しても全部やって、 B, B^\dagger に関しても計算できます。ちょっと基底を変えて書くところなると。

特に、質量 M で中心電荷 Z をもった規格された状態っていうのを $|M, Z\rangle$ と書くことにしましょう。 $|M, Z\rangle$ と書いて、 $\{B_\alpha, B_\beta^\dagger\}$ の内積をとってみると。これは正定値なので必ず 0 より大きいわけですけども。そうすると (1.5.55) のような代数だったので

$$0 \leq \langle M, Z | \{B_\alpha, B_\beta^\dagger\} | M, Z \rangle = (M - \sqrt{2}Z)\delta_{\alpha\beta} \quad (1.5.56)$$

というふうになります。ということは、この M というのは

$$M \geq \sqrt{2}Z \quad (1.5.57)$$

ということが言えます。ちなみに、この $M = \sqrt{2}Z$ を満たす状態は

$$B_\alpha |M, Z\rangle = 0 \quad (1.5.58)$$

ですから、 B_α で変換しても何も動かない、不変な状態になってるので、 A_α をすると動くんだけど B_α をすると動かない。ですから、多重項の長さとしては半分になってるんですね。 B_α に対しては動かないんだから。ということで、そういうのを short multiplet と呼ばれて、 $M > \sqrt{2}Z$ のところは short に対して long multiplet というふうに呼ばれています。で、(1.5.57) のように質量に制限がつくってというのは、非常に BPS っぽいじゃないかと。そこで、(1.5.57) に着目していこうというわけです。超対称代数を考えることによって質量にバウンドがつくので、それと先程の Bogomol'nyi 平方完成というのが関係してるというのが予想がつくんですけども。

ちょっと話をまた元に戻して、先ほど free な Wess-Zumino 模型をやったんですけども、free な模型じゃドメインウォールを作れないので、相互作用が必要ですね。相互作用をどうやって入れるかという、よく知られているように、スーパーポテンシャル

$$W = W(\phi) \quad (1.5.59)$$

ってというのは ϕ の正則関数ですね。 $\bar{\phi}$ にはよらない ϕ だけの関数で、何でもいからこういうものを持ってきて、 W の ϕ による 1 階微分と、2 階微分*4 で補助場 F やフェルミオンとこう結合している。

$$V_{\text{WZ}} = -W_\phi F + \frac{1}{2} W_{\phi\phi} \psi\psi + \text{h.c.} \quad (1.5.61)$$

あと Hermite 共役を考えれば、これで超対称変換に対して free になっています。実際、 $\delta(W_\phi F)$ というのを計算してみると、

$$\begin{aligned} \delta(W_\phi F) &= W_{\phi\phi} F \delta\phi + W_\phi \delta F \\ &= W_{\phi\phi} F \epsilon\psi - iW_\phi \epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \end{aligned} \quad (1.5.62)$$

となります。

同じことを $\delta(W_\phi \psi\psi)$ でやってみると、

$$\begin{aligned} \delta(W_\phi \psi\psi) &= W_{\phi\phi\phi} \psi\psi \delta\phi + 2W_{\phi\phi} \psi \delta\psi \\ &= W_{\phi\phi\phi} \psi\psi (\epsilon\psi) + 2W_{\phi\phi} (-i\psi \sigma^\mu \epsilon^\dagger \partial_\mu \phi + \epsilon\psi F) \\ &= 2W_{\phi\phi} (i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi \partial_\mu \phi + \epsilon\psi F) \end{aligned} \quad (1.5.63)$$

ここで、 $\delta\phi$ の項は $\delta\phi = \epsilon\psi$ だったので、 ψ が 3 つ入ってきちゃうのでこれはもう 0 ですね。それ以外の項だけが残ります。結局、 δV_{WZ} を見ますと、

$$\begin{aligned} -\delta V_{\text{WZ}} &= W_{\phi\phi} F \epsilon\psi - iW_\phi \epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - W_{\phi\phi} (i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi \partial_\mu \phi + \epsilon\psi F + \text{h.c.}) \\ &= \partial_\mu (-iW_\phi \epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi + \text{h.c.}) \end{aligned} \quad (1.5.64)$$

*4 編注：下付き添字 ϕ は ϕ による微分を表す。

$$W_\phi = \frac{\partial W}{\partial \phi}, \quad W_{\phi\phi} = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}, \quad W_{\phi\phi\phi} = \frac{\partial^3 W}{\partial \phi^3} \quad (1.5.60)$$

やっぱり全微分となっていると。ということで、作用は不変であるというふうになります。

こうすると、ポテンシャル項からもカレントに寄与が出てきます。結局、Wess-Zumino の Lagrangian は補助場入りでこう書けます。

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + i\psi^* \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + |F|^2 + W_\phi F - \frac{1}{2} W_{\phi\phi} \psi\psi + \text{h.c.} \quad (1.5.65)$$

補助場は運動項がないので、運動方程式が

$$F = -\bar{W}_{\bar{\phi}} \quad (1.5.66)$$

となるので、これを (1.5.65) に戻すと、

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + i\psi^* \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - |W_\phi|^2 - \frac{1}{2} W_{\phi\phi} \psi\psi - \frac{1}{2} \bar{W}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} \psi^\dagger \psi^\dagger \quad (1.5.67)$$

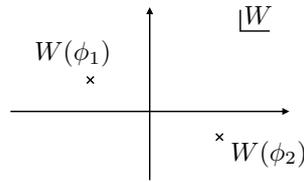
になって、ポテンシャルはスーパーポテンシャルの微分の絶対値の 2 乗が出るわけです。よく知られている $\mathcal{N} = 1$ の模型ですね。

スカラーポテンシャル

$$V_{\text{WZ}} = |W_\phi|^2 \quad (1.5.68)$$

っていうのは正定値ですから、 V が 0 になるところというのは、スーパーポテンシャルの微分が 0 になると。

$$V_{\text{WZ}} = |W_\phi|^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad W_\phi = 0 \quad (1.5.69)$$



そこで、スーパーポテンシャルの平面を考えたら、その中である点 $W(\phi_1)$ が超対称な真空になってるけれども、それは W の停留点になってると。

じゃあ、ドメインウォール解をこの超対称な理論で考えてみましょう。 x だけによった解を考えます。フェルミオンは全部 0 にすると。

$$\phi = \phi(x), \quad \psi = 0 \quad (1.5.70)$$

そうすると、ドメインウォールは無限に伸びているオブジェクトなので、エネルギーが発散してしまうから、全部積分すると意味がないんですけども、単位面積あたりの Hamiltonian を考えます。だから、 x 方向の積分だけです。

$$\begin{aligned} H &= \int dx (|\phi'|^2 + |W_\phi|^2) \\ &= \int dx [|\phi' \pm e^{i\alpha} \bar{W}_{\bar{\phi}}|^2 \mp (e^{-i\alpha} \phi' W_\phi + e^{i\alpha} \bar{\phi}' \bar{W}_{\bar{\phi}})] \\ &\geq \mp [e^{-i\alpha} W + e^{i\alpha} \bar{W}]_{x=-\infty}^{\infty} \\ &\geq 2|\text{Re}[e^{i\alpha_0} \Delta W]| \end{aligned} \quad (1.5.71)$$

結局、超対称な理論では $(|\phi'|^2 + |W_\phi|^2)$ だけになっちゃうんですね。これ Bogomol'nyi 平方完成簡単にできますから、複素なんで任意定数 α っていうのが入ってきて、こんな感じでバウンドがつかます。

結局バウンドは何で決まってるかっていうと、適切な位相を選ぶ必要はあるんですけども、スーパーポテンシャルの $x = +\infty$ の値と $x = -\infty$ での値の差よりも絶対大きいと。このバウンドを最もきつくなるように α を選べば、それが一番正しいバウンドを与えるんですね。模型を決めると決まるものなので、模型依存なんですけども、まあ模型を決めれば決まるということです。

BPS 方程式は $\phi' \pm e^{i\alpha} \bar{W}_{\bar{\phi}} = 0$ になりなさいということですから

$$\phi' = \mp e^{i\alpha_0} \bar{W}_{\bar{\phi}} \quad (1.5.72)$$

となって、質量は

$$M = 2|\text{Re}[e^{i\alpha_0} \Delta W]| \quad (1.5.73)$$

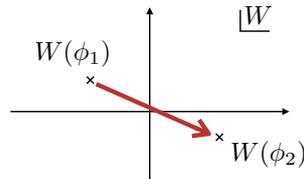
ですね。これが超対称な理論のドメインウォール解です。ところで、スーパーポテンシャルを x で微分してみると、

$$\frac{dW}{dx} = \phi' W_{\phi} \quad (1.5.74)$$

になりますね。 ϕ' というのは、(1.5.72) から言うと、なんか位相因子に $\bar{W}_{\bar{\phi}}$ が掛かります。

$$\frac{dW}{dx} = \mp e^{i\alpha_0} \bar{W}_{\bar{\phi}} W_{\phi} \quad (1.5.75)$$

そうすると、 $\bar{W}_{\bar{\phi}} W_{\phi}$ は実なんです。 $e^{i\alpha_0}$ は定数ですから、 W 空間の中で、ドメインウォールを $x = -\infty$ から $x = \infty$ までもっていくと、スーパーポテンシャルの偏角が一定だというわけですね。



ですから例えば、 $W(\phi_1)$ と $W(\phi_2)$ に真空があったとしたら、直線的に、 $\mp e^{i\alpha_0} \bar{W}_{\bar{\phi}} W_{\phi}$ の偏角が変わらないので、ぐにゃーっと行くのではなくて、直線が一番エネルギー低そうなんですけれども、 W 平面で直線に行くというのが (1.5.75) からわかります。

具体例は ϕ^4 理論ですけども、スーパーポテンシャルとして、例えば

$$W = -m^2 \phi + \frac{\lambda}{3} \phi^3 \quad (1.5.76)$$

という、スーパーポテンシャルの微分の 2 乗が ϕ^4 になるので、3 次ものを選んでくればいいと。

$$V = \lambda^2 \left| \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right|^2 \quad (1.5.77)$$

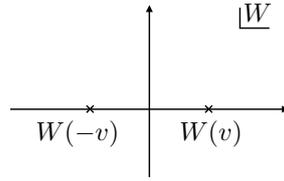
となりますね。こうなると、 ϕ の真空値はちょうど

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \quad (1.5.78)$$

になりますね。スーパーポテンシャルの $\pm v$ での値は

$$W(\pm v) = \mp \frac{2m^3}{3\sqrt{\lambda}} \quad (1.5.79)$$

で決まります。これが真空での値なんで、



これの $W(v)$ と $W(-v)$ の差がドメインウォールの質量を与えるわけですね。

ということで、BPS 方程式が

$$\phi' = \pm(\lambda\bar{\phi}^2 - m^2) \quad (1.5.80)$$

これ ϕ^4 とほとんど一緒なので、複素ですけども、虚部は全部 0、 ϕ が実部だけ変化してこうなると。

$$\text{BPS 解: } \phi = \pm\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \tanh m\sqrt{\lambda}(x - x_0) \quad (1.5.81)$$

張力は、いまスーパーポテンシャルの係数、 λ とか m とか全部実数だと思ってやってるんですけども、

$$\text{BPS 張力: } M = 2\Delta W = \frac{8m^3}{3\sqrt{\lambda}} \quad (1.5.82)$$

というのが出てくるんですね。

これが超対称性とほんとにどう関係しているのかということこれから見ていきたいんですけども、そのためにカレントを計算して、そこから超対称電荷を計算しましょう。カレントを計算するためには、Lagrangian がどう変化したのが必要ですね。

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(V_{\text{free}}^\mu + V_{\text{int}}^\mu) \quad (1.5.83)$$

V_{free}^μ 、free というのはポテンシャルがない部分を先に計算して、ポテンシャル項からくる変化の部分を見ますね。それぞれこうなってる。

$$V_{\text{free}}^\mu = \epsilon\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi\partial_\nu\phi^* - \epsilon\psi\partial^\mu\phi^* + \epsilon^\dagger\psi^\dagger\partial^\mu\phi + i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\epsilon F \quad (1.5.84)$$

$$V_{\text{int}}^\mu = iW_\phi\epsilon^\dagger\bar{\sigma}^\mu\psi + i\bar{W}_{\bar{\phi}}\epsilon\sigma^\mu\psi^\dagger \quad (1.5.85)$$

ということで、合わせてスーパーカレントを読み取ると、

$$J_\alpha^\mu = (\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\psi)_\alpha\partial_\nu\phi^* - i\bar{W}_{\bar{\phi}}(\sigma^\mu\psi^\dagger)_\alpha \quad (1.5.86)$$

Free の場合は第 1 項だけだったんですけども、スーパーポテンシャルが入ったことによって、第 2 項が付け加わっています。ということで、超対称電荷はこれの第 0 成分の空間積分ですから、

$$Q_\alpha = \sqrt{2} \int d^3x [(\sigma^\nu\bar{\sigma}^0\psi)_\alpha - i\bar{W}_{\bar{\phi}}(\sigma^0\psi^\dagger)_\alpha] \quad (1.5.87)$$

となるんですね。

それで、代数を計算してみます。 $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$ を計算してみますと、細かい計算もう覚えてないんですけども、定義によりいま計算したものをそれぞれ入れるだけですね。

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 2 \int d^3x d^3y \{(\sigma^\nu\bar{\sigma}^0\psi_x)_\alpha\partial_\nu\phi_x^* - i\bar{W}_{\bar{\phi}}(\sigma^0\psi_x^\dagger)_\alpha, (\sigma^\rho\bar{\sigma}^0\psi_y)_\beta\partial_\rho\phi_y^* - i\bar{W}_{\bar{\phi}}(\sigma^0\psi_y^\dagger)_\beta\} \\ &= 2 \int d^3x d^3y \left[-i\partial_\nu\phi^*(x)\bar{W}_{\bar{\phi}(y)}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu\bar{\sigma}^{0\dot{\alpha}\gamma}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^0 \left\{ \psi_\gamma(x), \psi^{\dot{\beta}\dot{\beta}}(y) \right\} \right. \\ &\quad \left. - i\partial_\rho\phi^*(y)\bar{W}_{\bar{\phi}(x)}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu\bar{\sigma}^{0\dot{\beta}\gamma}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^0 \left\{ \psi_\gamma(y), \psi^{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}(x) \right\} \right] \\ &= 2i \int d^3x \left[\partial_\nu\phi^*\bar{W}_{\bar{\phi}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu\bar{\delta}^{\dot{\alpha}\gamma}\delta_{\beta\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\delta_{\gamma\dot{\gamma}} + \partial_\rho\phi^*\bar{W}_{\bar{\phi}}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\rho\delta^{\dot{\beta}\gamma}\delta_{\alpha\dot{\alpha}}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\delta_{\gamma\dot{\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (1.5.88)$$

ψ と ψ^\dagger の組だけが反交換関係に引っかかってきますから、これを素直にやればいいですね。普通の ψ と ψ^\dagger の反交換関係、量子化条件を計算してやると、こうなるんですね。こうなりました。これを見てもらうとわかる通り、 $W = 0$ だったら、もうないですね。 Q と Q の反交換関係は 0 になります。だけど、ポテンシャルを入れたら、何か出てきてるんですね。

これを整理しますと、

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2i \int d^3x \partial_\nu \bar{W} \left(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \epsilon^{\beta\dot{\alpha}} + \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu \epsilon^{\alpha\dot{\beta}} \right) \quad (1.5.89)$$

となります。(…) を具体的に計算してみますと、

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \epsilon^{\beta\dot{\alpha}} + \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu \epsilon^{\alpha\dot{\beta}} &= -(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu + \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) \\ &= -i((\sigma^\nu \bar{\sigma}^2)_\alpha{}^\beta + \sigma^\nu \bar{\sigma}^2_\beta{}^\alpha) \\ &= \begin{cases} 0 & \nu = 0 \\ 2(\sigma^3)_\alpha{}^\beta & \nu = 1 \\ -2i\delta_\alpha{}^\beta & \nu = 2 \\ -2(\sigma^1)_\alpha{}^\beta & \nu = 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5.90)$$

$\nu = 0$ のときは 0 で、 $\nu = 1, 2, 3$ の場合はノンゼロになるということで、結局まとめますと

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 4i \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} \cdot \int d^3x \vec{\nabla} \bar{W}, \quad \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} = (\sigma^3, i\mathbf{1}, -\sigma^1)_{\alpha\beta} \quad (1.5.91)$$

この Σ ベクトルは (1.5.90) の空間部分ですね。まあ 2 倍とかそういうのを除いて。スーパーポテンシャルの空間微分を積分していると。

これは、 xy 方向はちょっと一旦置いておいて、 x_3 方向だけ、ドメインウォールっていうのは x^3 方向にしかよっていないので、この微分は x_3 方向しか効いていないとすると、 x^3 方向について積分できてしまいますね。何が出てくるかという、スーパーポテンシャルの差が出てきます。スーパーポテンシャルの差は何かっていうとドメインウォールの質量でしたから、結局 $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$ を計算すると、ここにドメインウォールの質量が出てくる。それは何かっていうと、 $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$ って普通何もなければドメインウォールとかそんなの何も考えなければ 0 です。それが超対称代数ですね。だけどドメインウォールを考えたことによって、ここに中心電荷が現れると。その中心電荷はドメインウォールの質量そのものになってるということで、普通 $\mathcal{N} = 1$ の超対称代数に中心拡大ができないんだけど、ドメインウォールとかそういう拡張されたオブジェクトを考えると、中心拡大できるんですね。中心電荷っていうのは下からバウンドされてましたから、そのバウンドがまさに BPS バウンドに一致してると。

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2i\sigma^3 MS \quad (1.5.92)$$

$$S = \int dydz = \text{面積} \quad (1.5.93)$$

$$M = 2 \int dx \frac{d\bar{W}}{dx} \quad (1.5.94)$$

ということで、これはまさに $\mathcal{N} = 1$ 超対称代数の中心拡大で、tensorial central charge と呼ばれています [17, 18, 19]。

もうちょっと突っ込んで、超対称性変換とそもそもどう関係しているのかといいますと、超対称変換は

$$\delta\phi = \epsilon\psi \quad (1.5.95)$$

$$\delta\psi_\alpha = -i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi + \epsilon_\alpha F \quad (1.5.96)$$

$$\delta F = -i\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \quad (1.5.97)$$

でした。運動方程式の解としてはフェルミオンは0とするので、(1.5.95)とか(1.5.97)は自明に0ですね。けども、(1.5.96)はボソンによっているので、この $\delta\psi$ というのが役割を果たすわけです。そこで、この超対称変換に対して、フェルミオンがある条件を課した変換に対して不変でありなさいという条件を課します。それをどういう条件にするかという、こういうふうを選びます。

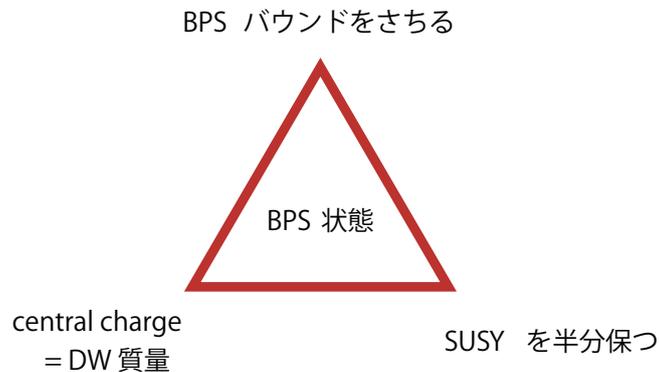
$$\text{Killing スピノル条件: } \pm i e^{-i\alpha_0} (\sigma^1 \epsilon^\dagger)_\alpha = \epsilon_\alpha \quad (1.5.98)$$

ϵ^\dagger に σ^1 をかけて、位相倍したものが ϵ になりなさいと。だから、射影をかけているんですね。半分は落とされている。4個あるうちの2個に対しては、(1.5.96)の変換が0になりなさいという条件をおきます。場は x 方向にしかよらないとします。そうすると、(1.5.98)の条件を上式の(1.5.96)に入れて、 $\delta\psi = 0$ とやると、

$$\delta\psi = 0 \Rightarrow \partial_1 \phi = \mp e^{i\alpha_0} F = \pm e^{i\alpha_0} \bar{W}_{\bar{\phi}} \quad (1.5.99)$$

になります。 $F = -\bar{W}_{\bar{\phi}}$ でしたから、こうなります。BPS方程式が出てきてると。半分超対称性を保ちなさいという条件から、BPS方程式が出てくるんだというわけですね。

まとめますと、



BPS状態というのはBPSバウンドをさちるというのが、始めからそういうことを言っていました。なんでもさちるんだらうといたら、それはドメインウォールの質量が中心電荷そのもので、中心電荷は下からバウンドされてるんで、まさにそのバウンドをヒットしてると。さらに超対称性を半分ということになった。これは今ドメインウォールでやりましたけれども、他のソリトンもこういうことができます。ポーテックスとかモノポールとか。理論はいろいろ、 $\mathcal{N} = 2$ とか $\mathcal{N} = 4$ とかそういう理論になったりしますけども、基本的には次元が変わっても、やることはここでやったのと同じようなことをすれば同じことがわかります。

1.5.2 量子効果

それで、量子効果がどうなってるかっていいますと、この場合量子効果が入りません。超対称性があるので、質量は量子効果を受けないということを示すことができます。それはさっきみたいな計算をするよりは、超対称性の力を使ったほうがいいので、ちょっと見ていきましょう。その前に、超対称性の代数をもう一回。

$$\{Q_\alpha, Q_\alpha^\dagger\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu \quad (1.5.100)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 \quad (1.5.101)$$

$$\{Q_\alpha^\dagger, Q_\beta^\dagger\} = 0 \quad (1.5.102)$$

もともと理論はこういう超対称性をもってるわけですね。 $\mathcal{N} = 1$ の超対称性をもつてると。超対称電荷 Q の位相を自由に換えられるので、位相変換を $U(1)_R$ ということにしたら、例えば Q をチャージ -1 として、 Q^\dagger は反対のチャージをもつてるといふふうに、こういうのがありますね。

$$U(1)_R \quad \begin{cases} [R, Q] = -Q \\ [R, Q^\dagger] = Q \end{cases} \quad (1.5.103)$$

こういうのを $U(1)_R$ 対称性といいます。

超対称電荷の R チャージは

$$R[Q] = 1 \quad (1.5.104)$$

で、 $[Q, \phi] \sim \psi$ 、 ϕ を変換すると ψ になるので、

$$R[\psi] = R[\phi] - 1 \quad (1.5.105)$$

は上の関係式からこうなっているのはわかります。スカラーポテンシャル

$$V_{WZ} = -W_\phi F + \frac{1}{2} W_{\phi\phi} \psi\psi + \text{h.c.} \quad (1.5.106)$$

の中に $W_{\phi\phi}\psi\psi$ があつたんですけども、その R チャージが 0 と要請すると、

$$0 = R[W_{\phi\phi}\psi\psi] = R[W] + 2(R[\psi] - R[\phi]) = R[W] - 2 \quad (1.5.107)$$

$$\implies R[W] = 2 \quad (1.5.108)$$

というのは一般的に超空間とか使うともっとスッキリできるかもしれませんが、今はこういう説明をしますけども。

今、我々が扱っている模型っていうのは ϕ^4 模型なので、

$$W(\phi; m, \lambda) = -m^2\phi + \frac{\lambda}{3}\phi^3 \quad (1.5.109)$$

のようなスーパーポテンシャルでしたね。この m とか λ っていうのは結合定数なんですけども、スーパーポテンシャルは m とか λ とかに関しても正則に入っているんで、 m とか λ も場だと思ってしまうと。スプリオン場と言いますけども。そう思うと、この系の対称性を見ると 2 つ $U(1)$ 変換があつて、

		$U(1)_R$	$U(1)_Q$
$R[W] = 2$	ϕ	2	2
	m	0	-1
$Q[W] = 0$	λ	-4	-6

スーパーポテンシャルの R チャージが 2 でありなさいということから、 ϕ の R チャージを 2 として、それからこっちの $U(1)_Q$ 変換に対してはスーパーポテンシャルのチャージは 0 であるということを要請しますと、 ϕ が 2 で、(1.5.109) 右辺第 1 項を見ますと、スーパーポテンシャルのチャージが 2 じゃなきゃいけないので ϕ が 2 だったら m はもう 0 じゃなきゃいけないですね。 ϕ^3 がチャージ 6 をもつてるので、 λ はチャージは -4 じゃなきゃいけない。こう決まるわけです。 $U(1)_Q$ に対しては、 ϕ を 2 とアサインしますと、 m は -1 を持つてれば (1.5.109) 右辺第 1 項のチャージが 0 になりますね。(1.5.109) 右辺第 2 項でチャージを消すためには λ は -6 のチャージを持つてなきゃいけないと。もちろん、これは期待値をとってしまったら、そこで対称性は破れるわけなんですけども、量子効果をみるにはこの対称性を使うのがいいと。

で、非くりこみ定理っていうのがあって、あるカットオフスケール Λ からあるスケール μ まで積分して、有効理論が得られたとしましょう。スーパーポテンシャルはどっちにしろ正則じゃなきゃいけないということと R チャージが 2 じゃなきゃいけないとか、さっきの $U(1)_Q$ で書いたチャージが 0 じゃなきゃいけないとしますと、 $m\phi^2$ という塊と $\lambda\phi^2/m^2$ という塊しか出てこれない。それぞれの R チャージと Q チャージはさっきの表から計算できて、

$$R[m\phi^2] = 2, \quad Q[m\phi^2] = 0, \quad R\left[\frac{\lambda\phi^2}{m^2}\right] = 0, \quad Q\left[\frac{\lambda\phi^2}{m^2}\right] = 0 \quad (1.5.110)$$

$\lambda\phi^2/m^2$ っていうのはどっちのチャージも 0 になってますから、任意の関数としてこの塊はあっていいと。

$$W_{\text{eff}} = m\phi^2 f\left(\frac{\lambda\phi^2}{m^2}\right) \quad (1.5.111)$$

ということで、多項式に展開しますと、

$$\begin{aligned} W_{\text{eff}} &= m\phi^2 \sum a_n \left(\frac{\lambda\phi^2}{m^2}\right)^n \\ &= \sum a_n m^{2(1-n)} \lambda^n \phi^{1+2n} \end{aligned} \quad (1.5.112)$$

となつてると。

こんな一般的な形に書けていますけども、これで何をするかということ、この結合定数 m とか λ を非常に小さいと思うわけですね。

$$\text{弱結合極限 } m \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0 \quad (1.5.113)$$

そうすると、tree ということを使うわけです。

$$W_{\text{eff}} = \sum a_n m^{2(1-n)} \lambda^n \phi^{1+2n} \quad (1.5.114)$$

$$\rightarrow -m^2\phi + \frac{\lambda}{3}\phi^3 \quad (1.5.115)$$

$m \rightarrow 0$ で発散してはいけないので、 $1-n \geq 0$ でないといけない。同様に、 $\lambda \rightarrow 0$ のときに発散してはいけないので、 $n \geq 0$ でなきゃいけない。これを満たす n って何かっていったら、0 か 1 しかないですね。0 か 1 しかないってことは、有効スーパーポテンシャルは

$$W_{\text{eff}} = -m^2\phi + \frac{\lambda}{3}\phi^3 = W_{\text{tree}} \quad (1.5.116)$$

で元の形と同じだったと。Tree と一緒だと。ということで、スーパーポテンシャルはくりこみを受けないというわけです。

一方で、運動項の方は正則ではないので、くりこみは一般には受けると。ということで、波動関数くりこみ

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = Z\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + Zi\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \quad (1.5.117)$$

を受けるとはすけれども、運動項を、 Z を吸収して、こういう形

$$\phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{Z}}\phi, \quad \psi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{Z}}\psi \quad (1.5.118)$$

でやっておくと、結合定数の方には、(1.5.109) という模型だからですけれども、 ϕ をリスケールすると

$$m \rightarrow Z^{1/4}m, \quad \lambda \rightarrow Z^{3/2}\lambda \quad (1.5.119)$$

のように効いてきます。

だけでも、ドメインウォールの質量っていうのは

$$M = 2\Delta W = \frac{8m^3}{3\sqrt{\lambda}} \quad (1.5.120)$$

だったんですね。そこで、 Z 因子でくりこんだやつはどうなってるかっていうと、ちょうど分母と分子で打ち消し合って消えてしまうと。

$$\frac{m^3}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow \frac{(Z^{1/4}m)^3}{\sqrt{Z^{3/2}\lambda}} = \frac{m^3}{\sqrt{\lambda}} \quad (1.5.121)$$

ということで、4次元の超対称な理論でのドメインウォールっていうのは、質量は量子補正を受けないと。これは超対称性のおかげだったわけですね。超対称性があっても、2次元とかで超対称性がもっと少ないような場合には、量子補正を受けることがあります。

1.5.3 Nambu-Goldstone fermion

チラッと午前中に出てきましたけれども、南部-Goldstone フェルミオンというのが局在しています。ドメインウォールっていうのは、さっき言ったように超対称性を半分保つ、もしくは半分破ってるんですね。ですから、そこに南部-Goldstone フェルミオンが、ゴールドストーンが現われるんだと。それはドメインウォールに局在している。で、こんな理論

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - |W_\phi|^2 - \frac{1}{2}W_{\phi\phi}\psi\psi - \frac{1}{2}\bar{W}_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\psi^\dagger\psi^\dagger \quad (1.5.122)$$

で、これはさっきの Wess-Zumino 模型。運動方程式は

$$\partial^2 \phi + W_\phi \bar{W}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} = 0 \quad (1.5.123)$$

だったんですけれども、 x 方向にしかよらないと仮定すると、こうなると。

$$\phi'' + W_\phi \bar{W}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} = 0 \quad (1.5.124)$$

この解を解くと、 \tanh とかいう解が出てきますね。

$$\phi_k = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \tanh m\sqrt{\lambda}(x-a) \quad (1.5.125)$$

という解があったので、この解の周りに場を展開しますね。

$$\phi = \phi_k + \varphi_1 + i\varphi_2 \quad (1.5.126)$$

$$\psi = 0 + \chi \quad (1.5.127)$$

複素のスカラー場なので実部 φ_1 と虚部 φ_2 。フェルミオン ψ のバックグラウンドは0ですね。ドメインウォールの存在は x 方向の Lorentz 対称性を破っているので、(1.5.125) のパラメータ a で、 ϕ_k を変分したものが0になるというのは午前中にやった話です。 ϕ'_k はゼロモードの波動関数です。

$$\varphi_1^{(0)} = \phi'_k \quad (1.5.128)$$

フェルミオンについても、前やったように、結局湯川結合の項がありましたね。湯川結合の部分って
いうのは、(1.5.122) の $W_{\phi\phi}\psi\psi$ で、 W はいま ϕ の 3 次なんで、 $\phi\psi\psi$ となります。ですから、同じなん
ですね。そこから、ゼロモードが現れると。

$$\left. \begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - \bar{W}''\chi^\dagger &= 0 \\ i\sigma^\mu\partial_\mu\chi^\dagger - W''\chi &= 0 \end{aligned} \right\} i\gamma^\mu\partial_\mu\Phi - M\Psi = 0 \quad (1.5.129)$$

左の式が Dirac 方程式とその共役ですね。いま 2 成分 Weyl スピノルで書いているんですけども、4
成分で書き直すと右の式になって、 γ 行列と Ψ , M は

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \chi^\dagger \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} W'' & 0 \\ 0 & \bar{W}'' \end{pmatrix} \quad (1.5.130)$$

で表せます。 M はスーパーポテンシャルの 2 階微分が出てくるんですね。 Ψ を x 方向とそれ以外の方
向 $\Psi = f(t, y, x)\xi(z)$ と変数分離して書き直しますと、

$$\begin{cases} i\gamma^1\partial_x\xi - M\xi = -\gamma^a k_a \xi \\ i\gamma^a\partial_a f = \gamma^a k_a f \end{cases} \quad (a = t, y, z) \quad (1.5.131)$$

ξ に対しては、1 番目の方程式、 f に対しては 2 番目の式になります。 f に関する部分は普通に解けて、

$$f = e^{ik_a x^a} \quad (1.5.132)$$

というふうになるだけですね。あとは、 ξ に関する式から k がどういうものが許されるかというのを決
めます。いま興味あるのはゼロモードなんで、 $-\gamma^a k_a \xi = 0$ があるかないかということなんですけども。

ゼロモードについては、結局

$$i\gamma^1\partial_x\xi - M\xi = 0 \quad (1.5.133)$$

を解けばいいんですね。これを解くために、4 成分の上半分と下半分を u と v で書き直して、

$$\xi = \begin{pmatrix} u(x)\eta \\ v(x)\eta^* \end{pmatrix} \quad (1.5.134)$$

η, η^* としてやると。

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (1.5.135)$$

というふうを選んでおくと、ちょうど

$$i\sigma^1\eta^* = \eta, \quad i\bar{\sigma}^1\eta = \eta^* \quad (1.5.136)$$

になるということなんで、(1.5.133) に ξ に $i\gamma^1$ が掛かっているのをこれをなんとかしたかったんすけど
も、これを掛けてやると

$$i\gamma^1\xi = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^1 \\ i\bar{\sigma}^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u\eta \\ v\eta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\eta^* \\ u\eta \end{pmatrix} \quad (1.5.137)$$

v と u が入れ替わるというふうになってます。

ということで、Dirac 方程式から、 v と u の関係式

$$v' - W_{\phi\phi}u = 0, \quad u' - \bar{W}_{\bar{\phi}\bar{\phi}}v = 0 \quad (1.5.138)$$

が出て、これは解けます。解は実は

$$u = \phi' = \bar{W}_{\bar{\phi}}, \quad v = \bar{\phi}' = W_{\phi} \quad (1.5.139)$$

ということになって、 u は ϕ の 1 階微分です。 ϕ の 1 階微分は BPS 方程式から $\bar{W}_{\bar{\phi}}$ となって、 v の方はこれの複素共役ですね。これを成分にしたときに、 χ, χ^\dagger というのは上と下を作るから当然こうなってるんですけども。これが本当にそうなるかっていうのをチェックしてみると、 u' っていうのは $\bar{W}_{\bar{\phi}}$ の 1 階微分ですから、 $\bar{\phi}'$ は v ですから、

$$u' = \bar{W}_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\phi}' = \bar{W}_{\bar{\phi}\bar{\phi}}v \quad (1.5.140)$$

で、(1.5.138) の v の式になりますね。

$$v' = W_{\phi\phi}\phi' = W_{\phi\phi}u \quad (1.5.141)$$

ということで、フェルミオンのゼロモードは

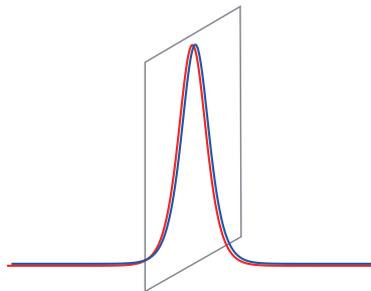
$$\chi_0 = \bar{W}_{\bar{\phi}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \phi'_k \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (1.5.142)$$

ここで、 $\bar{W}_{\bar{\phi}} = \phi'_k$ ですね。BPS 方程式 (1.5.139) からこうだったと。ここで気付いてほしいのは、波動関数が ϕ'_k だと。この ϕ'_k は何かって言うと、並進対称性の破れのボソンのゼロモードの波動関数と一緒に

ということなので、同じように局在しています。つまり、フェルミオンとボソンの部分が全く同じ波動関数でゼロモードをもってるんですね。

$$\varphi_1^{(0)} = \phi'_k \quad (1.5.143)$$

$$\chi_0 = \bar{W}_{\bar{\phi}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \phi'_k \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (1.5.144)$$



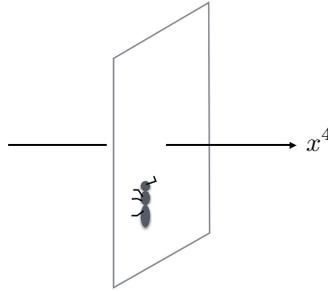
これは超対称性が効いています。というのはドメインウォールは超対称性を半分破るので、まだ半分残ってるんですね。その半分がこのゼロモードを多重項に組んでるということで、ドメインウォールによって破れた並進対称性の南部-Goldstone ボソンと、超対称性の破れからくる南部-Goldstone フェルミオンというのが全く同じように局在しているということがわかります。

ちょっと一旦休憩しますか。

~~ 休憩 ~~

1.5.4 SUSY breaking via domain wall

はい、あとちょっとですけども、ソリトンを通していろんなことを話してきて、M1 とかで習うことは大体網羅したんじゃないかという気がしますけども、ちょっと途中でブレーンワールドの話をしたんですけども、そのときに、ちらっと超対称性をブレーンで破るというような話を少ししたので、そのことについてお話ししたいと思います。超対称性っていうのは余剰次元と同じように標準理論を超える理論の候補の1つと言われてますけども、もちろん超対称性が要求する粒子は今のところ見つかってないので、どっかで破れてるだろうと。じゃあ、どうやって破れてるのかっていうのが気になるわけですけど、その破れの起源を、我々がブレーンに住んでいるというそのことに求めようということですね。具体的にどういう感じになるのかというのをToyモデルでお話ししたいと思います。



例えば、1 + 4 次元時空で、我々はその中の 3-ブレーンに局在しているというわけですね。

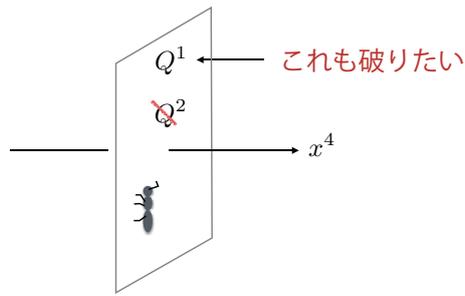
cond.\d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Weyl	yes	-	yes	-	yes	-	yes	-	yes	-
Majorana	yes	yes	-	-	-	-	yes	yes	yes	yes
Majorana Weyl	yes	-	-	-	-	-	-	-	yes	-
minimal dof	1	2	4	8	8	16	16	16	16	32

\swarrow
 1+3 dim
 $\mathcal{N} = 1$

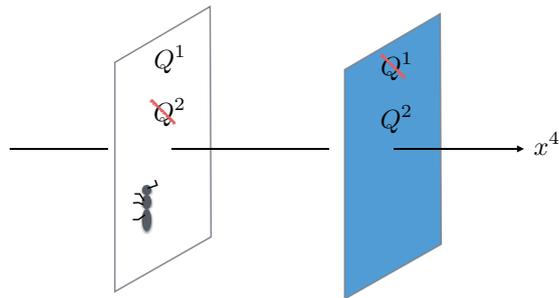
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathcal{N} = 2}$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathcal{N} = 4}$

そうすると、これ、各次元のフェルミオンどんなものが許されるかという表ですけども、1次元ではミニマルなフェルミオンの数は1個で、2次元で2個で、まあ大体2の何とか乗ってという感じで、4次元で4ですね。だから4次元の $\mathcal{N} = 1$ 超対称性って言ったら、超対称電荷が4ついると。これは空間次元ですね。だから5次元にいくと、8個なきゃいけないと。ということで、4次元のミニマルの2倍、だから4次元の言葉では、5次元の $\mathcal{N} = 1$ は $\mathcal{N} = 2$ になってるわけですね。で、 $\mathcal{N} = 2$ 、 $\mathcal{N} = 4$ とこういうふうになっていくわけですけども、11次元にいくと32になると。

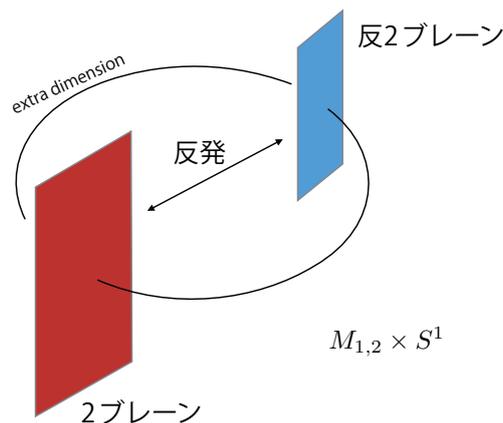
それで、1 + 4次元の最小の超対称性は、いま言ったように1 + 3次元の $\mathcal{N} = 2$ なんです。で、これを5次元のブレーンがいることで半分に破ったとしたら、ブレーンの上には4次元の $\mathcal{N} = 1$ が理論になってるだろうと。



ブレーンがあることで、例えば1個目の超対称電荷と2個目の超対称電荷があって、ドメインウォールが Q^2 だけ破ったとしたら、この上の理論は Q^1 はリスペクトしてると。けどもちろん Q^1 も破りたいんですね、最終的には。



それをどうするかっていうと、どっかに反ブレーンを置けばいいんじゃないかと。我々は左側のブレーンに住んでるんだけど、右側のブレーンでもう1個の超対称電荷 Q^1 を破っとくと。で、右側のブレーンの存在が、左側のブレーンの中に伝わってきて、結局超対称性は全部破れていると。こう考えましょう。ただ、ドメインウォールで、こっちが反ドメインウォールとすると、一般的には不安定なんです。引力が働いたりして、つぶれていってしまうので、その安定性とかが問題になる。こう、決まったところにカチッと置いて、radion mode といいますけども、radion mode がタキオニックだと、壊れちゃう。



どうするかっていうと、そういうのをクリアする簡単な模型が知られています。1+3次元のおもちゃの模型なんですけども、1+3次元の上に1+2次元のDブレーンと反Dブレーンを置いて、ここに3次元の有効理論が乗っかります。で、余剰次元の方向を S^1 にコンパクト化しておいて、実はこいつとこいつは引力ではなくて斥力になるというモデルがあります。そうすると、斥力になっているとお互い反発しあうので、anti-polar などところで安定化する。

じゃあそういう模型があるかという、知られていて、超対称な sine-Gordon 模型でそういうことができる。これも確か 2000 年ぐらいの仕事だったんですけど、丸さんとか坂井さん阪村さん杉坂さんの論文 [20] からとってきたんですけども、スーパーポテンシャルとして

$$W = \frac{\Lambda^3}{g^2} \sin \frac{g}{\Lambda} \phi \quad (1.5.145)$$

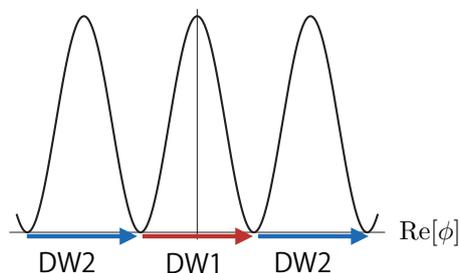
っていうのもってくと、これの微分の絶対値の 2 乗がポテンシャルの値ですね。

$$V = \frac{\Lambda^4}{g^2} \left| \cos \frac{g}{\Lambda} \phi \right|^2 \quad (1.5.146)$$

この零点

$$\phi = \frac{\Lambda \pi}{g} (2n + 1) \quad (1.5.147)$$

が超対称な真空なんで、まあいっぱいあると。



そうすると、キングのところでもやりましたけども、ドメインウォール 1 の左から右に行くやつとドメインウォール 2 の左から右に行くやつの解はこれですね。

$$\text{DW1} : \phi_1 = \frac{\Lambda}{g} \left[2 \tan^{-1} e^{\Lambda(y-y_1)} - \frac{\pi}{2} \right] \quad (1.5.148)$$

$$\text{DW2} : \phi_2 = \frac{\Lambda}{g} \left[-2 \tan^{-1} e^{\Lambda(y-y_2)} + \frac{3\pi}{2} \right] \quad (1.5.149)$$

これはどちらもドメインウォールなんです。ただし、どっからどこに行くかというのが違う。なので、sine-Gordon 模型でキングとキングをぶついたら反発したっていうのは見せましたけども、それはキングとキングの間が斥力だったんですね。それと同じように (1.5.148) のキングと (1.5.149) のキングは反発します。しかも、どっちもキングなんだけども実は保存する超対称電荷が違うんですね。4 次元の超対称電荷を 3 次元の Majorana で実部と虚部に分けてやったらとすると、

$$Q^{(4)} = Q_1^{(3)} + iQ_2^{(3)} \quad (1.5.150)$$

(1.5.148) のドメインウォールが $Q_1^{(3)}$ の超対称電荷を保存して、(1.5.149) のドメインウォールが $Q_2^{(3)}$ の超対称電荷を保存するということがわかります。

実際にキングが多重個ある解というのが知られています。

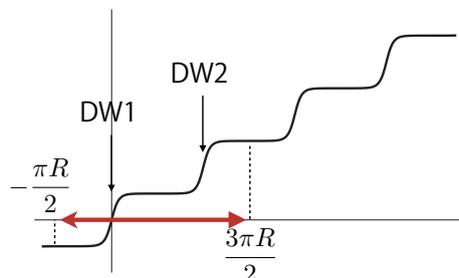
$$\phi_{12} = \frac{\Lambda}{g} \text{am} \left(\frac{\Lambda}{k} y, k \right) \quad (1.5.151)$$

厳密解というか解析解。この am と書いてあるのは Jacobi の振幅関数って言って、まあ楕円関数で出てくるやつですね。これはパラメータ k というものによっていて、 k は自由にとれます。 k は自由にとれ

て、 k を決めると、1個目のドメインウォールから2個目のドメインウォールまでの距離が決まります。それは

$$2\pi R = \frac{4}{\Lambda} kK(k), \quad R: \text{コンパクト化半径} \quad (1.5.152)$$

こんな関係式で決まってくるんですけども、大文字の K って書いてあるのは第1種完全楕円積分とかいうやつで、公式集を見ると出ています。



そうするとここが $-\pi R/2$ で、ここが $3\pi R/2$ なので、この点とこの点を同一視することによって、余剰次元をコンパクト化しよう。そうするとある点にドメインウォール1があって、その反対側にドメインウォール2があると。ドメインウォール1で $Q_1^{(3)}$ が保存されて、ドメインウォール2で $Q_2^{(3)}$ が保存されているということですね。2つのドメインウォールは反発しあうので、安定になっているというわけです。

軽い順から2つだけモード展開やってみると、sine-Gordonなのでやっぱり厳密に解けてしまって、(1.5.151)の振幅関数の周りで展開すると、ボソンの方のゼロモードは、やっぱりJacobi楕円関数 dn とか cn とか、 \cos と \sin の拡張版みたいなやつですけども、それで書けます。

$$\varphi_0 = \text{dn} \left(\frac{\Lambda}{k} y, k \right) \quad (1.5.153)$$

$$\varphi_1 = \text{cn} \left(\frac{\Lambda}{k} y, k \right) \quad (1.5.154)$$

dn 関数の方は massless です。

$$m_0^2 = 0 \quad (1.5.155)$$

これは南部-Goldstone ボソンですね。2個ドメインウォールがあるんですけども、それが全体の並進対称性を破るゼロモードがこちらです。 φ_1 の方は、これは第1励起状態で massive ですね。

$$m_1^2 = \frac{1-k^2}{k^2} \Lambda^2 \quad (1.5.156)$$

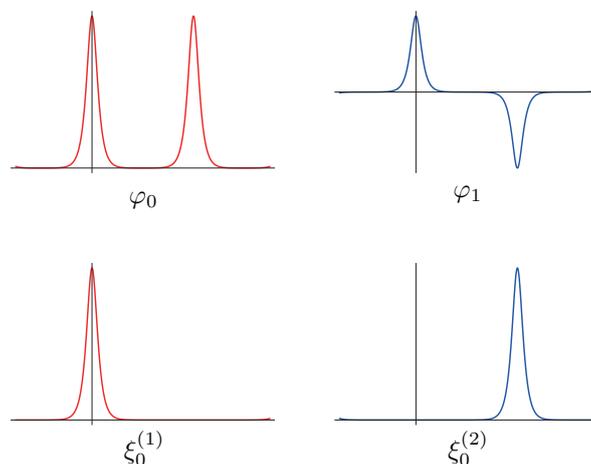
これ massiveなのは2枚のドメインウォールが近づいたり遠ざかったりするときの方です。2枚のドメインウォールの間は相互作用が働いているので、massive になっているわけですね。フェルミオンの方は2個 massless モード

$$\xi_0^{(1)} = \text{dn} \left(\frac{\Lambda}{k} y, k \right) + k \text{cn} \left(\frac{\Lambda}{k} y, k \right) \quad (1.5.157)$$

$$\xi_0^{(2)} = \text{dn} \left(\frac{\Lambda}{k} y, k \right) - k \text{cn} \left(\frac{\Lambda}{k} y, k \right) \quad (1.5.158)$$

$$m_0^2 = 0 \quad (1.5.159)$$

があって、 dn と cn を足したものと引いたもの。これはどちらもゼロモードです。というのは、ドメインウォールがあることによって、フェルミオンは必ずゼロモードをそれぞれに持つわけですね。だから、2枚ドメインウォールがあったならそれぞれにフェルミオンゼロモードが局在するので、2個出てくるわけです。 $k=1$ にすると、(1.5.156) はゼロモードですね。 $k=1$ にする意味というのは、ドメインウォールを無限に離すという意味なんですけども、無限に離すと相互作用がそれぞれが free になるので、ボソンの方でゼロモード、平行移動のゼロモードが2つ、超対称性の破れが2つというふうになるわけです。



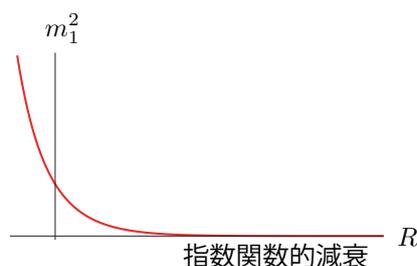
波動関数としては平行移動の方は2個あるドメインウォールに局在していますが、近づいたり離れたりする変形モードみたいなものがこういう波動関数をしてて、 $\xi_0^{(1)}$ の方は左側だけに局在してて、 $\xi_0^{(2)}$ の方は右側だけに局在してるというふうに分かっていますね。

	massless	massive
ボソン	1	1
フェルミオン	2	0

ということで、ボソンのゼロモードが1個、フェルミオンのゼロモードが2個で1個は massive になってると。数が合わないんですね。数が合わないのは何度も言っているように、フェルミオンの方はドメインウォールがあることでゼロモードがあると保証されているわけです。ボソンの方は全体の並進対称性しか破れていない、対称性の破れがないので、ボソンのもう1つのモードはリフトされちゃってるわけですね。じゃあ、このリフトされてる massive な質量っていうのは超対称性の破れのスケール

$$m_1^2 = \frac{1-k^2}{k^2} \Lambda^2 \quad (1.5.160)$$

を与えていることになります。このスケールが5次元方向とか余剰次元方向を積分することでプレーン上の有効作用に入ってくるというわけですね。



今の超対称性の破れのスケールをドメインウォールの距離で横軸に書いてみますと、指数関数的に落ちる。小さくなると。ということで、ブレーン間の距離が決まると超対称性の破れのスケールが決まるということですね。今のはリジッドな超対称性で、重力入れてない話なんですけども、重力も入れればワープファクターとか出てくるので、ゲージヒエラルキーも同時に解消できる可能性があります。ただそれを同時にやるような答えは見つかってはいないんですけども、同時に解消できる可能性がある。超対称性の破れとドメインウォールっていうのはこうやって関係しているというわけです。

(質問) すみません。この手の模型はゲージ場も局在するんですか？

(解答) いい質問ですね。ゲージ場の局在は難しいです。通常 massive なものしか局在しないので、massless ゲージ場を作りたいと思ったら、まあ massless じゃないとゲージ場は駄目なんですけども、局在化できなくて、そこは色々議論があって、うまくいく方法もありますし、うまくいかない方法が多いんですけども、あります。僕もそういう関連の仕事をやっているんですけど興味があったら一昨年ぐらいにゲージ場と物質場を局在化してっていうのがありますけど [21, 22, 23]、究極的には標準模型を乗っけたいというのがあるんですけども、ちょっと色々難しい。できていません。

ドメインウォールによるブレーンワールドシナリオの良い点は、

1. ブレーンの起源を運動方程式の解に帰着できるということで、なんか手でやる訳じゃないということですね。
2. それからスカラー場とかフェルミオンを局在できると。
3. 超対称性を自然に破ることができると。
4. ここでフェルミオンって言いましたけども、5次元からやればさっき言ったように4次元にカイラルフェルミオンが乗っかっている。

いま質問にあったゲージ場についてはいろんなからくりが、Dvali-Shifman のメカニズム [24] とかいうのがあって、ゲージ場を局在させる方法とか知られてますけども、なんかもう一工夫ありますね。

1.5.5 Domain wall in supergravity

これがドメインウォールの最後ですけども、あと超重力理論をまだやってないので、ちょっと超重力理論の話もして、ドメインウォールを終えようかなと思います。これは僕が修士の時の仕事 [25, 26, 27] です。なので、ほとんど忘れてるんですけども、やったのは4次元の $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論でドメインウォールを作ってやろうじゃないかと、そういうことですね。念頭にはやっぱり5次元で余剰次元模型をやりたいというのがあったんですけども、5次元に拡張することも結局はできたんですけど [28]、そっちは難しいので、4次元 $\mathcal{N} = 1$ でどうやるかと。で、カイラル多重項がある。

$$\text{カイラル多重項: } \phi, \quad \chi_\alpha \quad (1.5.161)$$

重力入れると、重力多重項ですね。

$$\text{重力多重項: } e_m{}^a, \quad \psi_{m\alpha} \quad (1.5.162)$$

多脚場とそれのスーパーパートナーですね。で、最小超重力理論の Lagrangian でボソニック部分、まあフェルミオンは長いので点々にしましたけども、こんな感じになってますね。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\kappa^2} R + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - e^{\kappa^2 |\phi|^2} ((D_\phi W D_{\bar{\phi}}) \bar{W} - 3\kappa^2 |P|^2) + \dots \quad (1.5.163)$$

これにほんとは $\det g$ がかからなくてはいけないかもしれないんですけど、そうすると、 κ っていうのは

$$\kappa = \frac{1}{M_{\text{Pl}}} \quad (1.5.164)$$

です。だから、 κ を 0 にもってくと、普通のリジッドな超対称性にいきます。このスーパーポテンシャルみたいな W というのが現れてますけども、超重力理論にすると、ちょっと複雑にこんな共変微分みたいなのが入ってきて、さらに重力の補正が付いていると。

$$D_\phi W = W_\phi + \kappa^2 W \bar{\phi} \quad (1.5.165)$$

で、やっぱりフェルミオンですね。カイラル多重項のフェルミオンと重力多重項のフェルミオンの超重力変換というのを書いたのがこれですけども、

$$\delta\chi = i\sqrt{2}\sigma^m \epsilon^\dagger \partial_\mu \phi - \sqrt{2}e^{\kappa^2|\phi|^2/2} D_{\bar{\phi}} \bar{W} \epsilon + \dots \quad (1.5.166)$$

$$\delta\psi_\mu = \frac{2}{\kappa} \left(\partial_m + \frac{\kappa^2}{4} (\bar{\phi} \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \bar{\phi}) \right) \epsilon + i\kappa e^{\kappa^2|\phi|^2/2} P_{\sigma\mu} \epsilon^\dagger + \dots \quad (1.5.167)$$

これに、 ϕ はある 1 空間方向、 y としましょうか、 y 方向だけにしかよっていない

$$\phi = \phi(y) \quad (1.5.168)$$

ということと、計量にこういうワープ計量だという ansatz

$$ds^2 = e^{2A} \eta_{mn} dx^m dx^n + dy^2 \quad (1.5.169)$$

プラス、Killing スピノル条件を重力も入ってるので、座標に依存してますけども、それを半分に落としなさいという条件ですね。

$$\epsilon(y) = e^{i\theta(y)} \sigma^2 \epsilon^\dagger(y) \quad (1.5.170)$$

これをおいて、(1.5.166)、(1.5.167) が 0 になりなさい、というのをやってやると、だから、半分の超対称性を保ちなさいといいますが、こんなものが得られます。

$$A'(y) = -ie^{-\theta} \kappa^2 e^{\kappa^2|\phi|^2/2} W \quad (1.5.171)$$

$$|\epsilon_\alpha|' = \frac{1}{2} A' |\epsilon_\alpha| \quad (1.5.172)$$

$$\theta' = -\kappa^2 \text{Im} [\bar{\phi} \phi'] \quad (1.5.173)$$

$$\phi' = -ie^{i\theta} e^{\kappa^2|\phi|^2/2} D_{\bar{\phi}} \bar{W} \quad (1.5.174)$$

バー付きとかは局所 Lorentz の脚という意味ですけども、これが BPS 方程式 (1.5.168)~(1.5.170) から出るんですね。あとはこれを解けるか、という話になってきます。

解ける模型を見つけまして、それはスーパーポテンシャル

$$W = e^{-\kappa^2 \phi^2/2} \frac{\Lambda^3}{g^2} \sin \frac{g}{\Lambda} \phi \quad (1.5.175)$$

で、この部分

$$\frac{\Lambda^3}{g^2} \sin \frac{g}{\Lambda} \phi \quad (1.5.176)$$

が大域的超対称性の場合のスーパーポテンシャル、sine-Gordon の場合のスーパーポテンシャルだったんですけど、それに、

$$e^{-\kappa^2 \phi^2/2} \quad (1.5.177)$$

という $\kappa = 0$ で 1 になるようなそんなものを勝手に加えておきます。なんでこんなものを加えたかっていうと、こうしてやるとスカラーポテンシャルがこんなふうになります。

$$V = \frac{\Lambda^4}{g^2} e^{-\kappa^2(\phi-\bar{\phi})^2/2} \left[\left| \cos \frac{g}{\Lambda} \phi - \kappa^2 \frac{\Lambda}{g} (\phi - \bar{\phi}) \sin \frac{g}{\Lambda} \phi \right|^2 - \kappa^2 \frac{3\Lambda^2}{g^2} \left| \sin \frac{g}{\Lambda} \phi \right| \right] \quad (1.5.178)$$

ϕ っていうのは複素変数なんですけど、虚部を 0 としてやると、

$$\kappa^2 \frac{\Lambda}{g} (\phi - \bar{\phi}) \sin \frac{g}{\Lambda} \phi \quad (1.5.179)$$

が消えるので、そうすると、実軸上がちょうど超重力真空になってるんですけど、こんなふうになります。

$$V \Big|_{\phi=\bar{\phi}} = \frac{\Lambda^4}{g^2} \left[\left(1 + 3\kappa^2 \frac{\Lambda^2}{g^2} \right) \cos^2 \frac{g}{\Lambda} \phi - 3\kappa^2 \frac{\Lambda^2}{g^2} \right] \quad (1.5.180)$$

そうすると、なんか変な因子

$$\left(1 + 3\kappa^2 \frac{\Lambda^2}{g^2} \right)$$

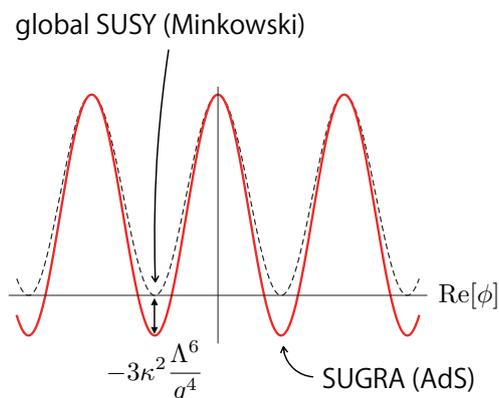
に \cos^2 引く定数となって、超重力理論にいくと、真空は一般には負の宇宙定数をもつので、AdS になるわけですけども、もし

$$-3\kappa^2 \frac{\Lambda^2}{g^2} \quad (1.5.181)$$

を忘れたら、で、この定数

$$1 + 3\kappa^2 \frac{\Lambda^2}{g^2} \quad (1.5.182)$$

を繰り込んじゃって、普通の対称性だと思えば、結局超重力理論にしたことによってポテンシャルが、係数倍はされてますけども、下にずっと下がっただけというわけですね。



だから、大域的超対称性のときは点線にあったのが、赤い線にすっところ。で、どれだけ下がったかっていうと、

$$-3\kappa^2 \frac{\Lambda^6}{g^4} \quad (1.5.183)$$

だけ下がったというわけで、一般には、もしもこういう補正

$$e^{-\kappa^2 \phi^2 / 2} \quad (1.5.184)$$

を入れないで、超重力理論にいても大域的超対称性の場合と同じスーパーポテンシャルを使ったままやってしまうと、真空が、0 が負になるだけではなくて、一般に変形するわけですね。横にも動きます。横に動いちゃうと、もはや sine-Gordon 模型と違くなっちゃうんで、解が作れないんですね。だけどこれ下にするだけだと、ただ単にぐっと下がっただけなので、sine-Gordon の解が使えます。

ということで、実はスカラー場の解に関しては、大域的超対称性と全く同じ解になると。

$$\frac{\Lambda}{g} \left(2 \tan^{-1} e^{\Lambda(y-y_0)} - \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.5.185)$$

その周りに重力が発生して、ワープファクターは実際にこんなふうに分けるといいうわけですね。

$$e^{2A} = [\cosh \Lambda(y - y_0)]^{-\kappa^2 \Lambda / g^2} \quad (1.5.186)$$

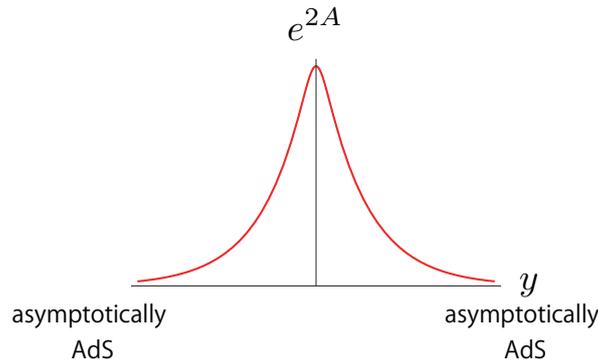
Killing スピノルのところに入った位相は、定数で

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (1.5.187)$$

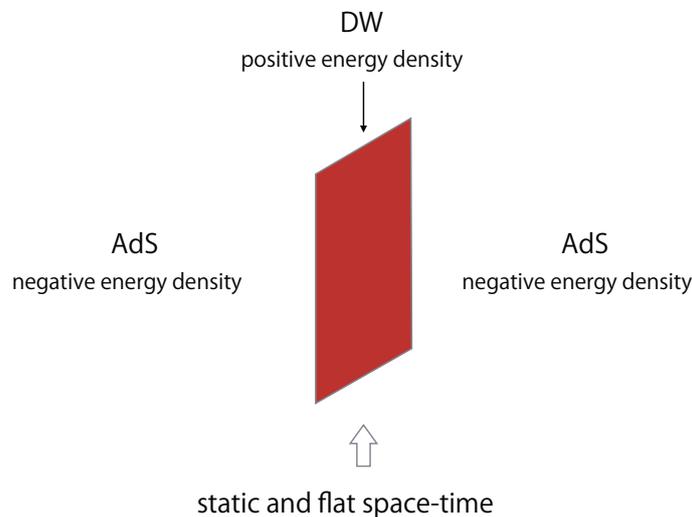
一定であってよいと。こいつの保存する Killing スピノルは

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} e^{A/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.5.188)$$

で、 A っていうのはワープファクターですけど、そのぶんが掛かっていると。



ということで、このワープファクターを y 軸を横軸にとって、こう見てみると、真ん中にこうなってて、漸近的に AdS になってるといいうものができます。



ということで、こんな感じになるんですね。ドメインウォールっていうのは、真ん中にこう正のエネルギーをもってます。超対称なんで、必然的に bulk が負の宇宙定数をもつんですね。それがちょうどここにある正のエネルギーと bulk にある負のエネルギーがちょうどバランスとってるんです。で、ドメインウォール上が平坦でいられるというわけですね。さっき途中でドメインウォールが球形になっちゃって言ったときは、bulk は AdS ということにできなかったの、静的で平坦っていうのはできなかったんですけども、今は負にしてちょうどバランスをとることで静的で平坦なドメインウォールが実現されているというわけです。

ブレーンワールドでやるには、ドメインウォールに、この次元のグラビトンが局在してほしいので、グラビトンが局在することも示すことができます。計量の微小揺らぎ

$$ds^2 = e^{2A}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu \quad (1.5.189)$$

を考えて、これは

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{ab} \quad (a, b = 0, 1, 2)$$

ですか、これがグラビトンですね。グラビトンに対してドメインウォールがあることで、モード展開してやると、Schrödinger 方程式を出すことができます。

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + V \right] h_{ab} = \omega^2 h_{ab} \quad (1.5.190)$$

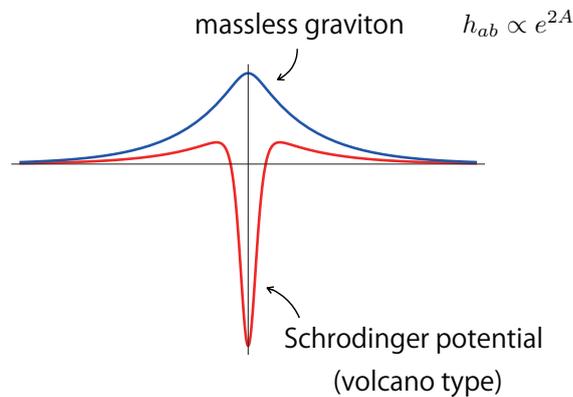
いきなり z とか書いてあるんですけど、これは計量を共形平坦にするような座標ですね。

$$dy = e^A dz \quad (1.5.191)$$

この Schrödinger 方程式のポテンシャルは

$$V = 2A'^2 + A'' \quad (1.5.192)$$

というふうにワープファクターで書けます。



この Schrödinger ポテンシャルが解けていわゆる volcano type、火山の火口型っていうのになって、そこに massless なグラビトンがこう局在して 2+1 次元の重力を運ぶと。まあこんな感じ。これドメインウォールの厚みをビューっと、パラメータを変えて縮めていくと、デルタ関数みたいなものになって、手でデルタ関数的にブレーンを入れるのとその極限で同じになりますね。だからブレーンを smear して fat にしたときに、こうグラビトンが局在するということになります。これで、もうドメインウォールについても話せることは大体終わりました。

(質問) 余剰次元は無限に長いんですか？

(回答) はいそうです。大きな余剰次元です。

(質問) そうすると KK-グラビトンの質量ってどれくらいになるんですかね？

(回答) 多分ドメインウォールの幅の逆数くらいだったと思います。それしかスケールがないので。たしか、幾つか厳密に解けたような気がしますね。ちょっと今 massless モードしかやらなかったんですけど。

2 Vortices

うーんと、そしたらどうしよっかなあ…、あんまり中途半端に終わるのも良くないんですけど…。今 9 時か、10 時まででしたっけ？ 10 時 15 分。じゃあ、まあ、途中で終わったらすみませんね。まあいっか、順番通りやっていきましょかね。変なところで終わったら、またいつかの機会に聞いてください。

いまキルクをやったんですけども、ポーテックスっていうのは 2+1 次元のソリトンで、今までの話で出てこなかったのは、ゲージ場ですね。ゲージ場と全く関係してなかったんですけども、ポーテックスを考えるには、ゲージ場が重要な役割を果たします。だから、ゲージ理論におけるソリトンっていうのをここで学んでもらおうかなと思います。

いま言ったように、ポーテックスの多くの性質がキルクの性質から理解できます。けども、キルクと異なるのは、ゲージ相互作用ですね。ゲージ相互作用が大きな役割を果たしているということです。ということで、ポーテックスはゲージ理論の最も単純なソリトンです。ただ、ゲージ理論に行く前に、じゃあゲージ理論がないところでやったらどうなるかというので、それはグローバルポーテックスと呼ばれてるんですけども、ちょっとそれを見てみましょう。

2.1 Global vortex

相変わらず ϕ^4 模型を考えますね。

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - v^2)^2 \quad (2.1.1)$$

ただし、複素ですね。



そうすると、いわゆるまさに Higgs ポテンシャルですけども、こういうワインボトル型のポテンシャルになってますね。これは、大局的 $U(1)$ 変換

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi \quad (2.1.2)$$

ϕ の位相を回す変換の下で不変になっていると。で、真空は

$$\phi = v e^{i\alpha_0} \quad (2.1.3)$$

ですね。つまり、このでっばっているところが、最初に言った剣を上段に構えてるところで、その周りの低いところに行くと、中段に構えると。だけど、中段に構えるのは、どこでもいいわけです。真空は S^1 のどこでもいいんですね。だから、真空の多様体は S^1 になってるというわけです。

成分で表せば、

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2 \quad (2.1.4)$$

で、

$$V = \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2 - v^2)^2 \quad (2.1.5)$$

こうなってますから、例えば真空は、1番目が v で 2番目が 0 だと。

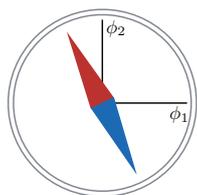
$$(\phi_1, \phi_2) = (v, 0) \quad (2.1.6)$$

そうしたら、質量行列は

$$M = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi_1=v, \phi_2=0} = \begin{pmatrix} 2v^2\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

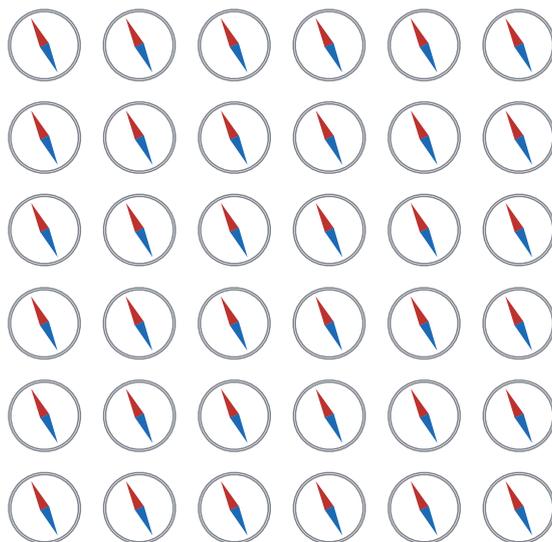
こうなって、(1,1) 成分は massive ですね。(2,2) 成分は 0 だというふうになります。当然、実軸上に真空期待値をとったので、実軸方向には持ち上がってて、虚軸方向には flat direction になってるということです。真空を 1 つ決めると複素スカラー場の位相が決まるので、 $U(1)$ 対称性が破れてるから、その対称性の自発的破れが保証する南部-Goldstone ボソンが (2,2) 成分にあるというわけです。

仮にスカラー場の位相をはかるコンパスがあったとします。



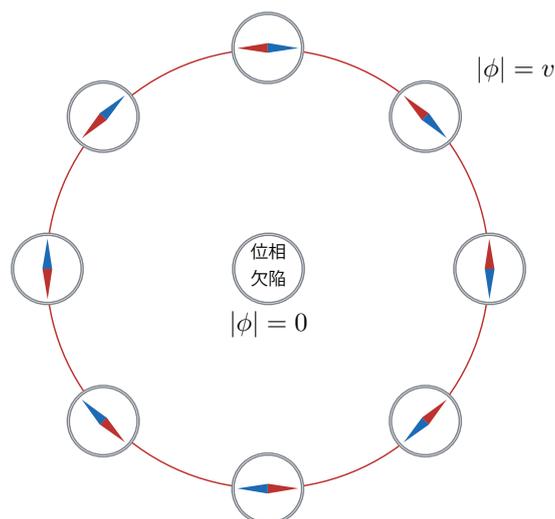
横軸を ϕ_1 として、縦軸を虚部の ϕ_2 と。

真空でこのコンパスを測りますと、どこでもある一定の方向を指してるということですね。



どこでも一緒だと。

で、そういう場合もあるけど、そうじゃない場合もあって、ある 1 点の周りをコンパスを持ってこう動いてったら、こんなふうに針が回転したとします。



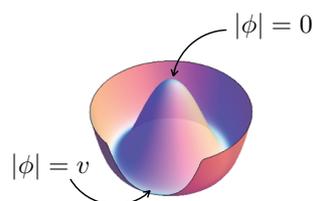
1周したら針が1周した。だからこれは巻きつきを与えてくれてるんですね。ただし、1周したら針が1周したということは、中に何か、 $|\phi| = 0$ となるところがないとエネルギーが発散してしまうので、どこかに位相欠陥があるということが予想されます。何でもいからループをもってきて、そのループに沿ってコンパスを持って歩いたら1周しちゃったとしたら、その中のどっかに位相欠陥があるということが結論づけられるわけですね。

これ留数定理に似てますよね。よくわかんないけどとにかくループにそって積分したら

$$\oint_C dz f(z) = 2\pi i \quad (2.1.8)$$

A diagram showing a circle with a red 'x' in the center, representing a singularity. The circle is labeled 'C' and has an arrow indicating a counter-clockwise direction of integration.

だと。だから、この中に特異点が1個あるというわけですね。まさにこういう計算をします。



前に説明したように、位相欠陥の中心では対称性は回復していて、エネルギーが高くなっている。そこからエネルギーが逃げ出せないのが、トポロジーで守られてるので、そういうのがポータックスなんですね。じゃあ、ポータックスってどんな解かっていうと、この運動方程式

$$\partial^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \quad (2.1.9)$$

の静的な解。

$$-\nabla^2 \phi + \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2 - v^2) \phi = 0, \quad (\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2) \quad (2.1.10)$$

これはこの模型の運動方程式ですけども、その、1方向と2方向に依存した運動方程式を解きましょうというわけですね。

残念ながらこの厳密解は知られていなくて、ポータックス 1 個置いたとしたら、軸対称な解ができるだろうということで、ansatz をおきます。

$$\phi = v f(r) e^{ik\theta}, \quad x + iy = r e^{i\theta} \quad (2.1.11)$$

ϕ としては、期待値掛ける、なんか極座標の r だけによったものに $e^{ik\theta}$ という位相。 k っていうのは、なんか整数ですね。 r と $e^{i\theta}$ は $x + iy$ を複素に組んだものです。これで書いてやると、 $\nabla^2 \phi$ っていうのは

$$\nabla^2 \phi = v e^{ik\theta} \left(f'' + \frac{f'}{r} - \frac{k^2}{r^2} f \right) \quad (2.1.12)$$

こんなふうになりますから、運動方程式は $e^{ik\theta}$ っていうのは全体として取り去ってしまって、 f だけの式でみると、

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{k^2}{r^2} f - \frac{m^2}{2} (f^2 - 1) f = 0 \quad (2.1.13)$$

こんなふうになってるんですね。(2.1.13) にスケールが 1 個だけ現れてるのは、 m^2 ですが、 m^2 というのは

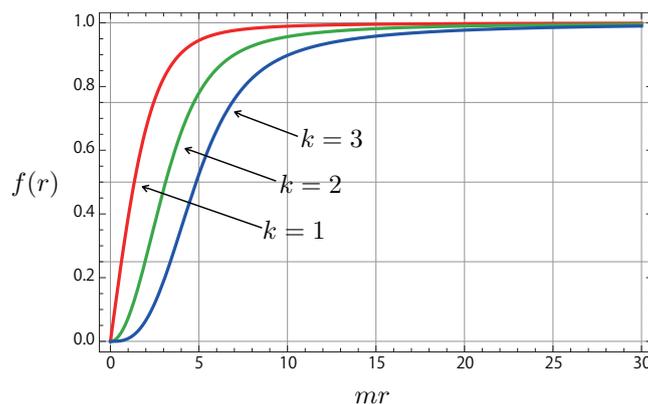
$$m^2 = \lambda v^2 \quad (2.1.14)$$

だから、massive な Higgs の質量ですね。これしか入ってないので、場の変化とかは m^2 の逆数で決まる。で、これを、無限遠では f は 1 にいきなさい。つまり、対称性が破れてる真空にいきなさい。だけでも、1 周したら絶対中に対称性が回復してる点がないといけないので、原点では 0 になりなさい。そうでないと (2.1.13) が発散してる。 r が 0 にいったときに f が 0 にいかないとこの方程式 (2.1.13) 自身も発散してしまうと。

そこで、こういう境界条件

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = 1 \quad (2.1.15)$$

の元で解いてやると、これはもう厳密解がないので、数値的に解くしかないんですけども、こういう境界条件をおいて数値解を解いたのがこれですね。



この赤いのが 1 巻きのやつです。緑が 2 巻きのやつ、青が 3 巻きのやつというふうにこうやって解が一応解けると。

ただし、これはエネルギーが有限の値に収束していないソリトンです。というのは、漸近形をみますと、

$$f(r) \simeq 1 - \frac{k^2}{(mr)^2} + \mathcal{O}((mr)^{-4}) \quad (2.1.16)$$

f っていうのは無限遠で 1 に行くわけですね。そこの補正っていうのは $1/r^2$ で 1 に近づくというのが運動方程式からわかります。べきで減少していると。そうすると質量を見てみると、

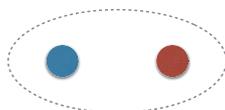
$$M = \int d^2x (|\nabla\phi|^2 + V) \quad (2.1.17)$$

$$= 2\pi v^2 \int_0^\infty dr r \left[(f')^2 + k^2 \frac{f^2}{r^2} + \frac{\lambda v^2}{4} (f^2 - 1)^2 \right] \quad (2.1.18)$$

この f^2/r^2 というのが、 $|\nabla\phi|^2$ のところから出てきます。 f は無限遠で 1 に近づくので、この項は $1/r^2$ なんですね。それを 2 次元積分してるので、

$$M \simeq 2\pi v^2 k^2 \lim_{L \rightarrow \infty} \log L + \dots \quad (2.1.19)$$

対数で発散するというふうになって、グローバルボートテックスっていうのは有限な質量をもたないソリトンになっています。



ただ、左側にグローバルボートテックスがあって、右側に反グローバルボートテックスを置いとくと、これは有限になります。有限っていうか対数発散はしません。ただ、これは引力が働いて、消えちゃうというようなものになってます。もしくは実験系などの有限系では、対数発散っていても、スケールが対数で効いてくるだけなのでそういう意味では系の大きさで決まってくると。例えば、中性子星とかで中性子超流体があったとすると、中性子星は激しくスピンしてるので、その中で超流動ボートテックスっていうのができてますけども、その超流動ボートテックスがこのグローバルボートテックスですね。対数発散するんだけど、コンパクトな、半径 10km 程度の星ですから、エネルギーは有限になってます。そういう特殊な状況は除いて、普通に考えると対数発散してしまうということですね。実はこのことは一般論があって、スカラー理論のソリトンの質量っていうのは一般に空間次元が 2 以上で発散してしまうということを示すことができます。

2.2 Derrick の定理

それを Derrick の定理っていうんですけども、ある種の no-go theorem です。1 + d 次元のスカラー理論を考えましょう。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} G_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b - V \quad (2.2.1)$$

非線形シグマ模型でもいいので、ターゲット空間の計量 G_{ab} をこう入れておきます。仮定として、 ϕ っていうのは運動方程式の静的な解で、有限な質量をもつとしましょう。質量っていうのは運動項からくる部分とポテンシャル項からくる部分に分けられて、

$$M = K + V \quad (2.2.2)$$

運動項の部分は、静的なので空間微分だけです。

$$K = \int d^d x \frac{1}{2} G_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b \quad (2.2.3)$$

で、ポテンシャル。

$$V = \int d^d x V \quad (2.2.4)$$

これが足し算で有限になりなさいということなんですけども、ここでスケーリングの議論をします。

$$f_\lambda(x) = \phi(\lambda x) \quad (2.2.5)$$

座標を λ 倍すると。そうしたものを $f_\lambda(x)$ と書くことにして、それをこの中に入れてやります。

$$K(\lambda) = \int d^d x \frac{1}{2} G_{ab}(\phi(\lambda x)) \partial_i \phi^a(\lambda x) \partial_i \phi^b(\lambda x) \quad (2.2.6)$$

運動項のところに入れてやりますと、単に座標変換してやると、2 発微分があって d 回積分があるので、 λ^{2-d} というのが出てきますね。

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= \lambda^{2-d} \int d^d(\lambda x) \frac{1}{2} G_{ab}(\phi(\lambda x)) \partial_i \phi^a(\lambda x) \partial_i \phi^b(\lambda x) \\ &= \lambda^{2-d} K(\lambda = 1) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

$\lambda = 1$ の場合が解なんですけども、そのときの λ^{2-d} 倍。ポテンシャル項は微分がないので、 λ^{-d} っていう λ 依存性があるわけですね。

$$V(\lambda) = \lambda^{-d} V(\lambda = 1) \quad (2.2.8)$$

そうすると、スケールすると E の λ 依存性っていうのはこうですね。

$$E(\lambda) = \lambda^{2-d} K(\lambda = 1) + \lambda^{-d} V(\lambda = 1) \quad (2.2.9)$$

λ を変えるということは、配位をずらすということですから、運動方程式の解なので λ で変分すると $\lambda = 1$ がこの式の停留点になっていなければいけない。ということで、これを λ で微分すると、左辺は $\lambda = 1$ で 0 になってなきやいけないんですね。

$$0 = (2-d)K(\lambda = 1) - dV(\lambda = 1) \quad (2.2.10)$$

そうすると、微分すると右辺第 1 項は $(2-d)$ っていうのが出て、第 2 項からは $-d$ っていうのが出ますね。これどちらも成分 K っていうのと V っていうのは、わかると思うんですけど、 K っていうのは (2.2.3) ですから正がでるわけですね。 V も正です。そうすると、(2.2.10) が 0 にならなきやいけないってことは、 $d = 1$ のときは、

$$d = 1: \quad K = V \quad (2.2.11)$$

ということで、これは何度も出てきたピリアル定理そのものですね。 $d = 2$ ではどうなるかっていうと第 1 項がなくなるので

$$d = 2: \quad V = 0 \quad (2.2.12)$$

ということで、ポテンシャルからの寄与は 0 じゃなきやいけないということになります。そういうものはもう真空しかないか、ポテンシャルを全然必要としないソリトンかどっちかしかないということですね。 $d \geq 3$ になると第 1 項が負になりますから、 $-(d-2)K - dV = 0$ になるためには、

$$d \geq 3: \quad K = V = 0 \quad (2.2.13)$$

しかないということで、真空のみが許される。ということで、スカラー理論においては $d \geq 2$ だと、ある特殊なソリトン、これ実はちょっと最初に言った lump ってやつなんですけども、lump 以外は存在できないってことがこの議論からわかるわけですね。これはただし、エネルギーが有限でありなさいって条件をおいています。なので、有限じゃないドメインウォールのような拡張されたオブジェクトを考える場合は、この定理の適用外になっていますけども。

じゃあ、この no-go theorem、ちょっと超えたいと思ったらどうするかって言うと、結局 (2.2.10) の $2-d$ があるからこそ $d=1$ のときは OK だったんですね。積分のところから $-d$ っていうのが出てくるので、(2.2.10) の第 1 項のような正の寄与がどっかから必要になる。この 2 はどっからきたかっていうと微分項からきてるので、もっと増やしたければ、高次の微分とかそういうのを入れればいいというわけですね。だから、高次の微分項やゲージ場を入れればいいということですね。ゲージ場を入れると、微分は共変微分になりますね。

$$\partial_\mu \phi \rightarrow D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA)\phi \quad (2.2.14)$$

共変微分は微分とゲージ場が同じように入ってるので、ゲージ場は微分と同じようにスケールさせるのが自然です。

$$A_\mu(x) \rightarrow \lambda A_\mu(\lambda x) \quad (2.2.15)$$

ゲージ場の運動項っていうのは、そういう意味では 4 階微分ですね。

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (2.2.16)$$

2 階微分なんですけども、微分 2 個とゲージ場 2 個もあるので、そうすると $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ っていうのは λ^4 でスケールすると。

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \rightarrow -\frac{(\lambda)^4}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.2.17)$$

ということなんで、ゲージ場があると、運動項とポテンシャルのところは同じなんですけど、今度は λ^{4-d} というものが出てきます。

$$E(\lambda) = \lambda^{4-d}F + \lambda^{2-d}K + \lambda^{-d}V \quad (2.2.18)$$

やっぱり $\lambda=1$ が停留点になりなさいって条件をおくと、こういう条件が出てきます。

$$(4-d)F + (2-d)K - dV = 0 \quad (2.2.19)$$

じゃあ、ここに $d=2$ の場合を入れてみよう。すると $d=2$ になると、(2.2.18) の第 2 項が 0 になりますね。 $2F - 2V = 0$ ですから、これ F っていうのはゲージ場の運動項の寄与です。だから、ゲージ場の運動項があると、ポテンシャルとエネルギーが等しくなるという、ビリアル定理みたいなのが出ます。

$$d=2: \quad F = V \quad (2.2.20)$$

じゃあ今度 $d=3$ も許されますね。 $d=3$ だと、(2.2.18) の第 1 項がまだ $+1$ なんで、

$$d=3: \quad F = K + 3V \quad (2.2.21)$$

これはモノポールですね。もしくはスカーミオン。スカーミオン作る場合には、微分の 4 次の項、スカーミ項が必要なんですけども、それです。 $d=4$ になると、もう

$$d=4: \quad K = V = 0 \quad (2.2.22)$$

ですね。(2.2.18) 第 1 項がなくなるので。ただ、 F のところは 0 が掛かっているので、実はゲージ場のみで作る寄与があってもいいんですね。それはまさにインスタントンです。5 次元以降になると、もうゲージ場入れても真空しか許されないということになります。

$$d \geq 5: \quad F = K = V = 0 \quad (2.2.23)$$

2.3 Local vortex

そこで、こういうことがわかったので、じゃあゲージ場を入れればいいのかというわけです。それで、最も簡単な $U(1)$ ゲージ理論を考えましょう。Abelian-Higgs 模型ですね。もしくは Ginzburg-Landau 模型ですね。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\phi(D^\mu\phi)^* - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - v)^2 \quad (2.3.1)$$

超伝導の有効理論、まあ相対論的か非相対論的かっていう違いはありますけども、これあります。共変微分が

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi \quad (2.3.2)$$

で、 $F_{\mu\nu}$ は $U(1)$ なんで

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.3.3)$$

ですね。 $U(1)$ ゲージ変換ってというのは

$$\left. \begin{array}{l} \phi \rightarrow e^{ie\alpha(x)}\phi \\ A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\alpha(x) \end{array} \right\} D_\mu\phi \rightarrow e^{ie\alpha(x)}D_\mu\phi \quad (2.3.4)$$

ϕ を空間に依存した $U(1)$ 変換してやると、ゲージ場はゲージ変換を受けている。共変微分は共变的に変化するという、こういうおなじみのものが出てきます。

真空ってというのは変わらないですね。ですけども位相はゲージ自由度なんで、 v と一緒ですね。

$$\phi = ve^{i\alpha} \sim v \quad (2.3.5)$$

真空周りの揺らぎは massive なものとゼロモードがあったんですけども、ゼロモードは Higgsing っていうかゲージ場に食べられてゲージ場の質量になるというわけですね。

$$\begin{array}{l} m_\phi^2 = \lambda v^2 \\ m_{\text{NG}}^2 = 0 \end{array} \xrightarrow{\text{Higgsing}} \begin{array}{l} m_\phi^2 = \lambda v^2 \\ m_g^2 = 2e^2 v^2 \end{array} \quad (2.3.6)$$

だから、南部-Goldstone モードはもういない。で、運動方程式はスカラー場の部分とゲージ場の部分ですね。

$$D_\mu D^\mu\phi + \frac{\lambda}{2}(|\phi|^2 - v^2)\phi = 0 \quad (2.3.7)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (2.3.8)$$

これは Maxwell 方程式で、ソースがこうなっていると。

$$J^\nu = -ie(\phi(D^\nu\phi)^* - \phi^*D^\nu\phi) \quad (2.3.9)$$

スカラー場からくるソースがこうなってる。これを解けばいいということですね。

軸対称で静的な渦解っていうのはやっぱり ansatz をおくしかないんですね。

$$\phi = vf(r)e^{ik\theta}, \quad A_i = \epsilon_{ij}x^j \frac{ka(r)}{er^2} \quad (2.3.10)$$

厳密解が知られていないので。特殊な双曲空間とかに置くと厳密解が解けることが Witten とかが探してるんですけども [29]、いま平坦な空間でやってるので、こういう ansatz をおくしかありません。こういう ansatz をおきますと、で、共変微分をちょっと見てみますと、ゲージ場の項は (2.3.10) 第 2 式のようになってるので、普通に座標変換して r とか θ で書いたらこうなりますね。

$$\begin{aligned} D_i\phi &= (\partial_i + ieA_i)fe^{ik\theta} \\ &= \left(\frac{x^i}{r}\partial_r - \epsilon_{ij}\frac{x^j}{r^2}\partial_\theta + i\epsilon_{ij}x^j \frac{ka}{er^2} \right) fe^{ik\theta} \\ &= \left[\frac{x^i}{r}f' - ik\epsilon_{ij}\frac{x^j}{r^2}(1-a)f \right] e^{ik\theta} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

一方で F_{12} というのは (2.3.10) 第 2 式を入れてやると

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{ka'}{er} \quad (2.3.12)$$

ですから、この $a(r)$ っていうゲージ場の配位によって決まるというふうになってます。

これが決まったら、まず、さっきの対数発散がどうやって消えてるかっていうのを見たいんですけども、

$$M = \int d^2x \left[\frac{1}{2}(F_{12})^2 + D_i\phi(D_i\phi)^* + \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - v^2)^2 \right] \quad (2.3.13)$$

$$= 2\pi \int dr r \left[\frac{a'^2}{2e^2 r^2} + v^2 \left(f'^2 + \frac{k^2(1-a)^2}{r^2} f^2 \right) + \frac{\lambda v^4}{4}(f^2 - 1)^2 \right] \quad (2.3.14)$$

(2.3.13) 第 2 項が単なる微分だったら対数発散が来たんですけども、この項が $1/r^2$ のところになるんですけども、さっきここが $1/r^2$ だったんですけども、それがゲージ場と結合したことによってここが $(1-a)^2$ と、こうなるんですね。だから、 a が無限遠で 1 にいけば、対数発散が消えるということです。ちなみにこの無限遠で 1 になるということは

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_i = \epsilon_{ij} \frac{kx^j}{er^2} \quad (2.3.15)$$

こうなるということですけども、これはピュアゲージで、ピュアゲージってことは $F_{\mu\nu} = 0$ になりなさいってことですから、無限遠でエネルギーが有限でありなさいって条件と同値です。うまくいってるといわけですね。

運動方程式は結局 f っていう関数、スカラー場の振幅 f と、ゲージ場の振幅 a で

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{k^2(1-a)^2}{r^2}f + \frac{m_\phi^2}{2}(1-f^2)f = 0 \quad (2.3.16)$$

$$a'' - \frac{a'}{r} + k^2 m_g^2(1-a)f^2 = 0 \quad (2.3.17)$$

こう結合した常微分方程式を解きなさいというんですね。解くときに、エネルギーが発散しないようにということで、原点では f も a も 0 になりなさいという条件をおいて、無限遠でいま言ったように a を 1、で f も真空に行きなさいってことですから 1 に。

$$\text{境界条件: } f(0) = a(0) = 0, \quad f(\infty) = a(\infty) = 1 \quad (2.3.18)$$

こういう条件をおいてやると。ちなみに、さっきグローバルポータックスのときは真空中に $1/r^2$ で近づくと言いましたが、今はどうなってるかっていうと、そうじゃないですね。グローバルポータックスのときはまだ南部-Goldstone モードが、ゼロモードがいたので、 $1/r^2$ というのが出てきてたんですね。だけど今 Higgsing されてゼロモードがもういないので、全部 massive になってるので、指数関数的になるはず。そこで、真空からのずれを δf , δa と呼んで、

$$f = 1 - \delta f, \quad a = 1 - \delta a \quad (2.3.19)$$

この方程式 (2.3.16)、(2.3.17) に入れて線型化してやるとこんな形に書けます。

$$\delta f'' + \frac{\delta f}{r} - m_\phi^2 \delta f = 0 \quad (2.3.20)$$

$$\delta a'' - \frac{\delta a}{r} + k^2 m_g^2 \delta a = 0 \quad (2.3.21)$$

これは実は厳密に解が知られていて、第 1 種変形 Bessel 関数ってやつで書けることが知られています。

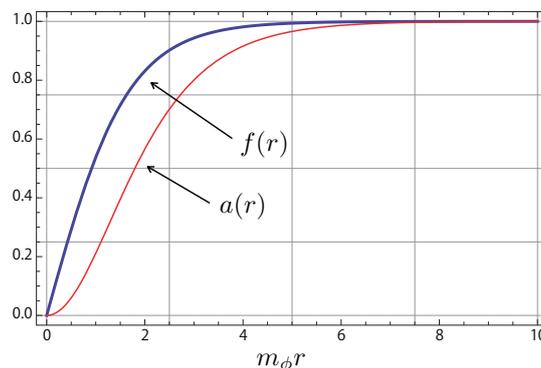
$$\delta f = AK_0(m_\phi r) \simeq A \sqrt{\frac{\pi}{2m_\phi r}} e^{-m_\phi r} \quad (2.3.22)$$

$$\delta a = Bm_g r K_1(m_g r) \simeq B \sqrt{\frac{\pi m_g r}{2}} e^{-m_g r} \quad (2.3.23)$$

この漸近形は大体 $e^{-m_\phi r}$ 。ということで、スカラー場のプロファイル関数の漸近的な振る舞いは $e^{-m_\phi r}$ ということですから、スカラー場の質量と座標で無次元化されたものが指数関数の肩に乗っかっています。ゲージ場の方は、ゲージ場の質量で無次元数を作って 0 に近づいていくと。ということで、

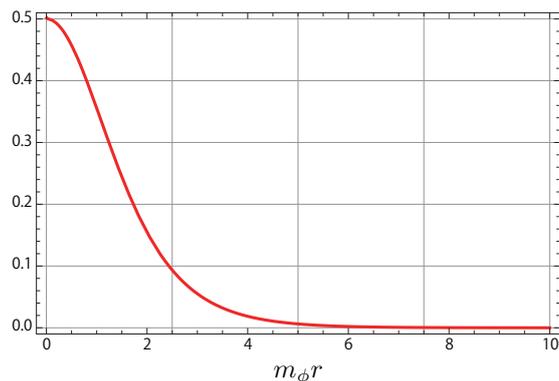
$$\left. \begin{array}{l} \text{スカラー場は } r \sim \frac{1}{m_\phi} \\ \text{ゲージ場は } r \sim \frac{1}{m_g} \end{array} \right\} \text{で指数的に 0 になる} \quad (2.3.24)$$

ということで、さっきは $1/r^2$ だったので発散があったけれども、指数関数的に 0 になってるので発散がないと言ってもいいでしょう。



やっぱり解析解は知られてないので、数値的に解くと、こんな感じに 0 から 1 にいくと。比べてみると分かるんですけども、さっきグラフの横軸は 30 ぐらいまで書いたんですけども、いま、10 までしか書いてないけど十分速く 1 に近づいてるってことで大体わかると思うんですけど、グローバルポータックスに比べて非常に速く真空期待値に到達するというふうになっています。

磁束密度を計算してやると、こういうふうになってるんですね。

磁束密度 F_{12} 

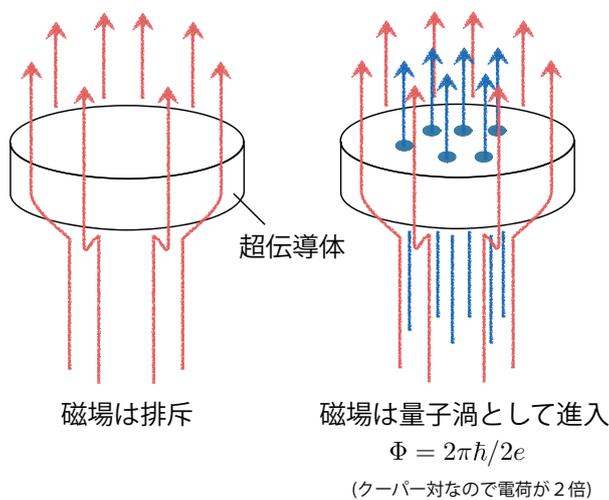
原点に局在しているということで、ポーテックスっていうのは、 F_{12} ですね、磁束を内部に溜め込んでいるというそういうソリトンです。スカラー場だけだと、潰れちゃうんですね。だからその中に磁束を入れることで、潰れないように反発して大きさを保っているという感じです。逆かもしれないけど、たぶんそれであってと思います。

フラックスは実は量子化されていて、 F_{12} の空間積分ですね。 F_{12} っていうのはさっき a'/r で書いたので、積分すると結局 a の原点と無限遠の差になります。それで、 a は無限遠で 1、原点で 0 ですから結局

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \int d^2x F_{12} \\
 &= 2\pi \int_0^\infty dr r \left(\frac{ka'}{er} \right) \\
 &= \frac{2\pi k}{e} [a]_0^\infty \\
 &= \frac{2\pi k}{e}
 \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

ということで、ポーテックスの磁束は $2\pi/e$ を単位に量子化されているということで、量子渦 (quantum vortex) と。これは場の古典的な配位なんだけれども、量子渦と呼ばれています。最小のものが $2\pi/e$ ということでですね。

これは Meissner 効果そのものです。

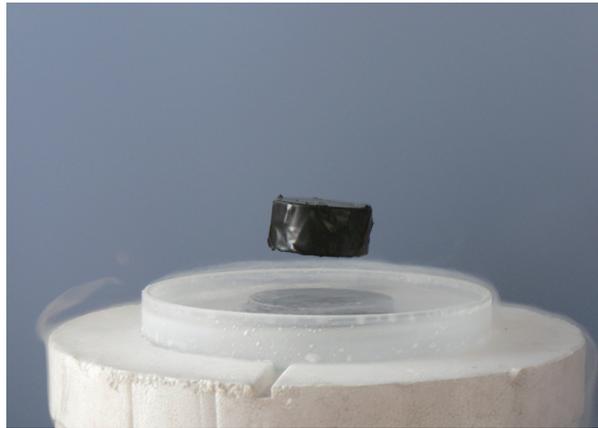


超伝導体に磁場をかけると、超伝導の中には磁場が入っていけないんですね。こう、入っていけない

だと。排斥されるわけです。けども、強く、もっと強い磁場をかけるともう逃げられないので、入っていくしかない。だから超伝導体の中に入っていく。ですけども、そのときに自由に入っていくわけではなくて、実は

$$\frac{2\pi\hbar}{2e} \quad (2.3.26)$$

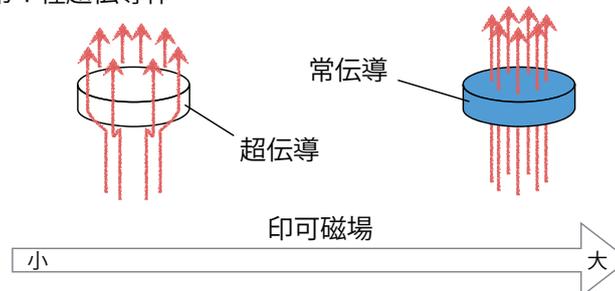
を単位として1本ずつ入ってくるんですね。これは、(2.3.25)は $\hbar=1$ としてるんですけど、 $2\pi\hbar/e$ を単位として入ってたんですけど、これはスカラー場の電荷が e だったので $2\pi/e$ ですけども、超伝導ではCooper対なので、電荷2個ですね。だから $2\pi\hbar/2e$ というふうになってるんですね。



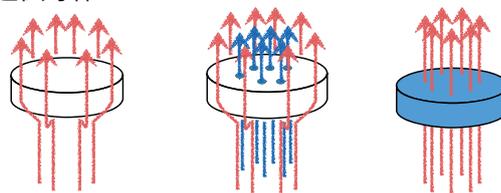
© Wikipedia *5

こうやって、超伝導体が磁石の上で浮いているというのがこれです。この中に磁束が貫いて、不純物のところにピン留めされてるので、落ちていかないと。安定にこの中にいられると。

第1種超伝導体

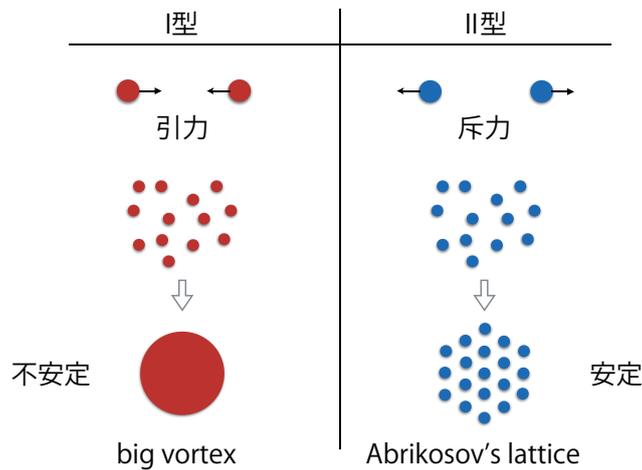


第2種超伝導体



で、超伝導体には、第1種超伝導体と第2種超伝導体っていうのがあります。それはどう違うかっていうと、外部からかける磁場を大きくしてしまうと、第1種超伝導体っていうのはすぐに壊れて、常伝導体になってしまう。第2種超伝導体っていうのはボーテックスが入ってくと。あまりにも強くすると壊れてしまって、やっぱり常伝導になってしまうってわけなんですけども、こっちが第1種、第2種と。

*5 By Mai-Linh Doan (own work) [CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>)], via Wikimedia Commons

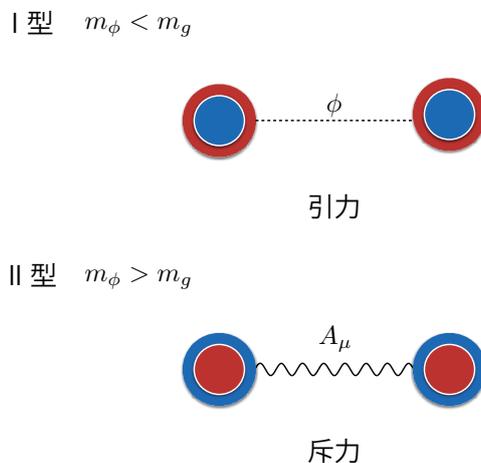


これをポーテックスの立場から理解しようと思うと、I型とII型の違いは、ポーテックスの相互作用が引力だというのが一番大事ですね。というのはポーテックスが引力だと、結局集中して集まってくる。するとものすごいビッグポーテックスができてしまって、ここにすごい強い磁場が入ってしまう。ということで、すぐ常伝導体に壊してしまう。一方でII型っていうのは斥力が働いてるので、ぱらぱらと入ってきたものはお互い反発しあうので、最密的に入るのにこう、格子を作るわけですね。こういうのを Abrikosov 格子で確か Nobel 賞をとったはずですけども、安定に入るねというわけです。

じゃあこの引力か斥力かっていうのは何が決めてるかっていうと、実は理論に入っている質量が決めています。ポーテックスっていうのは、スカラー場が作るエネルギーの塊とゲージ場（磁束）が作るエネルギーの塊の2種類がありますね。さっき漸近的な振る舞いを見たときに、スカラー場の核（赤色）っていうのは大体 $1/m_\phi$ の大きさ。で、磁場核（青色）っていうのはゲージ場の質量の逆数。



それをそれぞれ赤色と青色で描くと、スカラー場の質量がゲージ場の質量に比べて小さければ、外からポーテックスを見れば、外側がスカラー場の核で内部にゲージ場の核が埋まっているように見えるわけですね。一方II型の方は逆です。磁束が外側に見えてるといようなイメージですね。



こういうのを複数個置いたときに、I型だとスカラー場が覆ってるので、スカラー場が相互作用を運

ぶと。なので引力だと。II 型の場合は、ゲージ場の方が軽いので、ゲージ場の方が遠くまで飛ぶと。ということで、ゲージ場が運ぶのが斥力だと。磁束密度っていうのはなるべく反発しあおうと思うから、ゲージ場が外に出てきたら斥力になりそうですよね。引力の場合はその逆です。スカラー場の方が、ということになってます。

じゃあ、I 型と II 型の境界はなんなんだという、BPS ですね。そこでは、

1. スカラー場とゲージ場の質量が等しい。

$$m_\phi = m_g \quad (2.3.27)$$

2. 引力と斥力が同じと。だから、力が働かない。
3. で、Bogomol'nyi 平方完成できるんじゃないかと。
4. だから 1 階の微分方程式ができる。
5. しかも超対称性と関係してるんじゃないかと。

ちなみに $m_\phi = m_g$ だったんですけど、

$$m_\phi^2 = \lambda v^2 \quad (2.3.28)$$

で、

$$m_g^2 = 2e^2 v^2 \quad (2.3.29)$$

なんで、(2.3.28) = (2.3.29) ってことは、スカラーカップリングとゲージカップリングの間に特別な関係がありなさいということの意味してるんですね。

$$\lambda = 2e^2 \quad (2.3.30)$$

そこで、そういう特別なスカラーカップリングとゲージカップリングの関係を持った理論を考えてみましょう。

以下、表記を簡単化させるために複素座標を使いましょう。

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad (2.3.31)$$

微分を

$$\partial = \frac{\partial_x - i\partial_y}{2}, \quad \bar{\partial} = \frac{\partial_x + i\partial_y}{2} \quad (2.3.32)$$

まあ、よくやるやつですね。ゲージ場も同じように、第 1 成分と第 2 成分を微分と同じように複素に組んでおきます。

$$A = \frac{A_1 - iA_2}{2}, \quad \bar{A} = \frac{A_1 + iA_2}{2} \quad (2.3.33)$$

共変微分も同様に複素に組めますね。

$$D = \frac{D_1 - iD_2}{2}, \quad \bar{D} = \frac{D_1 + iD_2}{2} \quad (2.3.34)$$

便利な公式として、

$$D\phi(D\phi)^* + \bar{D}\phi(\bar{D}\phi)^* = \frac{1}{2}D_i\phi(D_i\phi)^* \quad (2.3.35)$$

ということと、その差が、磁束の部分となんか全微分になるっていうふうになります。

$$D\phi(D\phi)^* - \bar{D}\phi(\bar{D}\phi)^* = -\frac{e}{2}F_{12}|\phi|^2 + \frac{i}{2}[\partial_1(\phi(D_2\phi)^*) - \partial_2(\phi(D_1\phi)^*)] \quad (2.3.36)$$

これ公式です。共変微分の交換子がフラックスを与えるのは普通ですけども、それを複素座標で書いたらこうなると。

$$[D_1, D_2] = -2i[D, \bar{D}] = ieF_{12} \quad (2.3.37)$$

こういうことを使ってポーテックスの系の質量を平方完成します。

$$M = \int d^2x \left[\frac{1}{2}F_{12}^2 + D_i\phi(D_i\phi)^* - \frac{e^2}{2}(|\phi|^2 - v^2)^2 \right] \quad (2.3.38)$$

そうすると、さっき Derrick の定理を思い出してほしいんですけども、ゲージ場を入れるとビリアル定理としては、ゲージ場のエネルギーとポテンシャルが等しくなるということだったんですね。ですから、第 1 項と第 3 項を組んでやるというのが自然です。実際、 F_{12} とポテンシャルを 2 乗で組んで、そのお釣りの項が

$$\frac{1}{2}F_{12}^2 - \frac{e^2}{2}(|\phi|^2 - v^2)^2 = \frac{1}{2}(F_{12} - e(|\phi|^2 - v^2))^2 + eF_{12}(|\phi|^2 - v^2) \quad (2.3.39)$$

ですよ。一方で、 $D_i\phi(D_i\phi)^*$ っていうのはさっきの公式でいうと (2.3.35) の右辺ですね。(2.3.35) から (2.3.36) を引いてやると、それぞれの左辺第 1 項は等しいので、こう打ち消しあって、残りの項で書けますね。そうしたのがここです。

$$D_i\phi(D_i\phi)^* = 4|\bar{D}\phi|^2 - eF_{12}|\phi|^2 + i[\partial_1(\phi(D_2\phi)^*) - \partial_2(\phi(D_1\phi)^*)] \quad (2.3.40)$$

よく見てみると、このゲージ場の運動項とスカラーポテンシャルの cross term に入ってるこの $F_{12}|\phi|^2$ っていうところと、 $D_i\phi(D_i\phi)^*$ を複素に組んだことによって出てきたお釣り、(2.3.40) 右辺第 2 項というのが、ちょうど打ち消しあいます。それから残りの (2.3.40) 右辺第 3 項、第 4 項なんですけども、この項は反対称テンソルを使ってやると、全微分になるんですね。

$$i[\partial_1(\phi(D_2\phi)^*) - \partial_2(\phi(D_1\phi)^*)] = i\partial_i[\epsilon^{ij}(\phi(D_j\phi)^*)] \quad (2.3.41)$$

全微分なので、表面積分になりますけれども、無限遠では共変微分は 0 にいかないと当然エネルギーは発散してしまうので、これは表面項では 0 ですね。ですから積分したらこなくなってしまう。ということで、

$$\begin{aligned} M &= \int d^2x \left[\frac{1}{2}(F_{12} - e(|\phi|^2 - v^2))^2 + eF_{12}(|\phi|^2 - v^2) \right. \\ &\quad \left. + 4|\bar{D}\phi|^2 - eF_{12}|\phi|^2 + i[\partial_1(\phi(D_2\phi)^*) - \partial_2(\phi(D_1\phi)^*)] \right] \\ &= \int d^2x \left[\frac{1}{2}(F_{12} - e(|\phi|^2 - v^2))^2 - eF_{12}v^2 + 4|\bar{D}\phi|^2 \right] \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

残るのは、2 乗と 2 乗と残り $-eF_{12}v^2$ ですね。これよりも絶対大きくなりなさいと。

$$M \geq -v^2 \int d^2x eF_{12} \quad (2.3.43)$$

これは何かっていうと、 F_{12} の積分なので、さっき量子化されたフラックスそのものですね。

ということで、バウンドがサチるのは、BPS 方程式が成り立つとき。2乗の項が0になるときで、これですね。

$$\begin{cases} F_{12} = e(|\phi|^2 - v^2) \\ \bar{D}\phi = 0 \end{cases} \quad (2.3.44)$$

この第2式っていうのは簡単に解けて、 \bar{A} っていうのをある任意関数 ψ の $\bar{\partial}$ 微分のこういう因子がついたもの

$$\bar{A} = -\frac{i}{2e} \bar{\partial}\psi(z, \bar{z}) \quad (2.3.45)$$

というふうにして書いておくと、スカラー場っていうのが

$$\phi(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{\psi(z, \bar{z})}{2}\right) \phi_0(z, \bar{z}) \quad (2.3.46)$$

と書いておいて、これはいつでもこう書けますね。こう書いておいて、(2.3.44) 第1式に代入しますと、

$$0 = \bar{D}\phi = \left(\bar{\partial} + \frac{1}{2}\bar{\partial}\psi\right) e^{-\frac{\psi}{2}} \phi_0 = e^{-\frac{\psi}{2}} \bar{\partial}\phi_0 \quad (2.3.47)$$

これが0になりなさいっていうことですから、 $\bar{\partial}\phi_0$ が0になりなさいっていうことになって、 ϕ_0 は正則関数であればなんでもよろしいということですね。

$$\bar{\partial}\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \phi_0(z) \quad (2.3.48)$$

これを、まだ解いていないこの (2.3.44) 第2式っていうのに入れますと、 F_{12} っていうのは複素座標で書くと

$$F_{12} = -2i(\partial\bar{A} - \bar{\partial}A) \quad (2.3.49)$$

なので、 \bar{A} っていうのを (2.3.45) とおきましたから、 ψ で書くと

$$F_{12} = -\frac{2}{e} \partial\bar{\partial}\psi \quad (2.3.50)$$

みたいなのになります。ということで、BPS 方程式の第1番目のやつに入れると、

$$-\frac{2}{e} \partial\bar{\partial}\psi = ev^2 \left(e^{-\frac{\psi+\psi^*}{2}} |\phi_0(z)|^2 - 1 \right) \quad (2.3.51)$$

こんな形になって、適当なゲージ変換して ψ を実

$$\psi = \psi^* \quad (2.3.52)$$

というふうにおいてしまえば、これは

$$\partial\bar{\partial}\psi = \frac{e^2 v^2}{2} (1 - e^{-\psi} |\phi_0(z)|^2) \quad (2.3.53)$$

と、こうなるんですね。これ名前がついて、Taubes 方程式と [30]。正確にはちょっとこれを変形したものを Taubes 方程式というんですけど、まあ一緒でしょう。これに相当するものを Taubes 方程式といいます。

そうすると、結局何をすればいいかっていうと、BPS 方程式 (2.3.44) の2番目はとにかく好きな正則関数を1個、 $\phi_0(z)$ を選んできなさいと。これはもう我々に許されたチョイスです。好きなものを選

んでよい。それに対して Taubes 方程式を解けばいいということですね。Taubes 方程式っていうのは (2.3.53) でした。だから、選んだ正則関数の絶対値の 2 乗がこの方程式のソースになってるわけですね。ソースを適当に選んでこいつを解きなさいと。そうしたら解になりますよということですね。ところで、さっきやったおもむろに変数変換したのは

$$\phi = e^{-\psi/2}, \quad \bar{A} = \frac{i}{2e} \bar{\partial}\psi \quad (2.3.54)$$

としたんですけども、これは、 ϕ_0 を複素数倍すると同時に ψ を $2 \log c$ だけずらしてやる

$$\phi_0 \rightarrow c\phi_0, \quad \psi \rightarrow \psi + 2 \log c \quad (2.3.55)$$

と、これなんにも変わらないんですね。ですから、 ϕ_0 は何でもいって言ったけども、 ϕ_0 の全体の係数は意味がない。ということで、例えば k 次の多項式とってきなさいっていったら、一般には

$$\phi_0 = a \prod_{i=1}^k (z - z_i) \quad (2.3.56)$$

ですけども、この a っていうのは意味がないので、あってもなくてもいいので、取り去ってしまう。で、 ϕ_0 好きなものを与えなさいっていったら、

$$\phi_0 = \prod_{i=1}^k (z - z_i) \quad (2.3.57)$$

を与えなさいと。つまり、好きな k 個の複素数を選んできなさいよということです。そうすると、 ϕ_0 が決まると。

そうしたらこの Taubes 方程式

$$\partial\bar{\partial}\psi = \frac{e^2 v^2}{2} \left(1 - e^{-\psi} \prod_{i=1}^k |z - z_i|^2 \right) \quad (2.3.58)$$

に入れて、これを解けばいいということになりますね。境界条件はこの右辺が無限遠で 0 になりなさいということから決まります。ということは、

$$1 - e^{-\psi} \prod_{i=1}^k |z - z_i|^2 \quad (2.3.59)$$

が無限遠で 0 になりなさいということですから、 ψ は無限遠で

$$\psi \rightarrow \log \prod_{i=1}^k (z - z_i) + \log \prod_{i=1}^k (\bar{z} - \bar{z}_i) \quad (|z| \rightarrow \infty) \quad (2.3.60)$$

になりなさいということになります。

で、解いたのはいいんですけども、解いたって言ってもまだ中途半端にしか解けてなくて、(2.3.58) は解けてないんですけども、とにかくこういうソースを勝手に手でおいて、無限遠で (2.3.60) となるような ψ を見つけてきなさいっていうプログラムになってるわけですね。それで、じゃあここで自分でとってきた k 次の多項式の k っていうのはなんなのか、それから z_i っていう k 個の複素数は何なのかっていうその意味が知りたいわけです。

パラメータの意味ですけども、すぐわかりまして、 ϕ_0 っていうのは今こうですね。

$$\phi_0(z) = \prod_{i=1}^k (z - z_i) \quad (2.3.61)$$

実際の ϕ っていうのは

$$\phi = v e^{-\psi/2} \phi_0 \quad (2.3.62)$$

だったの、 ϕ_0 の零点は ϕ の零点そのものですね。 ϕ の零点っていうのは何かっていうと、対称性が回復している点。対称性が回復してるってことは、エネルギーが高いんですね。超伝導のアナロジーでいえば、常伝導になってるからそこに磁束が入るわけですね。だからこの z_i っていうのは、ポータックスの位置に対応するパラメータ。だから、 k っていうのはポータックスの数。何個ポータックスを入れたいんですかっていうそういう量になってます。それで結局、 k 個のポータックスを自由に入れられるということがわかったわけです。

じゃあ、エネルギー計算してみよう。そうするとエネルギーの表式は Bogomol'nyi 平方完成から F_{12} の積分の定数倍。

$$M = -v^2 \int d^2 x e F_{12} \quad (2.3.63)$$

F_{12} っていうのはさっき $\partial\bar{\partial}\psi$ だと。

$$M = 2v^2 \int d^2 x \partial\bar{\partial}\psi \quad (2.3.64)$$

$\partial\bar{\partial}\psi$ っていうものの 2 次元積分なんで、これ表面積分に直しますと、(2.3.64) の dx^2 を $dzd\bar{z}$ にして、 $d\bar{z}$ の方を全部潰すと、 dz の周回積分をなさいと。 $\partial\psi$ の周回積分をなさいと。

$$M = 2v^2 \left(-\frac{i}{2} \oint dz \partial\psi \right) \quad (2.3.65)$$

無限遠方で ψ っていうのは (2.3.60) になりなさいということでしたから、その z 微分なんで、(2.3.60) の第 2 項は 0 ですね。(2.3.60) の第 1 項が $1/z$ を出す。ということでこういう式ですね。

$$M = 2v^2 \left(-\frac{i}{2} \oint dz \frac{1}{\prod(z - z_i)} \right) \quad (2.3.66)$$

留数定理を使えば、

$$M = 2\pi v^2 k \quad (2.3.67)$$

と、こうなりまして、周回して極を拾ってくるというのがまさにポータックスなわけです。で、 k 個のポータックスを自由に入れることができると。このエネルギーの表式は z_i に依存してないんですね。 k 個のポータックスをどこに置いてもエネルギーはこうだと。しかも、1 個のポータックスの k 倍になってるから、つまり、ポータックスの間に全く相互作用が働いてないってことですね。だから、モジュライ空間、解の空間はものすごい膨大で、まあものすごいってことはないですけど、 z_i っていうのがモジュライパラメータですから、 k 個そういうのがあるから、 \mathbb{C}^k みたいになってるというわけですね。

単純な和

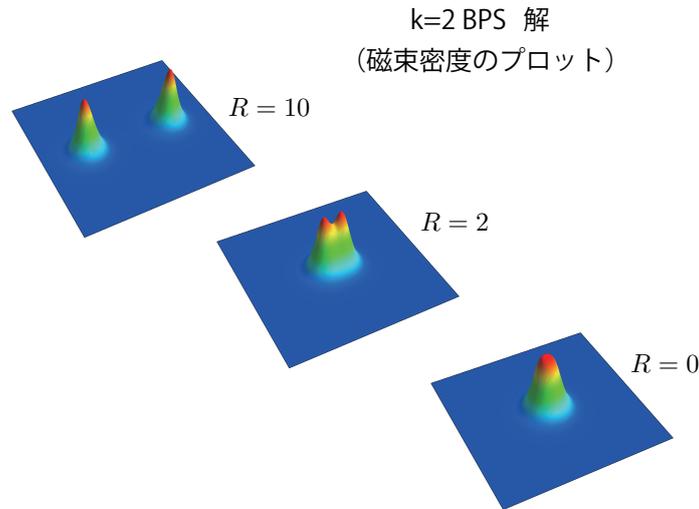
$$M_k = 2\pi v^2 k = k \times M_{k=1} \quad (2.3.68)$$

になってるといことと、場所に依存してないということで、さっきスカラー場の相互作用とゲージ場の相互作用が大きさ同じでキャンセルしてると言ったので、それがちょうど BPS ということですね。で、ポータックス k 個のモジュライ空間は、 k 個のポータックスの位置。ポータックスっていうのは区別がつかないので、区別ができない分割り算してると。

$$\mathcal{M}_k \simeq \mathbb{C}^k / S_k \quad (2.3.69)$$

そんな空間になってるというわけですね。

実際に計算してみると、厳密解はやっぱり得られないので数値解するしかないんですけどもこれは数値解で、



2個のボーテックスが質量の逆数を単位として $R = 10$ だけ離れてる場合。 $R = 2$ ぐらいになったとき。それから完全に一致している場合と。これは全部同じエネルギーで静的な解です。動かないですね。

2.4 モジュライ空間

ということで、モジュライ空間ということで、静的な BPS ソリトン間の相互作用は正味で 0 と。しかし、いったん動きだすと、もはや BPS ではなくなりますね。速度に依存した相互作用が働いて、ボーテックスとボーテックスが散乱したりします。で、どんどんディープな話にいくんだっけな…。どこで幕を引くか考えないといけません。ちょっと待ってください。よし…。

じゃあ細かい計算はどんどん飛ばすことにして、大筋を話していくことにしますけども、モジュライ空間の計量がわかると、何がわかるかっていうと、十分ゆっくり、Lorentz 収縮とかしないくらいゆっくりなボーテックスの散乱とか運動の様子がわかるんですね。なので、計量を計算したいんですけども、実はその計量を計算するという自身もなかなか難しい。普通なかなかわからない。例えばモノポールのモジュライ空間の計量なんていうのは非常に特殊なものしか、Atiyah-Hitchin [31] とかそういう本当に特別なものしかわかっていないわけですね。けども、数値的にはもちろん求めることができる。まあ、難しいんですね。難しいんですけども、難しいのでモジュライ空間の計量を求めること自体がソリトン物理の 1 つのテーマにもなっているくらいだと言えます。BPS ボーテックスに関してもモジュライ空間の計量の厳密解というのは、ボーテックス 1 個の場合を除いては知られていません。けど、計量をボーテックスの局所的なデータで表す nice な方法が知られてはいます [30]。^{*6}

まず、ボーテックスが動きだすと、状態は時間に依存してくるので、ゲージ理論においては各時刻において Gauss の法則も一緒に満たす必要が出てきます。つまり Gauss の法則って言ってるのは A_0 に関する場の方程式ですね。 $A_0 = 0$ というゲージをとれば、これは

$$-\partial_i \partial^0 A^i = J^0 \quad (2.4.1)$$

これをモジュライダイナミクスにしたいのでバックグラウンドのボーテックス解のモジュライを時間に

^{*6} 以下の計算は [30] を参考にしている。

依存させて

$$\begin{aligned} & \left[A_i(z, \bar{z}; z_i(t), \bar{z}_j(t)) \right. \\ & \left. \phi(z, \bar{z}; z_i(t), \bar{z}_j(t)) \right] \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

時間微分のところが入ってるところに入れてやると、この z とか \bar{z} に関するモジュライ空間の計量、

$$\begin{aligned} T &= \int d^2x \left[\frac{1}{2} \dot{A}_i^2 + |\dot{\phi}|^2 \right] \\ &= \sum_{i,j} [g_{ij} \dot{z}_i \dot{z}_j + g_{i\bar{j}} \dot{z}_i \dot{\bar{z}}_j + g_{\bar{i}j} \dot{\bar{z}}_i \dot{z}_j] \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

これが g_{ij} とか $g_{i\bar{j}}$ とか $g_{\bar{i}j}$ っていうのが計量ですね。これを決めたいと。

以下計算を楽にするため、ちょっとスケールしときます。たとえば

$$A_\mu \rightarrow \sqrt{2v} A_\mu, \quad \phi \rightarrow v\phi, \quad z \rightarrow \sqrt{2ev} z \quad (2.4.4)$$

そうすると質量公式はこんな簡単な、簡単っていうかスケールが全然なくなっちゃいます。

$$\frac{M}{2v^2} = \int d^2x \left[F_{12}^2 + |D_i \phi|^2 + \frac{1}{4} (|\phi|^2 - 1)^2 \right] \quad (2.4.5)$$

さっき解いた方法とちょっと似てるんですけども、

$$\bar{D}\phi = 0 \quad (2.4.6)$$

っていうのを

$$\phi = e^{\frac{h}{2} + i\chi} \quad (2.4.7)$$

というふうに書いて、 \bar{A} っていうのを

$$\bar{A} = -i\bar{\partial} \left(\frac{h}{2} + i\chi \right) = -\bar{\partial} \log \phi \quad (2.4.8)$$

ってやると (2.4.6) になるので、それを

$$F_{12} = \frac{1}{2} (1 - |\phi|^2) \quad (2.4.9)$$

の中に入れて書き直すと、こんな方程式ができます。

$$\nabla^2 h + 1 - e^h = 4\pi \sum_{i=1}^k \delta^2(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (2.4.10)$$

本来、これを Taubes 方程式っていうんですけども、これさっき ϕ_0 と ψ で書いたやつと全く同じものです。

このデルタ関数が出てるのは、2次元の Laplacian の対数微分っていうのはデルタ関数を出すので、その部分を h に入れているか入っていないかっていう差だけで見た目がちょっと違うんですけども、まあこれですね。

$$\nabla^2 \log |z|^2 = 4\pi \delta^2(z) \quad (2.4.11)$$

とにかく計算したいのは以下の量ですね。

$$T = \frac{1}{2} \int d^2x \left[4|\dot{A}|^2 + |\dot{\phi}|^2 \right] \quad (2.4.12)$$

この量を計算してやろうと。そこで、 $\log \phi$ の時間微分を η とします。

$$\eta = \partial_0(\log \phi) \quad (2.4.13)$$

$$= \frac{\dot{h}}{2} + i\dot{\chi} \quad (2.4.14)$$

ϕ を指数関数で書いたときのものです。その時間微分を η と書くことにします。そうすると、 $\dot{\phi}$ っていうのは

$$\dot{\phi} = \phi\eta \quad (2.4.15)$$

になって、 \dot{A} っていうのは

$$\dot{A} = -i\bar{\partial}\eta \quad (2.4.16)$$

っていうふうになるってことがすぐわかります。つまりこの $\dot{\phi}$ と、(2.4.12) に $\dot{\phi}$ っていうのと \dot{A} っていうのが現れるので、これを η で書いてやると、

$$T = \frac{1}{2} \int d^2x [4|\partial\bar{\eta}|^2 + e^h|\eta|^2] \quad (2.4.17)$$

というふうになります。で、次にこの Taubes 方程式の時間微分を考えます。まず渦がないところで時間微分を考えますと、(2.4.10) の右辺が 0 なので、時間微分すると左辺第 2 項が 0 になりますから

$$(\nabla^2 - e^h)\dot{h} = 0 \quad (2.4.18)$$

とこういうことがわかりますね。

さらに Gauss の法則を満たさなきゃいけないってさっき言ったんですけども、Gauss の法則を今の h とか χ で書くと、こういう形になります。

$$(\nabla^2 - e^h)\dot{\chi} = 0 \quad (2.4.19)$$

これを今のやつ、(2.4.18) と (2.4.19) を合わせますと、 η っていうのは

$$\eta = \frac{\dot{h}}{2} + i\dot{\chi} \quad (2.4.20)$$

ってやつでしたから、こういう形になりますね。

$$(\nabla^2 - e^h)\eta = 0 \quad (2.4.21)$$

次に、これポータックスの全くないところでこういう方程式だったんですけど、ポータックスがあるところっていうのは ϕ っていうのは

$$\phi = (z - z_i)e^k, \quad (z \simeq z_i) \quad (2.4.22)$$

っていう、 k は有限ななんかの関数だと思ってください。こういう ϕ はポータックスの近くで 0 にいくので、こういう依存性をしていると。だから、 $\log \phi$ っていうのをとると、

$$\log \phi = \log(z - z_i) + k \quad (2.4.23)$$

となりまして、 η っていうのは $\log \phi$ の微分、さっき η っていうのがなんだったかっていうと、(2.4.13) ですね。 $\log \phi$ の時間微分だったので、 $\log \phi$ の時間微分を出すと、 η っていうのは

$$\eta = -\frac{\dot{z}_i}{z - z_i} + \dots \quad (2.4.24)$$

と、極が入ってくるというわけです。

ということで、(2.4.24) となっているので、本当は η の ∇^2 っていうのをしたいんですけども、さっきはこの極から離れたところをやったんですけど、極のところをヒットすると、デルタ関数が出ますね。

$$\begin{aligned}\nabla^2 \eta S &= \dot{z}_i \frac{d}{dz_i} \nabla^2 \log(z - z_i) + \dots \\ &= -4\pi \dot{z}_i \partial \delta^2(z - z_i) + \dots\end{aligned}\quad (2.4.25)$$

対数の Laplacian っていうのはデルタ関数ですからこうなると。ということで、全部加味してやると、 η っていうのがこんな方程式になると。

$$(\nabla^2 - e^h)\eta = -4\pi \sum_i \dot{z}_i \partial \delta^2(z - z_i) \quad (2.4.26)$$

この解 η がわかれば、その η をさっきの積分の表式に入れて計量を計算できるというわけですね。解を知りたいので、この Taubes 方程式 (2.4.10) っていうのを微分します。微分しますとこんな形が出ますね。

$$(\nabla^2 - e^h) \frac{\partial h}{\partial z_i} = -4\pi \partial \delta^2(z - z_i) \quad (2.4.27)$$

(2.4.27) を (2.4.26) と比較すると、非常によく似た形をしてるので、 η っていうのが、全部の極を考えると

$$\eta = \sum_i \dot{z}_i \frac{\partial h}{\partial z_i} \quad (2.4.28)$$

となり、結局この量を、 h のモジュライ微分っていうのがわかれば、(2.4.28) を (2.4.17) に入れて計算すると。この量を計算するにはもう少し手間が必要で、2次元平面をポーテックスの場所付近の半径 ϵ ぐらいの小さい円とそれ以外に分けます。



その円盤のことを D_i と呼ぶことにしましょう。

それで積分を、零点を除いた部分と零点を含む円盤の部分に分けます。

$$\int_{\mathbb{C}} d^2x = \int_{\mathbb{C} - \cup D_i} + \sum_i \int_{D_i} \quad (2.4.29)$$

ただこっちの円盤の部分は、半径 ϵ を 0 にしてくと、0 になるので無視すると。こっち側の積分だけが寄与があって、こっち側の積分で

$$T = \int_{\mathbb{C} - \cup D_i} \left(2\partial\bar{\eta}\partial\bar{\eta} + \frac{1}{2}e^h|\eta|^2 \right) \quad (2.4.30)$$

を計算するんですけども、第 1 項を部分積分してやると。

$$T = \int_{\mathbb{C} - \cup D_i} \left(2\partial(\bar{\eta}\partial\bar{\eta}) - 2\bar{\eta}\partial\partial\eta + \frac{1}{2}e^h|\eta|^2 \right) \quad (2.4.31)$$

お釣りの項と第3項を合わせると、ちょうどボーテックスを含んでないところになって、デルタ関数がない、最初に見つけた η の方程式 (2.4.21) なんですけど、それを使ってやることができ、それを使うと結局

$$T = 2 \int_{\mathbb{C} \cup D_i} d^2x \partial(\bar{\eta} \bar{\partial} \eta) \quad (2.4.32)$$

みたいなふうになりまして、結局、無限遠では η っていうのは指数関数的に小さくなっていく関数なので、無限遠では0になっていくので、結局この円盤の淵の部分だけの積分になると。

$$T = -i \sum_i \int_{\partial D_i} \bar{\eta} \bar{\partial} \eta d\bar{z} \quad (2.4.33)$$

ということで、この積分をしてやればいいと。あとは、 $\bar{\eta} \bar{\partial} \eta$ の中にどれだけ極があるかっていうのを拾ってくるだけと。で、ちょっと、関数 h の性質を言っておきましょう。そうすると、 $\partial h / \partial z_i$ っていうのは、こういう方程式を満たしてました。

$$(\nabla^2 - e^h) \frac{\partial h}{\partial z_i} = -4\pi \partial \delta^2(z - z_i) \quad (2.4.34)$$

これは2次元空間のGreen関数に見えてると。

$$(\nabla^2 - e^h) G(z, z_i) = -4\pi \partial \delta^2(z - z_i) \quad (2.4.35)$$

こう書けばまさにGreen関数ですけど。

そこで、Green関数を使ってこういう量

$$\int d^2x G(z, z_i) (\nabla^2 - e^h) G(z, z_i) \quad (2.4.36)$$

を積分してやると、 $(\nabla^2 - e^h) G(z, z_i)$ の部分っていうのは、デルタ関数の微分になってきますね。

$$\int d^2x G(z, z_i) (\nabla^2 - e^h) G(z, z_i) = -4\pi \int d^2x G(z, z_i) \partial \delta^2(z - z_i) \quad (2.4.37)$$

これを出すので、結局、部分積分してデルタ関数を拾ってくると

$$\begin{aligned} \int d^2x G(z, z_i) (\nabla^2 - e^h) G(z, z_i) &= 4\pi \partial G(z_i, z_j) \\ &= 4\pi \partial \frac{\partial h}{\partial z_i} \Big|_{z=z_j} \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

というふうになります。ところで、 ∇^2 を部分積分して $G(z, z_j)$ に掛けてやると、 i と j が入れ替わるだけなんですね。ですから、(2.4.38) っていうのは i と j を入れ替えたら等しくなるということで、こういう対称性がある。

$$\partial \frac{\partial h}{\partial z_i} \Big|_{z=z_j} = \partial \frac{\partial h}{\partial z_i} \Big|_{z=z_i} \quad (2.4.39)$$

同様なことを \bar{z}_i の微分の方

$$(\nabla^2 - e^h) \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_i} = -4\pi \bar{\partial} \delta^2(z - z_i) \quad (2.4.40)$$

でやっても同じようなことが見つかって、

$$\partial \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} \Big|_{z=z_i} = \bar{\partial} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_i} \Big|_{z=z_j} \quad (2.4.41)$$

で、こういうのを計算するときに、 h っていう関数を $z = z_i$ 付近で展開するということをします。

$$h(z, \bar{z}) = \log |z - z_i|^2 + a_r + \frac{\bar{b}_i}{2}(z - z_i) + \frac{b_i}{2}(\bar{z} - \bar{z}_i) + \mathcal{O}(|z - z_i|^2). \quad (2.4.42)$$

デルタ関数があるので、対数の依存性があるって、その他に普通の a_r とか z とか \bar{z} っていうのがこうあります。実関数なんで、こういうふうに展開されてますね。これを見てこの量を計算してやると、

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h}{\partial z_j} \right|_{z=z_i} &= \left. \frac{\partial}{\partial z_j} \left[\frac{\partial a_i}{\partial z_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{b}_i}{\partial z_j} (z - z_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial b_i}{\partial z_j} (\bar{z} - \bar{z}_i) + \dots \right] \right|_{z=z_i} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{b}_i}{\partial z_j} \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

この z の 1 次のところの量 \bar{b} だけで書いてしまいます。

それで、いろんな計算をすると、この b っていうのが重要で、 b っていうのはもう 1 度言うと h っていう実関数の展開した z の係数が \bar{b}_i で、 \bar{z} の係数が b_i です。この量だけが重要で、さらにこの量の間にはモジュライ依存性のこういう対称性があるんですね。

$$\frac{\partial \bar{b}_i}{\partial z_i} = \frac{\partial \bar{b}_j}{\partial z_i}, \quad \frac{\partial b_i}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial b_j}{\partial \bar{z}_i}, \quad \frac{\partial \bar{b}_i}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial b_j}{\partial z_i} \quad (2.4.44)$$

このことが後でちょっと効いてくるんですけども、結局、

$$T = -i \sum_i \int_{\partial D_i} \bar{\eta} \partial \eta d\bar{z} \quad (2.4.45)$$

で、 η っていうのは (2.4.28) だったので、 h を $z = z_j$ の周りでこう展開して

$$\begin{aligned} h &= \log |z - z_j|^2 + \log |\bar{z} - \bar{z}_j|^2 + a_j \\ &+ \frac{\bar{b}_j}{2}(z - z_j) + \frac{b_j}{2}(\bar{z} - \bar{z}_j) \\ &+ \bar{c}_j(z - z_j)^2 + d|z - z_j|^2 + c_j(\bar{z} - \bar{z}_j)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.4.46)$$

(2.4.45) にぼんっと代入しますと、細かいことはもう置いて、全部ちょっと飛ばしましたけども、こんな感じで書けます。

$$T = \frac{\pi}{2} \sum_{i,j} \left(2 \frac{\partial b_j}{\partial z_i} - 4d_j \delta_{ij} \right) \dot{z}_i \dot{\bar{z}}_j \quad (2.4.47)$$

これが計量ですね。ここに b っていうのが出てきて、これは h っていう関数を z_j の周りで展開したときの 1 次の係数です。それからこの d_j っていうのは実はちょっと言わなかったんですけど、 d_j っていうのは $z\bar{z}$ の係数ですね。(2.4.46) の $|z|^2$ の係数が d なんですけども。実はこの d っていうのは $d = -1/4$ っていうのは知られていて、それを入れますと、結局モジュライ空間の計量は局所的なデータだけで決まって、こういうふうになると。

$$g_{i\bar{j}} = \pi \left(\delta_{ij} + 2 \frac{\partial b_j}{\partial z_i} \right) \quad (2.4.48)$$

$$g_{ij} = 0, \quad g_{\bar{i}\bar{j}} = 0 \quad (2.4.49)$$

だから b_j さえわかれば、計量がわかる。しかも g_{ij} とか $g_{\bar{i}\bar{j}}$ は 0 だと。 $g_{i\bar{j}}$ しかないっていうことがわかります。

計量の漸近形なんですけども、ここからわかるように、この b の部分はさっきちらっと言ったように無限遠で 0 になりますから、無限遠で平坦になるということですね。

$$b_j(z_i, \bar{z}_i) \rightarrow 0, \quad g_{i\bar{j}} \rightarrow \pi \delta_{i\bar{j}} \quad (|z| \rightarrow \infty) \quad (2.4.50)$$

当然相互作用がなくなる。無限遠に遠くなれば、平坦になるということから k 個のポータックスが自由に動けると。あと、もう 1 つ重要な性質として、ポータックスの計量は Kähler 計量になってます。Kähler 計量っていうのは、Kähler 形式が閉形式

$$\omega = \frac{i}{2} g_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j, \quad d\omega = 0 \quad (2.4.51)$$

になってるということなんですけども、これを計算するときにさっき言った b っていう局所的なデータの間にある対称性

$$\frac{\partial \bar{b}_i}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial b_j}{\partial z_i} \quad (2.4.52)$$

が重要だよということで、計量が Kähler になってる。ポータックスのモジュライ空間は Kähler 多様体なんです。モノポールにいくと、モノポールっていうのはモジュライ空間が hyperKähler になってる。モノポールっていうのは実は $\mathcal{N} = 4$ の超対称性をもった理論に自然に出てくる量なんです。で、モノポールがあることによって半分に破れるから、モノポールは $\mathcal{N} = 2$ の超対称性をリスペクトする。 $\mathcal{N} = 2$ 超対称性に出てくる非線形シグマ模型のターゲット空間っていうのは hyperKähler じゃなきゃいけないので、モノポールのモジュライ空間は hyperKähler。ここで出てきたポータックスは、モジュライ空間が Kähler です。Kähler っていうのは $\mathcal{N} = 1$ のターゲット空間に出てくるわけですね。なので、実はポータックスっていうのは $\mathcal{N} = 2$ の超対称性をもったゲージ理論に自然に現れてきて、そこで半分の超対称性を壊すからモジュライ空間が Kähler になってるというわけです。今、ボソニックな理論だけでやったんですけども、もう超対称性でやりなさいよって言われてるようなもんですよ。

2.5 ポータックスの散乱

せっかく計量やったんで、ポータックスの散乱を考えたいんですけども、残念ながら計量っていうのは (2.4.48) まで書けたんですけども、この b っていうののモジュライ依存性、どういうモジュライの関数なのかっていうのは解けないんですね。これは数値的に解くしかない。だけど、数値的に解いたら、計量がわかると。数値的には解かれています。

それで、解けなくてもいくつかのことはわかって、運動を重心と相対座標に分けておく。

$$z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad w = \frac{z_1 - z_2}{2} \quad (2.5.1)$$

重心は興味がないので、今は相対座標に興味があるんですね。重心系に移って $z_c = 0$ にしてしまっって、そうすると、相対座標を w と書くことにしますと、モジュライ空間の線素は

$$ds^2 = f^2(w, \bar{w}) dw d\bar{w} \quad (2.5.2)$$

こう書けますね。で、回転対称性、つまり 2 個あるポータックスは、どの向きをどういうふうに座標張ってもいいので、これはもう回転対称性から w の大きさにしかよらない

$$f(w, \bar{w}) = f(|w|) \quad (2.5.3)$$

ということなんで、

$$w = \rho e^{i\theta} \quad (2.5.4)$$

とすると、こんなふうには書けると。

$$ds^2 = f(\rho)^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2) \quad (2.5.5)$$

で、先ほどの公式に入れてやると、 f^2 っていうのは局所的なデータ b っていう未知関数を用いて書いてこういうふうに求められるんですね。

$$f(\rho)^2 = 2\pi \left(1 + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho b) \right) \quad (2.5.6)$$

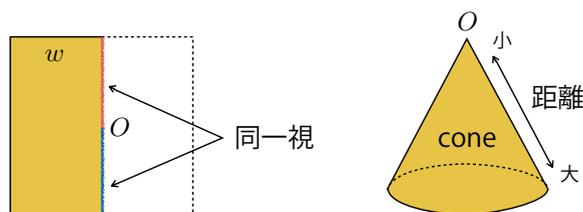
さっきも言ったようにこの b っていうのは数値的に解かないと求められない。

ところで、 $w = \rho e^{i\theta}$ としましたけれども、 180° 回転するともちろん

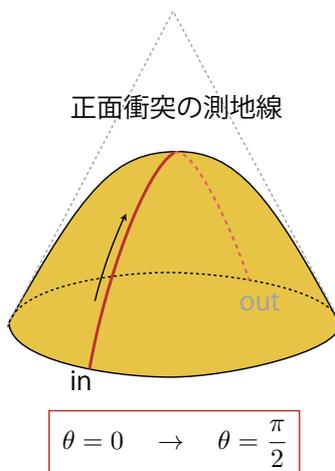
$$w = \rho e^{i\theta} \xrightarrow{180^\circ \text{回転}} w = \rho e^{i(\theta+\pi)} \quad (2.5.7)$$

となりますね。だけどこれはポーテックスが入れ替わるだけです。でも入れ替わったら、物理変わらないんですね。おんなじ粒子だから。ということで、 θ と $\theta + \pi$ は、こう同一視しなきゃいけないと。

$$\theta \sim \theta + \pi. \quad (2.5.8)$$



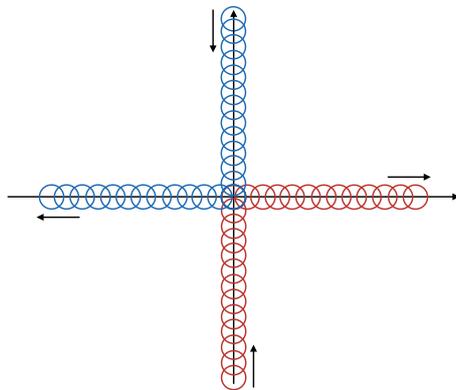
だから w っていうのは原点を中心にこことここを同一視したようなこういう円錐になってるわけですね。 $w = 0$ のところが相対座標が 0 ですからぶつかるところで、こっちにいくと離れてるということですね。もちろんこんな conical singularity はなくて、ちゃんと解くと滑らかになってます。



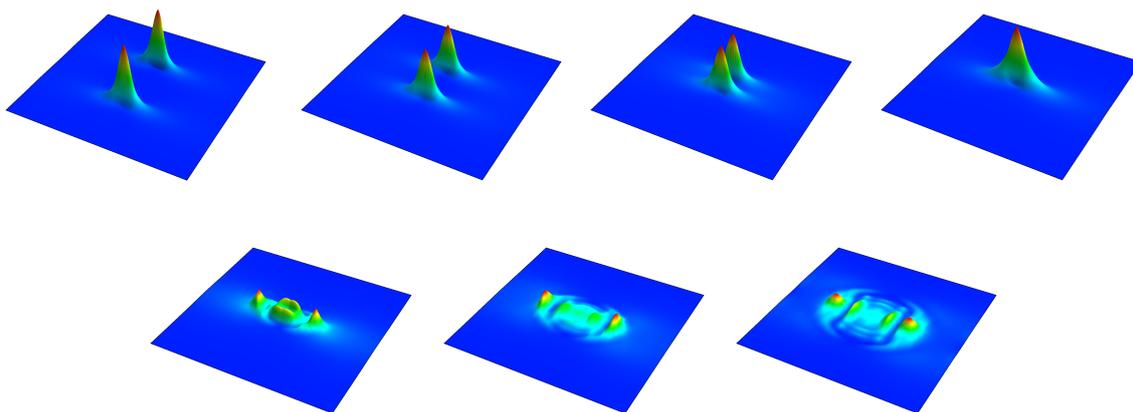
滑らかになってるんですけども、こういう、遠くから見りゃとんがってますけども、近くから見るとちゃんと均されてると。この中で、じゃあ正面衝突する測地線はどこかっていったら、原点を通る測地線ですね。位相はどこでもいいですけども、こっから来て、反対側に抜けてくというのが測地線ですね。

そうすると、ここを例えば $\theta = 0$ としますと、反対側は $\theta = \pi$ ではなくて、 $\theta = \pi/2$ です。 θ と $\theta + \pi$ を同一視したから。

つまり、 $\theta = 0$ から来たのは $\theta = \pi/2$ になるってことは、 90° 散乱されてるってことですね。



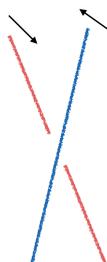
だから、こっちから来たものとこっちから来たものはこう 90° 散乱する。ということで、正面衝突すると 90° 散乱します。この 90° 散乱っていうのは多くのソリトンで知られていて、例えばソリトンの場合もこうぶつけると、 90° 散乱することがよく知られています。



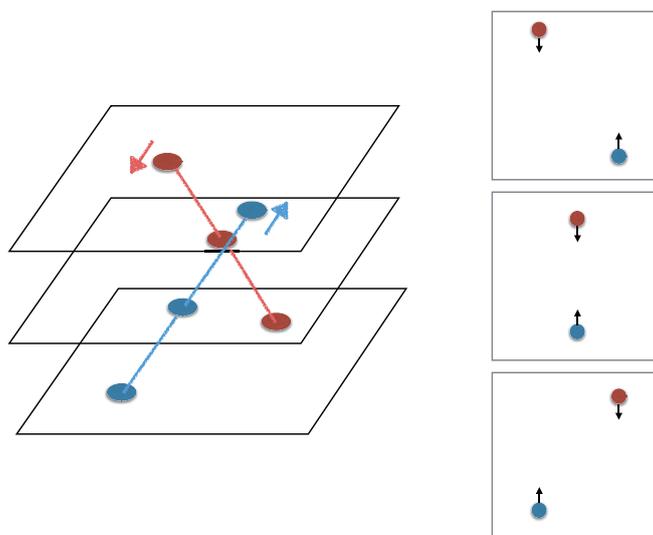
実際に、グローバルボータックスの、今のゲージドボータックスではないんですけども、グローバルボータックスの散乱の様子を数値的に描いてみました。光速の 90% でぶつけてみます。なんで、Lorentz 収縮してこんな形になってますけども、こうやると、こうなって 90° 方向に散乱していく。これは数値計算なので光速の 90% くらいまでやっても全然問題ないんですけども、こうなってますね。

2.6 渦紐のダイナミクス

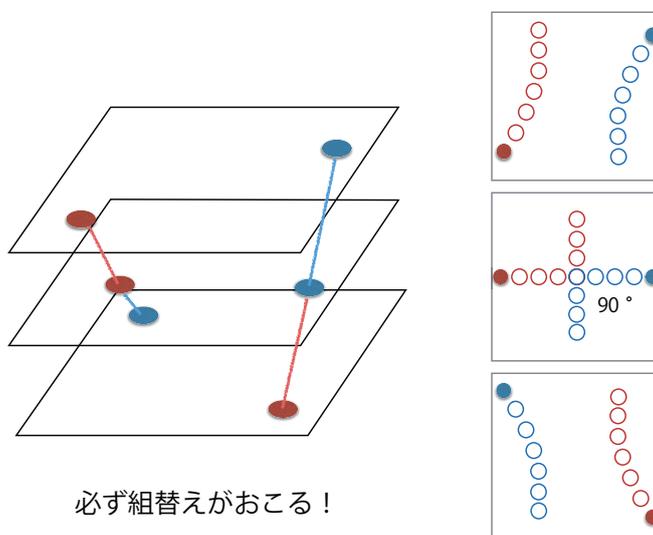
最後の話題にしたいんですけども、いま 2 次元の渦をやりましたけども、これを 3 次元にもってくと、紐になりますね。渦糸。



宇宙紐とか、普通に実験室系で作れるボーテックスも渦糸になったりとかしてますけども、2次元系で見たいまの90°散乱ってというのが、実は渦糸の衝突にも大きく影響しています。



ちょっと分かりづらいですけども、2本の直線、渦糸、青いのが手前にあって、赤いのが後ろ側にあると。で、青いのが奥側に進んで、赤いのが手前側に帰ってくる。それをこうスライスで見てもいいでしょう。各スライスは、まあ3枚のスライスで見てもいいですけども、一番下のスライスには一番下の青いボーテックスと赤いボーテックスがあって、真ん中のスライスには真ん中の青と赤がある。で、上は上の青と赤がある。というわけで、真ん中のところは正面衝突してる。上と下は衝突パラメータが0じゃない散乱をするわけですね。



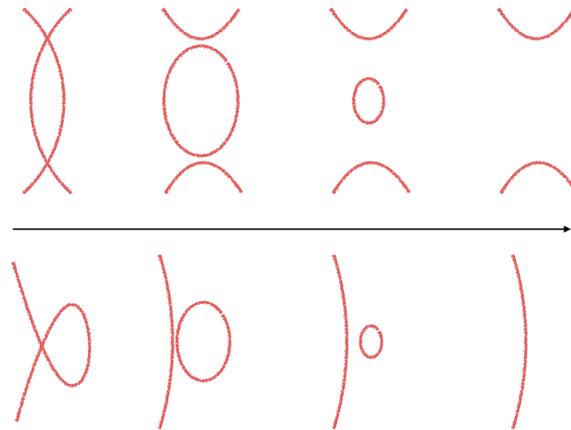
必ず組替えがおこる！

これはどうなるかっていうと、2次元系で見れば、真ん中が90°散乱して、上側と下側はまあ適当にこうなる。この90°散乱したってことは何が起きてるかっていうと、これは相手が組み変わったっていうふうに読み取れますね。左側の3つを繋ぐのと、右側の3つをつなぐというのがソリトンになってるんですね。ということで、90°散乱が起こるといことは結局、まあものすごく速くぶついたらちょっと話が変わってくるんですけども、ほとんどの、光速の90%とかいかなければ、必ず組み替えが起こるといことですね。

この組み替えが起こるか起きないかっていうのは例えばこれが宇宙紐なんかだったとしたら、宇宙の歴史に大きな影響を与えることですね。例えば、高温の宇宙が冷えるにしたがって、何らかの相転移が

起こって $U(1)$ 対称性が自発的に破れたとしましょう。そのときに、このスケールをもつ渦紐がわらうとできると。こういうのを Kibble メカニズムっていうんですけども [32]。そういうものが現在までたくさん生き残ってたら、もう見つかってないないわけですからまずいわけですね。そうすると、渦紐が勝手に死んでくれるメカニズムがなきゃいけない。

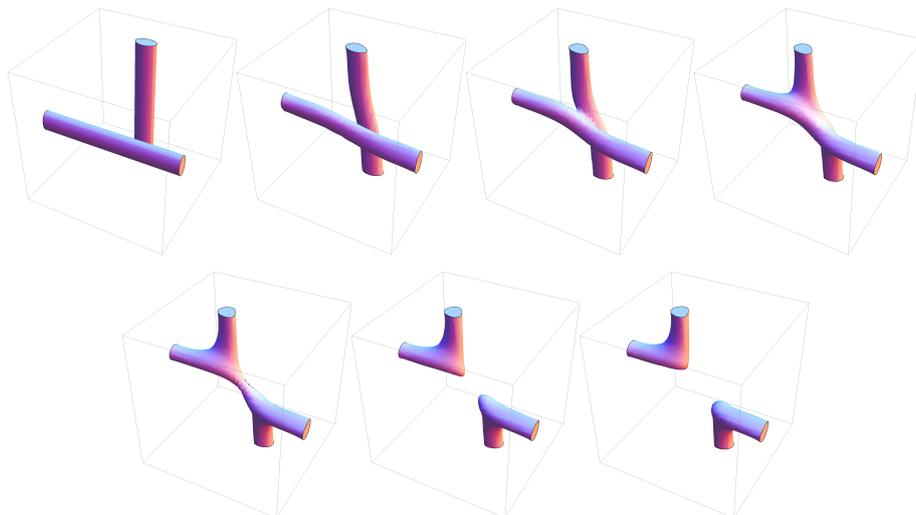
それは、宇宙紐が、例えば他人同士がぶつかったら、こうループができて、ループができると自分の張力で縮まっていなくなっていく。だからどんどん短くなっていなくなっていく。



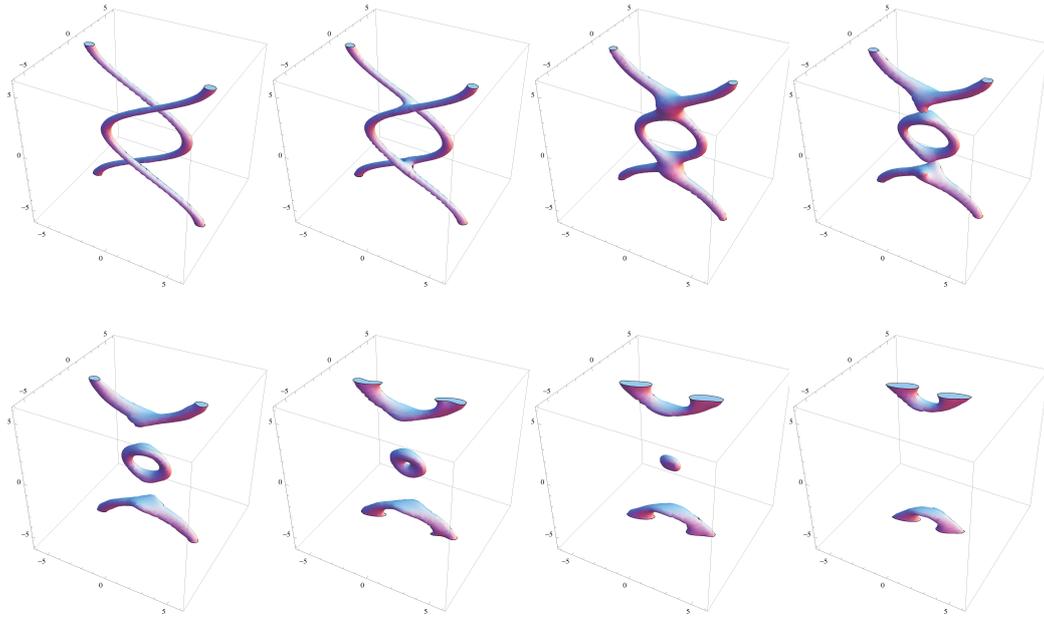
例えば、自分自身でもどんどん小さくなっていけると。だから、こういうことが確率ほとんど 1 で起こるというわけですね。だから、いなくなるというわけです。

で、宇宙紐っていうのは観測からたくさんあっちゃだめなんですけども、1本2本あったって別にいいということなんで、宇宙の端から端までぐらいの長さの宇宙紐がちょっとぐらひはあってもいいかもねと。そういうものがあつたとすると、宇宙紐の質量スケールっていうのは対称性の破れのスケールを拾ってますから、そういう意味では宇宙の化石。それを見つければ宇宙の過去がわかる。それから、重力と結合させると欠損角が発生するので、重力レンズ効果も起きるわけですね。それから重力波源として色々面白いことが分かるだろうと。

数値計算でやってみると、実際にこう組み変わる様子が見てとれると思います。



他にも、こうぶつかったやつが輪っかになって、輪っかが消えてくっついてというようなのも、グローバルボーテックスなんですけどね、まあ見ることはできる。



で、あの、もうやめようかなと思います。まあ道半ばですけども、ちょっと、かなり時間も来てますので。ということでゲージドボーテックスとグローバルボーテックスについて見てきましたけれども、ソリトンで重要な、例えば計量をどう求めるだとか、それが実際に例えば宇宙紐のリコネクションにどう関わってくるかと。で、1つ言い忘れましたが、このトポロジカルソリトンで宇宙紐を作ると、宇宙紐がぶつかると、ほとんど確率1でリコネクションするんですね。だけど宇宙紐がもしDストリングとかFストリングとすると、それは弦の結合定数で決まってくるんですね。だからそこで全然違いが出ると。というので、まあかなり前ですけども、cosmic Dストリングとか、Polchinski [33, 34] とかでしたっけ？そういう人とかが言って、そういうのが実際に宇宙に漂うDブレーンってのはあるんじゃないかということを行った時期がありました。その後どうなったかちょっとフォローしてないですけども、Dブレーンが宇宙紐だって言うときと、ソリトンが宇宙紐って言うときは大分違うんですね。それは今reconnectionの確率が違うということです。

2.7 Fermions

はい。で、えーと、今日できなかったのは実はあの、何があるかっていうのを見てみると、あとはフェルミオンがどう局在するかっていう話をしようかなーと思ってました。

2.8 Superconducting string

フェルミオンがやっぱり局在するんですけども、フェルミオンがボーテックスの上に局在すると、昔Wittenが言ったsuperconducting cosmic string [35] っていうのが出てきて、ボーテックス上にフェルミオンのゼロモードがいつまでも流れてると。チャージを持ったmasslessフェルミオンが光速で動いているという話があって、そういうのがあると、そういうのをsuperconducting string っていうんですけども、そういう話をしようと思っていました。そういうのがあると、安定なループが作れます。絶対なくならないカレントが流れてるので、そういうのでボーテックスのループを作ると、カレントがなくなれないのでループが小さくなればなるほどカレントから反発力を受けて、ループが安定になると。

2.9 Semi-local vortex

それからボーテックスの仲間に semi-local ボーテックスっていうのがあって、これは、実際標準模型とかいくと Higgs 場っていうのは 1 個じゃなくて 2 個になったりしますよね。2 成分の Higgs 場になったら、ボーテックスはどうなるのかっていうと、そのときに semi-local ボーテックスと呼んで、これも BPS で、なんか色々あります。まあ、マニアックっちゃマニアックかもしれん。

2.10 Lump

実はその semi-local ボーテックスっていうのは、ある特別な極限でシグマ模型 lump、 CP^1 lump っていうのいくと。それは厳密に解けるような模型で、面白いので、話をしようかなと思いました。例えばインスタントンには small instanton singularity とかありますけども、small lump singularity とかいうのがあって、それをどう解消するかという話とか。

2.11 電弱 vortex string

あとは、電弱ストリングっていうのがあって、電弱理論にも一応ストリングが得られるって候補が、昔、話がありました。ただ、それは不安定なんですね。実は電弱ストリングっていうのは、Higgs 場の質量と W ボソンとか Z ボソンの質量に依存してて、もしも Higgs 場の質量が軽かったらそういうソリトンが安定でいられたんですけども、ご存知の通り、質量が重かったんで、 $m_H = 126\text{GeV}$ っていう前から、Higgs の方が重いっていうのは知られてましたけども、そういう意味でボーテックスは不安定。電弱理論のボーテックスは不安定ということが知られています。

2.12 Non-Abelian vortex

それから非可換ボーテックスっていうのがあって、それが僕がここ最近ずーっとやってるやつなので、それも話したかったんですけど、まあ、全く触れられず、ですね。そこでは非可換ボーテックスのモジュライ空間をどうやって探してくか。例えばモノポールとかインスタントンだったら Nahm 構成法 [36, 37] とか ADHM 構成法 [38] っていうのがあるんですけども、ボーテックスに対してはそういうのがないんですね。それをやる方法としてモジュライ行列法 [39, 40, 41] というのがあって、そういうのをかなり昔から僕と僕の共同研究者がやってたんで、それについてお話ししようとは思ってました。

3 Monopoles

3.1 Monopoles in electromagnetism

あとは、モノポールの話ができてなくて、まあ、こんなの見せたところで何の意味もないんですけども、まずは電磁気理論で Dirac モノポールっていうのがあると、何が起きるんだと。一番重要なこととして、電荷と磁荷を掛けると、2 分の整数になりなさいということで、

$$qg = \frac{n}{2} \quad (3.1.1)$$

こう量子化されますね。磁荷と電荷を掛けると半整数になりなさい、ということはもしもこの世に 1 個でもモノポールがあると、電荷が離散化されるということで、なぜ電荷が一番小さい電荷が e で、その

次が $2e$ でっていうふうになってるかっていうのは、例えばモノポールがあればその答えを与えると。

3.2 't Hooft-Polyakov monopole

それを実際にソリトンとして作ることが知られてきて、そいつが't Hooft-Polyakov モノポールと呼ばれていて、Georgi-Glashow 模型なんかで作ることができます。

3.3 BPS monopole

で、BPS にいくことによって、もっと面白いことがあって。

3.4 Montonen-Olive duality

あ、一番重要な。Montonen-Olive 双対性 [42] っていうのがあって、BPS 極限すなわち超対称性が入るような極限にいくと、光子と中性スカラーと W ボソンとモノポールっていうのがあるんですけども、その質量と電荷と磁荷とスピンを書いたのがこの表なんです。

$\lambda = 0$	質量	電荷	磁荷	スピン
a_μ	0	0	0	1
ϕ_3	0	0	0	0
W_μ^\pm	gv	$\pm g$	0	1
モノポール	$\frac{4\pi}{g}v$	0	$\pm \frac{4\pi}{g}$	0

BPS 極限だけです。BPS じゃないと、 ϕ_3 らへんに質量が現れたりするんですけども、これを見ると、電荷と磁荷を入れ替えて、 g っていうのはこれは電荷のことですけども、それと、モノポールの $4\pi/g$ っていうのを、これ磁荷ですね、 $1/g$ 、電荷分の 1 になってます。これをちょうど入れ替えると、W ボソンとモノポールの質量がちょうど入れ替わる。ということで、この理論の中で電荷と磁荷を入れ替えて W ボソンとモノポールを入れ替えると同じ理論になってるんじゃないかと。さっきは sine-Gordon と massive Thirring っていう違う理論の間の双対性だったんですけども、これは同じ理論の中にこういう双対性があるんじゃないかということで、しかも電荷と磁荷は掛け算すると定数になるんですから電荷が小さいところは、磁荷はでかい。だから強弱双対性になってる。ということで、しかも自分自身の中に双対があるので自己双対な理論。ただし、ゲージボソンってのはスピン 1 だしモノポールは spherical なものだからスピンなんてもってないんですね。全然自由度が違うじゃないかと言ったときに、この自由度を補ってるものは何かっていうと、フェルミオンです。モノポールがあると、フェルミオンが局在するって言いましたね。フェルミオンがあると、ソリトンが縮退すると。なかなか難しいんですけども、 $\mathcal{N} = 4$ とかいくと、4 つの massless フェルミオンが局在するので、 $2^4 = 16$ 個のモードができます。そうすると、そこら辺でスピン 1 とかスピン 0 とかスピン 1/2 とかっていうモノポールの状態でうまく帳尻あわせることができ、 $\mathcal{N} = 4$ の中ではこういう双対性はあるだろうと。 $\mathcal{N} = 2$ とか下がってくると難しい、よくわからないということになっている。これは massive Thirring と sine-Gordon の双対性とよく似ているので、1 次元の理論を勉強すれば、他のところでよくわかるよねーって言ったのはこういう意味でした。

4 Kink, vortex and monopole

あとはもう終わりますけど、フィナーレとして話したかったこととして、最後にここまで学んできたことを全部一緒にたにしてやろうということで、キंकとポーテックスとモノポールっていうのの夢のコラボレーションについてお話をしようと思っていました。これは、超対称な理論の中に、今まで個々、単体を考えてきましたね。ドメインウォール、キंकとかポーテックスとかモノポールとかね。それぞれ BPS だと半分の超対称性を保つんですけども、こういうのが同時に存在すると、例えば $1/4$ の超対称性とか $1/8$ の超対称性とかを保つ状態にできます。で、これは $1/4$ なんですけども、実際には、こんなようなことができます。モノポールを超伝導の中に入れたら、フラックスが紐状になるしかないということで、モノポールを Higgs 相に置くと、ポーテックスとモノポールの複合体ができるわけですね。自然と出てくる。そういうのを BPS 状態として作ることができて $1/4$ BPS 状態になるということが知られています。実はこの配位をこのポーテックスの上の有効理論から見ると、もう詳細は全然言えないんですけども、実は、ポーテックスっていうのは $3+1$ 次元の中の 2 次元のオブジェクトですから、その世界体積は $1+1$ 次元、だから $1+1$ 次元の理論ということですね。で、その理論は何かって言うと、massive CP^1 非線形シグマ模型ですね。だから、 4 次元の中にポーテックスを置くと、その中に有効理論として $1+1$ 次元が出てくるというわけです。だから $1+1$ 次元はトイモデルじゃない。ポーテックスの中にあるんですね。その中でキंकを作ることができて、ポーテックスの中にキंकができます。ポーテックスの中に何か局在した粒子がいる。それは 4 次元から見るとモノポールだと。ということで、キंकとポーテックスとモノポールというのはポーテックスを架け橋として繋がってますね。だからキंकとモノポールは Higgs 相でほとんど一緒ですね。

で、昔から、 4 次元と 2 次元の間にはなんか妙な類似性があると、BPS スペクトラムとかそういうのに、ほとんど一緒じゃないかと言ったんですけども、それを物理的に解釈すると、このポーテックスがあると、ポーテックス上の例えば 4 次元のモノポールはポーテックス上のキंक。だからそういう対応っていうのはポーテックスを通じて現れるということで、妙な 4 次元と 2 次元の間に知られた漸近自由性とかそういうやつは、ポーテックスから見ることで理解できるって言ったのが、David Tong という人で、そういうことにもこういうことは使われているわけですね [43]。

まあ、全然話せませんでしたけども、そういうことを話そうと思っていました。ということで、ソリトンを通じていろんな必要なことを皆さんに伝えたつもりです。ソリトンの面白さとか重要さとか、そういう、まあなんか難しそうだなとか、そんな必要ねーよとか、そういうふうな boundary が少し下がって、これから研究したいなと思ってくれる人がいたら、大変ありがたいです。じゃあ、時間も過ぎてますので、終わります。どうもありがとうございました。

～～拍手～～

講義録作成校からの謝辞

衛藤稔先生は講義依頼を快く引き受けてくださり、スライドによるわかりやすい講義をしてくださいました。また、講義録のチェックや、講義に使用したスライド、およびアニメーションによる説明を行った部分に関する差し替え用の画像の提供をしてくださいました。ここに感謝の意を表します。最後に、夏の学校の企画・運営に携わった皆様に感謝いたします。

参考文献

衛藤氏からのコメント：

「本講義の多くの部分は [4, 5, 13, 30] を参考に作成しました。より詳しい内容を勉強したい方はそちらを参照してください。」

- [1] S. R. Coleman, “Q Balls,” Nucl. Phys. B **262** (1985) 263 [Erratum-ibid. B **269** (1986) 744].
- [2] N. S. Manton, “A Remark on the Scattering of BPS Monopoles,” Phys. Lett. B **110** (1982) 54.
- [3] E. R. C. Abraham and P. K. Townsend, “Q kinks,” Phys. Lett. B **291** (1992) 85.
- [4] R. Rajaraman, “Solitons And Instantons. An Introduction To Solitons And Instantons In Quantum Field Theory,” North-holland, 1982.
- [5] E. J. Weinberg, “Classical solutions in quantum field theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics,” Cambridge University Press, 2012.
- [6] R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, “Nonperturbative Methods and Extended Hadron Models in Field Theory. 2. Two-Dimensional Models and Extended Hadrons,” Phys. Rev. D **10** (1974) 4130.
- [7] R. Jackiw and C. Rebbi, “Solitons with Fermion Number 1/2,” Phys. Rev. D **13** (1976) 3398.
- [8] R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, “The Particle Spectrum in Model Field Theories from Semiclassical Functional Integral Techniques,” Phys. Rev. D **11** (1975) 3424.
- [9] S. R. Coleman, “The Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model,” Phys. Rev. D **11** (1975) 2088.
- [10] S. Mandelstam, “Soliton Operators for the Quantized Sine-Gordon Equation,” Phys. Rev. D **11** (1975) 3026.
- [11] L. Randall and R. Sundrum, “A Large mass hierarchy from a small extra dimension,” Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370 [hep-ph/9905221].
- [12] 青木慎也, 「格子上の場の理論 (シュブリングー現代理論物理学シリーズ)」, 丸善出版, 2012.
- [13] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, “Cosmic Strings and Other Topological Defects,” Cambridge University Press, 2000.
- [14] A. Vilenkin, “Gravitational Field of Vacuum Domain Walls,” Phys. Lett. B **133** (1983) 177.
- [15] J. Ipser and P. Sikivie, “The Gravitationally Repulsive Domain Wall,” Phys. Rev. D **30** (1984) 712.
- [16] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and supergravity,” Princeton University Press, 1992.
- [17] J. A. de Azcarraga, J. P. Gauntlett, J. M. Izquierdo and P. K. Townsend, “Topological Extensions of the Supersymmetry Algebra for Extended Objects,” Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 2443.
- [18] S. Ferrara and M. Porrati, “Central extensions of supersymmetry in four-dimensions and three-dimensions,” Phys. Lett. B **423** (1998) 255 [hep-th/9711116].
- [19] A. Ritz, M. Shifman and A. Vainshtein, “Enhanced worldvolume supersymmetry and intersecting domain walls in N=1 SQCD,” Phys. Rev. D **70** (2004) 095003 [hep-th/0405175].

- [20] N. Maru, N. Sakai, Y. Sakamura and R. Sugisaka, “Simple SUSY breaking mechanism by coexisting walls,” Nucl. Phys. B **616** (2001) 47 [hep-th/0107204].
- [21] M. Arai, F. Blaschke, M. Eto and N. Sakai, “Matter Fields and Non-Abelian Gauge Fields Localized on Walls,” PTEP **2013** (2013) 013B05 [arXiv:1208.6219 [hep-th]].
- [22] M. Arai, F. Blaschke, M. Eto and N. Sakai, “Localization of matter fields and non-Abelian gauge fields on domain walls,” J. Phys. Conf. Ser. **411** (2013) 012001 [arXiv:1211.1235 [hep-th]].
- [23] M. Arai, F. Blaschke, M. Eto and N. Sakai, “Stabilizing matter and gauge fields localized on walls,” PTEP **2013** (2013) 9, 093B01 [arXiv:1303.5212 [hep-th]].
- [24] G. R. Dvali and M. A. Shifman, “Domain walls in strongly coupled theories,” Phys. Lett. B **396** (1997) 64 [Erratum-ibid. B **407** (1997) 452] [hep-th/9612128].
- [25] M. Eto, N. Maru, N. Sakai and T. Sakata, “Exactly solved BPS wall and winding number in N=1 supergravity,” Phys. Lett. B **553** (2003) 87 [hep-th/0208127].
- [26] M. Eto, N. Maru and N. Sakai, “Stability and fluctuations on walls in N=1 supergravity,” Nucl. Phys. B **673** (2003) 98 [hep-th/0307206].
- [27] M. Eto and N. Sakai, “Solvable models of domain walls in N = 1 supergravity,” Phys. Rev. D **68** (2003) 125001 [hep-th/0307276].
- [28] M. Eto, S. Fujita, M. Naganuma and N. Sakai, “BPS Multi-walls in five-dimensional supergravity,” Phys. Rev. D **69** (2004) 025007 [hep-th/0306198].
- [29] E. Witten, “Some Exact Multi - Instanton Solutions of Classical Yang-Mills Theory,” Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 121.
- [30] N. S. Manton and P. Sutcliffe, “Topological solitons,” Cambridge University Press, 2004.
- [31] M. F. Atiyah and N. J. Hitchin, “Low-Energy Scattering of Nonabelian Monopoles,” Phys. Lett. A **107** (1985) 21.
- [32] T. W. B. Kibble, “Topology of Cosmic Domains and Strings,” J. Phys. A **9** (1976) 1387.
- [33] E. J. Copeland, R. C. Myers and J. Polchinski, “Cosmic F and D strings,” JHEP **0406** (2004) 013 [hep-th/0312067].
- [34] G. Dvali and A. Vilenkin, “Formation and evolution of cosmic D strings,” JCAP **0403** (2004) 010 [hep-th/0312007].
- [35] E. Witten, “Superconducting Strings,” Nucl. Phys. B **249** (1985) 557.
- [36] W. Nahm, “A Simple Formalism for the BPS Monopole,” Phys. Lett. B **90** (1980) 413.
- [37] W. Nahm, “On Abelian Selfdual Multi - Monopoles,” Phys. Lett. B **93** (1980) 42.
- [38] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld and Y. I. Manin, “Construction of Instantons,” Phys. Lett. A **65** (1978) 185.
- [39] Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, “All exact solutions of a 1/4 Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield equation,” Phys. Rev. D **71** (2005) 065018 [hep-th/0405129].
- [40] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, “Moduli space of non-Abelian vortices,” Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 161601 [hep-th/0511088].
- [41] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, “Solitons in the Higgs phase: The Moduli matrix approach,” J. Phys. A **39** (2006) R315 [hep-th/0602170].
- [42] C. Montonen and D. I. Olive, “Magnetic Monopoles as Gauge Particles?,” Phys. Lett. B **72**

(1977) 117.

- [43] D. Tong, “Quantum Vortex Strings: A Review,” *Annals Phys.* **324** (2009) 30 [arXiv:0809.5060 [hep-th]].