素粒子論研究・電子版 Vol. 22 (2016) No. 3

超重力理論についてのノート

今村 洋介

2007 年 9 月

Soryushiron Kenkyu

概 要

これは基本的に計算ノートなので、かなり細かい計算式まで含んでいて読みにくいですが、全ての計算を（私が）あとから追えるようにするためですのでご了承ください。

超重力理論の作用は通常フェルミオンについて 4 次の項までを含んでいますが、ここでの方針として、ネーター処方を用いる場合には、重力を含む計算においてはそのような高次の項は無視し、フェルミオンについては 2 次の項までを考慮しています。ただし、重力を含まないような計算においては、フェルミオンについての全てのオーダーで計算を行います。

超場形式および tensor calculus の章では全ての計算でフェルミオンの高次の項まで含める予定ですが、まだ完全ではありません。

このノートを作成するにあたっては多数の文献を参考にしました。それらについては少しずつでも付け加える予定ですがいまのところ文献リストはいたって不完全です。

2016 年追記：このノートは作成途中であり、ホームページで公開しながらちょっとずつ更新していましたが、このところほったらかしになっていました。久しぶりに読み返すとおかしなところも多々目に付きますが、参考にして下さっている方もいるようですので、ここで一旦素粒子論研究に投稿させていただきます。今後また更新した場合には新たなバージョンを投稿しようと思います。

目 次

第 I 部　4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論　11

第 1 章　表記法、基本的公式など　12

1.1 スピノル 12
1.1.1 4 成分スピノル 12
1.1.2 4 成分スピノルの添え字 14
1.1.3 2 成分スピノル 16
1.1.4 ディラック表示とワイル表示の関係 17
1.1.5 フィルツ変換 18
1.2 正準量子化 18
1.2.1 正準交換関係 18
1.2.2 フェルミオン運動項 19
1.3 対称性について 19
1.3.1 変換と生成子 19
1.3.2 電荷とカレント 21
1.4 重力場 23
1.4.1 スピン接続と捩率 23
1.4.2 曲率テンソルとビアンキ恒等式 24
1.4.3 アフィン接続 26
1.4.4 アインシュタイン作用とエネルギー運動量テンソル 27
1.4.5 線形近似 28
1.4.6 ニュートンポテンシャル 29

第 2 章　大域的な超対称性　31

2.1 超ポアンカレ代数と超場 31
2.1.1 超ポアンカレ代数 31
2.1.2 ベクトル超場 31
2.1.3 ハミルトニアンの正値性 32
2.2 カイラル多重項 33
2.2.1 カイラル超場 33
2.2.2 F 項および D 項ラグランジアン 35
2.2.3 スカラー多様体 36
2.2.4 Kähler 多様体 39
2.2.5 スカラー多様体上の共変性 40
2.2.6 $\mathrm{U}(1)_R$ 変換 43
2.3 ゲージ多重項 44

2.3.1 ゲージ場についての約束 44
2.3.2 複素化された結合定数 45
2.3.3 超場による構成 47
2.3.4 Fayet-Iliopoulos 項 52
2.4 荷電カイラル多重項 53
2.4.1 Wess-Zumino ゲージ 53
2.4.2 補助場の運動方程式とポテンシャル 54
2.4.3 ゲージ変換の一般化 55
2.4.4 キリングベクトルとリー微分 55
2.4.5 アイソメトリーのゲージ化 58
2.4.6 ケーラー変換とモーメントマップ 60
2.5 変換則とラグランジアンのまとめ 62
2.6 カレント 62
2.6.1 カレント超場 62
2.6.2 超カレント 65

第 3 章 成分形式による超重力理論 70
3.1 単純超重力理論 70
3.1.1 作用と変換則 70
3.1.2 捩率 70
3.1.3 不変性のチェック 73
3.1.4 グラビティーノ質量と宇宙項 74
3.2 カイラル多重項 76
3.2.1 ネーター項 76
3.2.2 ケーラー接続 78
3.2.3 重力との結合によってスカラー多様体に課される条件 80
3.2.4 ポテンシャル項の導入 81
3.2.5 カイラル多重項まとめ 84
3.3 ゲージ多重項 85
3.3.1 ネーター項 85
3.3.2 中性カイラル場 86
3.4 荷電カイラル多重項 88
3.4.1 ゲージ変換とケーラー変換 88
3.4.2 FI パラメータと R-対称性のゲージ化 90
3.4.3 ラグランジアンと変換則 92
3.4.4 変分計算 93
3.4.5 不変関数 G で書かれたラグランジアン 96

第 4 章 超場形式による 4 次元超重力理論 99
4.1 超空間 99
4.1.1 フェルミオン的座標の導入 99
4.1.2 曲率と捩率の定義 101
4.1.3 一般座標変換 101

4.1.4 ビアンキ恒等式 . . . 104
4.2 超場と成分場の関係について . . . 105
4.2.1 超場と成分場の関係 . . . 105
4.2.2 超共変性 . . . 107
4.2.3 無矛盾性 . . . 110
4.3 拘束条件とビアンキ恒等式 . . . 111
4.3.1 拘束条件 . . . 112
4.3.2 成分場に対するビアンキ恒等式 . . . 112
4.3.3 微分を含まないビアンキ恒等式 . . . 112
4.3.4 θ 微分を含むビアンキ恒等式 . . . 116
4.4 重力多重項 . . . 120
4.4.1 捩率および曲率の間の関係式 . . . 120
4.4.2 超共変的な場の強さ . . . 122
4.4.3 超対称変換則 . . . 123
4.5 カイラル多重項 . . . 124
4.5.1 成分場と超対称変換則 . . . 124
4.5.2 超対称変換則 . . . 126
4.5.3 F 項ラグランジアン . . . 128
4.5.4 運動カイラル超場 . . . 130
4.5.5 単純超重力理論 . . . 132
4.5.6 カイラル多重項のラグランジアン . . . 134
4.5.7 変換則の成分場形式との関係 . . . 136
4.6 ベクトル多重項 . . . 137
4.6.1 成分場と超対称変換 . . . 137
4.6.2 ゲージ多重項 . . . 139
4.7 大域的超対称性 . . . 140

第 5 章 Tensor calculus による 4 次元超重力理論 143
5.1 ゲージ理論の変形による重力理論の構成 . . . 145
5.1.1 ゲージ変換と共変微分 . . . 145
5.1.2 一般座標変換 . . . 147
5.1.3 拘束条件 . . . 149
5.2 ポアンカレ代数と重力 . . . 150
5.2.1 ポアンカレ代数のゲージ化 . . . 150
5.2.2 拘束条件 . . . 150
5.2.3 変形された代数 . . . 152
5.2.4 物質場の導入 . . . 153
5.3 超ポアンカレ代数と超重力 . . . 155
5.3.1 超ポアンカレ代数のゲージ化 . . . 155
5.3.2 拘束条件 . . . 156
5.4 超コンフォーマル代数 . . . 158
5.4.1 交換関係 . . . 158
5.4.2 $\mathrm{SU}(2,2|1)$ . . . 161

5.4.3 超共形代数のゲージ化 164
5.5 拘束条件と重力多重項 167
5.5.1 $\omega_\mu{}^{mn}$ を与える拘束条件 167
5.5.2 $\phi_\mu{}^\alpha$ を与える拘束条件 168
5.5.3 曲率テンソルに対する恒等式 171
5.5.4 $f_\mu{}^m$ を与える拘束条件 172
5.5.5 補正された代数 174
5.5.6 曲率テンソルの展開式 176
5.6 物質場の導入 177
5.6.1 物質場に対する拘束条件 177
5.6.2 共変微分 178
5.7 カイラル多重項 180
5.7.1 変換則 181
5.7.2 運動多重項 183
5.7.3 F 項および D 項ラグランジアン 185
5.7.4 重力カイラル多重項 187
5.7.5 カイラル多重項を含む超共形場理論 188
5.8 ポアンカレ超重力理論 189
5.8.1 ゲージ固定と compensator 189
5.8.2 重力多重項 190
5.8.3 カイラル多重項 191
5.8.4 運動多重項 192
5.8.5 F 項ラグランジアン 193
5.8.6 単純超重力理論 193
5.8.7 カイラル多重項 194
5.9 ベクトル多重項 195
5.9.1 成分と変換則 195
5.9.2 ゲージ多重項 201
5.9.3 ゲージ場の強さと運動項 203
5.9.4 Wess-Zumino ゲージ 204
5.9.5 ベクトル多重項のラグランジアン 206
5.9.6 FI パラメータ 207
5.9.7 大域的超共形変換 207

第 6 章 補遺 **211**
6.1 添え字 211
6.2 共変微分 211

第 II 部 4 次元 $\mathcal{N} \geq 2$ 超重力理論 **213**

第 7 章 大域的 $\mathcal{N} = 2$ 超対称性 **214**
7.1 超対称代数と中心電荷 214
7.1.1 $\mathcal{N} \geq 2$ 超対称代数 214

Soryushiron Kenkyu

7.1.2 $\mathcal{N}=2$ 超対称多重項 215
7.2 繰り込み可能な $\mathcal{N}=2$ QCD ラグランジアン 217
7.2.1 ベクトル多重項 217
7.2.2 ハイパー多重項 218
7.3 ハイパー多重項 222
7.3.1 超対称性がモジュライ空間に課す条件について 222
7.3.2 Hyper Kähelr 多様体 225
7.3.3 変換則とラグランジアン 226
7.3.4 変分計算 229
7.4 ディラックの量子化条件 236
7.4.1 クーロン力とローレンツ力 236
7.4.2 電荷行列 237
7.4.3 周期行列とゲージ場のラグランジアン 238
7.5 ベクトル多重項 240
7.5.1 変換則 240
7.5.2 ラグランジアン 241
7.5.3 プレポテンシャル 243
7.5.4 双対場の多重項 244
7.5.5 $\mathrm{Sp}(k,\mathbf{Z})$ 対称性 245
7.6 中心電荷 246
7.6.1 電荷、磁荷と中心電荷の関係 246
7.6.2 6 次元の理論との関係 247

第 8 章 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論 251
8.1 重力多重項 251
8.1.1 単純超重力理論の作用と変換則 251
8.1.2 運動方程式と $\mathrm{U}(1)_R$ 対称性 252
8.1.3 中心電荷 253
8.2 ベクトル多重項と重力の結合 256
8.2.1 ケーラー変換の共変化 256
8.2.2 プレポテンシャル 258
8.2.3 電荷行列 260
8.2.4 公式 261
8.2.5 ベクトル場の導入 262
8.2.6 中心電荷 267
8.2.7 大域的極限 267
8.3 5 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論の $\mathbf{S}^1$ コンパクト化 268
8.3.1 スピノルの関係 268
8.3.2 大域的な場合 270
8.3.3 超重力理論の場合 271
8.4 ブラックホール解 275
8.5 ハイパー多重項と重力の結合 278

Soryushiron Kenkyu

第 9 章　大域的 $\mathcal{N}=4$ 超対称性 285
9.1 $\mathcal{N}=4$ 超共形代数 . . . 285
9.2 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論 . . . 286

第 10 章 $\mathcal{N}=4$ 超重力理論 291
10.1 重力多重項 . . . 291
10.1.1 ラグランジアンの構成 . . . 291
10.1.2 モジュライ空間の構造 . . . 295
10.1.3 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/\,\mathrm{U}(1)$ . . . 296

第 11 章 $\mathcal{N}=8$ 超重力理論 299

第 III 部　高次元の超重力理論 303

第 12 章 超重力理論に現れる場について 304
12.1 スピノルと γ 行列 . . . 304
12.1.1 共役表現 . . . 304
12.1.2 $\mathrm{SO}(d_+, d_-)$ のスピノル表現 . . . 306
12.1.3 スピノルの 2 次形式 . . . 309
12.1.4 フェルミオン作用の運動項 . . . 311
12.1.5 反対称テンソルと γ 行列について . . . 311
12.2 単純超重力理論 . . . 314
12.2.1 グラビティーノ . . . 314
12.2.2 単純超重力理論 . . . 316
12.3 ゲージ場 . . . 318
12.3.1 反対称テンソル場 . . . 318
12.3.2 ゲージ場とブレーンの結合 . . . 318
12.3.3 カレントと外微分形式 . . . 321
12.3.4 ディラックの量子化条件 . . . 322
12.3.5 反対称テンソル場の規格化 . . . 323
12.3.6 自己双対場 . . . 325

第 13 章 11 次元超重力理論 326
13.1 零質量場 . . . 326
13.1.1 11 次元のスピノル . . . 326
13.1.2 作用と超対称変換 . . . 327
13.1.3 変分計算 . . . 328
13.1.4 6 形式場 . . . 330
13.2 M-ブレーン . . . 332
13.2.1 11 次元の超対称代数 . . . 332
13.2.2 BPS bound . . . 335
13.2.3 ブレーン上の場 . . . 336
13.2.4 M2-M5 系 . . . 337
13.3 古典解 . . . 339

13.3.1 M5-ブレーン解 339
13.3.2 M2-ブレーン解 341
13.3.3 ド・ジッター時空と反ド・ジッター時空 342
13.3.4 地平面近傍 346
13.3.5 PP-波 351

第 14 章 超場形式による 11 次元超重力理論 355
14.1 超場と成分場の関係 355
14.1.1 超場への成分場の埋め込み 355
14.1.2 反対称テンソル場の超共変化 356
14.2 拘束条件とビアンキ恒等式 356
14.2.1 拘束条件とビアンキ恒等式の設定 356
14.2.2 SO(11) の表現 357
14.2.3 成分場に対するビアンキ恒等式 359
14.2.4 捩率に対するビアンキ恒等式（微分を含まないもの） 360
14.2.5 反対称テンソル場に対するビアンキ恒等式（微分を含まないもの） 362
14.2.6 ビアンキ恒等式（θ 微分を含むもの） 362
14.3 成分場による書き換え 364
14.3.1 成分場に対する超対称変換 364
14.3.2 超共変化された場の強さ 365
14.3.3 成分場についての運動方程式 367
14.4 平坦な超空間 368
14.5 超空間上のブレーン 370
14.5.1 M2-ブレーン作用 371

第 15 章 II 型超重力理論 373
15.1 10 次元のスピノル 373
15.2 IIA 型超重力理論の作用と超対称変換 373
15.3 アインシュタイン計量 381
15.4 IIA 型超重力理論の変分計算 382
15.4.1 共通部分 382
15.4.2 R-R 場を含む部分 385
15.5 11 次元超重力理論から IIA 型理論へのコンパクト化 388
15.6 IIB 型超重力理論の運動方程式と超対称変換 392
15.7 IIB 型超重力理論の $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 対称性 395
15.8 II 型超重力理論の T-双対性 398
15.9 II 型超重力理論のブレーン 403
15.10M-ブレーンと IIA-ブレーン 405
15.11D-ブレーンの作用とその T-双対性 409
15.12IIB-ブレーンの $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 対称性 415
15.13D-ブレーン解 417
15.14基本的弦の解 419
15.15NS5-ブレーン解 420

15.16 IIB 型超重力理論における 1 および 5-ブレーン解 421
15.17 IIB 7-ブレーン解 423
15.18 D6-ブレーンとカルツァ・クラインモノポール 426
15.19 Kaluza-Klein mode 429
15.20 marginal bound states 431
15.20.1 D1-D5 系 431
15.20.2 D1-P 系 433
15.21 supertubes 434
15.21.1 waving D1-brane 434
15.21.2 D2-supertubes 438
15.21.3 resolved D1-D5 439
15.22 Klebanov-Strassler 解 441
15.22.1 D3-ブレーン 441
15.22.2 conifold 442
15.22.3 conifold 上の D3-ブレーン 443
15.22.4 フラックスの導入 443
15.22.5 deformed conifold 445
15.22.6 Klebanov-Strassler 解 446
15.23 非 BPS な D-ブレーン解 447

第 16 章 超場形式による II 型超重力理論 449
16.1 IIA 型超重力理論 449
16.1.1 Dp-ブレーン作用 452

第 17 章 I 型超重力理論 455
17.1 重力部分 455
17.2 10 次元超対称 Yang-Mills 理論 457
17.3 ゲージ場との結合 459
17.4 5-ブレーン解 462

第 18 章 7 次元超重力理論 464
18.1 スピノルと γ 行列 464
18.2 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論 465
18.2.1 B_2 形式 466
18.2.2 R-対称性のゲージ化 469
18.2.3 B_3 形式 470
18.2.4 R-対称性のゲージ化と位相項の導入 472
18.3 11 次元超重力理論の $\mathbf{T}^4$ コンパクト化 475
18.4 ヘテロ型超重力理論の $\mathbf{S}^3$ コンパクト化 477
18.4.1 SO(4) 一重項部分 477
18.4.2 左不変な群多様体によるコンパクト化 478
18.4.3 ゲージ場部分の導出 480
18.4.4 超対称性 481
18.5 古典解 482

18.5.1 線形ディラトン解 . . . 482
18.5.2 ディラックモノポール解 . . . 483
18.5.3 SU(2) モノポール解 . . . 484
18.5.4 **AdS$_7$** . . . 486
18.5.5 5-ブレーン解 . . . 487
18.6 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論 . . . 487

第 19 章 6 次元超重力理論 **491**
19.1 スピノル、ディラック行列、外微分形式 . . . 491
19.2 $\mathcal{N}=(1,0)$ 超重力理論の多重項 . . . 493
19.3 重力多重項とテンソル多重項 . . . 495
19.4 ハイパー多重項 . . . 498
19.4.1 重力との結合 . . . 501
19.5 ベクトル多重項 . . . 504
19.5.1 重力との結合 . . . 507
19.6 R-対称性のゲージ化 . . . 509
19.7 10 次元超重力理論の $\mathbf{T}^4$ コンパクト化 . . . 511
19.7.1 スピノルと γ-行列 . . . 511
19.7.2 truncation . . . 512
19.7.3 ボゾン部分 . . . 513
19.7.4 超対称変換 . . . 514
19.7.5 モジュライ空間 . . . 515
19.7.6 超重力理論の対称性と弦理論 . . . 517
19.8 拡張された超対称性 . . . 518
19.8.1 $\mathcal{N}=(1,1)$ . . . 518
19.8.2 $\mathcal{N}=(2,0)$ . . . 519
19.8.3 $\mathcal{N}=(2,2)$ . . . 520
19.9 古典解 . . . 521
19.9.1 D1-D5 系 . . . 521
19.9.2 自己双対弦 . . . 524
19.9.3 非 BPS な自己双対弦の解と 3 次元ブラックホール . . . 527

第 20 章 5 次元超重力理論 **531**
20.1 5 次元のスピノルと γ 行列 . . . 531
20.2 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論 . . . 532
20.2.1 重力多重項 . . . 532
20.2.2 ベクトル多重項 . . . 532
20.2.3 大域的極限 . . . 541
20.3 古典解 . . . 542
20.3.1 BPS ブラックホール解 . . . 542
20.3.2 BPS 弦解 . . . 544
20.3.3 3-charge black holes . . . 545
20.3.4 rotating charged black hole (BMPV black hole) . . . 549

20.3.5 string 解 552
20.3.6 black rings 555

付 録 A 補遺 **562**
A.1 n 次元球面の表面積 562
A.2 正規座標 562
A.3 エネルギー運動量テンソル 563
A.3.1 計量の漸近的振る舞いと角運動量 564
A.4 双対場について 564
A.4.1 スカラー多様体上の座標変換 565
A.4.2 スカラー場に作用する変換と共変性 567
A.5 特殊ホロノミー多様体 569
A.6 't Hooft の η 記号 570
A.7 コンパクト化で用いられる公式 571
A.7.1 アイソメトリーを持つ内部空間 571
A.7.2 変形のパラメータを持つ内部空間 574
A.7.3 トーラスコンパクト化 575
A.7.4 $\mathbf{S}^n$ コンパクト化 576
A.8 ワイル変換についての公式 578
A.9 運動量があるときの計量についての公式 579
A.10 群多様体上の計量と接続 580
A.10.1 G 580
A.10.2 G/H 582
A.10.3 $\mathbf{S}^3 \sim \mathrm{SU}(2)$ 584
A.11 Taub-NUT 多様体 585
A.12 Chern-Simons 形式とインスタントン 588

第I部

4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論

第1章　表記法、基本的公式など

1.1　スピノル

1.1.1　4 成分スピノル

4 次元時空の計量として時間方向が負の計量 $\mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$ を用いる。座標の添字は、時間方向が 0、それ以外の空間方向が $i=1,2,3$ を用いる。γ 行列は次のクリフォード代数を満足する 4×4 行列である。

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2\eta^{\mu\nu} \tag{1.1}$$

複数の添え字を持つ γ 行列は、γ 行列の積を反対称化したものである。たとえば $\gamma^{\mu\nu}$ は次のように定義される。

$$\gamma^{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu). \tag{1.2}$$

ディラック共役は次のように定義される。

$$\overline{\psi}=i\psi^\dagger\gamma^0. \tag{1.3}$$

次の関係式が成り立つ。

$$(i\gamma^0)^\dagger=i\gamma^0,\quad (i\gamma^0\gamma^\mu)^\dagger=-i\gamma^0\gamma^\mu. \tag{1.4}$$

この関係式を用いて、次の式を示すことができる。

$$(\overline{\psi}_1\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\psi_2)^\dagger=(-)^k\overline{\psi}_2\gamma^{\mu_k\mu_{k-1}\cdots\mu_1}\psi_1. \tag{1.5}$$

ただし、グラスマン数の積のエルミート共役は $(ab)^\dagger=b^\dagger a^\dagger$ のように順序が入れ替わるものとした。このとき、二つの実グラスマン数の積は準虚になる。

マヨラナ共役は次のように定義される。

$$\psi_C=C\overline{\psi}^T. \tag{1.6}$$

$\psi_C=\psi$ を満足するスピノルを定義することができ、マヨラナスピノルと呼ばれる。C は荷電共役行列であり、次の性質を満足する。

$$C^T=-C,\quad (\gamma^\mu C)^T=\gamma^\mu C. \tag{1.7}$$

この関係式を用いると、次の式を示すことができる。

$$\overline{\psi}_1\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\psi_2=(-)^k\overline{\psi}_{2C}\gamma^{\mu_k\mu_{k-1}\cdots\mu_1}\psi_{1C}. \tag{1.8}$$

ただし、スピノルがグラスマン奇であるとして、その入れ換えによる符号を考慮した。(1.5) と (1.8) を組み合わせれば、次の式が示される。

$$(\overline{\psi}_1\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\psi_2)^*=\overline{\psi}_{1C}\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\psi_{2C} \tag{1.9}$$

カイラリティ行列を γ^5 と表す。γ^5 とそれ以外の γ-行列との関係は次のように与えられる。

$$\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^5. \tag{1.10}$$

完全反対称テンソルを次のように定義する。

$$\epsilon_{0123} = +1, \quad \epsilon^{0123} = -1. \tag{1.11}$$

実際にあとで必要になるのは、これらの定義よりも以下の関係式である。

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = i\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5. \tag{1.12}$$

また、γ^5 は次の性質を持つ。

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad \gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5, \quad (i\gamma^0\gamma^5)^\dagger = -i\gamma^0\gamma^5, \quad (\gamma^5 C)^T = -\gamma^5 C. \tag{1.13}$$

スピノルの二次形式について次の式が成り立つ。

$$(\overline{\psi}_1\gamma^5\psi_2)^\dagger = -\overline{\psi}_2\gamma^5\psi_1, \quad \overline{\psi}_1\gamma^5\psi_2 = \overline{\psi}_{2C}\gamma^5\psi_{1C}, \quad (\overline{\psi}_1\gamma^5\psi_2)^* = -\overline{\psi}_{1C}\gamma^5\psi_{2C} \tag{1.14}$$

自己双対テンソル $T^{(\mathrm{SD})}_{\mu\nu}$ および反自己双対テンソル $T^{(\mathrm{ASD})}_{\mu\nu}$ は次の性質を満たすものとして定義される。

$$\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T^{(\mathrm{SD})}_{\rho\sigma} = T^{(\mathrm{SD})}_{\mu\nu}, \quad \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T^{(\mathrm{ASD})}_{\rho\sigma} = -T^{(\mathrm{ASD})}_{\mu\nu}. \tag{1.15}$$

(1.12) を用いると、

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma} = i\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5\gamma_{\rho\sigma} = -2i\gamma^{\mu\nu}\gamma^5 \tag{1.16}$$

が得られるが、左あるいは右から $1 \pm \gamma^5$ を掛ければ

$$\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma}(1 \pm \gamma^5) = \pm\gamma^{\mu\nu}(1 \pm \gamma^5) \tag{1.17}$$

となり $\gamma^{\mu\nu}(1+\gamma^5)$ および $\gamma^{\mu\nu}(1-\gamma^5)$ はそれぞれその反対称ベクトル添え字について自己双対および反自己双対である。あるテンソル $T_{\mu\nu}$ の自己双対部分および反自己双対部分 $T^-_{\mu\nu}$ は次のように取り出すことができる。

$$T^{(\mathrm{SD/ASD})}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu}(+/-)\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}T^{\rho\sigma}\right) \tag{1.18}$$

行列の具体的な表示が必要な際には次の表示を用いる。

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ \sigma_i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \epsilon & \\ & \epsilon \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

ただし、パウリ行列 σ_i および ϵ は次のように定義される。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Soryushiron Kenkyu

1.1.2　4 成分スピノルの添え字

4 成分スピノルの添え字をあらわに書く場合には、次のようにする。

$$\overline{\psi}\psi' = \overline{\psi}_\alpha \psi'^\alpha, \quad \overline{\psi}\gamma^\mu\psi' = \overline{\psi}_\alpha (\gamma^\mu)^\alpha{}_\beta \psi'^\beta \tag{1.21}$$

荷電共役行列は上付き添え字を二つ持ち、(1.7) の式は次のように書ける。

$$C^{\beta\alpha} = -C^{\alpha\beta}, \quad (\gamma^\mu)^\beta{}_\gamma C^{\gamma\alpha} = (\gamma^\mu)^\alpha{}_\gamma C^{\gamma\beta} \tag{1.22}$$

また、マヨラナ共役の定義式 (1.6) は添え字をあらわに書けば

$$\psi_C^\alpha = C^{\alpha\beta}\overline{\psi}_\beta \tag{1.23}$$

となる。この式をより簡単に書くために、スピノル添え字の上げ下げを次のように定義する。

$$\psi^\alpha = C^{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad \psi_\alpha = C^{-1}_{\alpha\beta}\psi^\beta. \tag{1.24}$$

すると、マヨラナ共役の式は $\psi_C^\alpha = \overline{\psi}^\alpha$ となる。

添え字の上げ下げルール (1.24) は複数の添え字を持つ場合にも適用される。たとえば、荷電共役行列 C の二つの上付き添え字を下に下ろしたものは

$$C_{\alpha\beta} \equiv C^{-1}_{\alpha\gamma} C^{-1}_{\beta\delta} C^{\gamma\delta} = C^{-1}_{\beta\alpha} = -C^{-1}_{\alpha\beta} \tag{1.25}$$

のように逆行列の符号を反転したものである。この下付き添え字の C を用いると、添え字の上げ下げルール (1.24) は「常に左上と右下で縮約」というルールにまとめることができる。

$$\psi^\alpha = C^{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad \psi_\alpha = \psi^\beta C_{\beta\alpha}. \tag{1.26}$$

また、添え字の上げ下げルールで γ^μ の二つの添え字を同じ位置にしたものを定義すれば、(1.22) の第 2 式は次のように表される。

$$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} = (\gamma^\mu)_{\beta\alpha} \tag{1.27}$$

添え字の上げ下げルールを用いれば、次の式を示すことができる。

$$\overline{\psi}^\alpha \psi'_\alpha = -\overline{\psi}_\alpha \psi'^\alpha \tag{1.28}$$

つまり、添え字のつけ方によって符号が変化する。(1.21) のように、隣り合う文字の添え字の縮約が左下と右上で行われている場合、すなわち、左側にあるスピノルが下付き添え字、間に挟まれた行列が上付きの行添え字と下付きの列添え字、右側にあるスピノルが上付き添え字を持ち、しかも添え字の縮約が行列の掛け算のように隣り合う行列、スピノルの間で行われている場合、この添え字の位置を「標準位置」と呼ぶ。標準位置にある添え字は (1.6) や (1.7) のようにしばしば省略される。たとえば

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu)_{\alpha\beta} = (\gamma^\mu)_{\alpha\gamma}(\gamma^\nu)^\gamma{}_\beta \tag{1.29}$$

のように、省略された添え字は常に標準位置で縮約されている。

荷電共役行列の添え字を標準位置にしたものは

$$C^\alpha{}_\beta = C^{\alpha\gamma}C_{\gamma\beta} = -\delta^\alpha_\beta \tag{1.30}$$

である。そこで、C の符号を反転させた $\mathbf{1}=-C$ を定義しておくとしばしば便利である。$\mathbf{1}$ は添え字が標準位置にあるときに単位行列になるようなもので、次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{1}_{\alpha\beta}=-C_{\alpha\beta},\quad \mathbf{1}^{\alpha}{}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{1.31}$$

クリフォード代数の式 (1.1) は次のように書くことができる。

$$(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}=2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1}_{\alpha\beta} \tag{1.32}$$

また、$\mathbf{1}$ と他の行列、スピノルの積は、標準位置で縮約している限りなにも掛けないのと同じである。

$$(\mathbf{1}\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}=(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta},\quad (\overline{\psi}\mathbf{1})_{\alpha}=\overline{\psi}_{\alpha}. \tag{1.33}$$

添え字の上げ下げルール (1.26) を C ではなく $\mathbf{1}$ を用いて書き換えれば、縮約が標準位置になる。

$$\psi^{\alpha}=\psi_{\beta}\mathbf{1}^{\beta\alpha},\quad \psi_{\alpha}=\mathbf{1}_{\alpha\beta}\psi^{\beta}. \tag{1.34}$$

マヨラナスピノルに対しては $\psi_{\alpha}=\overline{\psi}_{\alpha}$ が成り立つので、ディラック共役を表す上線を単純に省略することができる。すなわち、マヨラナスピノルに対して

$$\overline{\psi}\psi'=\psi\psi' \tag{1.35}$$

である。

4 成分スピノルはカイラリティ γ^5 の固有値によって二つに分けることができ、$\gamma^5=+1$ の成分は左巻き、$\gamma^5=-1$ の成分は右巻きと呼ぶことにする。これに伴い、4 つの成分を表す添え字を二つのグループに分け、左巻き成分のみを走る添え字には上線を、右巻き成分だけを走る添え字には下線をつけることにする。これは、γ^5 の成分が次のように与えられることを意味する。

$$(\gamma^5)^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}=\delta^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}},\quad (\gamma^5)^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}=-\delta^{\underline{\alpha}}_{\underline{\beta}},\quad (\gamma^5)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}=(\gamma^5)^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}=0 \tag{1.36}$$

線つき添え字を用いると、次のようにカイラリティ射影行列をはさむ手間が省ける。

$$\frac{1}{2}\overline{\psi}(\mathbf{1}+\gamma^5)\psi=\frac{1}{2}\overline{\psi}_{\overline{\alpha}}\psi^{\overline{\alpha}},\quad \frac{1}{2}\overline{\psi}(\mathbf{1}-\gamma^5)\psi=\frac{1}{2}\overline{\psi}_{\underline{\alpha}}\psi^{\underline{\alpha}}. \tag{1.37}$$

(1.13) に与えた式のうち、$(\gamma^5C)^T=-\gamma^5C$ は γ^5 と C が可換であることを表しており、$C=-\mathbf{1}$ がカイラリティを変えないことがわかる。従って添え字の上げ下げのもとで上線、下線はそのままである。

$$\psi_{\overline{\alpha}}=\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\psi^{\overline{\beta}},\quad \psi_{\underline{\alpha}}=\mathbf{1}_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\psi^{\underline{\beta}},\quad \psi^{\overline{\alpha}}=\psi_{\overline{\beta}}\mathbf{1}^{\overline{\beta}\overline{\alpha}},\quad \psi^{\underline{\alpha}}=\psi_{\underline{\beta}}\mathbf{1}^{\underline{\beta}\underline{\alpha}}. \tag{1.38}$$

$\gamma^5\gamma^{\mu}=-\gamma^{\mu}\gamma^5$ は γ^{μ} がカイラリティを変えること、すなわち上線添え字と下線添え字を一つずつ持つことを意味する。たとえば、次の式が成り立つ。

$$\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi'=\overline{\psi}_{\alpha}(\gamma^{\mu})^{\alpha}{}_{\beta}\psi'^{\beta}=\overline{\psi}_{\overline{\alpha}}(\gamma^{\mu})^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\psi'^{\underline{\beta}}+\overline{\psi}_{\underline{\alpha}}(\gamma^{\mu})^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\psi'^{\overline{\beta}}. \tag{1.39}$$

$(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}$ は二つのスピノル添え字について対称であるが、これは $(\gamma^{\mu})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}=(\gamma^{\mu})_{\underline{\beta}\overline{\alpha}}$ を意味する。次の式からわかるように、複素共役は添え字の上下を入れ換える。

$$(\overline{\psi}_{\overline{\alpha}}\psi'^{\overline{\alpha}})^*=\frac{1}{2}(\overline{\psi}(\mathbf{1}+\gamma^5)\psi')^*=\frac{1}{2}(\overline{\psi}_C(\mathbf{1}-\gamma^5)\psi'_C)=\overline{\psi}_{C\underline{\alpha}}\psi'^{\underline{\alpha}}_C \tag{1.40}$$

C の具体的表示を用いると、$\mathbf{1}$ の成分は次のように与えられる。

$$\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}=-\epsilon_{\overline{\alpha}\overline{\beta}},\quad \mathbf{1}_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}=-\epsilon_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}. \tag{1.41}$$

1.1.3　2 成分スピノル

ψ をマヨラナスピノルだとしよう。ψ は次のように左巻きおよび右巻き成分よりなる。

$$\psi^{\alpha} = \begin{pmatrix} \psi^{\overline{\alpha}} \\ \psi^{\underline{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

マヨラナスピノルであるから、右巻き成分は左巻き成分とは独立ではなく、次のように与えることができる。

$$\psi^{\underline{\alpha}} = i\epsilon_{\alpha\beta}(\psi^{\overline{\beta}})^{\dagger} \tag{1.43}$$

しばしば 4 成分のディラックスピノル、あるいはその成分である $\psi^{\overline{\alpha}}$ と $\psi^{\underline{\alpha}}$ を用いるよりも、$\psi^{\overline{\alpha}}$ とその複素共役 $(\psi^{\overline{\alpha}})^*$ を用いて式を書くほうが便利である。そのような表示をワイル表示と呼ぶ。ワイル表示では添え字に点なし添え字と点つき添え字を用いる。さらに、点つきスピノルには上線をつける。

$$\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = (\psi^{\alpha})^*. \tag{1.44}$$

点なし添え字は 4 成分スピノルにも用いられるが、通常は混ぜて用いることは無いので混乱はしない。ここでは区別しやすいように 4 成分スピノルの添え字にはプライムをつけることにする。

ワイル表示とディラック表示の関係は以下の通り。

$$\psi^{\overline{\alpha}} = \psi^{\alpha}, \quad \psi^{\underline{\alpha}} = i\epsilon_{\alpha\beta}\overline{\psi}^{\dot{\beta}} \tag{1.45}$$

ϵ は (1.20) で定義した行列である。(1.45) は左右の添え字の種類が異なるが、これは二種類の添え字の関係を表すために無理をしているからで仕方が無い。

ワイル表示のスピノルに対しては、ディラック表示のときとは独立に添え字の上げ下げルールが設定される。

$$\xi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}\xi^{\beta}, \quad \overline{\xi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\xi}^{\dot{\beta}} \tag{1.46}$$

ただし、ϵ は、その添え字の位置、および点のあるなしにかかわらず (1.20) で定義した行列に等しい。(1.45) の式をもう一度書いておくと、

$$\psi^{\overline{\alpha}} = \psi^{\alpha}, \quad \psi^{\underline{\alpha}} = i\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \tag{1.47}$$

点つきスピノルの添え字の位置が下線付きスピノルと逆になっているので、添え字の標準位置も逆にしておくのが便利である。すなわちとなり合う変数のスピノル添え字の間で縮約が行われているとき、スピノル添え字の省略を次のように行う。

$$\xi\chi = \xi_{\alpha}\chi^{\alpha}, \quad \overline{\xi}\overline{\chi} = \overline{\xi}^{\dot{\alpha}}\overline{\chi}_{\dot{\alpha}}. \tag{1.48}$$

これにより、γ 行列の添え字の標準位置は次のようになる。

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} & (\sigma^{\mu})^{\alpha\dot{\beta}} \\ (\overline{\sigma}^{\mu})_{\dot{\alpha}\beta} & \end{pmatrix}, \quad \gamma^{5} = \begin{pmatrix} \delta^{\alpha}_{\beta} & \\ & -\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{1.49}$$

ただし、σ^{μ} と $\overline{\sigma}^{\mu}$ は次のように定義される 2×2 行列である。

$$(\sigma^{\mu})^{\alpha\dot{\beta}} = (1, \sigma_i), \quad (\overline{\sigma}^{\mu})_{\dot{\alpha}\beta} = (-1, \sigma_i). \tag{1.50}$$

ワイル表示では γ 行列のかわりにこれらの σ 行列が用いられる。これらの積の反対称化 $\sigma^{\mu\nu}$ および $\overline{\sigma}^{\mu\nu}$ は次のように定義する。

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu-\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu),\quad \overline{\sigma}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu-\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu) \tag{1.51}$$

上線をつけるかどうかは、左端の行列が上線を持つかどうかで決める。同様に、4 つの行列の積の反対称化を定義すると、(1.12) に対応して次の関係式が成り立つ。

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=i\sigma^{\mu\nu\rho\sigma}=-i\overline{\sigma}^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{1.52}$$

また、(1.15) で定義した意味において $\sigma^{\mu\nu}$ は自己双対、$\overline{\sigma}^{\mu\nu}$ は反自己双対である。たとえば $\sigma^{\mu\nu}$ の自己双対性は次のように示される。

$$\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}=-\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}=\sigma^{\mu\nu} \tag{1.53}$$

二成分スピノルの積について次の式が成り立つ。

$$(\xi\chi)^\dagger=(\xi_\alpha\chi^\alpha)^\dagger=\overline{\chi}^{\dot{\alpha}}\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}=\overline{\chi}\overline{\xi},\quad \xi\chi=\xi_\alpha\chi^\alpha=-\chi^\alpha\xi_\alpha=\chi_\alpha\xi^\alpha=\chi\xi. \tag{1.54}$$

σ^μ と $\overline{\sigma}^\mu$ の転置、複素共役に対する公式

$$(\sigma^\mu)^{\alpha\dot{\beta}}=-(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha},\quad ((\sigma^\mu)^{\alpha\dot{\beta}})^*=-(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}=(\sigma^\mu)^{\beta\dot{\alpha}} \tag{1.55}$$

は重要である。（この公式中に現れている $\overline{\sigma}^\mu$ は (1.50) で定義された $\overline{\sigma}^\mu$ の添え字の位置を (1.46) に従って上げたものである。）これを用いて次の公式が示される。

$$\chi\xi=\xi\chi,\quad \chi\sigma^\mu\overline{\xi}=\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\chi,\quad \chi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi=\xi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\chi. \tag{1.56}$$

すなわち、二つのワイルスピノルで挟まれたとき σ^μ や $\overline{\sigma}^\mu$ はあたかも互いの転置であるかのように振舞う。複素共役についても、σ 行列は次のように符号を出さない。

$$(\chi\sigma^\mu\overline{\xi})^*=\xi\sigma^\mu\overline{\chi},\quad (\chi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi)^*=\overline{\xi}\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\chi}. \tag{1.57}$$

1.1.4 ディラック表示とワイル表示の関係

マヨラナスピノルの成分は、ディラック表示とワイル表示でそれぞれ次のように与えられる。

$$\psi^{\alpha'}=\begin{pmatrix}\psi^\alpha\\ i\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi^{\overline{\alpha}}\\ \psi^{\underline{\alpha}}\end{pmatrix},\quad \psi_{\alpha'}=(-\psi_\alpha,i\overline{\psi}^{\dot{\alpha}})=(\psi_{\overline{\alpha}},\psi_{\underline{\alpha}}) \tag{1.58}$$

従って、ディラック表示とワイル表示の間の変換は次のような書き換えによって行うことができる。

$$X^{\overline{\alpha}}\leftrightarrow X^\alpha,\quad X^{\underline{\alpha}}\leftrightarrow iX_{\dot{\alpha}},\quad X_{\overline{\alpha}}\leftrightarrow -X_\alpha,\quad X_{\underline{\alpha}}\leftrightarrow iX^{\dot{\alpha}}. \tag{1.59}$$

たとえば、二つの二成分スピノルの積は次のように書き換えることができる。

$$X_{\overline{\alpha}}Y^{\overline{\alpha}}=-X_\alpha Y^\alpha,\quad X_{\underline{\alpha}}Y^{\underline{\alpha}}=-X^{\dot{\alpha}}Y_{\dot{\alpha}}. \tag{1.60}$$

γ 行列が含まれている場合も同様に書き換えることができる。

$$X_{\overline{\alpha}}(\gamma^m)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}Y^{\underline{\beta}}=-iX_\alpha(\sigma^m)^{\alpha\dot{\beta}}Y_{\dot{\beta}},\quad X_{\underline{\alpha}}(\gamma^m)^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}Y^{\overline{\beta}}=iX^{\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^m)_{\dot{\alpha}\beta}Y^\beta. \tag{1.61}$$

1.1.5 フィルツ変換

4 成分スピノルに対するフィルツ変換は次のように与えられる。ただし、ψ_1 と ψ_2 がグラスマン数であることが考慮されている。

$$\begin{aligned}(\cdots\psi_1)(\psi_2\cdots) &= -\frac{1}{4}(\cdots\mathbf{1}\cdots)(\psi_2\psi_1)\\ &\quad -\frac{1}{4}(\cdots\gamma^5\cdots)(\psi_2\gamma^5\psi_1)\\ &\quad -\frac{1}{4}(\cdots\gamma^\mu\cdots)(\psi_2\gamma_\mu\psi_1)\\ &\quad +\frac{1}{4}(\cdots\gamma^\mu\gamma^5\cdots)(\psi_2\gamma_\mu\gamma^5\psi_1)\\ &\quad +\frac{1}{8}(\cdots\gamma^{\mu\nu}\cdots)(\psi_2\gamma_{\mu\nu}\psi_1)\end{aligned} \tag{1.62}$$

2 成分スピノルに対するフィルツ変換は次のように与えられる。

$$(\eta\phi)(\psi\xi) = -\frac{1}{2}(\psi\phi)(\eta\xi) - \frac{1}{8}(\psi\sigma^{\mu\nu}\phi)(\eta\sigma_{\mu\nu}\xi), \tag{1.63}$$

$$(\overline{\eta}\overline{\phi})(\overline{\psi\xi}) = -\frac{1}{2}(\overline{\psi\phi})(\overline{\eta}\overline{\xi}) - \frac{1}{8}(\overline{\psi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\phi})(\overline{\eta\sigma}_{\mu\nu}\overline{\xi}), \tag{1.64}$$

$$(\overline{\eta}\overline{\phi})(\psi\xi) = -\frac{1}{2}(\psi\sigma^\mu\overline{\phi})(\overline{\eta\sigma}_\mu\xi). \tag{1.65}$$

これらの式は次のように同一のスピノル θ が二つの積に含まれているときに一つにまとめるために使うことができる。

$$(\eta\theta)(\theta\xi) = -\frac{1}{2}\theta^2(\eta\xi), \quad (\overline{\eta}\overline{\theta})(\overline{\theta\xi}) = -\frac{1}{2}\overline{\theta}^2(\overline{\eta}\overline{\xi}), \quad (\overline{\eta}\overline{\theta})(\theta\xi) = -\frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\overline{\theta})(\overline{\eta\sigma}_\mu\xi). \tag{1.66}$$

1.2 正準量子化

ここでの目的は、正準量子化に関係する convention についてまとめることである。

1.2.1 正準交換関係

力学変数を q_i とし、そのラグランジアンを $L(q_i, \dot{q}_i)$ とする。正準運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.67}$$

によって定義され、ハミルトニアンはルジャンドル変換

$$H = \dot{q}_i p_i - L \tag{1.68}$$

によって与えられる。

正準量子化は q_i と p_i を演算子に格上げし、次の交換関係を設定することで行われる。

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij} \tag{1.69}$$

ここで逆の符号を取ることも可能であるが、ここではこれを定義とする。このような約束のもとで、あるオペレータ $\mathcal{O}$ の時間発展はつぎのハイゼンベルグ方程式によって与えられる。

$$i[H, \mathcal{O}] = \frac{d\mathcal{O}}{dt} \tag{1.70}$$

1.2.2 フェルミオン運動項

フェルミオンについても、このハイゼンベルグ方程式を再現するように交換関係を設定しなければならない。このことと、フォック空間の正定値性を要求すると、フェルミオンのラグランジアンの運動項の符号が一意的に決まる。

単純な例として次の作用で表される系を考える。

$$L = C(i\theta^\dagger\dot{\theta} + m\theta^\dagger\theta) = C\left(\frac{i}{2}(\theta^R\dot{\theta}^R + \theta^I\dot{\theta}^I) + im\theta^R\theta^I\right), \quad \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^R + i\theta^I) \tag{1.71}$$

θ は複素フェルミオンであり θ^R と θ^I はその実部、虚部に相当する実フェルミオンである。C と m はパラメータである。上記のラグランジアンが実であるためには C と m は実数でなければならない。規格化は自由なので、$|C| = 1$ と取っておくことにしよう。

この系のハミルトニアンは、次のように求まる。

$$H = (\partial L/\partial\dot{\theta})\dot{\theta} - L = -Cm\theta^\dagger\theta = -iCm\theta^R\theta^I \tag{1.72}$$

一方、ラグランジアンから運動方程式を求めると、次の式が得られる。

$$\dot{\theta}^R = -m\theta^I, \quad \dot{\theta}^I = +m\theta^R \tag{1.73}$$

ボゾンの場合と同様に (1.70) によって運動方程式 (1.73) が再現されるためには、次のように交換関係を設定する必要がある。

$$\{\theta^R, \theta^R\} = \{\theta^I, \theta^I\} = C. \tag{1.74}$$

あるいは複素な表現を用いれば、

$$\{\theta, \theta^\dagger\} = C. \tag{1.75}$$

この式の両側を任意の状態 $|s\rangle$ で挟んでみると、次の式が得られる。

$$\Big|\theta|s\rangle\Big|^2 + \Big|\theta^\dagger|s\rangle\Big|^2 = C\Big||s\rangle\Big|^2. \tag{1.76}$$

したがって、すべての状態が正のノルムを持つためには $C = +1$ でなければならない。すなわち、フェルミオンのラグランジアンの運動項の符号は次のように取らなければならない。

$$L = i\theta^\dagger\dot{\theta} \tag{1.77}$$

ここまでは、一般の力学系について考えていた。§1.1 で与えたスピノルについての約束のもとでは、相対論的な場の理論におけるフェルミオンの運動項は次のように与えればよい。

$$\mathcal{L} = -\psi_{\overline{\alpha}}(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\partial_\mu\psi^{\underline{\beta}} = i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi} \tag{1.78}$$

1.3 対称性について

1.3.1 変換と生成子

ある代数の下での場の変換を表すための記号についてまとめておく。代数の生成子をラベルする添え字としてどのような添え字を用いるかは考える代数によって適宜選ぶが、ここでは X, Y などを用いることにする。

パラメータ ϵ^X を用いた、力学変数 q_i の無限小変換の変化分を文字 δ を用いて $\delta q_i = q_i' - q_i$ のように表す。特にパラメータが ϵ^X であることを表したい場合には

$$\delta q_i = \delta_\epsilon q_i = \delta[\epsilon^X]q_i = \epsilon^X O_X q_i \tag{1.79}$$

のようないくつかの表現方法を用いる。最後の表記法を用いる場合には、変換パラメータがグラスマン奇である場合には ϵ^X と O_X の順序は常にこのように取るものと約束しておく。また、添え字 X としてスピノル添え字を用いる場合やローレンツ変換のように二つの添え字を持つパラメータを用いる場合には縮約の取り方を明確にしておく必要があるが、これらの点については実際に用いる際に定義することにする。

O_X を用いる場合には、どこまでがそのパラメータであるのかをはっきりさせておく必要がある。たとえば、パラメータ ϵ^X による変換に関数 a を掛けるという操作を表す $a(\epsilon^X O_X) = a\delta(\epsilon^X)$ と $a\epsilon^X$ をパラメータとする変換 $(a\epsilon^X)O_X = \delta(a\epsilon^X)$ は異なる。この違いをはっきりさせるために、場の理論における場 $\phi(x)$ の変換を考え、係数 $a(x)$ も時空座標に依存する場合を考えてみよう。ϕ 自身の変換は、変換が線形であれば上の二つは同じになる。

$$a(\epsilon^X O_X)\phi = (a\epsilon^X)O_X\phi \tag{1.80}$$

しかし、ϕ の微分に対して上の二つの変換操作を行ったものには違いがある。

$$a(\epsilon^X O_X)\partial_\mu\phi = a\partial_\mu\delta(\epsilon^X)\phi, \quad (a\epsilon^X)O_X\partial_\mu\phi = \partial_\mu[a\delta(\epsilon^X)\phi] \tag{1.81}$$

従って記号 O_X を用いる場合には、適切に括弧を用いるなどする必要がある。

変換はしばしば次のように行列表示すると便利である。

$$\delta q_i = -\epsilon^X (T_X)_{ij} q_j \tag{1.82}$$

場の理論の場合、時空座標に作用する微分演算子などもこの行列表示の一種とみなすことができる。一般の変換では、$(T_X)_{ij}$ も q_i に依存する可能性があるが、ここではこれが定数である場合を考える。(1.82) の右辺にマイナス符号を付けておく理由はすぐに明らかになる。

O_X と T_X の違いを明らかにするために、変換を二回続けて行うことを考えよう。ϵ_1^X および ϵ_2^X をパラメータとする変換 δ_1, δ_2 は定義に従って次のように展開できる。

$$\delta_i q = \delta(\epsilon_i^X)q = \epsilon_i^X O_X q = -\epsilon_i^X T_X q \tag{1.83}$$

ただし、力学変数の添え字 i は省略した。合成変換 $\delta_1\delta_2 q$ は O_X を用いると次のように書ける。

$$\delta_1\delta_2 q = \epsilon_1^X O_X \epsilon_2^Y O_Y q \tag{1.84}$$

これを (1.83) に従って T_X を用いた表示に書き換えよう。一回目の変換 δ_2 で現れた行列 T_X は定数であり、二回目の変換作用しないから、二回目の変換は T_X を通り抜けて場 q に作用し、次の関係式を得る。

$$\delta_1\delta_2 q = -\delta_1(\epsilon_2^Y T_Y q) = -\epsilon_2^Y T_Y \delta_1 q = \epsilon_2^Y T_Y \epsilon_1^X T_X q \tag{1.85}$$

つまり、O_X を用いた表現と T_X を用いた表現では順序が逆になる。

変換記号 O_X の交換関係として、構造定数 ${f_{XY}}^Z$ を次のように定義しよう。

$$[O_X, O_Y\} = {f_{XY}}^Z O_Z. \tag{1.86}$$

Soryushiron Kenkyu

ただし、交換関係は

$$[O_X, O_Y\} = O_X O_Y - (-)^{XY} O_Y O_X \tag{1.87}$$

によって定義される。演算子 T_X についても、(1.82) でマイナス符号をつけて定義されていることと積の順序が逆になることを考慮すると、O_X と同じ次の交換関係を満足することが分かる。

$$[T_X, T_Y\} = f_{XY}{}^Z T_Z. \tag{1.88}$$

(1.82) でマイナス符号をつけた理由は、O_X と T_X が同じ交換関係を満足するようにするためである。

構造定数 $f_{XY}{}^Z$ を用いれば、二つの変換の交換関係は次のように表すことができる。

$$[\delta_1, \delta_2]q = (-)^{XY}\epsilon_1^X \epsilon_2^Y f_{XY}{}^Z O_Z q = -(-)^{XY}\epsilon_1^X \epsilon_2^Y f_{XY}{}^Z T_Z q \tag{1.89}$$

グラスマン奇である場合には、パラメータを左側に移動する際に符号が出ることに注意。パラメータの順序を入れ替えておけば、式は少し簡単になる。

$$[\delta_1, \delta_2]q = \epsilon_2^Y \epsilon_1^X f_{XY}{}^Z O_Z q = -\epsilon_2^Y \epsilon_1^X f_{XY}{}^Z T_Z q \tag{1.90}$$

1.3.2 電荷とカレント

変換 $\delta(\epsilon^X)q_i$ のもとでラグランジアン $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ が不変であるとき、次のように定義された電荷は時間的に変化しない保存量である。

$$\epsilon^X \widehat{O}_X = \sum_i \delta q_i p_i = \sum_i \delta q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.91}$$

このことは、オイラーラグランジュ方程式を用いることで簡単に証明できる。

$$\epsilon^X \frac{d\widehat{O}_X}{dt} = \sum_i \left(\delta\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \delta q_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_i \left(\delta\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = \delta L = 0. \tag{1.92}$$

よく知られているように、この電荷はポアソン括弧、あるいは量子論的な交換関係によって変換 δ を生成する。

$$\delta(\epsilon^X)q_i = \epsilon^X O_X q_i = -\epsilon^X (T_X)_{ij} q_j = [i\epsilon^X \widehat{O}_X, q_i] \tag{1.93}$$

δq_i が q_i の時間微分を含まない場合には (1.69) と (1.91) を用いることで直ちに示される。すでに説明したように、O_X は変換記号であり、T_X は q_i の添え字 i に作用する線形作用素である。演算子 $\widehat{O}_X$ は O_X と区別するために hat をつける。O_X や T_X の交換関係と $\widehat{O}_X$ の交換関係の関係を見ておこう。力学変数 q_i の上で二回変換を行うことにより、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
[\delta(\epsilon_1^X), \delta(\epsilon_2^X)]q_i &= \epsilon_2^Y (T_Y)_{ij} \epsilon_1^X (T_X)_{jk} q_k - [1 \leftrightarrow 2] \\
&= -i\epsilon_2^Y (T_Y)_{ij} [\epsilon_1^X \widehat{O}_X, q_j] - [1 \leftrightarrow 2] \\
&= -[\epsilon_1^X \widehat{O}_X, [\epsilon_2^Y \widehat{O}_Y, q_i]] - [1 \leftrightarrow 2] \\
&= -[[\epsilon_1^X \widehat{O}_X, \epsilon_2^Y \widehat{O}_Y], q_i]
\end{aligned} \tag{1.94}$$

最後にヤコビ恒等式を用いた。これが

$$\epsilon_2^Y \epsilon_1^X f_{XY}{}^Z O_Z \Phi^i = i[\epsilon_2^Y \epsilon_1^X f_{XY}{}^Z \widehat{O}_Z, \Phi^i] \tag{1.95}$$

と等しいから $i\widehat{O}_X$ は次のように O_X や T_X と同じ交換関係を満たす。

$$[i\widehat{O}_X, i\widehat{O}_Y\} = f_{XY}{}^Z i\widehat{O}_Z \tag{1.96}$$

ハミルトニアンは変換 $\delta_H(\epsilon)q_i = \partial_t q_i$ に対する保存電荷である。ただしこの場合には、δq_i はラグランジアンを不変にするのではなく $\delta L = dL/dt$ のように時間微分だけ変化させる。そのため保存電荷の定義に補正項を付け加える必要がある。ルジャンドル変換によってハミルトニアンを与える式 (1.68) の第 2 項 $-L$ はこのような補正項と解釈できる。

相対論的な場の理論では、ラグランジアン $L(q_i, \dot{q}_i)$ はラグランジアン密度 $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)$ の空間積分として与えられる。ラグランジアン密度を不変に保つ対称性に対する電荷は次のように与えられる。

$$\epsilon^X \widehat{O}_X = \int \left(\sum_i \delta\phi_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\phi_i} \right) d^3x \tag{1.97}$$

右辺の括弧の中身は電荷密度を与えている。これは次のように定義されるカレントの t 成分である。

$$\epsilon^X J^\mu_X = \sum_i \delta(\epsilon^X)\phi_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i} \tag{1.98}$$

このノートでは、ある対称性の変換則が与えられたときに、それに対応するカレントの規格化は (1.98) によって決めることにする。ラグランジアン密度が変換 $\delta(\epsilon^X)$ で不変であればカレント保存則 $\partial_\mu J^\mu_X = 0$ が成り立つ。カレントの定義には不定性があり、ある保存カレント J^μ_X に対して次のように定義した別のカレント J'^μ_X もやはり保存則を満足する。

$$J'^\mu_X = J^\mu_X + \partial_\nu X^{\mu\nu}, \quad X^{\mu\nu} = -X^{\nu\mu}. \tag{1.99}$$

しばしば (1.98) の定義から直接求めたカレントよりも、この不定性を用いて付加項を付け加えたものを用いるほうが便利な場合がある。

このように定義したカレントは、微分を共変微分 $D^{(G)}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - \delta(A^a_\mu)\phi$ で置き換える操作によって系をゲージ化したとき、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - A^a_\mu j^\mu_a + \mathcal{O}(A^2) \tag{1.100}$$

のようにゲージ場と結合する。ただし $\mathcal{L}_0$ はゲージ化する前のゲージ場を含まないラグランジアンである。逆に、系をゲージ化したラグランジアンが与えられているとき、カレントを (1.100) によって読み取ることができる。

場の理論のハミルトニアンは次のように与えられる。

$$H = \int \left(\dot{\phi}_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_i} - \mathcal{L} \right) d^3x \tag{1.101}$$

括弧の中はハミルトニアン密度であり、次のように定義されるエネルギー運動量テンソルの一成分になっている。

$$T_\mu{}^\nu = -\left(\partial_\mu\phi_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi_i} - \delta^\nu_\mu\mathcal{L} \right), \quad H = -\int T_0{}^0 d^3x \tag{1.102}$$

ここで、右辺にマイナスをつけたのは、$\eta_{00} = -1$ と定義したときに T^{00} がエネルギー密度そのものになるようにするためであるが、ここでは計量の符号は特に決めないことにする。運動量 $\widehat{P}_\mu$ を

$$\widehat{P}_\mu = -\int T_\mu{}^0 d^3x \tag{1.103}$$

と定義すれば、対応する変換は次のように与えられる。

$$\delta\phi_i = [i\widehat{P}_\mu, \phi_i] = \partial_\mu \phi_i \tag{1.104}$$

これは計量の符号のとり方に依存しない式である。H と等しいのは P_0 であることに注意。もし計量を $\eta_{00} = -1$ ととると、P^0 は $-H$ に等しいことになる。

(1.102) によって定義されたエネルギー運動量テンソルに対して、一般のカレントの場合と同様に、保存則を損なうことなく付加項を加えることができる。

$$T_\mu{}^\nu = T'_\mu{}^\nu + \partial_\rho X_\mu{}^{\nu\rho}, \quad X_\mu{}^{\nu\rho} = -X_\mu{}^{\rho\nu}. \tag{1.105}$$

(1.102) によって与えられるエネルギー運動量テンソルは必ずしも対称ではないが、この付加項を付け加えることで対称にすることができる。さらに、$T_{\mu\nu}$ は対称であるという条件を課したとしても次のような項を付加する任意性がある。

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + (\partial_\mu\partial_\nu - \partial^2\eta_{\mu\nu})X \tag{1.106}$$

系が共系対称性を持つ場合には、この自由度を用いてエネルギー運動量テンソルをトレースレスにすることができる。

1.4 重力場

1.4.1 スピン接続と捩率

局所ローレンツ系の添え字のみを持ち、大域座標の添え字を持たないテンソル V に対して、その共変微分 $D_\mu^{(\omega)}V$ を次のように定義する。

$$D_\mu^{(\omega)}V = \partial_\mu V + \omega_\mu V \tag{1.107}$$

接続 ω_μ は局所ローレンツ群のリー代数に値を取り、スピン接続と呼ばれる。$D^{(\omega)}$ によって表される共変微分は、たとえそれが大域座標の添え字を持つテンソルに作用する場合であっても、特に明示しない限りスピン接続のみを含み、アフィン接続は含まないとする。あとで定義するように、アフィン接続を含む共変微分には文字 ∇ を用いることにする。共変微分 $D^{(\omega)}$ が大域座標の添え字を持つテンソル（例えば $e_\mu^{\widehat{m}}$ など）に作用する場合には、大域座標の添え字が反対称化されていないと共変ではなくなる。また逆に、共変である場合には大域座標の添え字について反対称化されているので、外微分形式を用いるのが便利である。

捩率の定義は、外微分形式を用いれば次のように与えることができる。

$$T^{\widehat{m}} = D^{(\omega)}e^{\widehat{m}} = de^{\widehat{m}} + \omega^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}} \wedge e^{\widehat{n}} \tag{1.108}$$

上で述べたように、共変微分 $D^{(\omega)}$ は局所ローレンツ系の添え字に作用するスピン接続 $\omega^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}$ だけを接続として含み、大域座標の添え字に作用する接続は含まない。捩率の定義を、テンソル添え字を露にして書くと次のようになる。

$$T_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}} = D_\mu^{(\omega)}e_\nu^{\widehat{m}} - D_\nu^{(\omega)}e_\mu^{\widehat{m}} = \partial_\mu e_\nu^{\widehat{m}} - \partial_\nu e_\mu^{\widehat{m}} + \omega_\mu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}e_\nu^{\widehat{n}} - \omega_\nu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}e_\mu^{\widehat{n}} \tag{1.109}$$

超重力理論においては、捩率はなんらかの拘束条件によって決定され、(1.109) を解くことによってスピン接続 $\omega_{\mu\widehat{m}\widehat{n}}$ を他の場の関数として表すことができる。

$$\omega_{\lambda\widehat{m}\widehat{n}} = \omega_{\lambda\widehat{m}\widehat{n}}(e) + \frac{1}{2}(T_{\widehat{m}\widehat{n}-\lambda} - T_{\lambda\widehat{m}-\widehat{n}} + T_{\lambda\widehat{n}-\widehat{m}}) \tag{1.110}$$

Soryushiron Kenkyu

ただし、$\omega_{\lambda\widehat{m}\widehat{n}}(e)$ は捩率を 0 として (1.109) を解いたときに得られるスピン接続であり、$e_\mu^{\widehat{m}}$ だけを用いて次のように与えられる。

$$\omega_{\lambda-\mu\nu}(e) = \frac{1}{2}(-e_{\nu\widehat{k}}\partial_\mu e_\lambda^{\widehat{k}} + e_{\mu\widehat{k}}\partial_\nu e_\lambda^{\widehat{k}} + e_{\nu\widehat{k}}\partial_\lambda e_\mu^{\widehat{k}} - e_{\mu\widehat{k}}\partial_\lambda e_\nu^{\widehat{k}} - e_{\lambda\widehat{k}}\partial_\mu e_\nu^{\widehat{k}} + e_{\lambda\widehat{k}}\partial_\nu e_\mu^{\widehat{k}}) \qquad (1.111)$$

（ただし、$\omega_{\mu\widehat{m}\widehat{n}}$ を含む式を $e_\mu^{\widehat{m}}$ で書き換える場合、この式よりも (1.109) を用いるほうが便利なことが多い。）

捩率 $T_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}$ が 0 でない場合、部分積分を行う際には注意が必要である。例えばラグランジアン中に次の項があったとしよう。

$$\mathcal{L} = ee_{\widehat{m}}^\mu D_\mu^{(\omega)} v^{\widehat{m}}, \quad \mathcal{L} = ee_{\widehat{m}}^\mu e_{\widehat{n}}^\nu D_\mu^{(\omega)} A_\nu{}^{\widehat{m}\widehat{n}}. \qquad (1.112)$$

一つ目の項の $v^{\widehat{m}}$ は任意のベクトルである。二つ目の項に含まれるテンソル $A_\nu{}^{\widehat{m}\widehat{n}}$ は二つの上付き添え字の入れ替えについて反対称であるとしておく。こうすることにより下付きの添え字 μ と ν の反対称部分だけがこの項に含まれ、$D_\mu^{(\omega)}$ が添え字 ν に作用する接続を含んでいなくても共変になる。捩率が 0 であるリーマン幾何においてはこれらの項は全微分項であり、運動方程式に影響しない。実際、共変微分に含まれるスピン接続が (1.111) で与えられるとすれば、これらの項が表面項であることを直接確認することができる。しかし捩率が 0 でない場合には次の公式が与えるように全微分項ではないので注意が必要である。

$$ee_{\widehat{m}}^\mu D_\mu^{(\omega)} v^{\widehat{m}} = \partial_\mu(ee_{\widehat{m}}^\mu v^{\widehat{m}}) + eT_{\widehat{k}\widehat{m}}{}^{\widehat{k}} v^{\widehat{m}}, \qquad (1.113)$$

$$ee_{\widehat{m}}^\mu e_{\widehat{n}}^\nu D_\mu^{(\omega)} A_\nu{}^{\widehat{m}\widehat{n}} = \partial_\mu(A_{\widehat{k}}{}^{\mu\widehat{k}}) + \frac{e}{2} T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}} A_{\widehat{k}}{}^{\widehat{m}\widehat{n}} + eT_{\widehat{k}\widehat{m}}{}^{\widehat{k}} A_{\widehat{l}}{}^{\widehat{m}\widehat{l}}. \qquad (1.114)$$

1.4.2 曲率テンソルとビアンキ恒等式

スピン接続 $\omega_{\mu\widehat{m}\widehat{n}}$ が与えられると、それを用いて曲率テンソルを定義することができる。外微分形式では、曲率テンソルの定義を次のように書くことができる。

$$R^{(\omega)} = D^{(\omega)} \wedge D^{(\omega)} \qquad (1.115)$$

この式の右辺の微分は、何らかのテンソル ϕ に作用すると、ϕ に微分が作用する項が全て相殺し、ϕ と、ローレンツ代数に属するテンソルの積の形で書くことができる。このテンソルが曲率テンソルである。スピン接続を用いて曲率テンソルを表すと、

$$R^{(\omega)} = d\omega + \omega \wedge \omega \qquad (1.116)$$

となる。大域座標の添え字とローレンツ代数の添え字をあらわに書けば、次のようになる。

$$R_{\mu\nu\widehat{m}\widehat{n}}^{(\omega)} = \partial_\mu \omega_{\nu\widehat{m}\widehat{n}} - \partial_\nu \omega_{\mu\widehat{m}\widehat{n}} + \omega_{\mu\widehat{m}\widehat{k}} \omega_\nu{}^{\widehat{k}}{}_{\widehat{n}} - \omega_{\nu\widehat{m}\widehat{k}} \omega_\mu{}^{\widehat{k}}{}_{\widehat{n}} \qquad (1.117)$$

スピン接続 $\omega_{\mu\widehat{m}\widehat{n}}$ をどう取るかによって曲率テンソルも変化するが、どのスピン接続を用いて定義された曲率テンソルかを明示したい場合には $R(\omega)$ のように書くことにする。

リッチテンソルやスカラー曲率は次のように定義する。

$$R_{\mu\nu}^{(\omega)} = R_{\lambda\mu}^{(\omega)\lambda}{}_\nu, \quad R^{(\omega)} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(\omega)}. \qquad (1.118)$$

この定義のもとで、球面のスカラー曲率は正になる。

式 (1.115) を多脚場 $e^{\widehat{m}}$ に作用させ、捩率の定義式 (1.108) を用いれば、次のビアンキ項等式が得られる。

$$R^{(\omega)\widehat{m}\widehat{n}} \wedge e_{\widehat{n}} = D^{(\omega)} T^{\widehat{m}}. \tag{1.119}$$

添え字を全てあらわに書けば、

$$(R^{(\omega)}_{\mu\nu\rho}{}^{\widehat{m}} + D^{(\omega)}_{\mu} T_{\nu\rho}{}^{\widehat{m}})|_{[\mu\nu\rho]} = 0. \tag{1.120}$$

ただし、$\cdots|_{[\mu\nu\rho]}$ は示された 3 つの添え字に対する完全反対称化を意味する。この式は、曲率テンソルの成分の一部が捩率によって書けてしまうことを意味している。曲率テンソルのどの成分がこのビアンキ項等式によって固定されるのかを見るために、全ての添え字を局所直交系のものに直し、ローレンツ代数の規約表現に分解しよう。時空の次元を d とする。$R^{(\omega)}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}}$ は、どのようなスピン接続を用いたとしても、すなわちどのような捩率があったとしても、定義より次の式を満足する。

$$R^{(\omega)}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}} = -R^{(\omega)}_{\widehat{n}\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}} = -R^{(\omega)}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{q}\widehat{p}}. \tag{1.121}$$

つまり、前二つ、後ろ二つの添え字の対それぞれについて反対称である。このことを考慮すれば、独立成分の数は $({}_dC_2)^2$ である。これは SO(d) の表現として以下のように規約分解することができる。

$$\begin{aligned} & \overset{\text{2 階反対称}}{(0,1,0,0,\cdots)} \otimes \overset{\text{2 階反対称}}{(0,1,0,0,\cdots)} \\ = \; & \overset{\text{ワイルテンソル}}{(0,2,0,0,\cdots)_S} \oplus \overset{\text{混合}}{(1,0,1,0,\cdots)_A} \oplus \overset{\text{4 階反対称}}{(0,0,0,1,\cdots)_S} \\ & \oplus \overset{\text{トレースレス 2 階対称}}{(0,2,0,0,\cdots)_S} \oplus \overset{\text{2 階反対称}}{(0,1,0,0,\cdots)_A} \oplus \overset{\text{スカラー}}{(0,0,0,0,\cdots)_S} \end{aligned} \tag{1.122}$$

規約表現はウェイトベクトルを用いて表した。ここでは、群が十分大きく、ディンキン図形が十分長い場合を想定した。ベクトルの成分の順序は図 1.1 に示したようにディンキン図形上でもっとも端にある頂点（すなわち、スピノル表現に対応する頂点からもっとも離れた頂点）に対応するものを先頭にし、そこからディンキン図形の頂点の順序と同じ順序でウェイトを並べた。添え字の A

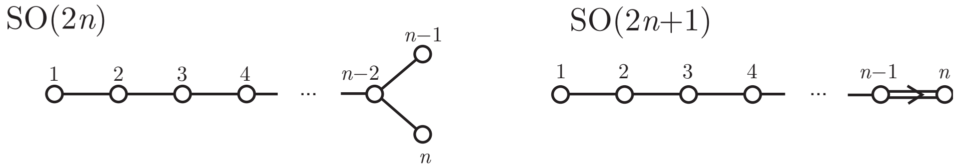

図 1.1: SO($2n$) および SO($2n+1$) のディンキン図形

と S は添え字の対 $\widehat{m}\widehat{n}$ と $\widehat{p}\widehat{q}$ の入れ替えについての対称部分、反対称部分を表す。

ビアンキ項等式 (1.120) は、3 つの添え字について反対称な 4 階テンソルとして現されているから、次のように規約分解できる。

$$\overset{\text{3 階反対称}}{(0,0,1,0,\cdots)} \otimes \overset{\text{ベクトル}}{(1,0,0,0,\cdots)} = \overset{\text{混合}}{(1,0,1,0,\cdots)} \oplus \overset{\text{4 階反対称}}{(0,0,0,1,\cdots)} \oplus \overset{\text{2 階反対称}}{(0,0,0,1,\cdots)} \tag{1.123}$$

以上の規約分解を知っていると、何も計算せずに以下のことがわかる。まず、曲率テンソルの規約分解では二階反対称テンソルは一つしか現れない。これはリッチテンソルの反対称部分であるが、ビアンキ項等式 (1.123) の中にこの表現が含まれているので、リッチテンソルの反対称部分は

捩率を用いて書けるはずである。また、(1.122) に含まれる規約成分のうち反対称部分（添え字 A がついているもの）として現れる二つの規約表現はどちらもビアンキ項等式の分解に含まれている。従って、反対称部分 $R^{(\omega)}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}} - R^{(\omega)}_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{m}\widehat{n}}$ は捩率を用いて書くことができる。

実際にこれらの成分を捩率で与える式を書き下そう。その前に恒等式 (1.120) の捩率部分を表すテンソル $X_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}}$ を導入して (1.120) を次のように書き換えておこう。

$$R^{(\omega)}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}} + R^{(\omega)}_{\widehat{n}\widehat{p}\widehat{m}}{}^{\widehat{q}} + R^{(\omega)}_{\widehat{p}\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{q}} = X_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}} \tag{1.124}$$

$X_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}}$ は 3 つの下付き添え字について完全反対称である。捩率を用いた定義は

$$X_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}} = -3(D^{(\omega)}_{\widehat{m}} T_{\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}} + T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}} T_{\widehat{k}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}})|_{[\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}]} \tag{1.125}$$

X の定義式 (1.125) の中に (1.120) には無い捩率の二次の項があるのは、添え字を局所座標系のものに書き換えたことによる。$|_{[\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}]}$ という記号は、それらの添え字を反対称化して、重みが 1 になるように規格化することを意味する。

まず、(1.124) の両辺で添え字 $\widehat{p}$ と $\widehat{q}$ を縮約すればリッチテンソルの反対称部分に対する次の式が得られる。

$$R^{(\omega)}_{\widehat{n}\widehat{m}} - R^{(\omega)}_{\widehat{m}\widehat{n}} = X_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{p}} \tag{1.126}$$

また、次の式も (1.124) を直接代入することで示すことができる。

$$R^{(\omega)}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}} - R^{(\omega)}_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{m}\widehat{n}} = \frac{1}{2}(X_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}} + X_{\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{m}} + X_{\widehat{p}\widehat{m}\widehat{q}\widehat{n}} + X_{\widehat{m}\widehat{q}\widehat{n}\widehat{p}}) \tag{1.127}$$

さらに、(1.124) と (1.127) を組み合わせることにより、曲率テンソルの後ろ 3 つの添え字に対する反対称化も次のように捩率を用いて表すことができる。

$$R^{(\omega)}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}} + R^{(\omega)}_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{n}} + R^{(\omega)}_{\widehat{m}\widehat{q}\widehat{n}\widehat{p}} = \frac{1}{2}(X_{\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{m}} + X_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}} + X_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{n}} + X_{\widehat{m}\widehat{q}\widehat{n}\widehat{p}}) \tag{1.128}$$

1.4.3 アフィン接続

スピン接続だけでなく、アフィン接続まで含む完全な共変微分を ∇_μ とする。局所ローレンツ系の添え字、および大域座標の添え字を持つベクトルに対して、この共変微分は次のように定義される。

$$\nabla_\mu v^\lambda = \partial_\mu v^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} v^\nu, \quad \nabla_\mu v^{\widehat{m}} = \partial_\mu v^{\widehat{m}} + \omega_\mu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}} v^{\widehat{n}} \tag{1.129}$$

$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ はアフィン接続と呼ばれる。二番目の式からも分かるように、作用するテンソルが大域座標の添え字を持たない場合には $D^{(\omega)}_\mu$ と ∇_μ は同じである。

次の関係式は多脚場条件と呼ばれ、スピン束と接束が互いに多脚場を通して結びついていることを表している。

$$0 = \nabla_\mu e^{\widehat{m}}_\nu = D^{(\omega)}_\mu e^{\widehat{m}}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda e^{\widehat{m}}_\lambda. \tag{1.130}$$

多脚場条件 (1.130) と捩率の定義 (1.108) を組み合わせれば、アフィン接続の二つの下付き添え字の反対称部分が捩率に他ならないことが示される。

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}{}^\lambda = T_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}} e^\lambda_{\widehat{m}} \tag{1.131}$$

$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ の対称部分を $\gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ としよう。つまり、アフィン接続の対称部分と反対称部分への分解を次のように置く。

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \gamma_{\mu\nu}{}^\lambda + \frac{1}{2} T_{\mu\nu}{}^\lambda \tag{1.132}$$

$\gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ を求めるには、(1.130) から従う

$$0 = \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\rho} g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}{}^{\rho} g_{\rho\mu} \tag{1.133}$$

に (1.132) を代入し、$\gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ についてとけばよい。その結果、次の式を得る。

$$\gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}(T_{\kappa\nu-\mu} + T_{\kappa\mu-\nu}) \tag{1.134}$$

ただし、クリストッフェル記号は次のように定義される。

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\nu\mu}) \tag{1.135}$$

曲率テンソルはアフィン接続を用いても次のように定義することができる。

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v^\rho = R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma}[\Gamma] v^\sigma - T^{\lambda}_{\mu\nu} \nabla_\lambda v^\rho, \quad R_{\mu\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho}[\Gamma] = \partial_\mu \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} - (\mu \leftrightarrow \nu), \tag{1.136}$$

ここで定義された曲率が多脚場を用いた添え字の変換でスピン接続を用いて (1.117) で定義された曲率テンソルに一致することは、共変微分の交換関係を多脚場に作用させ、多脚場条件 (1.130) を用いることで証明できる。すなわち、次の式が成り立つ。

$$e^{\widehat{p}}_{\rho} e^{\widehat{q}}_{\sigma} R_{\mu\nu\widehat{p}\widehat{q}}[\omega] = R_{\mu\nu\rho\sigma}[\Gamma] \tag{1.137}$$

1.4.4 アインシュタイン作用とエネルギー運動量テンソル

アインシュタイン作用に物質場の作用 S_{matter} を加えた次の作用で表される系を考えよう。

$$S = \frac{1}{k^2} \int \sqrt{-g} R d^d x + S_{\mathrm{matter}} \tag{1.138}$$

この係数に現れる k は重力相互作用の強さを表す定数である。この作用から $g_{\mu\nu}$ についての運動方程式を求めると、次の式が得られる。

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu} R = \frac{k^2}{2} T^{\mu}_{\nu}. \tag{1.139}$$

この式の右辺に現れるエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は次のように定義される。

$$\delta S_{\mathrm{matter}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \tag{1.140}$$

このことは、多脚場を $e^m_\mu = \delta^m_\mu + f^m_\mu$ とおいて f^m_μ の高次の項を無視するような線形近似での重力と物質場の結合が

$$S_{\mathrm{int}} = f^m_\mu T_m{}^{\mu} \tag{1.141}$$

と与えられることを意味しており、これは内部対称性に対するカレントとゲージ場の結合 (1.100) に対応する。

アインシュタイン方程式 (1.139) とリッチテンソルに対するビアンキ恒等式を用いれば、エネルギー運動量テンソルは次の式を満足する。

$$0 = \sqrt{-g} \nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu(\sqrt{-g} T^{\mu}_{0}) - \frac{1}{2}\sqrt{-g} T^{\mu\nu} \partial_t g_{\mu\nu} \tag{1.142}$$

この式の最後の項は、空間を膨張、あるいは収縮させることに費やされるエネルギーを表している。もし静的な重力場中であれば（つまり $g_{\mu\nu}$ がある座標 t に依存しなければ、）最後の項は消え、次のカレント保存則が成り立つ。

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\ T^\mu_0) = 0 \tag{1.143}$$

従って次の式によって定義された全エネルギーは保存する。

$$E = -\int \sqrt{-g}\ T^0_0\ dV \tag{1.144}$$

係数をこのように取ることでこれが実際にエネルギー運動量テンソルに一致することを簡単な例で見ておこう。ここでは圧力が 0 の非相対論的なガスについて見てみよう。これは静止した質量を持った粒子の集まりとみなすことができる。その作用は

$$S_{\rm matter} = \sum_{\rm particles} -m\int \sqrt{-g_{00}}dt = -\int \sqrt{-g_{00}}\rho d^4x. \tag{1.145}$$

ここで、ρ は ρd^3x が粒子数をあたえるような数密度に質量 m を掛けたものとして定義した質量密度である。この作用は計量の g_{00} 成分のみを含んでおり、計量による変分は次のように与えられる。

$$\delta S_{\rm matter} = \frac{1}{2}\sqrt{-g_{00}}\rho g_{00}\delta g^{00} \tag{1.146}$$

すなわち、$T_{00} = -\rho g_{00}$、あるいは $T^0_0 = -\rho$ であり、ちょうどエネルギー密度に一致している。

1.4.5 線形近似

アインシュタイン作用

$$S = \frac{1}{k^2}\int d^Dx\sqrt{-g}R \tag{1.147}$$

を計量の変分の 2 次のオーダーまでについて展開し、弱い平面波の解を求めよう。背景計量を $g^{(0)}_{\mu\nu}$ として

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.148}$$

と置こう。$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を $h_{\mu\nu}$ の 1 次まで計算すると次のようになる。

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^{(0)\lambda}_{\mu\nu} + H^\lambda_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2), \quad H^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla^{(0)}_\mu h^\lambda_\nu + \nabla^{(0)}_\nu h^\lambda_\mu - \nabla^{(0)\lambda}h_{\mu\nu}) \tag{1.149}$$

この変分を Ricchi テンソルに施すと次の式が得られる。

$$R_{\mu\nu} = R^{(0)}_{\mu\nu} + \nabla^{(0)}_\alpha\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla^{(0)}_\mu\delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha} + (H^\alpha_{\alpha\beta}H^\beta_{\mu\nu} - H^\beta_{\alpha\mu}H^\alpha_{\beta\nu}) + \mathcal{O}(h^3). \tag{1.150}$$

アインシュタイン作用の展開を求める場合、$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ と $R_{\mu\nu}$ の二つの部分の積として作用を表現するのがよい。Ricchi tensor 部分の変分は与えたので、残りの部分の変分を求めると

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \sqrt{-g^{(0)}}g^{(0)\mu\nu} - \sqrt{-g^{(0)}}\left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{(0)\mu\nu}g_{(0)\alpha\beta}h^{\alpha\beta}\right) + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.151}$$

が得られる。(1.150) と (1.151) の積としてアインシュタイン作用が得られるが、$g^{(0)}_{\mu\nu}$ が運動方程式を満足し $R^{(0)}_{\mu\nu} = 0$ であることを用いれば次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2}\int\sqrt{-g}R \quad &= \quad \frac{1}{k^2}\int\sqrt{-g^{(0)}}\Big[g^{(0)\mu\nu}(H^\alpha_{\alpha\beta}H^\beta_{\mu\nu} - H^\beta_{\alpha\mu}H^\alpha_{\beta\nu}) \\ &\quad - \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}\right)(\nabla^{(0)}_\alpha H^\alpha_{\mu\nu} - \nabla^{(0)}_\mu H^\alpha_{\nu\alpha})\Big] + \mathcal{O}(h^3).\end{aligned} \tag{1.152}$$

ここで、背景が平坦である場合を仮定して共変微分を変微分で置き換え、変分の 2 次まで残せば、作用の自由場部分が次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4k^2} h_{\mu\nu} (P_T^{\mu\rho} P_T^{\nu\sigma} - P_T^{\mu\nu} P_T^{\rho\sigma}) \partial^2 h_{\rho\sigma}. \tag{1.153}$$

ただし、P_T は次のように定義され、運動量の横波部分のみを取り出す射影演算子である。

$$P_T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\partial^2}. \tag{1.154}$$

この演算子は微分の逆を含むので非局所的であり、$\partial^2 \neq 0$ の場合のみ定義される。しかし (1.153) の中で微分の逆を含む項は打ち消しあっており、局所的な作用になっている。

運動量を k とし、k^+ のみが 0 でない座標をとろう。運動方程式より、次の成分が 0 であることがわかる。

$$h^{ii} = h^{i-} = h^{--} = 0 \tag{1.155}$$

さらに、線形化されたゲージ変換は次のように与えられる。

$$\delta h^{\mu\nu} = k^\mu \xi^\nu + k^\nu \xi^\mu. \tag{1.156}$$

したがって添え字に $+$ を含むものはゲージ変換の自由度であることがわかる。残るのは h^{ij} の非トレース部分のみであり、独立成分の数は次のように与えられる。

$$\text{d.o.f. of } h^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(D-1)(D-2) - 1. \tag{1.157}$$

1.4.6 ニュートンポテンシャル

線形近似を用いてニュートンポテンシャルを導こう。ここでは背景の時空はほとんど平坦であると仮定し、計量を $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ とおき、アインシュタイン方程式を $h_{\mu\nu}$ で展開しよう。(1.150) より、$h_{\mu\nu}$ の一次までのオーダーで、次の式を得る。

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \partial_\mu h^\alpha_\nu + \partial_\alpha \partial_\nu h^\alpha_\mu - \partial_\alpha \partial^\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h^\alpha_\alpha). \tag{1.158}$$

d 次元時空の中で、p-ブレーンに平行な方向を x^a、垂直な方向を x^i とし、x^a 方向の並進対称性を仮定すると、$h_{\mu\nu}$ は x^i のみに依存する。このとき、R_{ab} 成分は次のように表される。

$$R_{ab} = -\frac{1}{2}\partial_k \partial^k h_{ab}. \tag{1.159}$$

エネルギー運動量テンソルの T_{ab} 成分のみがゼロではないとし、x^i にのみ依存するとすると、アインシュタイン方程式から次の式を得ることができる。

$$\partial_k \partial^k h^a_b = k^2 \left(T^a_b - \frac{1}{d-2}\delta^a_b T^c_c \right). \tag{1.160}$$

ブレーンが x^i の原点に集中しているとし、

$$T_{ab} = \delta(x^i) t_{ab} \tag{1.161}$$

とおくと、この方程式の解は次のように与えられる。

$$h^a_b = -\frac{k^2}{(\tilde{d}-2)\Omega_{\tilde{d}-1} r^{\tilde{d}-2}} \left(t^a_b - \frac{1}{d-2}\delta^a_b t^c_c \right) \tag{1.162}$$

ただしブレーンの余次元を $\widetilde{d} = d - p - 1$ とおいた。とくに、ブレーン上でのローレンツ対称性が破れていない場合には次のようになる。

$$h^a_b = -\frac{k^2}{(d-2)\Omega_{\widetilde{d}-1} r^{\widetilde{d}-2}} t^a_b \tag{1.163}$$

(1.163) で与えられる p-ブレーンの背景上に、平行な test p-ブレーンを置いたときに、その potential を求めておこう。エネルギー運動量テンソルが t'_{ab} で与えられる試験 p-ブレーンの面積あたりのポテンシャルエネルギーは、

$$V = \frac{1}{2} h^{ab} t'_{ab} \tag{1.164}$$

で与えられる。ブレーン上の Lorentz 対称性が破れていないとした場合、すなわち $t^a_b = t\delta^a_b$ および $t'^a_b = t'\delta^a_b$ である場合には (1.163) を用いれば、ポテンシャルは次のように与えられる。

$$V = -\frac{(p+1)k^2}{2(d-2)\Omega_{\widetilde{d}-1}} \frac{tt'}{r^{\widetilde{d}-2}}. \tag{1.165}$$

特に $3+1$ 次元の particle の場合、すなわち $d = 4$、$p = 0$ の場合、$t^0_0 = -M$、$t'^0_0 = -m$ と置くと、試験粒子のポテンシャルエネルギーは

$$V = -\frac{k^2}{16\pi} \frac{mM}{r} \tag{1.166}$$

重力相互作用の強さを表す定数として k の代わりに Newton 定数 G_N が用いられることもある。これは (1.166) の右辺の係数として定義される。

また、アインシュタイン方程式を (1.139) のように書いたとき、その右辺の係数として定義される κ^2 もしばしば用いられる。これらの間の関係は次のようになる。

$$k^2 = 2\kappa^2 = 16\pi G_N \tag{1.167}$$

ニュートン定数 G_N は $[L^3/MT^2]$ の次元をもち、G_N を用いて定義されるプランク質量、プランク長の値は以下のように与えられる。

$$M_P = \sqrt{\frac{c\hbar}{G_N}} = 2.176 \times 10^{-8}\mathrm{kg}, \quad l_P = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} = 1.616 \times 10^{-35}\mathrm{m} \tag{1.168}$$

第2章　大域的な超対称性

2.1　超ポアンカレ代数と超場

2.1.1　超ポアンカレ代数

超ポアンカレ代数は次の（反）交換関係によって定義される。

$$
\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= M_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - M_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - M_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho} + M_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}, && (2.1)\\
[M_{\mu\nu}, P_\rho] &= P_\mu\eta_{\nu\rho} - P_\nu\eta_{\mu\rho}, && (2.2)\\
[P_\mu, P_\nu] &= 0, && (2.3)\\
[P_\mu, Q_\alpha] &= 0, && (2.4)\\
[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] &= \frac{1}{2}(\gamma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta, && (2.5)\\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= -\frac{1}{4}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu. && (2.6)
\end{aligned}
$$

ここでは M、P、Q は §1.3.1 で説明した意味において「生成子」ではなく「変換記号」である。パラメータ $(\epsilon^\mu, \xi^\alpha, \lambda^{\mu\nu})$ による無限小変換は次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\delta\Phi &= \left(\epsilon^\mu P_\mu + \xi^\alpha Q_\alpha + \frac{1}{2}\lambda^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right)\Phi\\
&= -\left(\epsilon^\mu T_\mu + \xi^\alpha T_\alpha + \frac{1}{2}\lambda^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\right)\Phi && (2.7)
\end{aligned}
$$

$T_\mu, T_\alpha, T_{\mu\nu}$ はそれぞれ変換記号 P_μ、Q_α, $M_{\mu\nu}$ に対応する線形演算子で、対応する生成子は時空座標 x^μ に加えてグラスマン座標 θ^α を導入すれば次のように微分演算子として実現できる。

$$
\begin{aligned}
T_\mu &= -\partial_\mu, && (2.8)\\
T_{\mu\nu} &= x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu - \frac{1}{2}\theta^\alpha(\gamma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta\partial_\beta, && (2.9)\\
T_\alpha &= -\left(\partial_\alpha + \frac{1}{8}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\theta^\beta\partial_\mu\right). && (2.10)
\end{aligned}
$$

ただし、グラスマン数の微分は $\partial_\alpha\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta$ のように定義する。

座標 x^μ と θ^α で張られる空間は超空間と呼ばれ、超空間上の場は超場と呼ばれる。超場に対する超対称変換則は次のように与えられる。

$$
\delta\Phi = \xi^\alpha\left(\partial_\alpha + \frac{1}{8}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\theta^\beta\partial_\mu\right)\Phi. \qquad (2.11)
$$

2.1.2　ベクトル超場

超場 V に対して、超対称変換と矛盾しない次の拘束条件を課すことができる。

$$
V = V^* \qquad (2.12)
$$

この拘束条件を満足する超場は実ベクトル場の自由度を含んでおり、実ベクトル超場、あるいは単にベクトル超場と呼ばれる。ベクトル超場は次のように展開することができる。

$$\begin{aligned} V &= B + \frac{1}{2}\theta^{\overline{\alpha}}\eta_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{8}C\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}} \\ &\quad + \frac{1}{2}\theta^{\underline{\alpha}}\eta_{\underline{\alpha}} - \frac{i}{8}\theta^{\overline{\alpha}}(\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}}v_\mu + \frac{i}{16\sqrt{2}}\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}}\theta^{\underline{\beta}}\lambda_{\underline{\beta}} \\ &\quad + \frac{1}{8}C^*\theta^{\underline{\alpha}}\theta_{\underline{\alpha}} - \frac{i}{16\sqrt{2}}\theta^{\underline{\alpha}}\theta_{\underline{\alpha}}\theta^{\overline{\beta}}\lambda_{\overline{\beta}} + \frac{1}{128}\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}}\theta^{\underline{\beta}}\theta_{\underline{\beta}}D \end{aligned} \tag{2.13}$$

この展開式と (2.11) を用いれば、成分場に対する超対称変換を次のように決定することができる。

$$\delta B = \frac{1}{2}\xi^{\overline{\alpha}}\eta_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{2}\xi^{\underline{\alpha}}\eta_{\underline{\alpha}}, \tag{2.14}$$

$$\delta\eta_{\overline{\alpha}} = -\frac{1}{4}(\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}\partial_\mu B + \frac{1}{2}C\xi_{\overline{\alpha}} - \frac{i}{4}(\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}v_\mu, \tag{2.15}$$

$$\delta C = \frac{1}{4}\xi^{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu)_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}\partial_\mu\eta_{\overline{\beta}} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi^{\underline{\beta}}\lambda_{\underline{\beta}}, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \delta v_\kappa &= \frac{i}{4}\xi^{\overline{\alpha}}(\gamma^\mu\gamma_\kappa)_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}\partial_\mu\eta_{\overline{\beta}} - \frac{i}{4}\xi^{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu\gamma_\kappa)_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}\partial_\mu\eta_{\underline{\beta}} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_{\overline{\alpha}}(\gamma_\kappa)^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\lambda_{\underline{\beta}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma_\kappa)^{\underline{\alpha}\overline{\beta}}\lambda_{\overline{\beta}}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\delta\lambda_{\overline{\alpha}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}(\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\alpha}}\partial_\mu C^* + \frac{1}{4\sqrt{2}}(\gamma^\mu\gamma^\kappa)_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\xi^{\overline{\beta}}\partial_\kappa v_\mu + \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi_{\overline{\alpha}}D, \tag{2.18}$$

$$\delta D = \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi^{\overline{\alpha}}(\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}\partial_\mu\lambda_{\underline{\beta}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi^{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu)_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}\partial_\mu\lambda_{\overline{\beta}} \tag{2.19}$$

2.1.3 ハミルトニアンの正値性

変換 P_μ および Q_α に対応する演算子 $\widehat{P}_\mu$ と $\widehat{Q}_\alpha$ を次のように定義しよう。

$$P_\mu\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} = i[\widehat{P}_\mu, \Phi], \quad Q_\alpha\Phi = i[\widehat{Q}_\alpha, \Phi\}. \tag{2.20}$$

Φ は任意の場である。この定義のもとで、$\widehat{P}_\mu$ はエルミートである。このことは、Φ を $\Phi^\dagger$ に置き換えても同じ式が成り立つことを要請することで示される。一方 $\widehat{Q}_\alpha$ については、変換パラメータが実数ではないので、変換パラメータまで含めた $\xi^\alpha\widehat{Q}_\alpha$ の形にして初めてエルミートになる。

$$\xi^\alpha\widehat{Q}_\alpha = (\xi^\alpha\widehat{Q}_\alpha)^\dagger \tag{2.21}$$

ξ はマヨラナスピノルであることから $\xi = -i(\gamma^0C)^T\xi^*$ が成り立つことを用いれば、$\widehat{Q}_\alpha$ に対して次の式が得られる。

$$(\widehat{Q}_\alpha)^\dagger = -i(\gamma^0)^{\alpha\beta}\widehat{Q}_\beta \tag{2.22}$$

反交換関係 (2.6) は、演算子の反交換関係として次のように読みかえられる。

$$\{\widehat{Q}_\alpha, \widehat{Q}_\beta\} = \frac{i}{4}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\widehat{P}_\mu \tag{2.23}$$

この式の両辺に $-i(\gamma^0)^{\alpha\beta}$ を掛けると、

$$\{\widehat{Q}_\alpha, (\widehat{Q}_\alpha)^\dagger\} = \widehat{P}_0 \tag{2.24}$$

となる。この式の左辺は正定値である。従って、大域的な超対称性を持つ理論のハミルトニアンは正定値である。

2.2 カイラル多重項

2.2.1 カイラル超場

4 次元の時空上で複素スカラー場 ϕ とマヨラナフェルミオン χ からなる系を考えよう。これらはどちらも実で数えて 2 の自由度を持っている。この二つの場からなる超対称多重項はカイラル多重項と呼ばれる。off-shell の自由度を比較すると、ボゾンの自由度が 2 だけ不足しているので、さらに、複素スカラーの補助場 F を導入する。カイラル多重項に対して二通りの方法で自由度を数えてみると表 2.1 のようになる。

表 2.1: カイラル多重項の成分場の自由度。全て実数で数えた。補助場 F は on-shell の自由度を持たないが、これは運動方程式を用いて消去できることを意味している。

	ϕ	χ	F
on-shell	2	2	0
off-shell	2	4	2

このカイラル多重項を超場を用いて表すためには、まず超対称変換 (2.11) と可換な次の微分演算子を定義する。

$$D_\alpha = \partial_\alpha - \frac{1}{8}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\theta^\beta\partial_\mu \tag{2.25}$$

これを用いて、超場に対して次の拘束条件を課すことができる。

$$D_{\underline{\alpha}}\Phi = 0 \tag{2.26}$$

D_α は超対称変換と可換であるから、この拘束条件は超対称変換によって保たれる。従って、この条件を満足する超場は超対称多重項を与え、カイラル多重項と呼ばれる。

カイラル超場を扱う場合、次のユニタリー変換を用いると便利である。

$$U = \exp\left(\frac{1}{8}\theta^{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu)_{\underline{\alpha}\overline{\beta}}\theta^{\overline{\beta}}\partial_\mu\right) \tag{2.27}$$

微分演算子 D_α はこれを用いて次のように表すことができる。

$$D_{\underline{\alpha}} = U\partial_{\underline{\alpha}}U^{-1} \tag{2.28}$$

従って、カイラル条件 (2.26) を満足する超場 Φ を次のように与えることができる。

$$\Phi(\theta) = U\widetilde{\Phi}(\theta_{\overline{\alpha}}) \tag{2.29}$$

ただし、$\widetilde{\Phi}$ は座標 θ の片方のカイラリティの部分にのみ依存する関数である。

$\theta_{\underline{\alpha}}$ は成分を二つしか持たないから、3 つ以上の $\theta_{\underline{\alpha}}$ の積は 0 である。同じ理由で、微分 $\partial_{\underline{\alpha}}$ を 3 回以上続けて任意の超場に作用させると 0 になる。同様のことが共変微分 $D_{\underline{\alpha}}$ についても成り立つことが (2.28) を用いることで示される。

$$D_{\underline{\alpha}}D_{\underline{\beta}}D_{\underline{\gamma}} = U\partial_{\underline{\alpha}}\partial_{\underline{\beta}}\partial_{\underline{\gamma}}U^{-1} = 0. \tag{2.30}$$

この式は、任意の超場に $D_{\underline{\alpha}}$ を二回作用させるとカイラル超場になることを意味している。

カイラル超場は成分場 (ϕ, χ, F) を用いて次のように展開できる。

$$
\begin{aligned}
\Phi(\theta) &= U\left(\phi + \frac{1}{2}\theta^{\overline{\alpha}}\chi_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{8}F\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}}\right) \\
&= \phi + \frac{1}{2}\theta^{\overline{\alpha}}\chi_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{8}F\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}} \\
&\quad + \frac{1}{8}\theta^{\underline{\alpha}}(\gamma^{\mu})_{\underline{\alpha}\overline{\beta}}\theta^{\overline{\beta}}\partial_{\mu}\phi + \frac{1}{32}\theta^{\overline{\gamma}}\theta_{\overline{\gamma}}\theta^{\underline{\alpha}}(\gamma^{\mu})_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}\partial_{\mu}\chi_{\overline{\beta}} \\
&\quad + \frac{1}{256}\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}}\theta^{\underline{\beta}}\theta_{\underline{\beta}}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

カイラル超場の成分場に対する超対称変換を決定しよう。そのために、超対称変換の微分演算子を $\widetilde{\Phi}$ に作用する形にユニタリー変換すると、つぎのようになる。

$$
U^{-1}\xi^{\alpha}\left(\partial_{\alpha} + \frac{1}{8}(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}\theta^{\beta}\partial_{\mu}\right)U = \xi^{\overline{\alpha}}\partial_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{4}\xi^{\underline{\alpha}}(\gamma^{\mu})_{\underline{\alpha}\overline{\beta}}\theta^{\overline{\beta}}\partial_{\mu} \tag{2.32}
$$

この微分演算子を $\widetilde{\Phi}$ に作用させれば、次の超対称変換を得る。

$$
\delta\widetilde{\Phi} = \frac{1}{2}\xi^{\overline{\alpha}}\chi_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{2}\theta^{\overline{\alpha}}\left(-\frac{1}{2}(\gamma^{\mu})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}\partial_{\mu}\phi + \frac{1}{2}F\xi_{\overline{\alpha}}\right) + \frac{1}{16}\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^{\mu})^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\partial_{\mu}\chi^{\overline{\beta}}\theta^{\overline{\gamma}}\theta_{\overline{\gamma}} \tag{2.33}
$$

これを (2.31) と比較すれば、成分場の超対称変換が次のように与えられることがわかる。

$$
\delta\phi = \frac{1}{2}\xi^{\overline{\alpha}}\chi_{\overline{\alpha}}, \tag{2.34}
$$

$$
\delta\chi_{\overline{\alpha}} = -\frac{1}{2}(\gamma^{\mu})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}\partial_{\mu}\phi + \frac{1}{2}F\xi_{\overline{\alpha}}, \tag{2.35}
$$

$$
\delta F = \frac{1}{2}\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^{\mu})^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\partial_{\mu}\chi^{\overline{\beta}} \tag{2.36}
$$

あとで計算するときに便利なように $D_{\overline{\alpha}}V$ と $D_{\overline{\alpha}}\Phi$ の展開式を与えておく。

$$
\begin{aligned}
D_{\overline{\alpha}}V &= \frac{1}{2}\eta_{\overline{\alpha}} \\
&\quad + \frac{1}{4}C\theta_{\overline{\alpha}} \\
&\quad - \frac{1}{8}(\gamma^{\mu})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}}(iv_{\mu} + \partial_{\mu}B) \\
&\quad + \frac{1}{32}(\theta^{\overline{\gamma}}(\gamma_{\nu})_{\overline{\gamma}\underline{\delta}}\theta^{\underline{\delta}})\left[-(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}\partial_{\mu}\eta_{\overline{\beta}} - \sqrt{2}i(\gamma^{\nu})_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}\lambda_{\underline{\beta}}\right] \\
&\quad - \frac{1}{64}(\gamma^{\mu})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}}(\theta^{\overline{\gamma}}\theta_{\overline{\gamma}})\partial_{\mu}C \\
&\quad - \frac{1}{32}(\theta^{\underline{\gamma}}\theta_{\underline{\gamma}})\left[(\gamma^{\mu})_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}\partial_{\mu}\eta_{\underline{\beta}} + \sqrt{2}i\lambda_{\overline{\alpha}}\right] \\
&\quad - \frac{i}{128}\left[(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}\theta_{\overline{\beta}}\partial_{\mu}v_{\nu} + 2iD\theta_{\overline{\alpha}}\right](\theta^{\underline{\gamma}}\theta_{\underline{\gamma}}) \\
&\quad - \frac{i}{256\sqrt{2}}(\gamma^{\mu})_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}\partial_{\mu}\lambda_{\underline{\beta}}(\theta^{\overline{\gamma}}\theta_{\overline{\gamma}})(\theta^{\underline{\delta}}\theta_{\underline{\delta}})
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{\overline{\alpha}}\Phi &= \frac{1}{2}\chi_{\overline{\alpha}} \\
&+\frac{1}{4}F\theta_{\overline{\alpha}} \\
&-\frac{1}{4}(\gamma^{\mu})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}}\partial_{\mu}\phi \\
&+\frac{1}{16}(\gamma^{\nu\mu})_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}\partial_{\mu}\chi_{\overline{\beta}}(\theta^{\underline{\gamma}}(\gamma_{\nu})_{\underline{\gamma}}{}^{\overline{\delta}}\theta_{\overline{\delta}}) \\
&-\frac{1}{64}(\gamma^{\mu})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}}(\theta^{\overline{\gamma}}\theta_{\overline{\gamma}})\partial_{\mu}F \\
&+\frac{1}{64}\theta_{\overline{\alpha}}(\theta^{\underline{\beta}}\theta_{\underline{\beta}})\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi \\
&-\frac{1}{512}(\theta^{\overline{\beta}}\theta_{\overline{\beta}})(\theta^{\underline{\gamma}}\theta_{\underline{\gamma}})\partial_{\mu}\partial^{\mu}\chi_{\overline{\alpha}}
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

2.2.2 F 項および D 項ラグランジアン

カイラル多重項の F 成分の超対称変換は全微分の形をしており、4 次元時空で積分すれば表面項を除き 0 になる。従って、その実部を取れば超対称変換で不変な作用として採用することができる。そこで、カイラル多重項の F 成分を取り出す操作を $[\Phi]_F$ と表そう。つまり、$[\cdots]_F$ は

$$[1]_F = [\theta^{\overline{\alpha}}]_F = 0, \quad [\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}}]_F = 8. \tag{2.39}$$

となるような線形演算子であり、(2.31) のように展開されるカイラル超場 Φ については、その F 成分を与える。

$$[\Phi]_F = F. \tag{2.40}$$

ベクトル超場、あるいは任意の超場についても、D 成分を見てみると変換が全微分であるから、やはり超対称変換で不変なラグランジアンとして求めることができる。任意の超場が与えられたときに、その D 成分を抜き出す演算子 $[\cdots]_D$ を次のように定義する。

$$[\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}}\theta^{\underline{\beta}}\theta_{\underline{\beta}}]_D = 128. \tag{2.41}$$

このとき (2.13) のベクトル多重項に対して

$$[V]_D = D \tag{2.42}$$

が成り立つ。D 項と F 項は次のように関係している。

$$[V]_D = 4[D_{\underline{\alpha}}D^{\underline{\alpha}}V]_F + (\partial\cdots). \tag{2.43}$$

右辺第 2 項は積分して作用を作ったときには寄与しない表面項である。

これらを用いて具体的にカイラル多重項のラグランジアンを構成してみよう。運動項は次のように与えることができる。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\Phi^*\Phi]_D &= 2[D^{\underline{\alpha}}D_{\underline{\alpha}}\Phi^*\Phi]_F + (\partial\cdots) \\
&= +\frac{1}{4}\phi\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi^* + \frac{1}{4}\phi^*\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi - \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi^* \\
&\quad +\frac{1}{2}\chi_{\overline{\alpha}}(\gamma^{\mu})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\partial_{\mu}\chi_{\underline{\beta}} + \frac{1}{2}\chi_{\underline{\alpha}}(\gamma^{\mu})^{\underline{\alpha}\overline{\beta}}\partial_{\mu}\chi_{\overline{\beta}} \\
&\quad +FF^* \\
&= -\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi^* + \chi_{\overline{\alpha}}(\gamma^{\mu})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\partial_{\mu}\chi_{\underline{\beta}} + FF^* + (\partial\cdots).
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

さらに一般の、カノニカルではない運動項を与えるには、ケーラーポテンシャルと呼ばれる、カイラル超場の実関数 $K(\Phi,\Phi^*)$ を用いて、その D 成分を取ればよい。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[K(\Phi^*,\Phi)]_D &= -K_{i\bar{j}}(\partial_\mu\phi^i)(\partial^\mu\phi^{*\bar{j}})\\&+\frac{1}{2}K_{i\bar{j}}\chi^i_{\alpha}(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\partial_\mu\chi^{\bar{j}}_{\underline{\beta}}+\frac{1}{2}K_{\bar{i}j}\chi^{\bar{i}}_{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu)^{\underline{\alpha}\overline{\beta}}\partial_\mu\chi^{j}_{\overline{\beta}}\\&+\frac{1}{2}K_{i\bar{j}\bar{k}}(\chi^i_{\overline{\alpha}}(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\chi^{\bar{j}}_{\underline{\beta}})(\partial_\mu\phi^{*\bar{k}})+\frac{1}{2}K_{\bar{i}jk}(\chi^{\bar{i}}_{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu)^{\underline{\alpha}\overline{\beta}}\chi^{j}_{\overline{\beta}})(\partial_\mu\phi^k)\\&+K_{i\bar{j}}F^iF^{*\bar{j}}+\frac{1}{2}K_{i\bar{j}\bar{k}}F^i(\chi^{\bar{j}}_{\underline{\alpha}}\chi^{\underline{\alpha}\bar{k}})+\frac{1}{2}K_{ij\bar{k}}(\chi^i_{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}j})F^{*\bar{k}}\\&+\frac{1}{4}K_{ij\bar{k}\bar{l}}(\chi^i_{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}j})(\chi^{\bar{k}}_{\underline{\alpha}}\chi^{\underline{\alpha}\bar{l}})+(\partial\cdots).\end{aligned}\tag{2.45}$$

ただし、微分を添字によって表す表記法を用いた。例えば $K_{i\bar{j}}$ は次の微分を表す。

$$K_{i\bar{j}}=\frac{\partial^2K}{\partial\phi^i\partial\overline{\phi}^{\bar{j}}}.\tag{2.46}$$

また、相互作用項は次のようにカイラル多重項の正則関数 W の F 項として与えることができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm pot} &= -[W(\Phi)]_F+{\rm c.c.}\\&= -W_iF^i-\frac{1}{2}W_{ij}(\chi^i_{\overline{\alpha}}\chi^{j\overline{\alpha}})+{\rm c.c.}\end{aligned}\tag{2.47}$$

ここで用いた正則関数 W は超ポテンシャルと呼ばれる。

2.2.3 スカラー多様体

ケーラーポテンシャル K の D-term として与えられる作用 (2.45) の中からスカラー場 ϕ^i (およびその複素共役) の運動項を抜き出すと、次のようになる。

$$\mathcal{L}_{\rm kin}=-K_{i\bar{j}}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\overline{\phi}^{\bar{j}}\tag{2.48}$$

空間座標についての ϕ^i の依存性を無視し、ϕ^i が時間だけの関数であるとすると、これは、ϕ^i を座標とし、$K_{i\bar{j}}$ を計量とするようなある空間上の質点の運動を表すラグランジアンとみなすことができる。この、質点が運動する背景の空間を、スカラー多様体と呼ぶ。

カイラル多重項のスカラー場は複素であるから、スカラー多様体は複素多様体であり、計量が関数 K の微分 $K_{i\bar{j}}$ によって与えられている。このような計量を持つ多様体は Kähler 多様体と呼ばれ、関数 K は Kähler ポテンシャルと呼ばれる。前の節では超場を用いることで直接スカラー多様体の計量がケーラーポテンシャルの微分として与えられることを見た。この節では同じことを成分形式で導いてみよう。つまり、スカラー多様体の計量をスカラー場の任意関数としてスカラー場とフェルミオン場の運動項を書き、超対称変換の下での不変性を要請することでスカラー多様体がケーラーで無ければならないことを導く。

ここでは、質量の無い $2n$ 個の実スカラー場 ϕ^a と n 個のワイルフェルミオン $\chi^{\hat{i}}$ よりなる補助場を含まない理論を考える。最も一般のラグランジアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi+\mathcal{L}_\lambda+\cdots,\tag{2.49}$$

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^b,\tag{2.50}$$

$$\mathcal{L}_\chi = i(\chi^{\hat{i}}\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}_{\hat{i}})-if_a{}^{\hat{j}}{}_{\hat{i}}(\partial_\mu\phi^a)(\chi^{\hat{i}}\sigma^\mu\overline{\chi}_{\hat{j}}).\tag{2.51}$$

g_{ab} と $f_{a\widetilde{i}}{}^{\widehat{j}}$ はスカラー場の関数で、g_{ab} は二つの添え字について対称な実行列、$f_{a\widetilde{i}}{}^{\widehat{j}}$ は添え字 $\widehat{i}$ と $\widehat{j}$ について反エルミート行列である。フェルミオンについては、適当な変数変換を行い、運動項をカノニカルにしてあるものとする。（フェルミオンの添え字の hat は運動項がカノニカルであり、$\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ ではなく $\mathrm{U}(n)$ によって変換されることを表す。）$\cdots$ はフェルミオンについて 4 次以上の項を表している。以下の解析はフェルミオンについて低次の項だけが必要である。

超対称変換を次のように置く。

$$\delta\phi^a = C^a_{\widehat{i}}(\xi\chi^{\widehat{i}}) + \overline{C}^{a\widehat{\bar{i}}}(\overline{\xi}\overline{\chi}_{\widehat{i}}), \tag{2.52}$$

$$\delta\chi^{\widehat{i}} = -i\overline{D}^{\widehat{i}}_a\sigma^\mu\overline{\xi}\partial_\mu\phi^a + \cdots, \tag{2.53}$$

$$\delta\overline{\chi}_{\widehat{i}} = iD_{a\widehat{i}}\overline{\sigma}^\mu\xi\partial_\mu\phi^a + \cdots. \tag{2.54}$$

ξ が変換パラメータである。$C^a_{\widehat{i}}$ と $D^a_{\widehat{i}}$ はスカラー場の関数であり、$\overline{C}^{a\widehat{i}}$ と $\overline{D}^{a\widehat{i}}$ はその複素共役である。フェルミオン変換則の $\cdots$ はフェルミオンについて高次の項を含む。ここではこれらの項は無視する。

スカラー場に対して超対称変換を二回行うことにより、

$$[\delta_1,\delta_2]\phi^a = i(C^a_{\widehat{i}}\overline{D}^{\widehat{i}}_b + \overline{C}^{a\widehat{i}}D_{b\widehat{i}})(\xi_1\sigma^\mu\overline{\xi}_2 - \xi_2\sigma^\mu\overline{\xi}_1)\partial_\mu\phi^b, \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}[\delta_1,\delta_2]\chi^{\widehat{i}} &= i\overline{D}^{\widehat{i}}_a C^a_{\widehat{j}}(\xi_1\sigma^\mu\overline{\xi}_2 - \xi_2\sigma^\mu\overline{\xi}_1)\partial_\mu\chi^{\widehat{j}} + \frac{i}{2}\overline{D}^{\widehat{i}}_a\overline{C}^{a\widehat{j}}\sigma^\mu\overline{\sigma}_{\rho\sigma}\partial_\mu\overline{\chi}_{\widehat{j}}(\overline{\xi}_1\overline{\sigma}^{\rho\sigma}\overline{\xi}_2)\\ &\quad -\frac{i}{2}\overline{D}^{\widehat{i}}_a C^a_{\widehat{j}}\sigma_\nu\sigma^\mu\partial_\mu\chi^{\widehat{j}})(\xi_1\sigma^\nu\overline{\xi}_2 - \xi_2\sigma^\nu\overline{\xi}_1)\end{aligned} \tag{2.56}$$

フェルミオンに対する式の二行目は運動方程式によってフェルミオンの高次の項を除き 0 になる。これらが超対称代数から要請される式

$$[\delta_1,\delta_2]\phi^a = \frac{i}{4}(\xi^I_1\sigma^\mu\overline{\xi}_{2I} - \xi^I_2\sigma^\mu\overline{\xi}_{1I})\partial_\mu\phi^a \tag{2.57}$$

（およびフェルミオンに対する同様の式）と一致することを要請すれば

$$C^a_{\widehat{i}}\overline{D}^{\widehat{i}}_b + \overline{C}^{a\widehat{i}}D_{b\widehat{i}} = \frac{1}{4}\delta^a_b, \quad \overline{D}^{\widehat{i}}_a C^a_{\widehat{j}} = \frac{1}{4}\delta^{\widehat{i}}_{\widehat{j}}, \quad \overline{D}^{\widehat{i}}_a\overline{C}^{a\widehat{j}} = 0. \tag{2.58}$$

ここで、添え字 $\widehat{\bar{i}}$ を導入し、上付き（下付き）添え字の $\widehat{i}$ が下付き（上付き）添え字の $\widehat{\bar{i}}$ と等価であるとしよう。言い方をかえれば、エルミート計量 $G_{\widehat{\bar{i}}\widehat{j}} = G_{\widehat{i}\widehat{\bar{j}}} = \delta_{ij}$ を導入し、これにより添え字を上げ下げすることにしよう。さらに

$$C^{a\widehat{I}} = (\overline{C}^{ai}, C^a_i) = (\overline{C}^{ai}, C^{a\bar{i}}), \quad D^{\widehat{I}}_a = (\overline{D}^{\widehat{i}}_a, D_{a\widehat{i}}) = (\overline{D}^{\widehat{i}}_a, D^{\widehat{\bar{i}}}_a) \tag{2.59}$$

のように添え字 $\widehat{I} = (\widehat{i},\widehat{\bar{i}})$ を用いて C と D を正方行列として表すと、上の式は

$$G_{\widehat{I}\widehat{J}}C^{a\widehat{I}}D^{\widehat{J}}_b = \frac{1}{4}\delta^a_b, \quad D^{\widehat{I}}_a C^a_{\widehat{J}} = \frac{1}{4}\delta^{\widehat{I}}_{\widehat{J}} \tag{2.60}$$

とまとめることができる。

$\mathcal{L}_\phi$ と $\mathcal{L}_\chi$ の超対称変換は次のように与えられる。（パラメータ ξ を含む部分だけを書いた。実際には $\overline{\xi}$ を含む複素共役も存在する。）

$$\delta\mathcal{L}_\phi = g_{ab}C^b_{\widehat{i}}(\xi\chi^{\widehat{i}})(\partial_\mu\partial^\mu\phi^a + \Gamma^a_{cd}\partial_\mu\phi^c\partial^\mu\phi^d), \tag{2.61}$$

$$\delta\mathcal{L}_\chi = -(\chi^{\widehat{i}}\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi)[D_{a\widehat{i}}\partial_\mu\partial_\nu\phi^a + (\partial_\mu D_{a\widehat{i}} - (\partial_\mu\phi^b)f_b{}^{\widehat{j}}{}_{\widehat{i}}D_{a\widehat{j}})(\partial_\nu\phi^a)] \tag{2.62}$$

Γ^a_{cd} は g_{ab} から作ったクリストッフェル記号である。$\partial^2\phi$ を含む項は

$$(\xi\chi^{\hat{i}})(g_{ab}C^b_{\hat{i}} - D_{a\hat{i}})\partial_\mu\partial^\mu\phi^a \tag{2.63}$$

であるから、これが相殺するためには

$$g_{ab}C^{b\hat{I}} = D^{\hat{I}}_a \tag{2.64}$$

でなければならない。

(2.60) と (2.64) をあわせれば $2D^{\hat{I}}_a$ はスカラー多様体上の多脚場に他ならないことがわかる。すなわち、$g_{ab} = e^{\hat{I}}_a e^{\hat{J}}_b G_{\hat{I}\hat{J}}$ を満足する $e^{\hat{I}}_a$ を用いて $D^{\hat{I}}_a$ と $C^{a\hat{I}}$ は次のように置ける。

$$D^{\hat{I}}_a = \frac{1}{2}e^{\hat{I}}_a, \quad C^{a\hat{I}} = \frac{1}{2}g^{ab}e^{\hat{I}}_a. \tag{2.65}$$

$\delta\mathcal{L}$ の中で $(\partial\phi)^2$ を含む項は整理すると

$$-(\chi^{\hat{i}}\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi)(\partial_\mu\phi^b)(\partial_b D_{a\hat{i}} - f_b{}^{\hat{j}}{}_{\hat{i}}D_{a\hat{j}} - \Gamma^c_{ba}D_{c\hat{i}})(\partial_\nu\phi^a) \tag{2.66}$$

となるので、次の式が成り立たなければならない。

$$\partial_b e_{a\hat{i}} - f_b{}^{\hat{j}}{}_{\hat{i}}e_{a\hat{j}} - \Gamma^c_{ba}e_{c\hat{i}} = 0 \tag{2.67}$$

これは $f_b{}^{\hat{j}}{}_{\hat{i}}$ がスカラー多様体上のスピン接続に他ならないということを示している。このスピン接続は $\mathrm{U}(n)$ のリー代数に値をとる。従ってスカラー多様体のホロノミーは $\mathrm{U}(n)$ である。このような多様体は複素多様体である。これは以下のように示すことができる。

次のように $J^2 = -1$ を満足する概複素構造を定義することができる。

$$J^a{}_b = ie^a_{\hat{i}}e^{\hat{i}}_b - ie^{a\hat{i}}e_{b\hat{i}} \tag{2.68}$$

こうやって定義された概複素構造が積分可能かどうかを調べるには Nijenhuis tensor

$$N(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY] \tag{2.69}$$

を計算すればよい。X と Y は任意のベクトル場であり、$[*,*]$ は Lie 括弧

$$[X,Y] = X^b\partial_b Y^a - Y^b\partial_b X^a \tag{2.70}$$

である。$N(X,Y)$ 中で微分が X や Y に作用する項は相殺しており、$N(X,Y) = N^a_{bc}X^bY^c\partial_a$ によって成分 N^a_{bc} を定義すれば次のように与えられる。

$$N^a_{bc} = -J^a{}_d\partial_c J^d{}_b + J^a{}_d\partial_b J^d{}_c - J^d{}_b\partial_d J^a{}_c + J^d{}_c\partial_d J^a{}_b \tag{2.71}$$

Newlander-Nirenberg theorem によれば、$N^a_{bc} = 0$ であることが概複素構造が積分可能、すなわち概複素構造が複素構造であるための必要十分条件である。計量が導入されている場合、N^a_{bc} の定義式中の微分を共変微分にしてもよい。（アフィン接続を含む項は相殺する。）

$$N^a_{bc} = -J^a{}_d\nabla_c J^d{}_b + J^a{}_d\nabla_b J^d{}_c - J^d{}_b\nabla_d J^a{}_c + J^d{}_c\nabla_d J^a{}_b \tag{2.72}$$

従って、$J^a{}_b$ が共変的に一定である場合には複素多様体である。(2.68) のように定義された J は明らかに共変的に一定であるから、スカラー多様体は複素多様体である。

従って、

$$J^i{}_j = i\delta^i_j, \quad J^{\bar{i}}{}_{\bar{j}} = i\delta^{\bar{i}}_{\bar{j}}, \quad J^i{}_{\bar{j}} = J^{\bar{i}}{}_j = 0 \tag{2.73}$$

となるような複素座標 ϕ^i を導入することができる。この座標系では

$$e_i^{\hat{\bar{j}}} = e_{\bar{i}}^{\hat{j}} = g_{ij} = g_{\bar{i}\bar{j}} = 0 \tag{2.74}$$

が成り立つ。(2.73) が共変的に定数であるということはアフィン接続の混合成分（すなわち正則添え字と反正則添え字を両方持つもの）が 0 であるということである。すなわち

$$\Gamma^i_{j\bar{k}} = \Gamma^i_{\bar{j}k} = \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}k} = \Gamma^{\bar{i}}_{jk} = 0 \tag{2.75}$$

である。さらにこのとき、

$$0 = 2g_{\bar{j}l}\Gamma^l_{i\bar{k}} = g_{i\bar{j},\bar{k}} - g_{i\bar{k},\bar{j}} \tag{2.76}$$

であるが、この式はある関数 K_i を用いて

$$g_{i\bar{j}} = K_{i,\bar{j}} \tag{2.77}$$

と（少なくとも局所的には）表せることを意味している。さらに $g_{i\bar{j}} = g_{\bar{j}i}$ より、$K_i = K_{,i}$ のようにスカラー関数 K を用いて表すことができる。従って、$g_{i\bar{j}} = K_{,i\bar{j}}$ である。このような多様体はケーラー多様体と呼ばれる。

カイラル多重項の運動項を見てみると、スカラー多様体のケーラーポテンシャルは、計量 $K_{i\bar{j}}$ およびその微分としてのみ現れる。従って、ケーラーポテンシャルに対する次の変換はカイラル多重項の運動項ラグランジアンを不変に保つ。

$$K(\phi,\phi^*) \to K'(\phi,\phi^*) = K(\phi,\phi^*) - 4f(\phi) - 4f^*(\phi^*). \tag{2.78}$$

ただし $f(\phi)$ はスカラー多様体上の任意の正則関数である。係数はあとで都合のいいように取った。この変換はケーラー変換と呼ばれる。

フェルミオンについて $\chi^{\hat{i}} = e_i^{\hat{i}}\chi^i$ のように変数変換すると、フェルミオンの高次の項を無視すれば変換則は次のように超場形式で得られた結果に一致する。

$$\delta\phi^i = \frac{1}{2}\xi\chi^i, \quad \delta\chi^i = -\frac{i}{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi^i, \quad \delta\overline{\chi}^{\bar{i}} = \frac{i}{2}\overline{\sigma}^\mu\xi\partial_\mu\phi^{*\bar{i}}. \tag{2.79}$$

スカラー場の運動項 (2.50) およびフェルミオン運動項 (2.51) は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi &= -g_{i\bar{j}}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^{\bar{j}}, & (2.80)\\ \mathcal{L}_\chi &= ig_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}^{\bar{j}}) + ig_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu\overline{\chi}^{\bar{k}})\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{l}\bar{k}}(\partial_\mu\phi^{\bar{l}}). & (2.81)\end{aligned}$$

第 2 項を得るのに (2.67) および (2.75) を用いた。これも部分積分で現れる表面項を除き超場形式で得られた結果を再現している。(2.81) の二項目の相互作用項には、スカラー多様体上のアフィン接続が現れている。この点については次の節でもう少し詳しく見る。

2.2.4 Kähler 多様体

複素座標 z^a と $\overline{z}^{\overline{a}}$ で張られる複素多様体を考えよう。複素座標を取っているので計量の次の成分は 0 である。

$$g_{ab} = g_{\overline{a}\overline{b}} = 0. \tag{2.82}$$

共変的に一定な複素構造を持った複素多様体をケーラー多様体と呼ぶ。複素構造が共変的に一定であるということは、テンソルの正則成分と反正則成分が平行移動で混ざらないことを意味している。すなわち、クリストッフェル記号の混合成分は 0 になる。

$$\Gamma^{\bar{c}}_{ab} = \Gamma^{c}_{a\bar{b}} = \Gamma^{c}_{\bar{a}b} = \Gamma^{c}_{\bar{a}\bar{b}} = \Gamma^{\bar{c}}_{\bar{a}b} = \Gamma^{\bar{c}}_{a\bar{b}} = 0. \tag{2.83}$$

これらは計量 $g_{a\bar{b}}$ に対する積分可能条件になっており、計量はあるスカラー関数 K を用いて次のように表すことができる。

$$g_{a\bar{b}} = K_{,a\bar{b}}. \tag{2.84}$$

このような関数 K はケーラーポテンシャルと呼ばれる。ケーラーポテンシャルを用いれば、クリストッフェル記号の 0 でない成分は次のように表すことができる。

$$\Gamma^{a}_{bc} = g^{a\bar{d}} K_{,bc\bar{d}}, \quad \Gamma^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{c}} = g^{\bar{a}d} K_{,\bar{b}\bar{c}d}. \tag{2.85}$$

曲率テンソルもクリストッフェル記号と同様に、正則成分と反正則成分を混ぜるような成分は 0 である。このことをもちいれば 0 でない成分は $R_{a\bar{b}}{}^{c}{}_{d}$ と、添え字の入れ替えや添え字の上げ下げで得られるものだけである。この成分はケーラーポテンシャルを用いて次のように与えられる。

$$R_{a\bar{b}}{}^{c}{}_{d} = -\partial_{\bar{b}} \Gamma^{c}_{ad}. \tag{2.86}$$

全ての添え字を下げたものは次のようになる。

$$R_{a\bar{b}c\bar{d}} = K_{a\bar{b}c\bar{d}} - K^{\bar{e}f} K_{\bar{e}ac} K_{f\overline{bd}} \tag{2.87}$$

さらに、リッチテンソルは次のように簡単な形に表すことができる。

$$R_{\bar{b}d} = -\partial_{\bar{b}} \Gamma^{a}_{ad} = -\frac{1}{2} \partial_{\bar{b}} \partial_{d} \log g. \tag{2.88}$$

$d = 2n$ 次元の Kähler 多様体上で共変的に定数である複素構造が定義できるということは、そのホロノミー群が複素構造を不変に保つことを意味している。このことから、Kähler 多様体のホロノミー群が $\mathrm{U}(n)$ かその部分群であることが結論される。逆にホロノミー群が $\mathrm{U}(n)$ の部分群であるときには共変的に定数な I を定義することができ、Kähler 多様体である。

2.2.5 スカラー多様体上の共変性

ラグランジアン (2.48) は、スカラー場の正則な変数変換

$$\phi^{i} \to \phi'^{i} = \phi'^{i}(\phi^{i}) \tag{2.89}$$

のもとでその「形」を変えない。見かけ上の形は変わらないが、ケーラーポテンシャルの具体的関数形は変化する。ラグランジアンはケーラーポテンシャルの関数形まで決めて初めて決まるものであるから、変数変換 (2.89) はラグランジアンの対称性ではない。（このことと、時空座標の座標変換が一般相対性理論のアインシュタイン作用を不変にすること、すなわち理論の対称性であることとの違いに注意すること。これは座標変換によってテンソル場、例えば計量は変化するが、計量は理論を決めたときに決まるものではなく、運動方程式を解くことで与えられる、力学的な自由度であるからである。）このような、モジュライ空間上の座標変換に対する共変性を明らかにしておくと、超重力理論の作用を構成する上で都合がよい。[1]

スカラー多様体上の座標変換 (2.89) の元で、他の成分場がどのように変換されるかを見てみよう。まず、フェルミオン ψ^i であるが、ϕ'^i の超対称変換則が ϕ と同じ形になることを仮定してその超対称パートナーとして χ'^i を定義しよう。$\delta\phi'^i$ は次のように与えられる。

$$\delta\phi'^i = \frac{1}{2}\frac{\partial\phi'^i}{\partial\phi^j}\xi\chi^j \tag{2.90}$$

従って、χ'^i が次のようになることが読み取れる。

$$\chi'^i = \frac{\partial\phi'^i}{\partial\phi^j}\chi^j. \tag{2.91}$$

同様の関係式は、(2.89) を単にカイラル超場に対する変換式

$$\Phi'^i = \Phi'^i(\Phi^i) = U\left[\phi'^i + \frac{1}{2}\frac{\partial\phi'^i}{\partial\phi^j}(\theta\chi^j) + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial\phi'^i}{\partial\phi^j}F^j - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi'^i}{\partial\phi^j\partial^k}(\chi^j\chi^k)\right)\theta^2\right] \tag{2.92}$$

に格上げし、そのフェルミオン成分を抜き出すことによっても得ることができる。関係式 (2.91) は、フェルミオン場 χ^i がスカラー多様体上のベクトルとして振舞うことを意味している。

カイラル超場に対する変換式 (2.92) から補助場成分を抜き出すことによってスカラー多様体上の座標変換の下での補助場 F^i についての変換則を決めると、

$$F'^i = \frac{\partial\phi'^i}{\partial\phi^j}F^j - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi'^i}{\partial\phi^j\partial\phi^k}\chi^j\chi^k \tag{2.93}$$

となる。従って、F^i はスカラー多様体上のベクトルとしては変換しない。しかし次のように定義された $F^i_{\rm cov}$ はスカラー多様体上でベクトルとして振舞う。

$$F^i_{\rm cov} = F^i - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}\chi^j\chi^k. \tag{2.94}$$

成分場で書いたときにスカラー多様体上の座標変換の下での共変性を露にするためには、超場を成分場で展開したあとに補助場 F^i をここで定義された $F^i_{\rm cov}$ で書き直す必要がある。

次に、超対称変換則がスカラー多様体上で共変な形に書けているかを見てみよう。まず、スカラー場の超対称変換 (2.34) はスカラー場の値を変化させるが、ケーラーポテンシャルなど、スカラー多様体上で定義された関数は（理論を決めた時点で与えられているので）変化しない。従って、(2.34) によるスカラー場の値の変化はスカラー多様体上の座標変換ではなく、点の移動を表すと考えるべきである。ここで、移動されるのは、4 次元時空から $\phi^i(x^\mu)$ という写像によってスカラー多様体上に与えられた 4 次元時空の像である。つまり、スカラー多様体上の 3-ブレーンの移動とみなすことができる。

フェルミオン場 χ^i は、このブレーン上で定義されているので、超対称変換に伴うブレーンの移動によって、スカラー多様体の中を移動することになる。上で述べたように、フェルミオン場はスカラー多様体上でベクトルとして振舞うから、スカラー多様体上での座標変換の元での共変性を保つためには、この移動はスカラー多様体上のアフィン接続 Γ^k_{ij} を用いて定義される平行移動とみなすべきである。すなわち、スカラー場の超対称変換は、スピノル場に対して次の変換を引き起こす。

$$\delta_{\parallel}\chi^i = -\delta\phi^k\Gamma^i_{kl}\chi^l. \tag{2.95}$$

この変化分を打ち消してフェルミオンの超対称変換 (2.35) を再現するためには、フェルミオンを (2.95) に加えてさらに次のように変換する必要がある。

$$\delta^{\rm cov}\chi^i \equiv \delta\chi^i + \delta\phi^k\Gamma^i_{kl}\chi^l. \tag{2.96}$$

これは、χ^i に対する超対称変換を、スカラー多様体上の座標変換に対して共変化したものになっている。例えば (2.96) とモジュライ空間上のベクトル v^i の共変微分 $\nabla_i v^j = \partial_i v^j + \Gamma^j_{ik} v^k$ を比較すると同じ形になっていることがわかる。

χ^i など、スカラー多様体上のベクトルの、時空座標に対する微分を行う際にも、同様の項を付加する必要がある。すなわち、時空座標が変化すると一般には $\phi^i(x^\mu)$ によって定義されるスカラー多様体上の点も変化するため、スカラー多様体上でベクトルとして振舞う場に対しては次のようにスカラー多様体上のアフィン接続を含む項を付加して共変化しなければならない。

$$D^{(M)}_\mu v^i \equiv \partial_\mu v^i + (\partial_\mu \phi^k)\Gamma^i_{kl} v^l. \tag{2.97}$$

以上のことを踏まえて、カイラル多重項のフェルミオンと補助場の変換則の $\delta_{\rm cov}$ 部分を見てみよう。フェルミオンの変換則 (2.96) に対して変換則 (2.34) および (2.35) を代入すると

$$\begin{aligned}\delta^{\rm cov}\chi^i &= -\frac{i}{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi^i + \frac{1}{2}\xi F^i + \frac{1}{2}(\xi\chi^k)\Gamma^i_{kl}\chi^l \\ &= -\frac{i}{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi^i + \frac{1}{2}\xi F^i_{\rm cov}\end{aligned} \tag{2.98}$$

が得られる。二行目へ移るにはフィルツ変換を用いて Γ^i_{kl} を含む項が (2.94) にある $F^i_{\rm cov}$ の定義に含まれる項に一致することを示せばよい。$F^i_{\rm cov}$ の変換則は、補正項の Γ^i_{jk} も変換されることに注意すれば

$$\begin{aligned}\delta^{\rm cov}F^i_{\rm cov} &\equiv \delta F^i_{\rm cov} + \delta\phi^k\Gamma^i_{kl}F^l_{\rm cov} \\ &= \delta\left(F^i - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}\chi^j\chi^k\right) + \delta\phi^k\Gamma^i_{kl}F^l_{\rm cov} \\ &= \frac{i}{2}\partial_\mu\chi^i\sigma^\mu\bar{\xi} - \Gamma^i_{jk}(\chi^j\delta\chi^k) - \frac{1}{2}\delta\phi^l(\partial_l\Gamma^i_{jk})\chi^j\chi^k - \frac{1}{2}\delta\phi^{*\bar{l}}(\partial_{\bar{l}}\Gamma^i_{jk})\chi^j\chi^k \\ &\quad +\delta\phi^k\Gamma^i_{kl}F^l_{\rm cov}\end{aligned} \tag{2.99}$$

この第 2 項をさらに変形しよう。

$$\begin{aligned}-\Gamma^i_{jk}(\chi^j\delta\chi^k) &= -\Gamma^i_{jk}\chi^j(\delta_{\rm cov}\chi^k - \delta\phi^l\Gamma^k_{lm}\chi^m) \\ &= \frac{i}{2}\Gamma^i_{jk}(\chi^j\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu\phi^k - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(\chi^j\xi)F^k_{\rm cov} + \delta\phi^l\Gamma^i_{jk}\Gamma^k_{lm}(\chi^j\chi^m)\end{aligned} \tag{2.100}$$

(2.100) を再び (2.99) に戻せば、(2.100) の第 1 項は (2.99) の第 1 項と組み合わさって (2.97) で定義された共変微分 $D^{(M)}_\mu$ を含む項が得られる。(2.100) の第 2 項は (2.99) の第 5 項を相殺する。(2.100) の第 3 項はフィルツ変換を用いると $-(1/2)\delta\phi^j\Gamma^i_{jk}\Gamma^k_{lm}(\chi^l\chi^m)$ と書き換えることができるが、これは (2.99) の第 5 項を相殺することがケーラー多様体上で成り立つ式 $\partial_i\Gamma^j_{kl} + \Gamma^j_{im}\Gamma^m_{kl} = 0$ を用いると示される。さらにケーラー多様体では $\partial_{\bar{l}}\Gamma^i_{jk} = R_{\bar{l}j}{}^i{}_k$ が成り立つので $\delta^{\rm cov}F^i_{\rm cov}$ は結局次のように与えられる。

$$\delta^{\rm cov}F^i_{\rm cov} = \frac{i}{2}D^{(M)}_\mu\chi^i\sigma^\mu\bar{\xi} - \frac{1}{2}\delta\phi^{*\bar{l}}R_{\bar{l}j}{}^i{}_k(\chi^j\chi^k). \tag{2.101}$$

まとめておこう。

カイラル多重項の変換則

スカラー多様体上の一般座標変換の下での共変性が明らかなカイラル多重項のスカラー場の変換則は

$$\delta\phi^i = \frac{1}{2}\xi\chi^i \tag{2.102}$$

と与えられる。フェルミオンおよび補助場はスカラー多様体上でベクトルとして振舞う。スカラー場の超対称変換に伴う変化分を別にした超対称変換 $\delta^{\rm cov}$ は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\delta^{\rm cov}\chi^i &= -\frac{i}{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu\phi^i + \frac{1}{2}\xi F^i_{\rm cov}, &(2.103)\\ \delta^{\rm cov}F^i_{\rm cov} &= \frac{i}{2}D^{(M)}_\mu\chi^i\sigma^\mu\bar{\xi} - \frac{1}{2}\delta\phi^{*\bar{l}}R_{\bar{l}\bar{j}}{}^i{}_k(\chi^j\chi^k). &(2.104)\end{aligned}$$

ラグランジアンについても、モジュライ空間上の正則座標変換のもとでの共変性を明らかにしておこう。まず (2.45) によって与えられる運動項であるが、フェルミオンを含む項を

$$\frac{i}{2}K_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}^{\bar{j}}) + \frac{i}{2}K_{i\bar{j}\bar{k}}(\chi^i\sigma^\mu\bar{\chi}^{\bar{j}})(\partial_\mu\phi^{*\bar{k}}) = \frac{i}{2}K_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu D^{(M)}_\mu\bar{\chi}^{\bar{j}}) \tag{2.105}$$

のようにまとめることができる。微分を含まない項については $F^i_{\rm cov}$ を用いて書き換えれば

$$\begin{aligned}&K_{i\bar{j}}F^iF^{*\bar{j}} - \frac{1}{2}K_{i\bar{j}\bar{k}}F^i(\bar{\chi}^{\bar{j}}\bar{\chi}^{\bar{k}}) - \frac{1}{2}K_{ij\bar{k}}(\chi^i\chi^j)F^{*\bar{k}} + \frac{1}{4}K_{ij\bar{k}\bar{l}}(\chi^i\chi^j)(\bar{\chi}^{\bar{k}}\bar{\chi}^{\bar{l}})\\ =\ &K_{i\bar{j}}F^i_{\rm cov}F^{*\bar{j}}_{\rm cov} - \frac{1}{4}K_{i\bar{j}}\Gamma^i_{kl}\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{m}\bar{n}}(\chi^k\chi^l)(\bar{\chi}^{\bar{m}}\bar{\chi}^{\bar{n}}) + \frac{1}{4}K_{kl\bar{m}\bar{n}}(\chi^k\chi^l)(\bar{\chi}^{\bar{m}}\bar{\chi}^{\bar{n}}) \qquad (2.106)\end{aligned}$$

となる。フェルミオンの 4 次の二つの項の係数は次のようにスカラー多様体上の曲率テンソルにまとまる。

$$K_{kl\bar{m}\bar{n}} - K_{i\bar{j}}\Gamma^i_{kl}\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{m}\bar{n}} = \partial_k K_{l\bar{m}\bar{n}} - (\partial_k K_{\bar{i}l})\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{m}\bar{n}} = K_{\bar{i}l}\partial_k\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{m}\bar{n}} = R_{k\bar{m}l\bar{n}} \tag{2.107}$$

これらを用いて、運動項ラグランジアン (2.45) を完全に書き換えれば次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[K(\Phi^*,\Phi)]_D &= -K_{i\bar{j}}(\partial_\mu\phi^i)(\partial^\mu\phi^{*\bar{j}})\\ &\quad+\frac{i}{2}K_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu D^{(M)}_\mu\bar{\chi}^{\bar{j}}) - \frac{i}{2}K_{\bar{i}j}(\bar{\chi}^{\bar{i}}\bar{\sigma}^\mu D^{(M)}_\mu\chi^j)\\ &\quad+K_{i\bar{j}}F^i_{\rm cov}F^{*\bar{j}}_{\rm cov} + \frac{1}{4}R_{i\bar{j}k\bar{l}}(\chi^i\chi^k)(\bar{\chi}^{\bar{j}}\bar{\chi}^{\bar{l}}) \qquad (2.108)\end{aligned}$$

ポテンシャル項 (2.47) については、補助場を $F^i_{\rm cov}$ を用いて書き換えると、超ポテンシャルの二階微分が共変微分になる。

$$\begin{aligned}-[W(\Phi)]_F &= -(\partial_iW)F^i_{\rm cov} - \frac{1}{2}(\partial_iW)\Gamma^i_{jk}(\chi^j\chi^k) + \frac{1}{2}(\partial_i\partial_jW)(\chi^i\chi^j)\\ &= -(\partial_iW)F^i_{\rm cov} + \frac{1}{2}(D^{(M)}_i\partial_jW)(\chi^i\chi^j) \qquad (2.109)\end{aligned}$$

このように、運動項、ポテンシャル項ともにスカラー多様体上の正則座標変換の元で共変な形に書き換えることができる。

2.2.6 U(1)$_R$ 変換

一般に、超対称性を持つ理論の運動項は、ボゾン場はそのままでフェルミオン場の位相を回転させる変換に対する不変性を持っている。このような変換はボゾンとフェルミオンに対して異なる作

用をするので超対称性と可換ではない。超対称性と非可換なボゾン的対称性は一般に R-対称性と呼ばれる。

R-対称性は superfield を用いて表すと θ を回転するような変換として表すことができる。たとえば、上記の作用 $\mathcal{L}_{\mathrm{kin}}$ はカイラル superfield に対する次の変換によって表される U(1) 対称性を持っている。

$$\phi^i \to \phi^i, \quad \psi^i \to e^{i\alpha}\psi^i, \quad F'^i \to e^{2i\alpha}F'^i. \tag{2.110}$$

これは、superfield を用いると次のように表すことができる。シフトする前の補助場 F^i も F'^i と同じ変換をする。

$$\Phi(x,\theta) \to \Phi'(x,\theta) = \Phi(x, e^{i\alpha}\theta). \tag{2.111}$$

しばしば、この対称性のほかに Φ 全体を $\Phi \to e^{i\beta}\Phi$ のように回転する対称性が存在する場合がある。superpotential W が存在すると、これらの対称性は破れるが、二つを適当に組み合わせた対称性は残っている場合がある。その対称性を R-対称性と呼ぶ場合もある。たとえば、一番最初にあげた自由な複素スカラー場とマヨラナフェルミオンからなる系はスカラー場だけを回転させる対称性を持っていたが、これもこのような R-対称性である。superfield を用いればこの変換は $\Phi(x,\theta) \to e^{-i\alpha}\Phi(x, e^{i\alpha}\theta)$ と表すことができる。一般に、superpotential で書かれた相互作用ラグランジアン $\mathcal{L}_W$ を R-対称性で不変に保つためには、W は次のように変換すればよい。

$$W \to e^{-2i\alpha}W. \tag{2.112}$$

それぞれの場に対する電荷をまとめておくと、次のようになる。

	ξ	ϕ	χ^i	F^i	v_μ	λ^a	D^a	W
R	1	0	-1	-2	0	1	0	2

(2.113)

後に超重力理論の作用を構成する際に、$\mathrm{U}(1)_R$ 対称性は重要な役割を果たす。

2.3 ゲージ多重項

2.3.1 ゲージ場についての約束

大域的な対称性

$$\delta(\epsilon^a)\phi = i\epsilon^a T_a \phi \tag{2.114}$$

をゲージ化するためには、ゲージ場を導入し、ラグランジアン中の微分を共変微分

$$D_\mu^{(G)} = \partial_\mu - iA_\mu = \partial_\mu - iA_\mu^a T_a \tag{2.115}$$

に置き換えればよい。U(1) ゲージ群の表現は全て一重項であり、その生成子は対角行列であり、共変微分を次のように書くことができる。

$$D_\mu^{(G)} = \partial_\mu - iA_\mu T_{\mathrm{U}(1)} = \partial_\mu - iqA_\mu. \tag{2.116}$$

随伴表現に属する場 ϕ に対する共変微分は次のように書くことができる。

$$D_\mu^{(G)}\phi = \partial_\mu\phi - i[A_\mu, \phi]. \tag{2.117}$$

T_a はリー群の生成子であり、ここではエルミート行列として定義される。場の強さを表す 2 階テンソル $F_{\mu\nu}$ は、共変微分の交換関係として次のように定義される。

$$F_{\mu\nu} = i[D_\mu^{(G)}, D_\nu^{(G)}] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}^a T_a. \tag{2.118}$$

成分を用いて書くと、

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - f_{bc}{}^a A_\mu^b A_\nu^c \tag{2.119}$$

結合定数 $f_{ab}{}^c$ はその成分が実数になるように次のように定義した。

$$i[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c. \tag{2.120}$$

ちなみに、上の式で定義された構造定数は次のように置くことで随伴表現の生成子とみなすこともできる。

$$i(T_b^{\mathbf{adj}})^a{}_c = f_{bc}{}^a. \tag{2.121}$$

これらの場の強さを用いれば、ゲージ場の運動項は次のように書くことができる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{gauge}} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}. \tag{2.122}$$

上記の方法で共変化されたラグランジアン密度からゲージ場の 1 次の項を抜き出すと、次のようにカレントとゲージ場の結合が現れる。

$$\sum_i (-iA_\mu^a T_a \phi_i) \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial_\mu \phi_i} = -A_\mu^a J_a^\mu \tag{2.123}$$

ただし、$\mathcal{L}_0$ はゲージ化する前のラグランジアン密度であり、J_a^μ は §1.3.2 で定義されたカレントである。

完全反対称テンソルは次のように定義される。

$$\epsilon_{0123} = +1. \tag{2.124}$$

ω^μ は次のように定義される Chern-Simons 形式である。

$$\omega^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(A_\nu^a \partial_\rho A_\sigma^a - \frac{1}{3} f_{abc} A_\nu^a A_\rho^b A_\sigma^c \right) \tag{2.125}$$

2.3.2 複素化された結合定数

運動項が次のように与えられる U(1) ゲージ場 A_μ の理論について考えよう。

$$S_0 = \int d^4x \left[-\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\theta}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \right] \tag{2.126}$$

ゲージ場の強さは $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ によって与えられる。電荷や磁荷をもつ粒子が無ければ第 2 項は位相項であって物理的な意味をもたない。しかし、電荷、磁荷を持つ粒子が存在する場合には重要な意味を持つ。一般の電荷 q、磁荷 q_m を持つ粒子と背景のゲージ場との結合が次のように与えられるとする。

$$S_J = -\int (qA_\mu + q_m \widetilde{A}_\mu) dx^\mu, \quad q, q_m \mathbf{Z} \tag{2.127}$$

$\widetilde{A}_\mu$ は A_μ の双対場であって、その場の強さ $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \widetilde{A}_\nu - \partial_\nu \widetilde{A}_\mu$ は大雑把には $F_{\mu\nu}$ のホッジ双対である。より厳密な $F_{\mu\nu}$ と $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ の関係を与えることがここでの目的の一つである。電荷 q と磁荷 $\widetilde{q}$ は常に整数であるようにゲージ場の規格化を定義する。$q_m \neq 0$ の粒子が存在する場合、A_μ と $\widetilde{A}_\mu$ を同時に扱う必要があるので、作用を書くのは難しい。そこで $q_m \neq 0$ である粒子はプローブとしてのみ扱うことにする。つまり、A_μ についての運動方程式を解く際には $q_m \neq 0$ の粒子は無視する。

$q_m = 0$ の粒子のみを考慮すると、作用全体は次のように与えられる。

$$S = S_0 - q \int A_\mu dx^\mu, \quad q \in \mathbf{Z} \tag{2.128}$$

同じラグランジアンを次のように書くことでカレント j^μ を定義する。

$$S = S_0 - \int d^4x A_\mu j^\mu \tag{2.129}$$

この作用から得られう A_μ に対する運動方程式は、次のようになる。

$$j^\mu = \partial_\nu \left(-\frac{1}{g^2} F^{\mu\nu} - \frac{\theta}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) \tag{2.130}$$

カレント j^μ の時間成分を空間積分したものが電荷 q となる。従って、粒子の電荷は次のように与えることもできる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} \ni q &= \int d^3x j^0 = \int d^3x \partial_k \left(-\frac{1}{g^2} F^{0k} - \frac{\theta}{8\pi^2} \epsilon^{0klm} F_{lm} \right) \\ &= \oint dS_k \left(-\frac{1}{g^2} F^{0k} - \frac{\theta}{8\pi^2} \epsilon^{0klm} F_{lm} \right) \end{aligned} \tag{2.131}$$

次に、磁荷を持つ粒子を考えよう。$q = 0$ のとき、その粒子と背景ゲージ場の結合は次のように与えられる。

$$S_{\mathrm{mag}} = -q_m \int \widetilde{A}_\mu dx^\mu, \quad q_m \in \mathbf{Z} \tag{2.132}$$

磁荷が整数になるように $\widetilde{A}_\mu$ は規格化されている。これが 2π のシフトの不定性を除き一意的に定義できるためには、任意の閉曲面上での積分に対して次の条件が満足されなければならない。

$$\oint dS_k \left(\frac{1}{2} \epsilon^{0klm} \widetilde{F}_{lm} \right) \in 2\pi \mathbf{Z} \tag{2.133}$$

閉曲面の内部に荷電粒子が存在したとしてもこの条件は成り立たなければならない。内部に荷電粒子がある場合の積分は (2.131) の関係を満足する。このとき常に (2.133) の条件が成り立つようにするには双対場の強さ $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ を単に $F_{\mu\nu}$ のホッジ双対としてはだめで、次のように与えなければならないことが分かる。

$$\frac{1}{2} \epsilon^{0klm} \widetilde{F}_{lm} = 2\pi \left(\frac{1}{g^2} F^{0k} + \frac{\theta}{8\pi^2} \epsilon^{0klm} F_{lm} \right) \tag{2.134}$$

あるいは、ローレンツ共変な形に書けば次の関係式を得る。

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \widetilde{F}^{\rho\sigma} = \frac{2\pi}{g^2} F_{\mu\nu} + \frac{\theta}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \tag{2.135}$$

この両辺に ϵ テンソルを掛けることで次のようにも書ける。

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = -\frac{2\pi}{2g^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + \frac{\theta}{2\pi} F_{\mu\nu} \tag{2.136}$$

(2.135) と (2.136) の線形結合を取ることで次のように書くことができる。

$$\widetilde{F}^{(+)}_{\mu\nu} = \left(\frac{\theta}{2\pi} + \frac{2\pi i}{g^2}\right) F^{(+)}_{\mu\nu} \tag{2.137}$$

ただし、反対称テンソルの自己双対部分 $F^{(+)}_{\mu\nu}$ と反自己双対部分 $F^{(-)}_{\mu\nu}$ は次のように定義される。

$$F^{(\pm)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(F_{\mu\nu} \pm \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right) \tag{2.138}$$

$\widetilde{F}^{(\pm)}_{\mu\nu}$ についても全く同様である。(2.138) に現れる複素係数を τ とする。すなわち、τ を次のように定義する。

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{2\pi i}{g^2} \tag{2.139}$$

これは複素化されたゲージ結合定数と呼ばれる。

g や θ の代わりに、τ を用いて作用 (2.126) を書き換えよう。（反）自己双対テンソルの積について次の式が成り立つ。

$$F^{(\pm)}_{\mu\nu}F^{(\pm)\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \pm \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}\right), \quad F^{(+)}_{\mu\nu}F^{(-)\mu\nu} = 0 \tag{2.140}$$

一つ目の式は複合同順である。これは次のように書き換えることができる。

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F^{(+)}_{\mu\nu}F^{(+)\mu\nu} + F^{(-)}_{\mu\nu}F^{(-)\mu\nu}, \tag{2.141}$$

$$\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = F^{(+)}_{\mu\nu}F^{(+)\mu\nu} - F^{(-)}_{\mu\nu}F^{(-)\mu\nu} \tag{2.142}$$

これらを用いれば位相項まで含めた作用は次のように書くことができる。

$$S_0 = \int d^4x \left[\frac{i}{4}\widetilde{\tau}F^{(+)}_{\mu\nu}F^{(+)\mu\nu} - \frac{i}{4}\widetilde{\tau}^* F^{(-)}_{\mu\nu}F^{(-)\mu\nu}\right] = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int d^4x(\widetilde{\tau}F^{(+)}_{\mu\nu}F^{(+)\mu\nu}) \tag{2.143}$$

ただし、作用中に 2π が現れることを防ぐために τ を次のようにリスケールした $\widetilde{\tau}$ を定義した。

$$\widetilde{\tau} = \frac{1}{2\pi}\tau. \tag{2.144}$$

2.3.3 超場による構成

4 次元においてベクトル場は on-shell での自由度 2 を持っており、マヨラナフェルミオンと同数であるから、ベクトル場 A^a_μ とマヨラナフェルミオン λ^a からなる超対称性の多重項を考えることができる。これをベクトル多重項と呼ぶ。ベクトル場はゲージ群の随伴表現に属しているから、λ^a も同じく随伴表現に属している必要がある。

超対称性変換がラグランジアンに依存しないようにするためには補助場を導入しておくのがよい。どのような補助場を導入するべきかは off-shell の自由度をボゾンとフェルミオンの間で比較することで推測できる。off-shell の自由度は A^a_μ が 3（ゲージ変換の自由度は除かれている。)、λ^a が 4 であるから、不足しているボゾンの自由度を補うために実のスカラー場 D^a を導入する。D^a もやはりゲージ群の随伴表現に属している。

このような多重項を超場を用いて記述するにはベクトル超場を用いる。ただし、ベクトル超場には上記の成分場よりも多くの成分場が含まれているから何らかの方法で多すぎる自由度を減らす必要がある。これは、ゲージ対称性のパラメータを超場に格上げすることで解決する。

表 2.2: ベクトル多重項の成分場の自由度。v_μ の自由度からはすでにゲージ変換の分が除かれていることに注意。

	A^a_μ	λ^a	D^a
on-shell	2	2	0
off-shell	3	4	1

まずはじめに U(1) の大域的対称性をゲージ化して U(1) ゲージ理論を得ることを考えよう。カイラル超場のラグランジアン (2.44) は、大域的な U(1) 変換 $\Phi \to e^{i\alpha}\Phi$ のもとで不変である。これをゲージ対称性に格上げすることを考えよう。この場合、変換パラメータを座標 x^μ のみではなく θ^α にも依存する関数としておくのが自然である。ただし、ϕ がカイラル超場であるという性質を保つためには、変換パラメータも同様にカイラル超場である必要がある。ここでは変換パラメータを Λ とし、Φ が次のように変換されるものとしよう。

$$\Phi \to \Phi' = e^{q\Lambda}\Phi. \tag{2.145}$$

ただし q は超場 Φ の U(1) 電荷である。この変換に対して不変になるよう、ラグランジアン (2.44) を次のように変更する。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\Phi^* e^{-2qV}\Phi]_D \tag{2.146}$$

ただし、V はゲージ変換のもとで次のように変換されるベクトル超場である。

$$\delta_{\text{gauge}}V = \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^*) \tag{2.147}$$

ここで導入された超場 V はゲージ場の役割を果たす。実際カイラル多重項 Λ を (2.31) のようにその成分で展開すれば、(2.147) のゲージ変換が成分場 v_m に対してちょうど U(1) のゲージ変換として作用することを確かめることができる。

ゲージ群が U(1) ではなく、非アーベルゲージ群の場合のゲージ多重項もほとんど U(1) の場合と同様に構成することができる。まず、カイラル多重項が次のように変換されるとする。

$$\Phi \to \Phi' = e^{\Lambda}\Phi. \tag{2.148}$$

ただし、Φ はゲージ群のある表現に属する多成分のカイラル超場であり、Λ はリー代数に値を取るカイラル多重項である。$\Lambda \equiv \Lambda^a T_a$ を $q\Lambda$ に置き換えれば U(1) の場合に帰着する。そして、ゲージ不変な運動項が U(1) ゲージ理論の場合と類似の形

$$\Phi^\dagger e^{-2V}\Phi \tag{2.149}$$

になると仮定しよう。ここではベクトル超場 V もリー代数に値をとる。この運動項のゲージ不変性のためにはベクトル多重項のゲージ変換が次のように与えられる必要がある。

$$e^{-2V} \to e^{-2V'} = e^{-\Lambda^\dagger}e^{-2V}e^{-\Lambda} \tag{2.150}$$

U(1) の場合と異なり、$\Lambda^\dagger$、Λ、V は互いに可換ではないために全体を一つの e の肩にそのまま乗せてはならない。

Soryushiron Kenkyu

ゲージ変換 (2.150) は Λ が無限小の微小量である場合次のようになる。

$$-\delta e^{-2V} = 2\int dt e^{-2tV}\delta V e^{-2(1-t)V} = \Lambda^\dagger e^{-2V} + e^{-2V}\Lambda \tag{2.151}$$

両辺に右から e^{2V} を掛け、左辺の被積分関数を $e^{-2tV}\delta V e^{2tV} = e^{2tV_{\rm adj}}\delta V$ と書き換えれば積分を実行できて

$$\frac{1-e^{-2V_{\rm adj}}}{V_{\rm adj}}\delta V = \Lambda^\dagger + e^{-2V_{\rm adj}}\Lambda \tag{2.152}$$

従って δV は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta V &= \frac{V_{\rm adj}}{1-e^{-2V_{\rm adj}}}\Lambda^\dagger + \frac{V_{\rm adj}}{e^{2V_{\rm adj}}-1}\Lambda \\
&= \frac{1}{2}\left(1+V_{\rm adj}+\frac{1}{3}V_{\rm adj}^2\right)\Lambda^\dagger + \frac{1}{2}\left(1-V_{\rm adj}+\frac{1}{3}V_{\rm adj}^2\right)\Lambda + \mathcal{O}(V^3) \\
&= \frac{1}{2}\left(\Lambda+\Lambda^\dagger+[V,\Lambda-\Lambda^\dagger]+\frac{1}{3}[V,[V,\Lambda+\Lambda^\dagger]]\right) + \mathcal{O}(V^3)
\end{aligned} \tag{2.153}$$

(2.147) あるいは (2.153) のゲージ変換を用いることで、ベクトル多重項の成分場のうち幾つかを 0 に置くことができる。ここでは以下のゲージ (Wess-Zumino ゲージ) をとる。

$$B = \eta = C = 0 \tag{2.154}$$

Wess-Zumino ゲージは超対称変換のもとで不変ではない。実際、(2.154) を満足する超場を超対称変換すると、η や C の成分が 0 でなくなることがわかる。

$$\delta V = -\frac{i}{8}\theta^{\overline{\alpha}}(\gamma^m)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}v_m + \frac{i}{16\sqrt{2}}\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}}\xi^{\underline{\beta}}\lambda_{\underline{\beta}} + \cdots \tag{2.155}$$

従って、変換パラメータ Λ を次のようにとってゲージ変換 (2.147) あるいは (2.153) を行いゲージを取り直す必要がある。

$$\Lambda_c = \frac{i}{4}\theta^{\overline{\alpha}}(\gamma^m)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}v_m - \frac{i}{8\sqrt{2}}\xi^{\underline{\beta}}\lambda_{\underline{\beta}}\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}} - \frac{i}{64}\theta^{\overline{\gamma}}\theta_{\overline{\gamma}}\theta^{\underline{\alpha}}(\gamma^m\gamma^n)_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}\partial_m v_n \tag{2.156}$$

この結果、Wess-Zumino ゲージを保つ超対称変換 $\delta_{WZ} = \delta + \delta_{\rm gauge}$ が次のようになる。

ベクトル多重項の変換則

ディラック表示では次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta_{WZ}v_\mu &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_{\overline{\alpha}}(\gamma_\mu)^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\lambda_{\underline{\beta}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma_\mu)^{\underline{\alpha}\overline{\beta}}\lambda_{\overline{\beta}}, && (2.157) \\
\delta_{WZ}\lambda_{\overline{\alpha}} &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}(\gamma^{\mu\nu})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\xi^{\overline{\beta}}F_{\mu\nu} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi_{\overline{\alpha}}D, && (2.158) \\
\delta_{WZ}D &= \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi^{\overline{\alpha}}(\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}D_\mu^{(\rm G)}\lambda_{\underline{\beta}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi^{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu)_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}D_\mu^{(\rm G)}\lambda_{\overline{\beta}} && (2.159)
\end{aligned}$$

ワイル表示では変換則は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta v_\mu^a &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(-i\xi\sigma_\mu\overline{\lambda}^a + i\lambda^a\sigma_\mu\overline{\xi}), \\
\delta\lambda^a &= \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi D^a - \frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}^a_2\xi, \\
\delta D^a &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi\sigma^\mu D_\mu^{(G)}\overline{\lambda}^a + \overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu D_\mu^{(G)}\lambda^a).
\end{aligned} \tag{2.160}$$

以前に与えた (Wess-Zumino ゲージをとらない) 超対称変換と比較すると、$\delta\lambda$ に含まれるベクトル場がゲージ不変な場の強さの形で現れていることがわかる。

ただし、ゲージ対称性に対する共変微分 $D_\mu^{(G)}$ は随伴表現に属する場 λ に対して次のように定義する。

$$D_\mu^{(G)}\lambda = \partial_\mu\lambda - i[v_\mu, \lambda]. \tag{2.161}$$

また、ゲージ場の強さは次のように定義される。

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu - i[v_\mu, v_\nu] \tag{2.162}$$

次に、ラグランジアンを構成するために、ゲージ共変なカイラル多重項 $W^{\overline{\alpha}}$ を定義することを考えよう。$\lambda^{\overline{\alpha}}$ を初項とするスピノルカイラル超場は次のように定義することができる。

$$W^{\overline{\alpha}} = -2\sqrt{2}iD_{\underline{\beta}}D^{\underline{\beta}}(e^{2V}D^{\overline{\alpha}}e^{-2V}) \tag{2.163}$$

ここで、上付き添え字の微分演算子は、左から θ^α で微分し、得られた式の下付き添え字を上げたものである。つまり、次の式が成り立つ。

$$D^\alpha\theta^\beta = D_\gamma\mathbf{1}^{\gamma\alpha}\theta^\beta = \mathbf{1}^{\gamma\alpha}\delta_\gamma^\beta = \mathbf{1}^{\beta\alpha} \tag{2.164}$$

成分場で表した式は、Wess-Zumino ゲージの V を代入すれば簡単に得ることができる。非アーベルゲージ群の場合に $W^{\overline{\alpha}}$ をベクトル超場の成分場を用いて表すために、まず次のように書き換えよう。

$$\begin{aligned} W^{\overline{\alpha}} &= 4\sqrt{2}iD_{\underline{\beta}}D^{\underline{\beta}}\int_0^1 dte^{2tV}(D^{\overline{\alpha}}V)e^{-2tV} \\ &= 4\sqrt{2}iD_{\underline{\beta}}D^{\underline{\beta}}D^{\overline{\alpha}}V + 4\sqrt{2}iD_{\underline{\beta}}D^{\underline{\beta}}[V, D^{\overline{\alpha}}V] + \mathcal{O}(V^3) \end{aligned} \tag{2.165}$$

右辺第 1 項は V について線形であり、U(1) の場合はこれ以外の項は消える。その場合 Wess-Zumino ゲージの V を代入すれば

$$\begin{aligned} W^{\overline{\alpha}}_{\mathrm{U}(1)} &= 4\sqrt{2}iD_{\underline{\beta}}D^{\underline{\beta}}D^{\overline{\alpha}}V \\ &= U\left(\lambda^{\overline{\alpha}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}(\gamma^{mn})^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\theta^{\overline{\beta}}F^{\mathrm{U}(1)}_{mn} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\theta^{\overline{\alpha}}D - \frac{1}{8}(\theta^{\overline{\gamma}}\theta_{\overline{\gamma}})(\gamma^m)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\partial_m\lambda^{\underline{\beta}}\right) \end{aligned} \tag{2.166}$$

ただしこの式の中の場の強さ F はゲージ場 v に対して線形であり $F = dv$ と与えられる。Wess-Zumino ゲージでは、非アーベル群の場合でも $\mathcal{O}(V^3)$ 項は 0 である。従ってあとは第 2 項を計算すればよい。第 2 項に Wess-Zumino ゲージの V を代入すると、次のようになる。

$$4\sqrt{2}iD_{\underline{\beta}}D^{\underline{\beta}}[V, DV^{\overline{\alpha}}] = U\left(\frac{i}{4\sqrt{2}}(\gamma^{mn})^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\theta^{\overline{\beta}}[v_m, v_n] + \frac{i}{8}(\theta^{\overline{\gamma}}\theta_{\overline{\gamma}})(\gamma^m)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}[v_m, \lambda^{\underline{\beta}}]\right) \tag{2.167}$$

これを (2.166) とあわせれば、非アーベル群の場合の $W^{\overline{\alpha}}$ が次のように得られる。

$$W^{\overline{\alpha}} = U\left(\lambda^{\overline{\alpha}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}(\gamma^{mn})^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\theta^{\overline{\beta}}F_{mn} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\theta^{\overline{\alpha}}D - \frac{1}{8}(\theta^{\overline{\gamma}}\theta_{\overline{\gamma}})(\gamma^m)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}D_m^{(G)}\lambda^{\underline{\beta}}\right) \tag{2.168}$$

この場は U(1) の場合にはゲージ不変であるが、非アーベルゲージ群の場合には $W^{\overline{\alpha}}$ はゲージ変換 (2.150) のもとで次のように随伴表現として変換される。

$$W^{\overline{\alpha}} \to W'^{\overline{\alpha}} = e^\Lambda W^{\overline{\alpha}}e^{-\Lambda}. \tag{2.169}$$

このゲージ変換が $W^{\overline{\alpha}}$ がカイラル超場であるという性質を保つことに注意しよう。

ここで定義された $W^{\overline{\alpha}}$ はゲージ共変であり、超場 V の場の強さに相当するものである。二つ掛けてトレースを取れば、次のようにゲージ不変なスカラーを得ることができる。

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}[W_{\overline{\alpha}}W^{\overline{\alpha}}]_F = \mathrm{tr}\left[-\lambda_{\overline{\alpha}}(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}D^{(G)}_\mu\lambda^{\underline{\beta}} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}D^2\right] \tag{2.170}$$

これを用いてラグランジアンは以下のように与えることができる。まず、運動項は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{vector}}_{\mathrm{kin}} &= -\frac{1}{2g^2}\,\mathrm{Re}[W^aW^a]_F \\ &= \frac{1}{g^2}\left(-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + i\lambda^a\sigma^\mu D^{(G)}_\mu\overline{\lambda}^a + \frac{1}{2}D^aD^a\right).\end{aligned} \tag{2.171}$$

次の作用は位相的、すなわちいかなる無限小変換に対しても不変である。当然超対称変換に対しても不変である。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{vector}}_{\mathrm{top}} &= -\frac{\theta}{2(2\pi)^2}\,\mathrm{Im}[W^aW^a]_F \\ &= -\frac{\theta}{8(2\pi)^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma} = -\frac{\theta}{2(2\pi)^2}\partial_\mu\omega^\mu.\end{aligned} \tag{2.172}$$

(2.171) と (2.172) をまとめて表すのに複素パラメータ

$$\widetilde{\tau} = \frac{\theta}{(2\pi)^2} + \frac{i}{g^2} \tag{2.173}$$

を導入するのが便利である。$\widetilde{\tau}$ を用いると、二つのラグランジアンの和は $\mathcal{L}^{\mathrm{vector}}_{\mathrm{kin}} + \mathcal{L}^{\mathrm{vector}}_{\mathrm{top}} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}[\widetilde{\tau}\delta_{ab}W^aW^b]_F$ と書くことができる。この式では $\widetilde{\tau}$ は F 項を取り出す記号の中に含まれているので、カイラル多重項がある場合には $\widetilde{\tau}$ をカイラル多重項の正則関数に一般化することができる。さらに $\widetilde{\tau}\delta_{ab}$ をより一般の行列 $\widetilde{\tau}_{ab}$ に一般化することもできる。これらの一般化を行ったラグランジアンを以下に与える。

ベクトル多重項の運動項

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{vector}} &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}[\widetilde{\tau}_{ab}W^aW^b]_F \\ &= \mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab}\left[\frac{1}{2}D^aD^b + \frac{i}{2}(\lambda^a\sigma^\mu D^{(G)}_\mu\overline{\lambda}^b) - \frac{i}{2}(D^{(G)}_\mu\lambda^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^b) - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu}\right] \\ &\quad + \mathrm{Re}\,\widetilde{\tau}_{ab}\left[\frac{1}{2}D^{(G)}_\mu(\lambda^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^b) - \frac{1}{8}i\sigma^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^b_{\rho\sigma}\right] \\ &\quad + \Big[\frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda^a(D^b + iF^b_{(2)})\widetilde{\tau}_{ab,i}\chi^i \\ &\qquad + \frac{i}{4}(\lambda^a\lambda^b)\left(\widetilde{\tau}_{ab,i}F^i_{\mathrm{cov}} - \frac{1}{2}D^{(M)}_i\partial_j\widetilde{\tau}_{ab}(\chi^i\chi^j)\right) \quad + \mathrm{h.c.}\Big]\end{aligned} \tag{2.174}$$

カイラル superfield の正則関数 $\widetilde{\tau}_{ab}$ は周期関数、あるいはゲージ運動項関数 (gauge kinetic function) と呼ばれる、後でみるように、電磁双対性を考える場合には

$$\tau_{ab} = 2\pi\widetilde{\tau}_{ab} \tag{2.175}$$

を用いるほうが自然であるが、ここではラグランジアン中に 2π が何度も現れるのを避けるために $\widetilde{\tau}_{ab}$ を用いる。

2.3.4 Fayet-Iliopoulos 項

ζ がリー群の中心に属するパラメータであれば、次のラグランジアンは超対称性変換及びゲージ変換のもとで不変である。

$$\mathcal{L}_{\rm FI}^{\rm vector} = -\zeta_a [V^a]_D = -\zeta_a D^a. \tag{2.176}$$

これは Fayet-Iliopoulos 項と呼ばれる。このラグランジアンが実であるためには、パラメータ ζ_a は実でなければならない。

この FI 項を含むラグランジアンと変換則から、補助場の運動方程式を用いて補助場を消去してみよう。ラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\,{\rm Im}[\widetilde{\tau}_{ab} W^a W^b]_F - \zeta_a [V^a]_D \\ &= ({\rm Im}\,\widetilde{\tau}_{ab}) \left(-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{b\mu\nu} + i\lambda^a \sigma^\mu D^{(G)}_\mu \overline{\lambda}^b \right) + \frac{1}{2}({\rm Im}\,\widetilde{\tau}_{ab}) D^a D^b - \zeta_a D^a. \end{aligned} \tag{2.177}$$

である。運動方程式を解くと、補助場が次のように与えられる。

$$D^a = ({\rm Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab} \zeta_b. \tag{2.178}$$

これを上記のラグランジアンに代入すれば FI パラメータはエネルギーを定数ずらすだけであるから、重力を含まない理論においては無視することができる。(ここでは $\widetilde{\tau}_{ab}$ は場に依存しないという仮定をしている。) すると、ラグランジアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = ({\rm Im}\,\widetilde{\tau}_{ab}) \left(-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{b\mu\nu} + i\lambda^a \sigma^\mu D^{(G)}_\mu \overline{\lambda}^b \right) \tag{2.179}$$

変換則に対しても代入すれば、

$$\delta A^a_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-i\xi\sigma_\mu \overline{\lambda}^a + i\lambda^a \sigma_\mu \overline{\xi}), \quad \delta\lambda^a = \frac{i}{2\sqrt{2}} \xi ({\rm Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab} \zeta_b - \frac{1}{2\sqrt{2}} \not{F}^a_2 \xi. \tag{2.180}$$

補助場を消去すると、FI パラメータは (2.180) 中の λ^a の変換則にのみ含まれる。このとき、ζ^a は必ずしも実数である必要は無い。ζ^a を任意の複素数としてもラグランジアン (2.179) はやはり超対称変換 (2.180) のもとで不変である。

実は、パラメータ ζ_a の虚部はゲージ場 $F^a_{\mu\nu}$ の双対場である $\widetilde{F}_{a\mu\nu}$ に対して導入された FI パラメータであるとみなすことができる。このことを見やすくするために、§7.4.2 で導入される電荷行列を用いて複素に拡張した FI パラメータを

$$\zeta_i = M^a_i \zeta_a + M_{ia} \widetilde{\zeta}^a \tag{2.181}$$

と定義しよう。すると、ゲージーノの変換則は

$$\delta\lambda^a = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\not{F}^{(+)a}_2 - iM^a_i g^{i\overline{j}} \zeta^*_{\overline{j}} \right) \xi. \tag{2.182}$$

と書くことができる。従って、$(F^{(+)a}_2, \widetilde{F}^{(+)}_{2a})$ を ${\rm Sp}(2k, Z)$ の $2k$ 表現として変換する双対変換のもとで $(\zeta_a, \widetilde{\zeta}^a)$ も $2k$ 表現として変換される。(詳しくは §7.4.2 を参照のこと。) この理由により、ζ_a と $\widetilde{\zeta}^a$ はしばしば電気的 FI パラメータおよび磁気的 FI パラメータと呼ばれる。

2.4 荷電カイラル多重項

2.4.1 Wess-Zumino ゲージ

Wess-Zumino ゲージを保つためのゲージの取り直しは、電荷を持つカイラル多重項の超対称変換にも影響を与える。カイラル多重項に対するゲージ変換が

$$\delta_{\mathrm{gauge}}\Phi = \Lambda\Phi. \tag{2.183}$$

と与えられるとしよう。ただし、Λ はリー代数に値をとる変換パラメータである。より一般には、スカラー多様体上の任意の正則なアイソメトリーをゲージ化することが可能であるが、ここでは (2.183) のように線形変換の形で与えられるもののみを考えることにする。

超対称変換の結果破れた Wess-Zumino ゲージを回復するためのゲージの取り直し (2.156) の効果を求めると、

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{gauge}}\widetilde{\Phi} &= \widetilde{\Lambda}\widetilde{\Phi} \\
&= 2\left(\frac{i}{8}\theta^{\overline{\alpha}}(\gamma^m)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}v_m - \frac{i}{16\sqrt{2}}\xi^{\underline{\beta}}\lambda_{\underline{\beta}}\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}}\right)\left(\phi + \frac{1}{2}\theta^{\overline{\alpha}}\chi_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{8}F\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}}\right) \\
&= \frac{i}{4}\theta^{\overline{\alpha}}(\gamma^m)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}v_m\phi - \frac{i}{8\sqrt{2}}\xi^{\underline{\beta}}\lambda_{\underline{\beta}}\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}}\phi + \frac{i}{16}\theta^{\overline{\delta}}\theta_{\overline{\delta}}\xi^{\underline{\alpha}}(\gamma^m)_{\underline{\alpha}\overline{\beta}}v_m\chi^{\overline{\beta}}
\end{aligned} \tag{2.184}$$

従って、Wess-Zumino ゲージを保つ超対称変換は、カイラル多重項に対して次のように作用する。

$$\delta_{WZ}\phi = \frac{1}{2}\xi^{\overline{\alpha}}\chi_{\overline{\alpha}}, \tag{2.185}$$

$$\delta_{WZ}\chi_{\overline{\alpha}} = -\frac{1}{2}(\gamma^m)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}D^{(G)}_m\phi + \frac{1}{2}F\xi_{\overline{\alpha}}, \tag{2.186}$$

$$\delta_{WZ}F = \frac{1}{2}\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^m)^{\underline{\alpha}}{}_{\beta}D^{(G)}_m\chi^{\overline{\beta}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\xi^{\underline{\beta}}\lambda_{\underline{\beta}}\phi \tag{2.187}$$

ゲージの取り直しであらわれる、ベクトル場を含む補正項のおかげで微分が共変微分

$$D^{(G)}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - iv_\mu\phi, \quad D^{(G)}_\mu\chi = \partial_\mu\chi - iv_\mu\chi. \tag{2.188}$$

に置き換わっている。

さて、こうして得られた変換則をスカラー多様体上の共変性が明らかな形に書き換えておこう。補助場 F^i を (2.94) によって定義される F^i_{cov} で書き換えると、

カイラル多重項の変換則

カイラル多重項の変換則

$$\begin{cases}
\delta\phi^i = \frac{1}{2}\xi\chi^i \\
\delta^{\mathrm{cov}}\chi^i = -\frac{i}{2}\sigma^\mu\overline{\xi}D^{(G)}_\mu\phi^i + \frac{1}{2}\xi F^i_{\mathrm{cov}}, \\
\delta^{\mathrm{cov}}F^i_{\mathrm{cov}} = \frac{i}{2}D^{(M,G)}_\mu\chi^i\sigma^\mu\overline{\xi} - \frac{1}{2}\delta\overline{\phi}^{\overline{j}}R_{\overline{j}k}{}^i{}_l(\chi^k\chi^l) - \frac{i}{\sqrt{2}}(\overline{\xi\lambda}^a)(T_a)^i{}_j\phi^j.
\end{cases} \tag{2.189}$$

F^i_{cov} の変換則中に現れる共変微分 $D^{(M,G)}_\mu$ は、スカラー多様体上の正則座標変換とゲージ変換について共変化された微分であり、次のように定義される。

$$D^{(M,G)}_\mu\chi^i = \partial_\mu\chi^i + (D^{(G)}_\mu\phi^j)\Gamma^i_{jk}\chi^k - iv^a_\mu(T_a)^i{}_j\chi^j \tag{2.190}$$

次に、荷電カイラル多重項の運動項ラグランジアンを与えよう。一般のケーラーポテンシャル $K(\Phi,\Phi^*)$ によって記述される系の場合には Φ^* をすべて $\Phi^* e^{-2V^aT_a}$ で置き換えればよい。(2.145) のもとで $\Phi^* e^{-2V} \to \Phi^* e^{-2V} e^{-2\Lambda}$ のように変換されるから、次のラグランジアンは局所的ゲージ変換で不変である。

カイラル多重項の運動項

カイラル多重項の運動項

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\rm kin} &= \frac{1}{2}[K(\Phi,\Phi^* e^{-2V})]_D \\
&= -K_{i\bar{j}} D_\mu^{(G)}\phi^i D^{(G)\mu}\overline{\phi}^{\bar{j}} + iK_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu D_\mu^{(G,M)}\overline{\chi}^{\bar{j}}) + K_{i\bar{j}}F_{\rm cov}^i\overline{F}_{\rm cov}^{\bar{j}} \\
&\quad +\frac{1}{4}R_{i\bar{j}k\bar{l}}(\chi^i\chi^k)(\overline{\chi}^{\bar{j}}\overline{\chi}^{\bar{l}}) \\
&\quad -\frac{1}{2}D^aK_i(T_a)^i{}_j\phi^j - \frac{1}{2}D^a\overline{\phi}^{\bar{i}}(T_a)_{\bar{i}}{}^{\bar{j}}K_{\bar{j}} \\
&\quad -\sqrt{2}i\overline{\phi}^{\bar{i}}(T_a)_{\bar{i}}{}^{\bar{j}}K_{\bar{j}k}(\lambda^a\chi^k) + \sqrt{2}i(\overline{\chi}^{\bar{i}}\overline{\lambda}^a)K_{\bar{i}j}(T_a)^j{}_k\phi^k. \qquad (2.191)
\end{aligned}$$

ポテンシャル項 (2.47) については、微分を含まないので、ゲージ化に際して修正の必要はない。

2.4.2 補助場の運動方程式とポテンシャル

次のラグランジアンを考える。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \text{kinetic terms of chiral mult. (2.191)} \\
&+ \text{potential terms (2.109)} \\
&+ \text{kinetic terms of gauge mult. (2.174)} \\
&+ \text{FI terms (2.176)} \qquad (2.192)
\end{aligned}$$

この中には、$F_{\rm cov}^i$ と D^a が補助場として含まれている。それらの運動方程式を解こう。まず、ラグランジアンの中から $F_{\rm cov}^i$ を含む部分を抜き出すと

$$\mathcal{L} = K_{i\bar{j}}F_{\rm cov}^iF_{\rm cov}^{*\bar{j}} + \left(-W_iF_{\rm cov}^i + \frac{i}{4}(\lambda^a\lambda^b)\widetilde{\tau}_{ab,i}F_{\rm cov}^i + \text{c.c.}\right) \qquad (2.193)$$

従って、運動方程式を解くと、

$$F_{\rm cov}^{*\bar{i}} = K^{\bar{i}j}\left(W_j - \frac{i}{4}\widetilde{\tau}_{ab,j}(\lambda^a\lambda^b)\right) \qquad (2.194)$$

次に、ラグランジアンの中から D^a を含む項を抜き出すと

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab}D^aD^b \\
&\quad -\frac{1}{2}D^aK_i(T_a)^i{}_j\phi^j - \frac{1}{2}D^a\overline{\phi}^{\bar{i}}(T_a)_{\bar{i}}{}^{\bar{j}}K_{\bar{j}} \\
&\quad +\frac{1}{2\sqrt{2}}D^b\left(\widetilde{\tau}_{ab,i}(\lambda^a\chi^i) + \widetilde{\tau}^*_{ab,\bar{i}}(\overline{\lambda}^a\overline{\chi}^{\bar{i}})\right) \\
&\quad -\zeta_D^aD^a. \qquad (2.195)
\end{aligned}$$

が得られる。従って、D^a についての運動方程式の解は

$$D^a = (\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\left[\frac{1}{2}\left(K_i(T_b)^i{}_j\phi^j + \overline{\phi}^{\bar{i}}(T_b)_{\bar{i}}^{\bar{j}}K_{\bar{j}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\widetilde{\tau}_{bc,i}(\lambda^c\chi^i) + \widetilde{\tau}^*_{bc,\bar{i}}(\overline{\lambda}^c\overline{\chi}^{\bar{i}})\right) + \zeta_a\right] \tag{2.196}$$

ケーラーポテンシャルがゲージ不変であることを表す式

$$K_i(T_b)^i{}_j\phi^j = \overline{\phi}^{\bar{i}}(T_b)_{\bar{i}}^{\bar{j}}K_{\bar{j}} \tag{2.197}$$

を用いると、前半部分を一つの項にまとめることもできる。

これらを再びラグランジアンに代入することで、ポテンシャル項を得ることができる。フェルミオンを含む項を無視すると、

$$\begin{aligned} V &= K_{i\bar{j}}F^iF^{*\bar{j}} + \frac{1}{2}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})D^aD^b \\ &= K^{i\bar{j}}W_iW^*_{\bar{j}} + \frac{1}{2}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}(K_i(T_a)^i{}_j\phi^j + \zeta_a)(K_i(T_b)^i{}_j\phi^j + \zeta_b) \end{aligned} \tag{2.198}$$

このポテンシャルが最小値 0 を取るのは

$$W_i = 0, \quad K_i(T_a)^i{}_j\phi^j + \zeta_a = 0, \tag{2.199}$$

が成り立つ点であり、これらの条件式はそれぞれ F 項条件、D 項条件と呼ばれる。

2.4.3 ゲージ変換の一般化

ここまでは、スカラー場およびそれと同じ超対称多重項に属するフェルミオンが次のように線形にゲージ変換されることを仮定していた。

$$\delta_{\mathrm{gauge}}\phi^i = i\epsilon^a(T_a)^i{}_j\phi^j, \quad \delta_{\mathrm{gauge}}\chi^i = i\epsilon^a(T_a)^i{}_j\chi^j. \tag{2.200}$$

これに対応して共変微分は次のように定義されていた。

$$D^{(G)}_\mu\phi^i = \partial_\mu\phi^i - iA^a_\mu(T_a)^i{}_j\phi^j, \quad D^{(G)}_\mu\chi^i = \partial_\mu\phi^i - iA^a_\mu(T_a)^i{}_j\chi^j. \tag{2.201}$$

ゲージ変換 (2.200) の線形性は、スカラー多様体上の座標変換を行うと崩れてしまうので、スカラー多様体上の座標変換の下での共変性を明らかにするためには次の形に書き換えておくのがよい。

$$\delta_{\mathrm{gauge}}\phi^i = \epsilon^a t^i_a \tag{2.202}$$

ただし、t^i_a はスカラー多様体上の計量、複素構造を不変に保つ正則キリングベクトルである。このようなキリングベクトルによって生成されるスカラー多様体の対称性はアイソメトリーと呼ばれる。

このようなアイソメトリーをゲージ化する準備として、次の節でまず（複素とは限らない）一般の多様体について、キリングベクトルやアイソメトリーの性質をまとめておく。

2.4.4 キリングベクトルとリー微分

ある多様体 $\mathcal{M}$ 上での座標変換 $y'^m = y'^m(y)$ を考えよう。この式は、多様体上のある一点に注目したときに、その点での旧座標 y^m と新座標 y'^m の関係を与えている。この座標変換のもと

で、$\mathcal{M}$ 上の場がどのように変換されるかを見てみよう。まず、もっとも簡単な例としてスカラー場を考えてみる。旧座標 y^m の関数として表した場を $\phi(y^m)$、新座標 y'^m の関数として表した場を $\phi'(y'^m)$ としよう。多様体上のある一点に注目すればスカラー場の値は座標変換によって変化しないから、二つの関数の間には次の関係式が成り立つ。

$$\phi(y^m) = \phi'(y'^m). \tag{2.203}$$

共変ベクトルや反変ベクトルの添え字を持った場に対しては、基底 dy^m や ∂_{y^m} を用いて添え字をつぶしておけばスカラー場の場合と同様な関係式が成り立つ。

$$\phi_m(y)dy^m = \phi'_m(y')dy'^m, \quad \phi^m(y)\partial_{y^m} = \phi'^m(y')\partial_{y'^m}. \tag{2.204}$$

局所回転群の下でスピノルを含む一般の表現として変換される場を表現するためには多脚場 $e_m^{\widehat{k}}$ を用いて局所直交系を設定する必要がある。ϕ が局所直交系の添え字を持っているとしても、それは座標変換のもとでは影響を受けないので、無視してよい。

無限小変換 $y^m = y'^m + \epsilon t^m(y)$ について見てみよう。ここで、$t^m(y)$ は多様体 $\mathcal{M}$ 上のベクトル場であり、ϵ は無限小のパラメータである。この無限小変換のもとで、スカラー場はその関数形を以下のように変化させる。

$$\begin{aligned} \phi'(y^l) &= \phi'(y'^l + \epsilon t^l) \\ &= \phi'(y'^l) + \epsilon t^p \partial'_p \phi'(y'^l) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \phi(y^l) + \epsilon t^p \partial_p \phi(y^l) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{2.205}$$

この式の一行目では新座標と旧座標の関係を用い、二行目へ移る際に ϵ に対してテーラー展開を行った。三行目へは第 1 項に対して (2.203) を用い、第 2 項に対しては ϵ をすでにひとつ含んでいるために $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ の微小量を無視すればプライムの付いている量と付いていない量を区別する必要の無いことを用いた。

座標変換による関数 ϕ の変化を変換パラメータ ϵ で微分したものはリー微分と呼ばれ、(2.205) より次のように与えられる。

$$\mathcal{L}'_t \phi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\phi'(y^l) - \phi(y^l)}{\epsilon} = t^p \partial_p \phi \tag{2.206}$$

ここで、リー微分がある点での ϕ の値の変化ではなく、新座標と旧座標で座標が同じ y^l によって与えられる異なる点での値の差によって定義されていることに注意すること。

共変ベクトルおよび反変ベクトルのリー微分は、(2.204) を用いて次のように与えられる。

$$\mathcal{L}'_t \phi_m = t^p \partial_p \phi_m + (\partial_m t^p)\phi_p, \quad \mathcal{L}'_t \phi^m = t^p \partial_p \phi^m - (\partial_p t^m)\phi^p. \tag{2.207}$$

これは一般座標変換のもとでテンソルとして振舞う。実際、微分を次のように共変微分で置き換えることができる。

$$\mathcal{L}'_t \phi_m = t^p D_p \phi_m + (D_m t^p)\phi_p, \quad \mathcal{L}'_t \phi^m = t^p D_p \phi^m - (D_p t^m)\phi^p. \tag{2.208}$$

共変微分に含まれるクリストッフェル記号は二つの項の間で丁度相殺するのでこれは (2.207) に等しい。以下でしばしば用いられるので、ベクトル t^m の共変微分を次のように書くことにする。

$$t_m{}^n \equiv D_m t^n. \tag{2.209}$$

Soryushiron Kenkyu

さらに一般のテンソルに対しては次のように一般化できる。

$$\mathcal{L}'_t\phi_{m_1\cdots m_a}{}^{n_1\cdots n_b} = t^pD_p\phi_{m_1\cdots m_a}{}^{n_1\cdots n_b} + \sum_{i=1}^{a} t_{m_i}{}^{p}\phi_{m_1\cdots m_i\cdots m_a}{}^{n_1\cdots n_b} - \sum_{i=1}^{b} t_p{}^{n_i}\phi_{m_1\cdots m_a}{}^{n_1\cdots n_i\cdots n_b} \tag{2.210}$$

ベクトル場 t^m による計量のリー微分が 0 であるとき、すなわち

$$\mathcal{L}'_t g_{mn} = D_m t_n + D_n t_m = 0. \tag{2.211}$$

が成り立つとき、対応する座標変換はアイソメトリーであると呼ばれ、ベクトル場 t^μ はキリングベクトルと呼ばれる。以下で考えるリー微分は、一般の座標変換に対してではなく、常に (2.211) を満足するキリングベクトルによるもののみを考える。

局所直交系の添え字は一般座標変換においては意味を持たないと述べた。そのため多脚場のリー微分は共変ベクトルのリー微分と同様に定義され、次のように与えられる。

$$\mathcal{L}'_t e_{m\hat{k}} = t^pD_pe_{m\hat{k}} + t_m{}^pe_{p\hat{k}} = t_{m\hat{k}} \tag{2.212}$$

このリー微分は、$t_{\hat{m}\hat{n}}$ をパラメータとする局所座標回転を組み合わせることで打ち消すことができる。そこで、上で与えたリー微分とこの局所回転の合成を新たなリー微分として定義しておくと便利である。この新たなリー微分を $\mathcal{L}_t$ と置こう。もとのリー微分との関係は次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_t = \mathcal{L}'_t + \frac{1}{2}t_{\hat{m}\hat{n}}S^{\hat{m}\hat{n}} \tag{2.213}$$

$S^{\hat{m}\hat{n}}$ はリー微分が作用する場のスピンに対応する局所回転の表現である。以下ではこの局所回転まで含めた微分をリー微分として採用する。

一般のスピンを持った場に対してのリー微分を現すために、反対称テンソル t_{mn} を演算子として $\hat{t}$ と表す表記法を用いると便利である。たとえば、共変ベクトル、反変ベクトル、スピノルに対して $\hat{t}$ は次のように作用する。

$$(\hat{t}\phi)_m \equiv t_m{}^n\phi_n, \quad (\hat{t}\phi)^m \equiv t^m{}_n\phi^n, \quad (\hat{t}\phi)_a \equiv \frac{1}{4}t_{\hat{m}\hat{n}}(\gamma^{\hat{m}\hat{n}})_{ab}\phi_b. \tag{2.214}$$

このような表記法を用いれば、リー微分は次のように表される。

$$\mathcal{L}_t = t^\mu D_\mu + \hat{t} \tag{2.215}$$

アイソメトリーの群を生成するキリングベクトルの組を t_a とする。a は群の生成子をラベルする添え字である。キリングベクトル t_a によるリー微分を単に $\mathcal{L}_a$ と書くことにしよう。曲率テンソルの第一ビアンキ恒等式 $R_{pq-rk} + R_{qr-pk} + R_{rp-qk} = 0$ より、次の式が成り立つ。

$$D_pD_qt_{a,r} + D_qD_rt_{a,p} + D_rD_pt_{a,q} = 0. \tag{2.216}$$

さらに、この式から次の公式が得られる。

$$R_{pq-rs}t_a^s + D_rt_{a,pq} = 0. \tag{2.217}$$

この式は行列表示をすると、次のように簡単にあらわすこともできる。

$$t_a^s\hat{R}_{sr} = D_r\hat{t}_a. \tag{2.218}$$

キリングベクトルのリー微分を次のように定義しよう。

$$t^m_{[a,b]} = \mathcal{L}_a t^m_b = t^p_a D_p t^m_b - t^p_b D_p t^m_a = (\widehat{t}_a t_b)^m - (\widehat{t}_b t_a)^m \tag{2.219}$$

この定義より、$t^m_{[a,b]}$ は a と b について反対称である。さらに、このベクトルはキリングベクトルである。そのことを確かめるために $t^m_{[a,b]}$ を微分してみよう。

$$\begin{aligned} D_m t_{[a,b],n} &= ((D_m \widehat{t}_a)t_b)_n - ((D_m \widehat{t}_b)t_a)_n + (\widehat{t}_a D_m t_b)_n - (\widehat{t}_b D_m t_a)_n \\ &= (t^p_a \widehat{R}_{pm} t_b)_n - (t^p_b \widehat{R}_{pm} t_a)_n + (\widehat{t}_a D_m t_b)_n - (\widehat{t}_b D_m t_a)_n \\ &= -t^p_a t^q_b R_{pqm-n} - (\widehat{t}_b \widehat{t}_a)_{mn} + (\widehat{t}_a \widehat{t}_b)_{mn} \end{aligned} \tag{2.220}$$

一行目では $t^m_{[a,b]}$ の定義式 (2.219) を用い、二行目へ移行する際に公式 (2.218) を用いた。三行目へは曲率テンソルの第一ビアンキ恒等式を用いた。この式の最後の表式は m と n について明らかに反対称である。これは $t^m_{[a,b]}$ がキリングベクトル条件 (2.211) を満足することを意味している。(2.209) によって $\widehat{t}_{[a,b]}$ を定義すれば、(2.220) によって次の公式を満足する。

$$\widehat{t}_{[a,b]} = [\widehat{t}_a, \widehat{t}_b] - t^m_a t^n_b \widehat{R}_{mn} \tag{2.221}$$

もしキリングベクトルの完全系が用意されていれば、$t^m_{[a,b]}$ は次のようにキリングベクトル t^m_a の線形結合として表されるはずである。

$$t^m_{[a,b]} = f_{ab}{}^c t^m_c. \tag{2.222}$$

$f_{ab}{}^c$ は構造定数と呼ばれる。リー微分の交換関係は再びリー微分を与える。この構造定数は上で定義した $f_{ab}{}^c$ によって与えられる。

$$[\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b] = \mathcal{L}_{t_{[a,b]}} = f_{ab}{}^c \mathcal{L}_c \tag{2.223}$$

従って、リー微分はリー代数をなす。

2.4.5 アイソメトリーのゲージ化

次のラグランジアンで与えられる n 個のスカラー場の理論を考えよう。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} h_{mn} \partial_\mu q^m \partial^\mu q^n \tag{2.224}$$

q は計量が h_{mn} で与えられる n 次元スカラー多様体の座標とみなすことができる。スカラー多様体が isometry を持つとし、対応するキリングベクトルを t^m_A とする。このとき上記のラグランジアンは次の大域的対称性のもとで不変である。

$$\delta_{\text{gauge}} q^m = \epsilon^A t^m_A \equiv \epsilon^m \tag{2.225}$$

このアイソメトリーがなすリー群の構造定数を $f^A{}_{BC}$ とする。

このアイソメトリー群をゲージ化することを考えよう。パラメータ ϵ^A を時空の場所ごとに異なる座標の関数に一般化し、スカラー場が次のように変換されるとしよう。

$$\delta_{\text{gauge}} q^m = \epsilon^A(x^\mu) t^m_A \tag{2.226}$$

このスカラー場 q^m の共変微分を次のように定義することができる。

$$D^{(G)}q^m = dq^m - V^A t_A^m \tag{2.227}$$

共変微分の肩の G はゲージ対称性に対する共変微分であることを表している。V_μ^A は次のように変換されるゲージ場である。

$$\delta_{\rm gauge}V^A = d\epsilon^A + f^A{}_{BC}V^B\epsilon^C \tag{2.228}$$

対応する場の強さは次のように与えられる。

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu V_\nu^A - \partial_\nu V_\mu^A + f^A{}_{BC}V_\mu^B V_\nu^C \tag{2.229}$$

$D^{(G)}q^m$ が実際に共変微分になっていることを確かめるためにゲージ変換してみると次のように変換パラメータの微分を含んでいないことがわかる。

$$\delta_{\rm gauge}(D^{(G)}q^m) = \epsilon^A dt_A^m - V^A\epsilon^B[t_B^n\partial_n t_A^m + f^C{}_{AB}t_C^m] = \epsilon^A(D^{(G)}q^n)\partial_n t_A^m \tag{2.230}$$

二番目の変形の際に (2.222) と (2.219) を用いた。このことを用いれば、上記のスカラー場のラグランジアン中のスカラー場の微分 $\partial_\mu q^m$ を共変微分 $D_\mu^{(G)}q^m$ に置き換えておけばラグランジアンはゲージ変換に対して不変になることが示される。

座標 q^m の微分はスカラー多様体上のベクトルとして振舞う。したがって一般のスカラー多様体上のベクトル場 ψ^m のゲージ変換も (2.230) と同じ形で与えられる。

$$\delta_{\rm gauge}\psi^m = \epsilon^A\psi^n\partial_n t_A^m \tag{2.231}$$

この変換則に従うベクトルの内積はゲージ変換のもとで不変である。

$$\delta(h_{mn}\psi_1^m\psi_2^n) = \epsilon^A(D_m t_{An})(\psi_1^m\psi_2^n + \psi_1^n\psi_2^m) = 0 \tag{2.232}$$

変換則 (2.231) に現れる $\partial_n t_A^m$ は共変微分ではないことに注意しよう。これを共変微分を用いて次のように書いておくのが便利である。

$$\delta_{\rm gauge}\psi^m = \epsilon^A\psi^n(D_n t_A^m - \Gamma_{nk}^m t_A^k) = -\epsilon^A[(\widehat{t}_A + t_A^k\widehat{\Gamma}_k)\psi]^m \tag{2.233}$$

ここで、$\widehat{t}_A$ と $\widehat{\Gamma}_k$ はそれぞれ $t_A{}^m{}_n$ と Γ_{kn}^m の行列表示であり、どちらも ψ^m のベクトル添え字に作用する。スカラー多様体上の局所回転群の一般の表現に属する場 ψ に対しては、次のようにゲージ変換が作用する。

$$\delta_{\rm gauge}\psi = -\epsilon^A(\widehat{t}_A + t_A^k\widehat{\Omega}_k)\psi \tag{2.234}$$

(2.234) に従って変換される場に対しては、共変微分を次のように定義することができる。

$$\begin{aligned} D_\mu^{(G,M)}\psi &= D_\mu^{(M)}\psi + V_\mu^A\widehat{t}_A\psi \\ &= \partial_\mu\psi + (\partial_\mu q^m)\widehat{\Omega}_m\psi + V_\mu^A\widehat{t}_A\psi \end{aligned} \tag{2.235}$$

共変微分の肩に G と M をつけたのは、ゲージ接続の寄与のほかにスカラー多様体の接続の寄与も含まれているからである。スカラー多様体が平坦であり、ゲージ変換が線形である場合には (2.200) に与えた共変微分になる。

Soryushiron Kenkyu

共変微分 (2.235) が本当に共変であるかを確かめるためにゲージ変換をしてみると次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta_{\rm gauge}(D^{(G,M)}\psi) &= -(\epsilon^n\widehat{\Omega}_n+\epsilon^A\widehat{t}_A)D^{(G,M)}\psi \\ &\quad +dq^m\epsilon^A(t_A^n\widehat{R}_{nm}-D_m\widehat{t}_A)\psi \\ &\quad +V^A\epsilon^B(f^C{}_{AB}\widehat{t}_C+t_B^mD_m\widehat{t}_A-[\widehat{t}_A,\widehat{t}_B])\psi \end{aligned} \tag{2.236}$$

キリングベクトルの公式 (2.218)、(2.221) を用いれば、二行目と三行目がどちらも 0 であることがわかる。したがって $D^{(G,M)}\psi$ のゲージ変換は ξ の変換則 (2.234) とまったく同じ形になる。

$$\delta_{\rm gauge}(D^{(G,M)}\psi)=-(\epsilon^n\widehat{\Omega}_n+\epsilon^A\widehat{t}_A)D^{(G,M)}\psi \tag{2.237}$$

共変微分の交換関係について見てみよう。まず、スカラー場の上では交換関係は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}D_\mu^{(G,M)}D_\nu^{(G)}q^m-D_\nu^{(G,M)}D_\mu^{(G)}q^m &= -(\partial_\mu V_\nu^A-\partial_\nu V_\mu^A)t_A^m-V_\mu^AV_\nu^B(t_A{}^m{}_nt_B^n-t_B{}^m{}_nt_A^n) \\ &= -(\partial_\mu V_\nu^A-\partial_\nu V_\mu^A+f^A{}_{BC}V_\mu^BV_\nu^C)t_A^m \\ &= -F_{\mu\nu}^At_A^m \end{aligned} \tag{2.238}$$

すなわち、$-F_{\mu\nu}$ をパラメータとするゲージ変換の結果と同じになる。

一般のスカラー多様体上のテンソル場の場合には、時空のスピン接続の寄与まで考慮しておくと、

$$\begin{aligned}[D_\mu^{(\omega,G,M)},D_\nu^{(\omega,G,M)}] &= [D_\mu^{(\omega)},D_\nu^{(\omega)}] \\ &\quad +(\partial_\mu q^m)(\partial_\nu q^n)\widehat{R}_{mn} \\ &\quad +(\partial_\mu V_\nu^A)\widehat{t}_A+V_\nu^A(\partial_\mu q^m)D_m\widehat{t}_A \\ &\quad -(\partial_\nu V_\mu^A)\widehat{t}_A-V_\mu^A(\partial_\nu q^m)D_m\widehat{t}_A \\ &\quad +V_\mu^AV_\nu^B[\widehat{t}_A,\widehat{t}_B] \\ &= R_{\mu\nu}+F_{\mu\nu}^A\widehat{t}_A+(D_\mu^{(G)}q^m)(D_\nu^{(G)}q^n)\widehat{R}_{mn} \end{aligned} \tag{2.239}$$

最後の表式へ移る際に (2.218) と (2.221) を用いた。

2.4.6 ケーラー変換とモーメントマップ

$\mathcal{N}=1$ 超対称理論においては、スカラー多様体はケーラーである。この場合のアイソメトリーとキリングベクトルについてまとめておく。ゲージ変換を次のように置こう。

$$\delta\phi^i=\epsilon^a t_a^i. \tag{2.240}$$

ただし、t_a はスカラー多様体上のベクトル場である。ベクトルの別の成分 t_a^i の複素共役が同じベクトルの成分 $t_a^{\bar{i}}$ になるという意味で、このベクトルは実である。

この変換のもとで、ケーラーポテンシャルは必ずしもゲージ不変でなくてもよい。ただし、スカラー多様体の計量はゲージ不変でなければならないので、K のゲージ変換は次のようにケーラー変換の形に書けなければならない。

$$\delta_{\rm gauge}K=\epsilon^a(t_a^iK_i+t_a^{\bar{i}}K_{\bar{i}})=-4\epsilon^a(f_a+f_a^*) \tag{2.241}$$

変換 (2.240) はスカラー多様体の対称性、すなわちアイソメトリーになっていなければならない。これはベクトル場 t_a によるリー微分が計量を変化させないということを意味する。この条件は実座標で

$$\mathcal{L}_{t_a} g_{mn} = D_m t_{a,n} + D_n t_{a,m} = 0 \tag{2.242}$$

と書くことができる。さらに、このアイソメトリーがスカラー多様体上の複素構造を保存するためには、

$$\mathcal{L}_{t_a} I^m{}_n = t_a{}^m{}_k I^k{}_n - I^m{}_k t_a{}^k{}_n = 0 \tag{2.243}$$

である必要がある。これらを、複素座標で書き直せば

$$D_i t_{a,j} = 0, \quad D_i t_{a,\bar{j}} + D_{\bar{j}} t_{a,i} = 0 \tag{2.244}$$

が得られる。ここで、ベクトル μ_a を t_a に複素構造を掛けたものとして次のように定義する。

$$\mu_{a,i} = i t_{a,i}, \quad \mu_{a,\bar{i}} = -i t_{a,\bar{i}}. \tag{2.245}$$

このベクトルも t_a と同じ意味で実である。また、次の式を満足する。

$$D_i \mu_{a,j} = 0, \quad D_i \mu_{a,\bar{j}} = D_{\bar{j}} \mu_{a,i}. \tag{2.246}$$

これらの式は、$\mu_{a,i}$ がスカラー多様体上のある関数の微分として与えられることを意味している。つまり、

$$\mu_{a,i} = \partial_i \mu_a, \quad \mu_{a,\bar{i}} = \partial_{\bar{i}} \mu_a \tag{2.247}$$

となる実関数 μ_a が存在する。

この解は次のように与えることができる。

$$\mu_a = i(t_a^{\bar{j}} K_{\bar{j}} + 4 f_a^*(z^*)) = -i(t_a^i K_i + 4 f_a(z)) \tag{2.248}$$

二つの表式を与えたが、一つ目は (2.247) の第 1 式の一般解を、二つ目は (2.247) の第 2 式の一般解を与えている。これら二つが等しいということは K のゲージ変換のもとでの性質を表す式 (2.241) によって保障される。K がゲージ変換であったとしても、(2.241) からは $\mathrm{Im}\, f$ の定数部分は決めることができないが、これは微分方程式を解く際に現れる積分定数の自由度を表している。

ここで定義したモーメントマップは、補助場 D_a と密接に関係している。たとえば、ゲージ変換が線形で $t^i = i(T_a)^i{}_j \phi^j$ のように与えられ、しかもケーラーポテンシャル K がゲージ不変である場合、$\mathrm{Re}\, f_a = 0$ である。しかし f_a の虚部の定数部分には任意性がある。そこで $4f_a = i\zeta_a$ とおいておこう。この場合モーメントマップは

$$\mu_a = \frac{1}{2} \left(K_i (T_a)^i{}_j \phi^j + \phi^{*\bar{i}} (T_a)_{\bar{i}}{}^{\bar{j}} K_{\bar{j}} \right) + \zeta_a \tag{2.249}$$

と与えられるが、これはベクトル多重項の補助場 D^a の運動方程式を解いて得られた (2.196) の、括弧の中のフェルミオンを含まない部分に一致している。また、正則関数 f_a の中で完全には決まらない定数部分が FI パラメータに対応していることがわかる。ケーラーポテンシャルがゲージ不変な場合には f_a は純虚定数であり、その値によって FI パラメータを定義することができるが、ケーラーポテンシャルがゲージ不変ではなく、f_a が非自明な関数になる場合には FI パラメータは一意的には決まらない。

2.5 変換則とラグランジアンのまとめ

あとで参照するために補助場を消去した後のラグランジアンをフェルミオンについて二次の項まで与えておこう。$\mathcal{L}_{\rm kin}=(1/2)[K(\Phi,\Phi^* e^{-2V})]_D$ の中で補助場を含まない項は

$$\mathcal{L}_\phi = -K_{i\bar{j}} D_\mu^{(G)}\phi^i D^{(G)\mu}\overline{\phi}^{\bar{j}}, \tag{2.250}$$

$$\mathcal{L}_\chi = iK_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu D_\mu^{(G,M)}\overline{\chi}^{\bar{j}}), \tag{2.251}$$

$$\mathcal{L}_{\rm yukawa} = \sqrt{2}t_a^{\bar{j}}K_{\bar{j}k}(\lambda^a\chi^k)+\sqrt{2}(\overline{\chi}^{\bar{i}}\overline{\lambda}^a)K_{\bar{i}j}t_a^j. \tag{2.252}$$

$\mathcal{L}=-[W(\Phi)]+\text{c.c.}$ の中で補助場を含まない項は

$$\mathcal{L}_{\chi\rm mass}=\frac{1}{2}(D_i^{(M)}\partial_j W)(\chi^i\chi^j)+\text{c.c.} \tag{2.253}$$

$\mathcal{L}=-(1/2)\,{\rm Im}[\widetilde{\tau}_{ab}W^aW^b]_F$（ワイル表示）の中で補助場を含まない項は

$$\mathcal{L}_v = {\rm Im}\,\widetilde{\tau}_{ab}\left[-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu}\right]+{\rm Re}\,\widetilde{\tau}_{ab}\left[-\frac{1}{8}i\sigma^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^b_{\rho\sigma}\right], \tag{2.254}$$

$$\mathcal{L}_\lambda = {\rm Im}\,\widetilde{\tau}_{ab}\left[\frac{i}{2}(\lambda^a\sigma^\mu D_\mu^{(G)}\overline{\lambda}^b)-\frac{i}{2}(D_\mu^{(G)}\lambda^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^b)\right]+{\rm Re}\,\widetilde{\tau}_{ab}\left[\frac{1}{2}D_\mu^{(G)}(\lambda^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^b)\right], \tag{2.255}$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda^a(i\not{F}^b_2)\widetilde{\tau}_{ab,i}\chi^i \quad +\text{c.c.}. \tag{2.256}$$

補助場の運動方程式を解いてラグランジアンに再代入して得られる項は

$$\mathcal{L}_{\rm pot} = -K^{i\bar{j}}(\partial_i W)(\partial_{\bar{i}}W^*), \tag{2.257}$$

$$\mathcal{L}_D = -\frac{1}{2}({\rm Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_a\mu_b, \tag{2.258}$$

$$\mathcal{L}_{D\lambda\chi} = \frac{1}{2\sqrt{2}}({\rm Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_a\left(\widetilde{\tau}_{bc,i}(\lambda^c\chi^i)+\widetilde{\tau}^*_{bc,\bar{i}}(\overline{\lambda}^c\overline{\chi}^{\bar{i}})\right), \tag{2.259}$$

$$\mathcal{L}_{\lambda\rm mass} = \frac{i}{4}K^{\bar{i}j}W^*_{\bar{i}}\widetilde{\tau}_{ab,j}(\lambda^a\lambda^b)+\text{c.c.} \tag{2.260}$$

ベクトル多重項の変換則は

$$\delta v^a_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-i\xi\sigma_\mu\overline{\lambda}^a+i\lambda^a\sigma_\mu\overline{\xi}), \tag{2.261}$$

$$\delta\lambda^a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}^a_2\xi+\frac{i}{2\sqrt{2}}\xi({\rm Im}\,\tau^{-1})^{ab}\mu_b. \tag{2.262}$$

カイラル多重項の変換則は

$$\delta\phi^i = \frac{1}{2}\xi\chi^i \tag{2.263}$$

$$\delta\chi^i = -\frac{i}{2}\sigma^\mu\overline{\xi}D_\mu^{(G)}\phi^i+\frac{1}{2}\xi K^{i\bar{j}}\overline{W}_{\bar{j}}. \tag{2.264}$$

2.6 カレント

2.6.1 カレント超場

作用がある内部対称性のもとで不変であるとき、それに対応したネーターカレントを定義することができる。このネーターカレントが超場でどのように表されるかをみておこう。ここでは簡単な

例として次の作用で表されるカイラル多重項の系を考える。

$$S=\frac{1}{2}[K(\Phi^m,\Phi^{*\overline{m}})]_D-([W(\Phi^m)]_F+\text{c.c.})=2[D_{\overline{\alpha}}D^{\overline{\alpha}}K]_F-([W]_F+\text{c.c.}) \tag{2.265}$$

この作用から得られる運動方程式を、超場の式として求めよう。そのためには上記の作用を成分に分解せずに、超場の変分 $\delta\Phi^m$ のもとでの停留値条件を求めれば、そのような運動方程式が得られる。ただし、Φ^m はカイラル多重項であるという拘束条件があるので、その条件を満足するような変分だけを考える必要がある。そこで変分を $\delta\Phi^m=D_{\underline{\alpha}}D^{\underline{\alpha}}X^m$ とおこう。X^m は任意の（カイラルとは限らない）超場である。この変分による作用の変化は次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{2}[K_mD_{\underline{\alpha}}D^{\underline{\alpha}}X^m]_D-[W_mD_{\underline{\alpha}}D^{\underline{\alpha}}X^m]_F\\ &= \frac{1}{2}[X^mD_{\underline{\alpha}}D^{\underline{\alpha}}K_m]_D-[D_{\underline{\alpha}}D^{\underline{\alpha}}(W_mX^m)]_F\\ &= \left[\frac{1}{2}X^mD_{\underline{\alpha}}D^{\underline{\alpha}}K_m-\frac{1}{4}W_mX^m\right]_D\end{aligned} \tag{2.266}$$

X^m は任意の超場であるから、この式が 0 になるための条件として次の運動方程式が得られる、

$$D_{\underline{\alpha}}D^{\underline{\alpha}}K_m-\frac{1}{2}W_m=0 \tag{2.267}$$

さて、上記の作用が次の線形変換のもとで不変であるという対称性を持っていたとしよう。ϵ^a は実の変換パラメータである。

$$\delta_{\text{gauge}}\Phi^m=i\epsilon^a(T_a)^m{}_n\Phi^m,\quad \delta_{\text{gauge}}\Phi^{*\overline{m}}=-i\epsilon^a\Phi^{*\overline{n}}(T_a)_{\overline{n}}{}^{\overline{m}} \tag{2.268}$$

T_a はエルミートな生成子であり、$(T_a)^m{}_n=(T_a)_{\overline{m}}{}^{\overline{n}}$ が成り立つとする。この変換のもとで、ケーラーポテンシャルと超ポテンシャルが不変である場合を考えよう。これは次の式が成り立つことを意味する。

$$K_m(T_a)^m{}_n\Phi^n-\Phi^{*\overline{n}}(T_a)_{\overline{n}}{}^{\overline{m}}K_{\overline{m}}=0,\quad W_m(T_a)^m{}_n\Phi^n=0. \tag{2.269}$$

この対称性に対するカレントを j_a^μ としよう。このカレントは、ゲージ場 A_μ^a を導入して対称性をゲージ化すれば、A_μ^a と物質場の結合項から読み取ることができる。すなわち、ゲージ場 A_μ^a はカレント j_a^μ と次のように結合する。

$$S=S_0-\int d^4xA_\mu^aj_a^\mu+\mathcal{O}(A^2) \tag{2.270}$$

ここでは、ゲージ場の高次の項は無視することにする。

カレント j_a^μ を超場の成分として現すことを考えよう。j_a^μ が超場 J_a の中に次のように含まれていると仮定する。

$$J_a=\cdots+\frac{i}{8}(\theta^{\overline{\alpha}}(\gamma^\nu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}})j_{a\nu}+\cdots \tag{2.271}$$

つまり、J_a の v_μ 成分がカレント j_a^μ の符号を反転させたものになるとする。この超場を用いれば、(2.270) のカレント結合項は次のように書ける。

$$S=S_0-[V^aJ_a]_D+\mathcal{O}(V^2). \tag{2.272}$$

ただし、ベクトル超場の積についての公式

$$[V_1V_2]_D=\cdots-v_{1\mu}v_2^\mu\cdots \tag{2.273}$$

Soryushiron Kenkyu

を用いた。

そのために、ベクトル超場 V^a と物質場の結合項に注目しよう。ベクトル多重項と物質場の結合は次の作用に含まれる。

$$S = \frac{1}{2}[K(\Phi^* e^{-2V}, \Phi)]_D \tag{2.274}$$

これを V でべき展開し、(2.272) と比較することで J_a が次のように与えられることがわかる。

$$J_a = K_m (T_a)^m{}_n \Phi^n = \Phi^{\overline{m}} (T_a)_{\overline{m}}{}^{\overline{n}} K_{\overline{n}} \tag{2.275}$$

この J_a は「カレント超場」と呼ばれる。カレント超場 J_a の成分を展開すれば、スカラー成分 B がモーメントマップに、ベクトル成分 v^μ がカレントに対応することがわかる。

$$B(J_a) = \mu_a, \quad v^\mu(J_a) = -j^\mu_a. \tag{2.276}$$

通常のカレントの保存則は、ゲージ場 A^a_μ のゲージ変換のもとでカレント結合項が不変であることから得ることができる。同様に、V のゲージ変換のもとで上記のラグランジアンが不変であることを要請してみよう。V_a のゲージ変換は、カイラル超場 Λ を用いて $\delta V_a = (1/2)(\Lambda_a + \Lambda_a^*)$ と与えられる。この変換のもとでの不変性は J_a が次の性質を持つことを要求する。

$$D_{\overline{\alpha}} D^{\overline{\alpha}} J_a = D_{\underline{\alpha}} D^{\underline{\alpha}} J_a = 0. \tag{2.277}$$

このことは運動方程式を用いれば簡単に示すことができる。カレント超場の一つ目の式に $D_{\underline{\alpha}} D^{\underline{\alpha}}$ を作用させ、運動方程式を用いると、

$$D_{\underline{\alpha}} D^{\underline{\alpha}} J_a = D_{\underline{\alpha}} D^{\underline{\alpha}} K_m (T_a)^m{}_n \Phi^n = \frac{1}{2} W_m (T_a)^m{}_n \Phi^n \tag{2.278}$$

これは超ポテンシャルのゲージ不変性より、0 であることが保障されている。この複素共役 $D_{\overline{\alpha}} D^{\overline{\alpha}} J_a$ についても全く同様に 0 であることが示される。

一般に (2.277) を満足する超場は線形超場（linear superfield）と呼ばれ、対応する多重項は線形多重項（linear multiplet）と呼ばれる。次の条件を満足する一般の線形超場 L を考えよう。

$$D_{\overline{\alpha}} D^{\overline{\alpha}} L = D_{\underline{\alpha}} D^{\underline{\alpha}} L = 0. \tag{2.279}$$

この成分は次のように与えられる。

$$L = \begin{pmatrix} B & +\frac{1}{2}\theta^{\overline{\alpha}}\eta_{\overline{\alpha}} & \\ +\frac{1}{2}\theta^{\underline{\alpha}}\eta_{\underline{\alpha}} & -\frac{i}{8}(\theta^{\overline{\alpha}}(\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}})v_\mu & -\frac{1}{16}(\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}})(\theta^{\underline{\beta}}(\gamma^\mu)_{\underline{\beta}}{}^{\overline{\gamma}}\partial_\mu\eta_{\overline{\gamma}}) \\ & -\frac{1}{16}(\theta^{\underline{\alpha}}\theta_{\underline{\alpha}})(\theta^{\overline{\beta}}(\gamma^\mu)_{\overline{\beta}}{}^{\underline{\gamma}}\partial_\mu\eta_{\underline{\gamma}}) & -\frac{1}{128}(\theta_{\overline{\alpha}}\theta^{\overline{\alpha}})(\theta_{\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}})\partial^2 B \end{pmatrix} \tag{2.280}$$

ただし、ベクトル成分 v_μ は次の拘束条件を満足していなければならない。

$$\partial_\mu v^\mu = 0. \tag{2.281}$$

この条件は、形式的に $v^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu b_{\rho\sigma}$ と解くこともできる。

ゲージ場の運動方程式（Maxwell 方程式）を超場を用いて表そう。U(1) ゲージ場の場の強さを与えるカイラル超場は

$$W^a_{\overline{\alpha}} = 4\sqrt{2} i D_{\underline{\beta}} D^{\underline{\beta}} D_{\overline{\alpha}} V^a \tag{2.282}$$

と定義される。この定義から従うビアンキ項等式は

$$D_{\overline{\alpha}} W^{\overline{\alpha}} = 4\sqrt{2} i D_{\overline{\alpha}} D_{\underline{\beta}} D^{\underline{\beta}} D^{\overline{\alpha}} V^a = 4\sqrt{2} i D_{\underline{\alpha}} D_{\overline{\beta}} D^{\overline{\beta}} D^{\underline{\alpha}} V^a = -D_{\underline{\alpha}} W^{\underline{\alpha}} \tag{2.283}$$

ただし、任意の超場に対して $D_{\overline{\alpha}}D_{\underline{\beta}}D^{\underline{\beta}}D^{\overline{\alpha}} = D_{\underline{\alpha}}D_{\overline{\beta}}D^{\overline{\beta}}D^{\underline{\alpha}}$ が成り立つことを用いた。
　ゲージ場の運動項は次のように与えられる。

$$S = -\frac{1}{4g^2}[W^a_{\overline{\alpha}}W^{\overline{\alpha}a}]_F + \text{c.c.} \tag{2.284}$$

ゲージ場の運動方程式を得るために、この作用をベクトル超場 V で変分してみよう。

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{2\sqrt{2}i}{g^2}[(D_{\underline{\beta}}D^{\underline{\beta}}D_{\overline{\alpha}}\delta V^a)W^{\overline{\alpha}a}]_F + \text{c.c.} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}g^2}[(D_{\overline{\alpha}}\delta V^a)W^{\overline{\alpha}a}]_D + \text{c.c.} \\ &= \left[\delta V^a\left(\frac{i}{\sqrt{2}g^2}D_{\overline{\alpha}}W^{\overline{\alpha}a} + \text{c.c.}\right)\right]_D \end{aligned} \tag{2.285}$$

従って、V の変分から得られる運動方程式は (2.272) 中のカレントとの結合から現れる項も含めると、

$$\frac{i}{\sqrt{2}g^2}D_{\overline{\alpha}}W^{\overline{\alpha}a} + \text{c.c.} = J_a \tag{2.286}$$

あるいは、ビアンキ項等式と組み合わせれば

$$\frac{i\sqrt{2}}{g^2}D_{\overline{\alpha}}W^{\overline{\alpha}a} = -\frac{i\sqrt{2}}{g^2}D_{\underline{\alpha}}W^{\underline{\alpha}a} = J_a \tag{2.287}$$

カレント保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ は Maxwell 方程式から得ることができる。それと同様に、J_a が線形超場であることは上記の運動方程式から直ちに示される。

2.6.2 超カレント

　エネルギー運動量テンソルに対して、カレント超場に相当するものを作ることを考えよう。エネルギー運動量テンソルのパラメータはローレンツベクトルであるから、対応するカレント超場もローレンツベクトル添え字を持つ実超場であると考えられる。この実超場を J_μ としよう。J_μ の成分場のうち B_μ と η_μ、$v_{\nu\mu}$ を次のように定義する。

$$J_\mu = B_\mu + \frac{1}{2}\theta^\alpha\eta_{\alpha\mu} - \frac{i}{8}(\theta^{\overline{\alpha}}(\gamma^\nu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}})v_{\nu\mu} + \cdots \tag{2.288}$$

これらのうち、$v_{\nu\mu}$ の中にエネルギー運動量テンソルが含まれるはずである。$v_{\nu\mu}$ は二つの添え字の入れ替えについての対称性をもたないことに注意すること。次のように対称部分と反対称部分に分けておく。

$$v_{\nu\mu} = v^{(s)}_{\nu\mu} + v^{(a)}_{\nu\mu} \tag{2.289}$$

エネルギー運動量テンソルを含むのは、対称部分 $v^{(s)}_{\mu\nu}$ である。J_μ に対して、どのような拘束条件を課せば良いかを考えてみよう。内部対称性に対するカレント超場と同様に J_μ が線形超場であるという条件

$$D_{\overline{\alpha}}D^{\overline{\alpha}}J_\mu = D_{\underline{\alpha}}D^{\underline{\alpha}}J_\mu = 0 \tag{2.290}$$

を課すことが考えられる。しかしこの条件からは $\partial_\mu v^{\mu\nu} = 0$ という式は得られるものの、$v_{\mu\nu}$ の対称成分 $v^{(s)}_{\mu\nu}$ に対する保存則は得られない。$\partial_\mu v^{(s)\mu\nu} = 0$ という保存則を得るためにはより強い条件を課すことが必要である。かといって

$$D_\alpha J_\mu = 0 \tag{2.291}$$

のような条件を課してしまうと独立なテンソル成分 $v_{\nu\mu}$ を含まなくなってしまう。そこで、(2.290) よりは強く (2.291) よりは弱い次の条件式を考えてみよう。

$$(\gamma^\mu)^{\alpha\beta} D_\beta J_\mu = 0 \tag{2.292}$$

(2.292) を満足する超場 J_μ の独立成分を調べてみると、B_μ、η_μ、$v^{(s)}_{\mu\nu}$ だけであり、これら以外の成分場はそれらを用いて書くことができることがわかる。また、これらの成分場も次の拘束条件を満足している。

$$\partial_\mu B^\mu = \partial_\mu \eta^\mu = \partial_\mu v^{(s)\mu\nu} = 0, \tag{2.293}$$

(2.293) はエネルギー運動量テンソルの保存則と解釈できる式 $\partial_\mu v^{(s)\mu\nu} = 0$ を含んでいる。実は、条件式 (2.292) はこれらの保存則以外にも次の関係式を与える。

$$\gamma_\mu \eta^\mu = v^{(s)\mu}_\mu = 0. \tag{2.294}$$

これらの意味についてはあとで考えることにして、まずは (2.293) の物理的な意味について考えてみよう。

(2.293) は、エネルギー運動量テンソル以外にも保存するカレントがあることを意味している。まず、η^μ はスピノルカレントであるから、超対称性カレントを与えているであろうということは容易に想像できる。実際に η^μ が超対称性カレントであることを見るために、η^μ の変換則を見てみよう。

$$\delta\eta^\mu_{\overline{\alpha}} = -\frac{1}{4}(\gamma^\nu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}(\partial_\nu B^\mu + i v_\nu{}^\mu) \tag{2.295}$$

ただし (2.292) より J^μ の C 成分（すなわち $\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}}$ 成分）が 0 であることを用いた。この両辺の $\mu = 0$ 成分を取り、$\delta * = [i\xi^\alpha \widehat{Q}_\alpha, *]$ のように変換 δ を電荷との交換関係によって表せば、次のようになる。

$$[i\xi^\beta \widehat{Q}_\beta, \int d^3x \eta^0_{\overline{\alpha}}] = \frac{i}{4}\xi^{\underline{\beta}}(\gamma^\nu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\widehat{P}_\nu \tag{2.296}$$

ただし、$v^{(s)}_{\mu\nu}$ がエネルギー運動量テンソルであると仮定し、運動量演算子を

$$\widehat{P}_\mu = -\int d^3x v^{(s)0}_\mu. \tag{2.297}$$

によって定義した。B_μ を含む項（あとで改めて示すように、$v^{(a)}_{\mu\nu}$ も B_μ で書くことができる。）はカレント B_μ の保存則を用いると消えることがわかる。この交換関係は、η^μ の積分が次のように超対称電荷を与えることを意味している。

$$\widehat{Q}_{\overline{\alpha}} = i\int d^3x \eta^0_{\overline{\alpha}}, \quad \widehat{Q}_{\underline{\alpha}} = -i\int d^3x \eta^0_{\underline{\alpha}} \tag{2.298}$$

が得られる。超対称性カレントとの関係は次のように与えられる。

$$j^\mu_Q = i\gamma^5 \eta^\mu_{\overline{\alpha}} \tag{2.299}$$

同様に、カレント B^μ に対応する保存電荷の交換関係を見てみよう。B^μ の超対称性変換は次のように与えられる。

$$\delta B^\mu = \frac{1}{2}\xi^\alpha \eta^\mu_\alpha \tag{2.300}$$

この両辺の $\mu = 0$ 成分を積分し、変換を超対称電荷との交換関係として表すと、次の式を得る。

$$[i\xi^\alpha \widehat{Q}_\alpha, \int B^0 d^3x] = -\frac{i}{2}\xi^{\overline{\alpha}}\widehat{Q}_{\overline{\alpha}} + \frac{i}{2}\xi^{\underline{\alpha}}\widehat{Q}_{\underline{\alpha}} \tag{2.301}$$

超ポテンシャルの電荷を 2 とするように規格化された R 変換に対応する電荷を $\widehat{A}$ とすると、超対称性電荷と次の交換関係を満足する。

$$[\widehat{A}, \widehat{Q}_{\overline{\alpha}}] = -\widehat{Q}_{\overline{\alpha}}, \quad [\widehat{A}, \widehat{Q}_{\underline{\alpha}}] = \widehat{Q}_{\underline{\alpha}} \tag{2.302}$$

これらを比較すると、次の関係式が得られる。

$$\int B^0 d^3x = -\frac{1}{2}\widehat{A} \tag{2.303}$$

つまり、カレント B^μ に対応する保存電荷は R 電荷である。

一般の超対称性理論では R 電荷は保存しない。従って、条件式 (2.292) を満足する超場によってエネルギー運動量テンソルが与えられるのは保存する R 電荷を持つような場合だけである。さらに (2.292) はエネルギー運動量テンソルや超対称性カレントに対しても、一般の理論においては成り立たない関係式 (2.294) を与える。これらの関係式が全て満足される理論は、$\mathcal{N}=1$ の超共形対称性を持つ理論である。

ここで、具体的に次の理論を考えよう。

$$S = \frac{1}{2}[\Phi^m \Phi^{*\overline{m}}]_D - ([W(\Phi^m)]_F + \text{c.c.}) \tag{2.304}$$

この理論がコンフォーマルであるための条件は、超ポテンシャルが 3 次の斉次式であることである。このとき、系は次の $\mathrm{U}(1)_R$ 対称性を持つ。

$$\phi^m \to e^{(2i/3)\alpha}\phi^m, \quad \chi^m \to e^{-(i/3)\alpha}\chi^m \tag{2.305}$$

(2.303) より、この対称性に対応するカレントの $-1/2$ 倍が超場 J^μ の初項成分 B^μ を与える。

$$B_\mu = -\frac{1}{2}j^\mu_R, \quad j^\mu_R = \frac{2i}{3}\phi^{*\overline{m}}\partial_\mu\phi^m - \frac{2i}{3}\phi^m\partial_\mu\phi^{*\overline{m}} + \frac{i}{3}\chi^m_{\overline{\alpha}}(\gamma_\mu)^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\chi^{\overline{m}}_{\underline{\beta}} \tag{2.306}$$

ただし、j^μ_R は超ポテンシャルの電荷が 2 になるような規格化によって定義された R カレントである。初項が決定されたので、超場 J^μ に拡張するのは簡単である。

$$J_\mu = -\frac{i}{3}\Phi^{*\overline{m}}\partial_\mu\Phi^m + \frac{i}{3}\Phi^m\partial_\mu\Phi^{*\overline{m}} - \frac{2i}{3}(\gamma_\mu)^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}D_{\overline{\alpha}}\Phi^m D_{\underline{\beta}}\Phi^{*\overline{m}} \tag{2.307}$$

この超カレントが条件 (2.292) を満足することは簡単に示すことができる。運動方程式 (2.267) を用いることで次の式を示すことができる。

$$(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}D_{\underline{\beta}}J_\mu = \frac{i}{3}D^{\overline{\alpha}}(W_m\Phi^m - 3W) \tag{2.308}$$

ただし W が 3 次の斉次式であり理論がコンフォーマルであることを用いていない。超ポテンシャルが 3 次の斉次式である場合には (2.308) の右辺は 0 になり、確かに (2.291) を満足する。

コンフォーマル対称性が無い場合には、エネルギー運動量テンソルを含む超場 J^μ に対する関係式としては (2.291) は強すぎる。一般の理論については、条件 (2.292) を少し緩めて次のようにおけばよい。

$$(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}D_{\underline{\beta}}J_\mu = D^{\overline{\alpha}}K \tag{2.309}$$

ただし K は任意のカイラル超場である。実際にこの式の両辺を成分場で展開することにより、エネルギー運動量テンソル、超対称性カレントの保存則に相当する式が得られることを示そう。

まず、エネルギー運動量テンソルの保存則を導出する。B_μ に対する場の強さ、およびその双対場を次のものも定義しておく。

$$B_{\nu\mu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu, \quad \widetilde{B}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\mu\rho\sigma}B^{\rho\sigma} \tag{2.310}$$

$(\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}D^{\underline{\beta}}J_\mu$ の中で $v_{\nu\mu}$ を含む項だけに注目しよう。

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}D^{\underline{\beta}}J_\mu \quad = \quad & \cdots - \frac{1}{8}(\gamma^\mu\gamma^\nu)_{\overline{\alpha}\overline{\gamma}}\theta^{\overline{\gamma}}(-iv_{\nu\mu} + \partial_\nu B_\mu) \\ & + \frac{i}{128}\left[(\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu)_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\gamma}}\theta_{\underline{\gamma}}\partial_\lambda v_{\nu\mu} - 2iD_\mu(\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}}\right](\theta^{\overline{\delta}}\theta_{\overline{\delta}})\end{aligned} \tag{2.311}$$

$D_{\overline{\alpha}}K$ の対応する項は F を含む次の項である。

$$D_{\overline{\alpha}}\Phi = \cdots + \frac{1}{4}F\theta_{\overline{\alpha}} - \frac{1}{64}(\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\theta^{\underline{\beta}}(\theta^{\overline{\gamma}}\theta_{\overline{\gamma}})\partial_\mu F \tag{2.312}$$

$\theta_{\overline{\alpha}}$ の係数を比較することで、次の式が得られる。

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu)_{\overline{\alpha}\overline{\gamma}}(iv_{\nu\mu} - \partial_\nu B_\mu) = F\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\gamma}} \tag{2.313}$$

この式が成り立つためには左辺が $\gamma^{\mu\nu}$ を含んではならない。これより、次の式が成り立つ必要がある。

$$\left[iv^{(a)}_{\nu\mu} - \frac{1}{2}B_{\nu\mu}\right]^{(+)} = 0 \tag{2.314}$$

ただし $[\cdots]^{(+)}$ は自己双対部分を表す。この条件は次のように書くこともできる。

$$i(v^{(a)}_{\nu\mu} + i\widetilde{v}^{(a)}_{\nu\mu}) - \frac{1}{2}(B_{\nu\mu} + i\widetilde{B}_{\nu\mu}) = 0 \tag{2.315}$$

この式の実部と虚部は等価な式を与える。

$$v^{(a)}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\widetilde{B}_{\nu\mu} \tag{2.316}$$

従って、

$$v_{\nu\mu} = v^{(s)}_{\nu\mu} + \frac{1}{2}\widetilde{B}_{\nu\mu} \tag{2.317}$$

このとき (2.313) は次のようになる。

$$F = \frac{1}{2}(iv^{(s)\mu}_{\mu} - \partial_\mu B^\mu) \tag{2.318}$$

$\theta^{\underline{\beta}}(\theta^{\overline{\delta}}\theta_{\overline{\delta}})$ の係数を比較して得られる関係式は

$$(\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\partial_\lambda(\frac{i}{2}v^{\mathrm{sym}}_{\nu\mu} + \frac{i}{4}\widetilde{B}_{\nu\mu}) - D_\mu(\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}} = (\gamma^\mu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\partial_\mu F \tag{2.319}$$

これより次の式が得られる。

$$i\left(\partial_\lambda v^{(s)\lambda}_{\mu} - \frac{1}{2}\partial_\mu v^{(s)\rho}_{\rho}\right) - \frac{1}{2}\partial_\lambda B^\lambda{}_\mu - D_\mu = \partial_\mu F \tag{2.320}$$

右辺の F に (2.318) を代入し、両辺の虚部を取ると、次の式が得られる。

$$\partial_\lambda(v^{(s)\lambda}_{\mu} - \delta^\lambda_\mu v^{(s)\rho}_{\rho}) = 0. \tag{2.321}$$

従って、

$$T_{\nu\mu} = v^{(s)}_{\nu\mu} - \eta_{\nu\mu} v^{(s)\lambda}_{\lambda} \tag{2.322}$$

をエネルギー運動量テンソルだと思えば、確かにその保存則が得られる。

実際に (2.307) から成分場 $v_{\nu\mu}$ を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} v_{\nu\mu} &= \partial_\nu \phi^m \partial_\mu \phi^{*\overline{m}} + \partial_\mu \phi^m \partial_\nu \phi^{*\overline{m}} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}(\partial_\lambda \phi^m)(\partial^\lambda \phi^{*\overline{n}}) \\ &\quad -\frac{1}{3}\partial_\mu\partial_\nu(\phi^m \phi^{*\overline{m}}) + \frac{i}{3}\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma}(\partial_\rho \phi^m)(\partial_\sigma \phi^{*\overline{n}}) + \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu} F^m F^{*\overline{m}} + \cdots \end{aligned} \tag{2.323}$$

ただし、$\cdots$ はフェルミオンを含む項である。従って、(2.322) によって与えられる $T_{\nu\mu}$ は確かにエネルギー運動量テンソルを与える。

$$\begin{aligned} T_{\nu\mu} &= \partial_\nu \phi^m \partial_\mu \phi^{*\overline{m}} + \partial_\mu \phi^m \partial_\nu \phi^{*\overline{m}} - \eta_{\mu\nu}[(\partial_\lambda \phi^m)(\partial^\lambda \phi^{*\overline{n}}) + \eta_{\mu\nu} F^m F^{*\overline{m}}] \\ &\quad +\frac{1}{3}(\eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda - \partial_\mu\partial_\nu)(\phi^m \phi^{*\overline{m}}) + \cdots \end{aligned} \tag{2.324}$$

次に、超対称性カレントについての保存則を得るために、η^μ を含む部分に注目する。

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu)_{\overline{\alpha}\underline{\beta}} D^{\underline{\beta}} V^\mu &= \frac{1}{2}(\gamma_\mu \eta^\mu)_{\overline{\alpha}} \\ &\quad +\frac{1}{32}(\theta^{\underline{\gamma}}(\gamma_\nu)_{\underline{\gamma}\overline{\delta}}\theta^{\overline{\delta}})\left[(\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\partial_\lambda\eta^\mu)_{\overline{\alpha}} - \sqrt{2}i(\gamma_\mu\gamma^\nu\lambda^\mu)_{\overline{\alpha}}\right] \\ &\quad +\frac{1}{32}(\theta^{\overline{\gamma}}\theta_{\overline{\gamma}})\left[(\gamma_\mu\gamma^\lambda\partial_\lambda\eta^\mu)_{\overline{\alpha}} + \sqrt{2}i(\gamma_\mu\lambda^\mu)_{\overline{\alpha}}\right] + \cdots \end{aligned} \tag{2.325}$$

$D_{\overline{\alpha}}K$ の中の対応する項は

$$D_{\overline{\alpha}}\Phi = \frac{1}{2}\chi_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{16}(\theta^{\underline{\gamma}}(\gamma_\nu)_{\underline{\gamma}\overline{\delta}}\theta^{\overline{\delta}})(\gamma^{\nu\mu}\partial_\mu\chi)_{\overline{\alpha}} + \cdots \tag{2.326}$$

これらより、次の関係式を得ることができる。

$$\chi = \gamma_\mu \eta^\mu, \tag{2.327}$$

$$2\gamma^{\nu\mu}\partial_\mu\chi = \gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\partial_\lambda\eta^\mu - \sqrt{2}i\gamma^5\gamma_\mu\gamma^\nu\lambda^\mu, \tag{2.328}$$

$$0 = \gamma_\mu\gamma^\lambda\partial_\lambda\eta^\mu + \sqrt{2}i\gamma^5\gamma_\mu\lambda^\mu \tag{2.329}$$

これらを組み合わせることで、次の式を示すことができる。

$$\partial_\lambda(\eta^\lambda - \gamma^\lambda\gamma_\mu\eta^\mu) \tag{2.330}$$

コンフォーマルな場合の超対称性カレントは (2.299) のように与えられることを用いて規格化を定めれば、保存する超対称カレントが次のように与えられる。

$$j^\mu_Q = i\gamma^5(\eta^\mu - \gamma^\mu\gamma_\nu\eta^\nu) \tag{2.331}$$

具体的な J^μ の式 (2.307) を用いて成分場 η^μ を計算すると、

$$\eta^\mu_{\overline{\alpha}} = -\frac{i}{3}(\partial^\mu\chi_{\overline{\alpha}})\phi^* + \frac{i}{3}\chi_{\overline{\alpha}}\partial_\mu\phi^* + \frac{i}{6}(\gamma^\nu\gamma^\mu\chi)_{\overline{\alpha}}\partial_\nu\phi^* - \frac{i}{6}(\gamma^\mu\chi)_{\overline{\alpha}}F \tag{2.332}$$

これを (2.331) に代入すれば

$$j^\mu_{Q\overline{\alpha}} = -\frac{1}{2}(\gamma^\nu\gamma^\mu\chi)_{\overline{\alpha}}\partial_\nu\phi^* - \frac{1}{2}(\gamma^\mu\chi)_{\overline{\alpha}}F - \frac{1}{3}\partial_\nu(\gamma^{\mu\nu}\chi_{\overline{\alpha}}\phi^*) \tag{2.333}$$

となり、確かに超対称性カレントを与えている。(第 3 項はカレントの保存則には寄与しない。)

第3章　成分形式による超重力理論

3.1　単純超重力理論

3.1.1　作用と変換則

4次元で重力多重項のみを含む最も単純な超重力理論は力学変数として多脚場 $e_\mu^{\widehat{m}}$ とグラビティーノ ψ_μ を含み、ラグランジアンは次のように与えられる。[2, 3]

単純超重力理論

$$\mathcal{L}_{\rm grav} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\psi, \quad \mathcal{L}_e = \frac{e}{k^2}R^{(\omega)}, \quad \mathcal{L}_\psi = -\frac{e}{2}\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega)}\psi_\rho. \tag{3.1}$$

このラグランジアンは次の超対称変換の下で不変である。

$$\delta\psi_\mu = \frac{1}{k}D_\mu^{(\omega)}\xi, \quad \delta e_\mu^{\widehat{m}} = \frac{k}{4}(\xi\gamma^{\widehat{m}}\psi_\mu). \tag{3.2}$$

スカラー曲率は

$$R^{(\omega)} = e_{\widehat{m}}^\mu e_{\widehat{n}}^\nu R_{\mu\nu}^{(\omega)\widehat{m}\widehat{n}}(\omega) \tag{3.3}$$

と定義されており、曲率テンソルはスピン接続だけを用いて

$$R_{\mu\nu}^{(\omega)\widehat{m}\widehat{n}} = \partial_\mu\omega_\nu{}^{\widehat{m}\widehat{n}} - \partial_\nu\omega_\mu{}^{\widehat{m}\widehat{n}} + \omega_\mu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{k}}\omega_\nu{}^{\widehat{k}\widehat{n}} - \omega_\nu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{k}}\omega_\mu{}^{\widehat{k}\widehat{n}} \tag{3.4}$$

と与えられる。また、グラビティーノの共変微分もスピン接続を用いて

$$D_\nu^{(\omega)}\psi_\rho = \partial_\nu\psi_\rho + \frac{1}{4}\omega_\nu{}^{\widehat{m}\widehat{n}}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\psi_\rho \tag{3.5}$$

と定義される。

さらに、ラグランジアンを完全に定義するには、スピン接続を多脚場とグラビティーノを用いて書き下す必要がある。これについて次に考える。

3.1.2　捩率

単純超重力理論において、捩率は次のように与えられる。

$$T_{\mu\nu}^{\widehat{k}} = \frac{k^2}{4}(\psi_\mu\gamma^{\widehat{k}}\psi_\nu) \tag{3.6}$$

これを得るにはいくつかの方法がある。

1.5 階方式　成分場を用い、ネーター手続きによってラグランジアンを構成する場合、捩率は実はどのようにとっても良い。例えば、(3.1) に与えたグラビティーノのラグランジアンは、捩率を 0 としたときのスピン接続 $\omega(e)$ を用いても次のように書くことができる。

$$\mathcal{L}_\psi = -\frac{e}{2}\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega(e))}\psi_\rho - \frac{e}{8}\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma^{\widehat{m}\widehat{n}}\psi_\rho\left(\frac{1}{2}T_{\widehat{m}\widehat{n}-\nu} - T_{\nu\widehat{m}-\widehat{n}}\right). \tag{3.7}$$

このとき、$T_{\mu\nu}^{\lambda}$ が捩率であるということを忘れて、単に (1.109) で定義されるテンソルだとみなすことができる。つまり、捩率がどのように与えられようと、相互作用項を適当に与えることで同じラグランジアンを書くことができる。従って、捩率をどのように取るべきかは、どのような捩率を採用すると計算が楽かということで決めるのがよい。

計算を楽にする一つの方法はラグランジアン (3.1) に含まれるスピン接続 ${\omega_\mu}^{\widehat{m}\widehat{n}}$ を独立な場だと思って運動方程式を解くことによって ω を決めるというものである。これにより ω が多脚場とグラビティーノの関数として与えられ、捩率も一意的に定まる。この方法は 1.5 階方式として知られている。このように捩率を決めた場合、ラグランジアンが超対称変換で不変かどうかをチェックする際に、スピン接続に含まれる多脚場やグラビティーノについては超対称変換をする必要がない。たとえ超対称変換をしたとしても、スピン接続の任意の変分に対してラグランジアンは不変であるから、新たな項を与えない。このことで計算の手間をかなり減らすことができる。

実際にこの方法でスピン接続を決めたときに捩率 (3.6) が得られることを確かめておこう。まず、アインシュタイン作用をスピン接続で変分すると、

$$\begin{aligned}\delta_\omega\mathcal{L}_e &= \frac{2e}{k^2}e_{\widehat{m}}^{\mu}e_{\widehat{n}}^{\nu}D_\mu^{(\omega)}\delta{\omega_\nu}^{\widehat{m}\widehat{n}} \\ &= \frac{e}{k^2}(T_{\widehat{m}\widehat{n}}^{\widehat{k}}e_{\widehat{k}}^{\nu} + T_{\widehat{k}\widehat{m}}^{\widehat{k}}e_{\widehat{n}}^{\nu} + T_{\widehat{n}\widehat{k}}^{\widehat{k}}e_{\widehat{m}}^{\nu})\delta{\omega_\nu}^{\widehat{m}\widehat{n}}\end{aligned} \tag{3.8}$$

二行目への移行に部分積分を行った。もし捩率がなければ一行目は全微分であるから、部分積分を行うと 0 になるが、捩率がある場合にはそれによる補正項が残される。

一方、グラビティーノの作用の共変微分中のスピン接続の変分からは

$$\delta_\omega\mathcal{L}_\psi = -\frac{e}{8}\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\delta{\omega_\nu}^{\widehat{m}\widehat{n}}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\psi_\nu \tag{3.9}$$

を得る。従って、ω に対する運動方程式は

$$T_{\widehat{m}\widehat{n}}^{\widehat{k}}e_{\widehat{k}}^{\nu} + T_{\widehat{k}\widehat{m}}^{\widehat{k}}e_{\widehat{n}}^{\nu} + T_{\widehat{n}\widehat{k}}^{\widehat{k}}e_{\widehat{m}}^{\nu} = \frac{k^2}{8}\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\psi_\rho \tag{3.10}$$

となる。右辺の γ 行列の積 $\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}} = \langle\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\rangle_1 + \langle\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\rangle_3 + \langle\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\rangle_5$ のうち、$\langle\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\rangle_3$ は二つのグラビティーノの入れ替えの対称性から 0 になり、$\langle\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\rangle_5$ も 4 次元では 0 になるので、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{k^2}{8}\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\psi_\rho &= \frac{k^2}{8}\psi_\mu\langle\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\rangle_1\psi_\rho \\ &= \frac{k^2}{4}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^{\widehat{k}}\psi_{\widehat{n}})e_{\widehat{k}}^{\nu} + \frac{k^2}{4}(\psi_{\widehat{n}}\gamma^{\widehat{k}}\psi_{\widehat{k}})e_{\widehat{m}}^{\nu} + \frac{k^2}{4}(\psi_{\widehat{k}}\gamma^{\widehat{k}}\psi_{\widehat{m}})e_{\widehat{n}}^{\nu}\end{aligned} \tag{3.11}$$

これを (3.10) に代入すれば次の式が得られる。

$$T_{\widehat{m}\widehat{n}}^{\widehat{k}}e_{\widehat{k}}^{\nu} + T_{\widehat{k}\widehat{m}}^{\widehat{k}}e_{\widehat{n}}^{\nu} + T_{\widehat{n}\widehat{k}}^{\widehat{k}}e_{\widehat{m}}^{\nu} = \frac{k^2}{4}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^{\widehat{k}}\psi_{\widehat{n}})e_{\widehat{k}}^{\nu} + \frac{k^2}{4}(\psi_{\widehat{n}}\gamma^{\widehat{k}}\psi_{\widehat{k}})e_{\widehat{m}}^{\nu} + \frac{k^2}{4}(\psi_{\widehat{k}}\gamma^{\widehat{k}}\psi_{\widehat{m}})e_{\widehat{n}}^{\nu} \tag{3.12}$$

もし捩率が (1.109) のように与えられればこの式が成り立つことは直ちにわかる。また逆に、適当に添え字を入れ替えて足し引きすることでこの式を直接解くことができて、その結果 (1.109) が唯一の解として得られることも簡単に確かめられる。

超場形式 超空間を用いて超重力理論を構成する場合、捩率は以下のように決定される。この構成法では、多脚場 $e_\mu^{\widehat{m}}$ とグラビティーノ ψ_μ^α は超空間上の多脚場 $E_M{}^{\widehat{\alpha}}$ の成分として次のように与えられる。

$$E_\mu{}^{\widehat{m}}(x,\theta) = e_\mu{}^{\widehat{m}} + \cdots, \quad E_\mu{}^{\widehat{\alpha}}(x,\theta) = k\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}} + \cdots. \tag{3.13}$$

ただし、$\cdots$ はフェルミオン座標 θ に対して 1 次以上の項を表す。さらに、超空間上の捩率には余分な場が現れないようにするために、次の条件が「手で」課される。

$$T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta) = T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta) = 0, \quad T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta) = \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} \tag{3.14}$$

最後の拘束条件は、θ 共変微分の反交換関係

$$\{D_{\widehat{\alpha}}, D_{\widehat{\beta}}\} = -\frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}D_{\widehat{k}} + \cdots \tag{3.15}$$

を再現するために必要である。($\cdots$ は超重力理論で存在する曲率項を表す。) (3.14) は座標変換のもとで拘束条件が不変になるように、テンソルの添え字が局所直交系のものになっていることに注意。

超空間上ではなく、通常の時空上の捩率も (3.14) を用いて決めることができる。超空間上での捩率は、超空間上での多脚場によって

$$D_M E_N{}^{\widehat{K}} - (-)^{MN} D_N E_M{}^{\widehat{K}} = T_{MN}{}^{\widehat{K}} \tag{3.16}$$

と定義されている。この式の添え字 M と N は超空間上の大域座標のものである。特に、M と N をボゾン座標の添え字 μ と ν に取り、$\theta = 0$ 成分のみを取り出せば次のように x 空間の捩率 $T_{\mu\nu}^{\widehat{m}}(x)$ が決まる。

$$T_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(x) = D_\mu^{(\omega)}e_\nu{}^{\widehat{m}} - D_\nu^{(\omega)}e_\mu{}^{\widehat{m}} = (-)^{KL}E_\mu{}^{\widehat{K}}E_\nu{}^{\widehat{L}}T_{\widehat{K}\widehat{L}}{}^{\widehat{m}}|_{\theta=0} = -k^2\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}\psi_\nu{}^{\widehat{\beta}}T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{m}} = \frac{k^2}{4}\psi_\mu\gamma^{\widehat{m}}\psi_\nu \tag{3.17}$$

これは (3.6) の捩率に一致する。

tensor calculus Tensor calculus は、超重力理論を構成するのに、超対称代数のゲージ化から出発する。つまり、共変微分を次のように定義し、ゲージ場として多脚場 $e_\mu^{\widehat{m}}$、グラビティーノ $k\psi_\mu^\alpha$、スピン接続 $\omega_\mu{}^{\widehat{m}\widehat{n}}$ を導入する。

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - e_\mu{}^{\widehat{m}}P_{\widehat{m}} - \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{\widehat{m}\widehat{n}}M_{\widehat{m}\widehat{n}} - k\psi_\mu{}^\alpha Q_\alpha \tag{3.18}$$

そして、それぞれの生成子に対応する曲率を、共変微分の交換関係によって定義する。

$$-[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P)P_{\widehat{m}} + R_{\mu\nu}{}^\alpha(Q)Q_\alpha + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}\widehat{n}}(M)M_{\widehat{m}\widehat{n}} \tag{3.19}$$

たとえば $R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P)$ は次のように与えられる。

$$R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P) = D_\mu^{(\omega)}e_\nu{}^{\widehat{m}} - D_\nu^{(\omega)}e_\mu{}^{\widehat{m}} - \frac{k^2}{4}\psi_\mu\gamma^{\widehat{m}}\psi_\nu = T_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}} - \frac{k^2}{4}\psi_\mu\gamma^{\widehat{m}}\psi_\nu \tag{3.20}$$

ここで、グラビティーノ項は超対称代数に含まれる次の反交換関係からの寄与である。

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -\frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\alpha\beta}P_{\widehat{m}} \tag{3.21}$$

このように定義された「ゲージ理論」を重力理論に変形するために、次の拘束条件をおく。

$$R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P) = 0. \tag{3.22}$$

これにより、捩率が決まり、(3.6) が得られる。

3.1.3 不変性のチェック

ここでは、捩率が (1.109) のように与えられるとして (3.1) のラグランジアンが局所的超対称変換 (3.2) の下で不変であることを確認しよう。ここでは、このノートのほかの部分とは異なり、グラビティーノについて高次の項も全て考慮する。

アインシュタイン作用に含まれる多脚場の変分は、

$$\delta\mathcal{L}_e = \frac{e}{k^2}\delta e_\mu^{\widehat{m}}(e_{\widehat{m}}^\mu R^{(\omega)} - 2R_{\widehat{m}}^{(\omega)\mu}), \tag{3.23}$$

と与えられる。捩率として 1.5 階方式で得られるものを採用しているので、スピン接続の超対称変換は考える必要がない。

グラビティーノの運動項に含まれるグラビティーノの変換は

$$\begin{aligned}\delta_\psi\mathcal{L}_\psi &= -\frac{e}{2k}\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega)}D_\rho^{(\omega)}\xi - \frac{e}{2k}D_\mu^{(\omega)}\xi\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega)}\psi_\rho. \\ &= -\frac{e}{2k}\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega)}D_\rho^{(\omega)}\xi + \frac{e}{2k}D_\nu^{(\omega)}\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\rho^{(\omega)}\xi.\end{aligned} \tag{3.24}$$

となるが、二つの項は、もし捩率が無ければ部分積分で等しい。

捩率がある場合には、第 2 項を部分積分で第 1 項の形にしたときに捩率を含む項が現れる。

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_\psi &= -\frac{e}{2k}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}[D_\nu^{(\omega)}, D_\rho^{(\omega)}]\xi) \\ &\quad + \frac{e}{2k}T_{\widehat{k}\nu}^{\widehat{k}}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\rho^{(\omega)}\xi) + \frac{e}{4k}T_{\widehat{n}\widehat{m}}^{\mu}(\psi_\mu\gamma^{\widehat{m}\widehat{n}\rho}D_\rho^{(\omega)}\xi) + \frac{e}{4k}T_{\widehat{n}\widehat{p}}^{\rho}(\psi_\mu\gamma^{\mu\widehat{n}\widehat{p}}D_\rho^{(\omega)}\xi)\end{aligned} \tag{3.25}$$

1 行目は共変微分の交換関係から曲率テンソルが得られる。2 行目はよく見ると、上付き添え字の入れ替えの下で完全反対称である。従って次のように書くことができる。

$$\delta\mathcal{L}_\psi = -\frac{e}{8k}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma^{\widehat{m}\widehat{n}}\xi)R_{\nu\rho\widehat{m}\widehat{n}}^{(\omega)} + \frac{e}{k}T_{\kappa\nu}^{[\kappa}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho]}D_\rho^{(\omega)}\xi) \tag{3.26}$$

(3.26) の第 1 項の γ 行列の積を計算すると、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}-\frac{e}{8k}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma^{\widehat{m}\widehat{n}}\xi)R_{\nu\rho\widehat{m}\widehat{n}}^{(\omega)} &= -\frac{e}{8k}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho\widehat{m}\widehat{n}}\xi)R_{\nu\rho\widehat{m}\widehat{n}}^{(\omega)} \\ &\quad + \frac{e}{2k}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\xi)R_{\nu\rho}^{(\omega)} + \frac{e}{4k}(\psi_\mu\gamma^{\nu\rho\sigma}\xi)R_{\nu\rho\sigma}^{(\omega)\ \mu} \\ &\quad + \frac{e}{4k}(\psi_\mu\gamma^\mu\xi)R^{(\omega)} - \frac{e}{2k}(\psi_\mu\gamma^\nu\xi)R_\nu^{(\omega)\mu}\end{aligned} \tag{3.27}$$

ただし、$R_{\mu\nu}^{(\omega)} = R_{\mu\lambda\nu}^{(\omega)\ \lambda}$ である。このテンソルは捩率がある場合には対称テンソルにならないことに注意しよう。また、捩率が 0 でない場合には $R_{[\nu\rho\sigma]}^{(\omega)\ \mu}$ も 0 にはならない。4 次元では $\gamma^{\mu\nu\rho\widehat{m}\widehat{n}} = 0$ であるから 1 行目は 0 である。 3 行目は (3.23) と相殺する。

(3.26) の二つ目の項は実は 0 であることが次のようにして示される。まず、上付き添え字の反対称性から、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\frac{e}{k}T_{\kappa\nu}^{[\kappa}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho]}D_\rho^{(\omega)}\xi) &= -\frac{e}{24k}T_{\kappa\nu}^{\kappa'}(\psi_\mu\gamma^{\mu'\nu'\rho'}D_\rho^{(\omega)}\xi)\epsilon_{\kappa'\mu'\nu'\rho'}\epsilon^{\kappa\mu\nu\rho} \\ &= -\frac{ie}{4k}T_{\kappa\nu}^{\lambda}(\psi_\mu\gamma_\lambda\gamma^5D_\rho^{(\omega)}\xi)\epsilon^{\kappa\mu\nu\rho}\end{aligned} \tag{3.28}$$

さらに捩率の具体形 (1.109) を代入し、スピノルのワイル表示に移れば

$$-\frac{ike}{8}(\psi_\kappa\sigma^\lambda\overline{\psi}_\nu)(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}_\lambda D_\rho^{(\omega)}\xi)\epsilon^{\kappa\mu\nu\rho} + \text{c.c.} \tag{3.29}$$

となる。中央の $\overline{\psi}_\nu)(\overline{\psi}_\mu$ の部分に対してフィルツ変換を行うことを考えよう。μ と ν についての反対称性より、フィルツ変換を行うとこの部分は対称なスピノル添え字をもつ行列 $\overline{\sigma}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ に置き換えられる。しかし、4 次元では $\sigma^\lambda\overline{\sigma}_{\widehat{m}\widehat{n}}\overline{\sigma}_\lambda = 0$ が成り立つのでこの式は 0 である。

従って、ここまでで相殺されずに残ったのは次のものである。

$$\delta\mathcal{L} = \left(-\frac{e}{2k}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}(\xi\sigma_\lambda\overline{\psi}_\mu)R^{(\omega)}_{\nu\rho} - \frac{e}{4k}\epsilon^{\nu\rho\sigma\lambda}(\xi\sigma_\lambda\overline{\psi}_\mu)R^{(\omega)}_{\nu\rho\sigma}{}^{\mu} + \text{c.c.}\right) + \delta_e\mathcal{L}_\psi \tag{3.30}$$

まず、グラビティーノ運動項に含まれる多脚場の変分を計算しよう。グラビティーノ運動項ラグランジアンは次のように書き換えられる。

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{ie}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\psi_\mu\gamma^5\gamma_\sigma D^{(\omega)}_\nu\psi_\rho \tag{3.31}$$

ただし、ここでは $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を（テンソル密度ではなく）テンソルとして定義した。従って $e\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は多脚場に依存せず、超対称変換すべきなのは $\gamma_\sigma = \gamma_{\widehat{k}}e^{\widehat{k}}_\sigma$ に含まれる多脚場のみである。従って多脚場を変換すると

$$\begin{aligned}\delta_e\mathcal{L}_\psi &= \frac{ke}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\xi\sigma^{\widehat{k}}\psi_\sigma)(-i\psi_\mu\sigma_{\widehat{k}}D^{(\omega)}_\nu\overline{\psi}_\rho - i\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}_{\widehat{k}}D^{(\omega)}_\nu\psi_\rho) + \text{c.c.} \\ &= -\frac{ke}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\xi\sigma_{\widehat{k}}\psi_\sigma)(i\psi_\mu\sigma^{\widehat{k}}D^{(\omega)}_\nu\overline{\psi}_\rho + \frac{1}{k^2}D^{(\omega)}_\nu T^{\widehat{k}}_{\mu\rho}) + \text{c.c.}\end{aligned} \tag{3.32}$$

この最後の表式の第 1 項は (3.29) と同じ理由で 0 であることが示される。第 2 項は次のビアンキ恒等式を用いて曲率の式に書き換えることができる。

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}D^{(\omega)}_\nu T^{\widehat{k}}_{\mu\rho} = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}D^{(\omega)}_\nu D^{(\omega)}_\mu e^{\widehat{k}}_\rho = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R^{(\omega)}_{\nu\mu}{}^{\widehat{k}}{}_{\widehat{l}}e^{\widehat{l}}_\rho = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R^{(\omega)}_{\mu\nu\rho}{}^{\widehat{k}} \tag{3.33}$$

この結果、

$$\delta_e\mathcal{L}_\psi = \frac{e}{4k}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\xi\sigma_{\widehat{k}}\psi_\sigma)R^{(\omega)}_{\mu\nu\rho}{}^{\widehat{k}} + \text{c.c.} \tag{3.34}$$

が得られる。これを再び (3.30) に代入すれば

$$\delta\mathcal{L} = \frac{e}{2k}(\xi\sigma_\lambda\overline{\psi}_\mu)\left(\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}R^{(\omega)}_{\nu\rho} + \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\nu\rho\sigma}R^{(\omega)}_{\nu\rho\sigma}{}^{\mu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R^{(\omega)}_{\nu\rho\sigma}{}^{\lambda}\right) + \text{c.c.} \tag{3.35}$$

この式の括弧の中は 0 である。実際、第 1 項を変形していくと、第 2 項、第 3 項の符号を逆にしたものになることが以下のように示される。

$$\begin{aligned}\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}R^{(\omega)}_{\nu\rho} &= \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}R^{(\omega)}_{\nu\kappa\rho}{}^{\kappa} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}(R^{(\omega)}_{\nu\kappa\rho}{}^{\kappa} + R^{(\omega)}_{\kappa\rho\nu}{}^{\kappa} + R^{(\omega)}_{\rho\nu\kappa}{}^{\kappa}) \\ &= \frac{1}{4}\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\epsilon_{\nu\kappa\rho\sigma}\epsilon^{\sigma\phi\chi\psi}R^{(\omega)}_{\phi\chi\psi}{}^{\kappa} \\ &= \frac{1}{2}\delta^{\lambda\mu}_{\kappa\sigma}\epsilon^{\sigma\phi\chi\psi}R^{(\omega)}_{\phi\chi\psi}{}^{\kappa} \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon^{\mu\phi\chi\psi}R^{(\omega)}_{\phi\chi\psi}{}^{\lambda} - \epsilon^{\lambda\phi\chi\psi}R^{(\omega)}_{\phi\chi\psi}{}^{\mu})\end{aligned} \tag{3.36}$$

これで、(3.1) が局所的な超対称変換 (3.2) の下で不変であることが示された。

3.1.4 グラビティーノ質量と宇宙項

重力とグラビティーノからなる単純超重力理論は局所的超対称性を破ることなく質量パラメータを導入して変形することができる。[4] まずグラビティーノに次の質量項を導入しよう。

$$\mathcal{L}_{\psi\text{mass}} = -\frac{em^*_{3/2}}{2}\psi_\mu\sigma^{\mu\nu}\psi_\nu + \text{h.c.} \tag{3.37}$$

この質量項は通常のスピン 1/2 フェルミオンの場合同様カイラル対称性 $\psi_\mu \to e^{i\alpha}\psi_\mu$ を破る。グラビティーノに対するこのカイラル対称性は R-対称性にほかならない。質量項が R-対称性を破るということは、別の見方をすれば質量パラメータが R-電荷を持っていることを意味している。上記の質量項を不変にするためにはパラメータ $m_{3/2}$ が R-電荷 2 を持っているとすればよい。これはちょうど正則 superpotential W の持っている R-電荷に等しい。ここではスカラー場が存在しない場合を考えているので、superpotential は単なる定数である。実際にあとでわかるように、スカラー場が存在して superpotential がそれらの関数になっている場合にもグラビティーノの質量は superpotential のに依存し、$m_{3/2}$ は W に比例している。

ラグランジアン $\mathcal{L}_{\rm grav} + \mathcal{L}_{\psi{\rm mass}}$ が実際に質量 $m_{3/2}$ のグラビティーノを与えることを運動方程式を解くことによって確認しよう。背景時空は平坦であると仮定すると、運動方程式は

$$\sigma^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\overline{\psi}_\rho + im^*_{3/2}\sigma^{\mu\nu}\psi_\nu = 0. \tag{3.38}$$

この運動方程式を x^μ で微分すれば、添字の反対称性より第 1 項が消え、$\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu\psi_\nu = 0$ を得る。(3.38) に左から $\overline{\sigma}_\mu$ を掛けてこの関係式を用いれば $\overline{\sigma}^\mu\psi_\mu = 0$ を得る。この二つの関係式を用いれば、(3.38) は次のように変形できる。

$$\sigma^\nu\partial_\nu\overline{\psi}_\mu - im^*_{3/2}\psi_\mu = 0. \tag{3.39}$$

これはフェルミオンがベクトル添え字を持っていることを除けば質量 $m_{3/2}$ の粒子のディラック方程式に他ならない。

$\mathcal{L}_{\rm grav} + \mathcal{L}_{\psi{\rm mass}}$ の超対称変換を考えてみよう。$\mathcal{L}_{\rm grav}$ はもともと超対称変換のもとで不変であるが、$\mathcal{L}_{\rm mass}$ を加えたために、そのグラビティーノの超対称変換は次の新たな変分を与える。

$$\delta\mathcal{L}_{\psi{\rm mass}} = -\frac{1}{k}em^*_{3/2}\psi_\mu\sigma^{\mu\nu}D^{(\omega)}_\nu\xi + {\rm h.c.} \tag{3.40}$$

この変分は部分積分を行えば $\mathcal{L}_{\rm grav}$ から得られるグラビティーノの運動方程式に比例している。従ってグラビティーノの超対称変換に新たな変分を付け加えることで、$\mathcal{L}_{\rm grav}$ の変分によって相殺できるはずである。実際

$$\delta'\overline{\psi}_\mu = -i\frac{m^*_{3/2}}{2k}\overline{\sigma}_\mu\xi \tag{3.41}$$

という項をグラビティーノの変換則に付け加えておけば $\delta'\mathcal{L}_{\rm grav}$ は (3.40) のちょうど逆符号の変分を与える。この変換則の変更はさらに次の新たな変分を与える。

$$\delta'\mathcal{L}_{\psi{\rm mass}} = -\frac{3ie|m_{3/2}|^2}{2k}\psi_\mu\sigma^\mu\overline{\xi} + {\rm h.c.} = 6e\frac{|m_{3/2}|^2}{k^2}e^{\widehat{m}}_\mu\delta e^\mu_{\widehat{m}} \tag{3.42}$$

これはちょうど多脚場の変分のトレースに比例しているから、次の宇宙項を導入すればその超対称変換によって相殺することができる。

$$\mathcal{L}_{\rm cc} = 6e\frac{|m_{3/2}|^2}{k^2}. \tag{3.43}$$

すなわち、グラビティーノの質量が $m_{3/2}$ である単純超重力理論は負の宇宙定数 $\Lambda = -6|m_{3/2}|^2/k^2$ を持つ。こうしてすべての変分が相殺することが確かめられた。結局次のラグランジアン及び変換則が得られる。

Soryushiron Kenkyu

質量変形された 4 次元 $\mathcal{N}=1$ 単純超重力理論

$$\mathcal{L}=\frac{1}{k^2}(eR+6e|m_{3/2}|^2)+ie(\psi_\mu\sigma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega)}\overline{\psi}_\rho)-\frac{em_{3/2}^*}{2}(\psi_\mu\sigma^{\mu\nu}\psi_\nu)-\frac{em_{3/2}}{2}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu) \quad (3.44)$$

$$\delta\psi_\mu=\frac{1}{k}\left(D_\mu^{(\omega)}\xi+\frac{im_{3/2}}{2}\sigma_\mu\overline{\xi}\right),\quad \delta e_{\widehat{m}}^\mu=\frac{k}{4}(-i\psi_{\widehat{m}}\sigma^\mu\overline{\xi}+i\overline{\psi}_{\widehat{m}}\overline{\sigma}^\mu\xi) \quad (3.45)$$

グラビティーノの変換則が変化しているということは、後で解説する補助場を含めた off-shell 形式では、質量変形の結果重力多重項中の補助場が期待値を持つことを意味している。

もし背景時空が平坦であれば、局所的超対称性のゲージ場であるグラビティーノが質量項を持つということは、超対称性が破れていることを意味している。一般にこのような破れがあるカイラル多重項の F 成分が真空期待値を持つことによって自発的に起こった場合には、この F は真空のエネルギーに対して $|F|^2$ の寄与を与える。この寄与まで含めると、真空のエネルギーは大雑把にいって $|F|^2-|m_{3/2}|^2/k^2$ によって与えられる。従って、もし宇宙項が 0 であることを要求すれば超対称性の破れとグラビティーノ質量の間には $|m_{3/2}|/k\sim|F|$ の関係がある。

3.2 カイラル多重項

3.2.1 ネーター項

もっとも一般的なケーラーポテンシャルで与えられるカイラル多重項の運動項 (2.108) を重力に結合することを考えよう。ここでは、ゲージ場が存在しない場合を考える。出発点は、(2.108) に与えられた大域的超対称性を持つラグランジアン $\mathcal{L}=(1/2)[K(\Phi,\Phi^*)]_D$ を一般座標変換に対して共変化した次のラグランジアンである。

$$\mathcal{L}_\phi = -eK_{i\bar{j}}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\overline{\phi}^{\bar{j}}, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{ie}{2}K_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu D_\mu^{(M,\omega)}\overline{\chi}^{\bar{j}})-\frac{ie}{2}K_{i\bar{j}}(D_\mu^{(M,\omega)}\chi^i\sigma^\mu\overline{\chi}^{\bar{j}}). \quad (3.47)$$

変換則は、ゲージ場と結合していないカイラル多重項の変換則 (2.102) および (2.103) を一般座標変換のもとで共変な形に直した次のものを採用する。

$$\delta\phi^i=\frac{1}{2}\xi\chi^i,\quad \delta\chi^i=-\frac{i}{2}\sigma^\mu\overline{\xi}\partial_\mu\phi^i, \quad (3.48)$$

ここではまず超ポテンシャル $W(\Phi)$ が 0 の場合のみを考える。そのため補助場 F^i はフェルミオンについて高次の項に影響するだけであり、考えなくてよい。

ネーター手続きの第一段階として上記のラグランジアンを変換したときに現れる変分を求めよう。この変換則は大域的超対称性の場合には作用を不変にするから $D_\mu^{(\omega)}\xi$ に比例するはずである。

まず始めにスカラー場の運動項の超対称変換から考えよう。この項はスカラー場、多脚場を含む。スカラー場の超対称変換からは次の変分が得られる。

$$\delta_\phi\mathcal{L}_\phi=-e\delta K_{i\bar{j}}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\overline{\phi}^{\bar{j}}-eK_{i\bar{j}}\partial_\mu\delta\phi^i\partial^\mu\overline{\phi}^{\bar{j}}-eK_{i\bar{j}}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\overline{\delta}\phi^{\bar{j}} \quad (3.49)$$

ここではどの場の超対称変換を行うかを表すために δ_ϕ や δ_χ のように添え字をつけた。第 1 項に含まれるケーラー計量の変分は

$$\delta_\phi K_{i\bar{j}}=K_{i\bar{j}k}\delta\phi^k+K_{i\bar{j}\bar{k}}\delta\overline{\phi}^{\bar{k}}=K_{\bar{j}l}\Gamma_{ik}^k\delta\phi^k+K_{i\bar{l}}\Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{l}}\delta\overline{\phi}^{\bar{k}} \quad (3.50)$$

のようにモジュライ空間上のクリストッフェル記号を与える。この寄与を合わせると第二項、第 3 項の変分の微分はモジュライ空間上の共変微分になり、(3.49) 全体は次のように書きかえられる。

$$\delta_\phi \mathcal{L}_\phi = -eK_{i\bar{j}}(D_\mu^{(M)}\delta\phi^i)(\partial^\mu\overline{\phi}^{\bar{j}}) \quad + \text{c.c.} \tag{3.51}$$

フェルミオンのラグランジアン $\mathcal{L}_\chi$ に含まれるフェルミオンを変分すると、次のようになる。ただし、微分がフェルミオン χ^i に掛からないように部分積分を行った。

$$\begin{aligned}\delta_\chi \mathcal{L}_\chi \quad &= \quad -\frac{e}{2}K_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu\overline{\sigma}^\lambda\xi)(D_\mu^{(M,\omega)}\partial_\lambda\overline{\phi}^{\bar{j}}) - \frac{e}{2}K_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu\overline{\sigma}^\lambda D_\mu^{(\omega)}\xi)(\partial_\lambda\overline{\phi}^{\bar{j}}) \\ &\quad +\text{c.c.}\end{aligned} \tag{3.52}$$

第 1 項を見てみよう。ϕ の二階微分は

$$D_\mu^{(M,\omega)}\partial_\lambda\phi^{*\bar{j}} = \partial_\mu\partial_\lambda\phi^{*\bar{j}} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\partial_\kappa\phi^{*\bar{j}} + \Gamma^{\bar{j}}_{\bar{k}\bar{l}}(\partial_\mu\phi^{*\bar{k}})(\partial_\lambda\phi^{*\bar{l}}) \tag{3.53}$$

となり、フェルミオンの高次の項を除けば μ と λ の入れ替えについて可換である。従って (3.52) 第 1 項のスピノルの積は $\chi^i\xi$ となり、$\delta\phi^i$ に比例する。この結果、次の式が得られる

$$\delta_\chi \mathcal{L}_\chi = eK_{i\bar{j}}(D_\mu^{(M)}\delta\phi^i)(\partial^\mu\overline{\phi}^{\bar{j}}) - \frac{e}{2}K_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu\overline{\sigma}^\lambda D_\mu^{(\omega)}\xi)(\partial_\lambda\overline{\phi}^{\bar{j}}) \quad + \text{c.c.} \tag{3.54}$$

この第 1 項は (3.51) と相殺する。これまでに得られた結果をまとめると、

$$\delta_\phi\mathcal{L}_\phi + \delta_\chi\mathcal{L}_\chi = -\frac{e}{2}K_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu\overline{\sigma}^\lambda D_\mu^{(\omega)}\xi)\partial_\lambda\overline{\phi}^{\bar{j}} \quad + \text{c.c.} \tag{3.55}$$

これは $\delta\psi_\mu \propto D_\mu^{(\omega)}\xi$ を含むから、ネーター項の導入で相殺することができる。

(3.55) を相殺するために次のネーター項を導入する。

$$\mathcal{L}_{J\text{chiral}} = \frac{ke}{2}K_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu\overline{\sigma}^\lambda\psi_\mu)(\partial_\lambda\overline{\phi}^{\bar{j}}) \quad + \text{c.c.} \tag{3.56}$$

このネーター項の ψ_μ の変分はちょうど上記の変分を相殺するが、χ を変分すると新たな項が得られる。

$$\begin{aligned}\delta_\chi\mathcal{L}_{J\text{chiral}} \quad &= \quad -\frac{kie}{4}(\overline{\xi}\sigma^\kappa\sigma^\mu\overline{\sigma}^\lambda\psi_\mu)K_{i\bar{j}}(\partial_\kappa\phi^i)(\partial_\lambda\overline{\phi}^{\bar{j}}) \quad + \text{c.c.}. \\ &= \quad eT_\nu^{\widehat{m}}\delta e^\nu_{\widehat{m}} + \frac{e}{2k}S_{\lambda\nu}(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\lambda\mu\nu}\psi_\mu + \xi\sigma^{\lambda\mu\nu}\overline{\psi}_\mu).\end{aligned} \tag{3.57}$$

ただし $T_{\mu\nu}$ と $S_{\mu\nu}$ はそれぞれスカラー場のエネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = K_{i\bar{j}}[(\partial_\mu\phi^i)(\partial_\nu\overline{\phi}^{\bar{j}}) + (\partial_\nu\phi^i)(\partial_\mu\overline{\phi}^{\bar{j}}) - g_{\mu\nu}(\partial_\lambda\phi^i)(\partial^\lambda\overline{\phi}^{\bar{j}})] \tag{3.58}$$

および次のように定義される反対称テンソルである。

$$S_{\mu\nu} = -\frac{k^2 i}{4}K_{i\bar{j}}[(\partial_\mu\phi^i)(\partial_\nu\overline{\phi}^{\bar{j}}) - (\partial_\nu\phi^i)(\partial_\mu\overline{\phi}^{\bar{j}})] \tag{3.59}$$

変分 (3.57) の第 1 項はエネルギー運動量テンソルを含み、ちょうどスカラー場の運動項 $\mathcal{L}_\phi$ に含まれる多脚場の変分と相殺する。

ここまでの結果を全てまとめると、

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_{J\text{chiral}}) \quad &= \quad (\delta_\phi\mathcal{L}_\phi + \delta_\chi\mathcal{L}_\chi + \delta_\psi\mathcal{L}_{J\text{chiral}}) + (\delta_e\mathcal{L}_\phi + \delta_\chi\mathcal{L}_{J\text{chiral}}) \\ &= \quad \frac{e}{2k}S_{\lambda\nu}(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\lambda\mu\nu}\psi_\mu + \xi\sigma^{\lambda\mu\nu}\overline{\psi}_\mu).\end{aligned} \tag{3.60}$$

中間の式の一つ目の括弧は $\mathcal{O}(k^0)$ の項であり、相殺している。二つ目の括弧は $\mathcal{O}(k^1)$ の項であり、この部分がまだ相殺されないで残っている。この項をどう相殺するかは 4 次元の $\mathcal{N}=1$ 超重力理論の重要な性質とかかわってくる。

3.2.2 ケーラー接続

(3.60) をどのように相殺するかを考えよう。まず気づくことは、この項が重力部分の計算で現れた (3.25) とよく似ているということである。並べて書いてみよう。

$$\delta\mathcal{L}_{(\phi,\chi)} = \frac{e}{2k}S_{\nu\rho}(\psi_\mu\sigma^{\mu\nu\rho}\bar{\xi}) + \mathrm{c.c.}, \tag{3.61}$$

$$\delta\mathcal{L}_{\psi_\mu} = \frac{ie}{2k}\psi_\mu\sigma^{\mu\nu\rho}[D_\nu^{(\omega)}, D_\rho^{(\omega)}]\bar{\xi} \quad + \mathrm{c.c.} \tag{3.62}$$

従って、もし、共変微分 $D_\mu^{(\omega)}$ に対して何らかの変更を行い、新たな共変微分 $D_\mu^{(\omega,S)}$ を定義することで

$$[D_\nu^{(\omega,S)}, D_\rho^{(\omega,S)}]\bar{\xi} = \cdots + iS_{\nu\rho}\bar{\xi} \tag{3.63}$$

のように交換関係から $S_{\mu\nu}$ が現れるようにすることができれば、(3.60) を相殺することができる。

そのようなことか可能かどうかを見るために反対称テンソル $S_{\mu\nu}$ について調べてみよう。この反対称テンソルを 2-形式として表わせば次のようになる。

$$S_2 \equiv \frac{1}{2}S_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = -\frac{ik^2}{4}K_{i\bar{j}}d\phi^i \wedge d\bar{\phi}^{\bar{j}} \tag{3.64}$$

これはスカラー多様体上の 2 形式とみなすことができる。$S_{\mu\nu}$ が共変微分の交換関係から得られる、「場の強さ」であればビアンキ項等式を満たしている必要があるが、実際 S_2 の外微分は次のように 0 になる。すなわち S_2 は閉形式である。

$$dS_2 = 0. \tag{3.65}$$

従って、スカラー多様体上で $S_2 = dS_1$ を満足するポテンシャル S_1 を（少なくとも局所的には）定義することができる。

$$S_1 = \frac{ik^2}{8}(K_i d\phi^i - K_{\bar{i}}d\bar{\phi}^{\bar{i}}) \tag{3.66}$$

これはケーラー接続とよばれるスカラー多様体上の 1-形式である。こうして定義される $S_1 = S_\mu dx^\mu$ を用いて、グラビティーノの変換則とグラビティーノの運動項に含まれる微分を

$$D_\mu^{(\omega)}\psi_\nu \to D_\mu^{(\omega,S)}\xi \equiv (D_\mu^{(\omega)} - iS_\mu)\psi_\nu, \quad D_\mu^{(\omega)}\xi \to D_\mu^{(\omega,S)}\xi \equiv (D_\mu^{(\omega)} - iS_\mu)\xi \tag{3.67}$$

のように、「ゲージ場」 S_μ を含むものに置き換えておけば、グラビティーノの運動項の変分 (3.25) に現れた共変微分の交換関係から、アインシュタイン作用の変分と相殺する曲率テンソルを含む項のほかに、ちょうど (3.63) にあるように (3.60) を相殺する項が現れる。ここで導入した「ゲージ場」 S_μ が何らかの U(1) 変換に対応しているとすれば、それは多脚場 $e_\mu^{\widehat{m}}$ やスカラー場 ϕ^i には作用せず、グラビティーノ ψ_μ や変換パラメータ ξ に作用する。従ってこの変換が $\mathrm{U}(1)_R$ 変換であると推測できる。だとすれば、R 電荷 -1 を持つフェルミオン χ^i の微分は次のように置き換えるべきである。

$$D_\mu^{(\omega,M)}\chi^i \to D_\mu^{(\omega,M,S)}\chi^i \equiv (D_\mu^{(\omega,M)} + iS_\mu)\chi^i. \tag{3.68}$$

実際にこの置き換えはネーター項の ψ_μ の超対称変換が (3.55) をうまく相殺するためにも必要である。(3.55) にある共変微分がどこからきたのか辿ってみると、もともとフェルミオン χ^i の運動項の共変微分であったことが分かる。

(3.67) における共変微分の導入によってゲージ化された「対称性」が何であるかを見てみよう。ただし、ここで導入されたゲージ場 S_1 は時空上のダイナミカルな場ではなくスカラー多様体上で

与えられた 1 形式である。このことは、スカラー多様体上の計量 $K_{i\bar{j}}$ と同様、ラグランジアンを与えるということの中に S_1 の関数形を与えるということまで含まれていることを意味する。従って、S_1 を変化させるような「ゲージ変換」は、スカラー多様体上の正則座標変換同様理論の対称性ではない。

ケーラー接続 S_1 をゲージ場として変換するようなスカラー多様体上の「ゲージ変換」が何であるかを考えてみよう。「場の強さ」S_2 が不変になるような「ゲージ変換」は、スカラー多様体上の関数 $\lambda(\phi,\phi^*)$ を用いて次のように与えることができる。

$$\delta S_1 = d\lambda = \lambda_i d\phi^i + \lambda_{\bar{i}} d\phi^{*\bar{i}} \tag{3.69}$$

一方、(3.66) を用いると、このゲージ変換はケーラーポテンシャルを変化させることがわかる。

$$\delta S_1 = \frac{k^2 i}{8}(\delta K_i d\phi^i - \delta K_{\bar{i}} d\overline{\phi}^{\bar{i}}) \tag{3.70}$$

これらを比較して

$$\delta K_i = -8i\lambda_i, \quad \delta K_{\bar{i}} = 8i\lambda_{\bar{i}} \tag{3.71}$$

この式が成り立つためには、

$$\delta K = -4f(\phi) - 4f^*(\phi^*), \quad \lambda = -\frac{ik^2}{2}(f - f^*) \tag{3.72}$$

のように、δK および λ がスカラー多様体上の正則関数を用いて書かれている必要がある。(3.72) は (2.78) に与えたケーラー変換にほかならない。大域的超対称理論の場合、この変換はケーラー多様体上の計量やクリストッフェル記号などを変化させないので、ラグランジアンも変化させない。

フェルミオンの共変微分の中に S_μ が含まれるということは、ケーラー変換 (3.72) が次の $\mathrm{U}(1)_R$ 変換を同時に引き起こすことを意味している。

$$\phi^m \to \phi'^m = \phi^m, \quad \xi \to \xi' = e^{i\lambda}\xi, \quad \psi_\mu \to \psi'_\mu = e^{i\lambda}\psi_\mu, \quad \chi^i \to \chi'^i = e^{-i\lambda}\chi^i. \tag{3.73}$$

ここで $\mathrm{U}(1)_R$ 変換と呼んでいるものは、ケーラー変換同様理論の対称性ではないことに注意しよう。通常 $\mathrm{U}(1)_R$ 対称性と呼ばれるものはグラビティーノや変換パラメータを回転させると同時に、ポテンシャル項が不変になるようにスカラー場なども適当に回転させる。しかしここで考えている $\mathrm{U}(1)_R$ 変換はスカラー多様体上の局所変換でありスカラー場を変化させない。これは一般にはスカラー多様体上の座標変換と同様にラグランジアンを変化させる。

一般のケーラー変換は次のように与えられる。

$$K(\phi,\overline{\phi}) \to K(\phi,\overline{\phi}) - 4f(\phi) - 4\overline{f}(\overline{\phi}), \quad X_R \to \exp\frac{Rk^2}{2}[f(\phi) - \overline{f}(\overline{\phi})]X_R. \tag{3.74}$$

ただし、X_R は R-電荷が R である場であり、それぞれのフェルミオン場に対して次のように与えられる。

$$R[\xi] = R[\psi_\mu] = 1, \quad R[e_\mu^{\widehat{m}}] = R[\phi^i] = 0, \quad R[\chi^i] = -1. \tag{3.75}$$

これは、必ずしもラグランジアンを不変に保つ通常の「$\mathrm{U}(1)_R$ 対称性」の電荷にはならないことに注意すること。エルミート共役をとればこの電荷は符号が反転する。これらの場に対して、ケーラー接続 S_μ まで含めた共変微分は次のように定義される。

$$D_\mu^{(S)} X_R = (\partial_\mu - iRS_\mu)X_R. \tag{3.76}$$

ここまでに得られたラグランジアンと変換則についてまとめておこう。

中性カイラル多重項の運動項

ポテンシャルを持たない中性カイラル多重項を重力に結合させるには、フェルミオンの二次までを見る近似においては場の R 電荷に応じて微分を共変微分 $D_\mu^{(S)}$ に置き換え、ネーター項を導入するだけでよい。
まず、重力部分は

$$\mathcal{L}_e = \frac{e}{k^2}R, \tag{3.77}$$

$$\mathcal{L}_\psi = ie(\psi_\mu \sigma^{\mu\nu\rho} D_\nu^{(\omega,S)} \overline{\psi}_\rho). \tag{3.78}$$

カイラル多重項の運動項は

$$\mathcal{L}_\phi = -eK_{i\bar{j}}\partial_\mu \phi^i \partial^\mu \overline{\phi}^{\bar{j}}, \tag{3.79}$$

$$\mathcal{L}_\chi = ieK_{i\bar{j}}(\chi^i \sigma^\mu D_\mu^{(M,\omega,S)} \overline{\chi}^{\bar{j}}). \tag{3.80}$$

重力との結合を表すネーター項は

$$\mathcal{L}_{J\text{chiral}} = \frac{ke}{2}K_{i\bar{j}}(\chi^i \sigma^\mu \overline{\sigma}^\lambda \psi_\mu)(\partial_\lambda \overline{\phi}^{\bar{j}}) \quad + \text{c.c.} \tag{3.81}$$

重力多重項の変換則

$$\delta_\psi^0 \psi_\mu = \frac{1}{k}D_\mu^{(\omega,S)}\xi, \quad \delta e_{\widehat{m}}^\mu = \frac{k}{4}(-i\psi_{\widehat{m}}\sigma^\mu \overline{\xi} + i\overline{\psi}_{\widehat{m}}\overline{\sigma}^\mu \xi), \tag{3.82}$$

カイラル多重項の変換則は

$$\delta\phi^i = \frac{1}{2}\xi\chi^i, \quad \delta_\chi^0 \chi^i = -\frac{i}{2}\sigma^\mu \overline{\xi}\partial_\mu \phi^i, \tag{3.83}$$

あとで見るように、超ポテンシャルを導入するとフェルミオンの変換則にはさらに項が加わる。ここで、フェルミオンの変換則に 0 をつけたのは、超ポテンシャルが 0 である場合の変換則と言う意味である。

上記のラグランジアンの局所的超対称変換のもとでの変分の相殺は以下のようになる。

$$\delta_\phi \mathcal{L}_\phi + \delta_\chi^0 \mathcal{L}_\chi + \delta_\psi^0 \mathcal{L}_{J\text{chiral}} = 0, \tag{3.84}$$

$$\delta_\chi^0 \mathcal{L}_{J\text{chiral}} + \delta_e \mathcal{L}_\phi + (\delta_e \mathcal{L}_e + \delta_\psi^0 \mathcal{L}_\psi) = 0. \tag{3.85}$$

3.2.3 重力との結合によってスカラー多様体に課される条件

スカラー多様体上で定義された 2 形式 S_2 は (3.64) で与えられているようにスカラー多様体上のケーラー形式

$$\omega_2 = \frac{i}{2}K_{i\bar{j}}d\phi^i \wedge d\phi^{*\bar{j}} \tag{3.86}$$

に比例している。また、S_2 のフラックスは、フェルミオンが持つ R-電荷に結合しているので、ディラックの量子化条件によって量子化されている必要がある。すなわち、次の式が成り立つ。

$$2\pi\mathbf{Z} \ni \oint S_2 = -\frac{k^2}{2}\oint \omega_2 \tag{3.87}$$

Soryushiron Kenkyu

積分はスカラー多様体上の任意の 2 サイクル上で行われる。ケーラー形式がこのような量子化条件を満足する多様体は Hodge 多様体と呼ばれる。[5]

3.2.4 ポテンシャル項の導入

超ポテンシャル W を導入し、それによるポテンシャル項をラグランジアンに付け加えることを考えよう。超ポテンシャル W は R 電荷 2 を持つので、スカラー多様体上の $\mathrm{U}(1)_R$ 変換のもとで $W \to W' = e^{k^2(f-f^*)}W$ と変換されそうであるが、W は正則関数でなければならないから、このような変換は許されない。この問題を解決するには、W に $e^{k^2K/4}$ をかけた $\mathcal{W}$ を定義すればよい。

$$\mathcal{W} = e^{k^2K/4}W. \tag{3.88}$$

$\mathcal{W}$ と W のケーラー変換の下での変換性は次のようになる。

$$\mathcal{W} \to \mathcal{W}' = e^{k^2(f-f^*)}e^{k^2K/4}\mathcal{W}, \quad W \to W' = e^{2k^2f}W. \tag{3.89}$$

この変換は W の正則性を保つ。W の変換にように、f と f^* が対称に現れない変換にも対応するために、共変微分 $D_\mu^{(S)}$ を少し一般化しておこう。

R-電荷 r のほかにワイルウェイトと呼ばれる数 w を導入し、それらが (r, w) である場 $X_{(r,w)}$ は次のように変換されるとする。

$$X_{(r,w)} \to e^{k^2(w\,\mathrm{Re}\,f + ir\,\mathrm{Im}\,f)}X_{(r,w)}. \tag{3.90}$$

対応する共変微分は次のように定義すればよい。

$$D_\mu^{(S)} = \partial_\mu + \frac{(w+r)k^2}{8}(\partial_\mu\phi^i)K_i + \frac{(w-r)k^2}{8}(\partial_\mu\phi^{*\bar{i}})K_{\bar{i}} \tag{3.91}$$

$w = 0$ の場合には先ほどの場合に帰着する。

それぞれの場に対して (r, w) は次のように与えられる。

(3.92)

	ξ	ψ_μ	χ^i	λ^a	W	e^K
r	1	1	-1	1	2	0
w	0	0	0	0	2	-8

ネーター手続きを用いてポテンシャル項を重力に結合させよう。超対称性が大域的である場合には、$W \neq 0$ の導入は、運動方程式を解いた結果として次のポテンシャル項をラグランジアンに付け加える。ここで現れる W を上記の $\mathcal{W}$ に入れ替えた次のものから出発する。

$$\mathcal{L}_{\text{pot}} = -e(D_i^{(S)}\mathcal{W})K^{i\bar{j}}(D_{\bar{j}}^{(S)}\overline{\mathcal{W}}), \tag{3.93}$$

$$\mathcal{L}_{\chi\text{mass}} = \frac{e}{2}(D_i^{(M,S)}D_j^{(S)}\mathcal{W})(\chi^i\chi^j) \quad + \text{c.c.}. \tag{3.94}$$

さらに、W を導入することによりフェルミオン χ^i の変換則に F-term の寄与が加わるはずであるが、その補正項も R-対称性のもとで共変化して次のようにおいてみよう。

$$\delta'_\chi\chi^i = \frac{1}{2}\xi K^{i\bar{j}}D_{\bar{j}}^{(S)}\overline{\mathcal{W}}. \tag{3.95}$$

これに対し、$W = 0$ の時の χ^i の変換則は $\delta_\chi^0\chi^i$ と表すことにする。また、ψ_μ の変換則にも補正が必要なことがあとでわかるので、その補正を含まない部分は δ_ψ^0 と表すことにする。

Soryushiron Kenkyu

作用の変換を見てみよう。チェックしなければならないのは、新たに導入したラグランジアンの変分と χ の変換則に追加した項によってもともとあったラグランジアンから現れる変分である。

次の変分からカレントが得られる。

$$\delta'_\chi \mathcal{L}_\chi + \delta^0_\chi \mathcal{L}_{\chi\mathrm{mass}} = \frac{ie}{2}(\chi^i \sigma^\mu D^{(S)}_\mu \bar{\xi}) D^{(S)}_i \mathcal{W} + \frac{k^2 ie}{4} K_{\bar{j}i}(\chi^i \sigma^\mu \bar{\xi})(D_\mu \overline{\phi}^{\bar{j}})\mathcal{W} \quad + \mathrm{h.c.} \tag{3.96}$$

右辺の第 2 項は、k^2 に比例しているが、この項が現れるのはケーラー変換についての共変化を行い W を $\mathcal{W}$ に置き換えたことのためである。この項を得るために、次の公式を用いた。

$$D_i W = \partial_i W + \frac{k^2}{2} K_i W, \quad D_{\bar{j}} D_i W = \frac{k^2}{2} K_{i\bar{j}} W. \tag{3.97}$$

(3.96) の第 1 項はグラビティーノの変分を含んでいるから、次のネーター結合を導入すれば、その δ^0_ψ 変分によって相殺することができる。

$$\mathcal{L}_{JW} = -\frac{kie}{2}(D^{(S)}_i \mathcal{W})(\chi^i \sigma^\mu \overline{\psi}_\mu) \quad + \mathrm{c.c.} \tag{3.98}$$

(3.96) の第 2 項を相殺するためには、グラビティーノに対する次の変換則を導入する。

$$\delta'_\psi \psi_\mu = \frac{ki}{4} \mathcal{W} \sigma_\mu \bar{\xi}. \tag{3.99}$$

この新たな変換則を用いるとネーター項の変分からは

$$\delta'_\psi \mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}} = -\frac{k^2 ie}{4} \mathcal{W} K_{i\bar{j}} (\chi^i \sigma^\lambda \bar{\xi})(\partial_\lambda \overline{\phi}^{\bar{j}}) \quad + \mathrm{h.c.} \tag{3.100}$$

が得られ、これは (3.96) の第 2 項と相殺する。従って

$$\delta'_\chi \mathcal{L}_\chi + \delta^0_\chi \mathcal{L}_{\chi\mathrm{mass}} + \delta^0_\psi \mathcal{L}_{JW} + \delta'_\psi \mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}} = 0. \tag{3.101}$$

$\mathcal{L}_{JW}$ の中に含まれている χ の変分から新たに次の変分が現れる。

$$\delta'_\chi \mathcal{L}_{JW} = -\frac{kie}{4}(D^{(S)}_i \mathcal{W}) K^{i\bar{j}} (D^{(S)}_{\bar{j}} \overline{\mathcal{W}})(\xi \sigma^\mu \overline{\psi}_\mu) \quad + \mathrm{c.c.} \tag{3.102}$$

これは $\delta_e \mathcal{L}_{\mathrm{pot}}$ によって相殺できる。

$$\delta'_\chi \mathcal{L}_{JW} + \delta_e \mathcal{L}_{\mathrm{pot}} = 0. \tag{3.103}$$

$$\delta^0_\chi \mathcal{L}_{JW} = -\frac{ke}{4}(D^{(S)}_i \mathcal{W})(\partial_\nu \phi^i)(\bar{\xi} \overline{\sigma}^\nu \sigma^\mu \overline{\psi}_\mu) \quad + \mathrm{c.c.} \tag{3.104}$$

これとよく似た項は以前に得られたネーター結合項 $\mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}}$ を δ'_χ で変分したものからも得られる。

$$\delta'_\chi \mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}} = \frac{ke}{4}(D^{(S)}_i \mathcal{W})(\partial_\nu \phi^i)(\bar{\xi} \overline{\sigma}^\mu \sigma^\nu \overline{\psi}_\mu) \quad + \mathrm{c.c.}. \tag{3.105}$$

これらを合計して部分積分することで次の変分を得る。

$$\begin{aligned} \delta^0_\chi \mathcal{L}_{JW} + \delta'_\chi \mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}} &= \frac{ke}{2}(D^{(S)}_\nu \mathcal{W})(\bar{\xi} \overline{\sigma}^{\mu\nu} \overline{\psi}_\mu) \quad + \mathrm{c.c.} \\ &= \frac{ke}{2} \mathcal{W} (D^{(S)}_\mu \bar{\xi} \overline{\sigma}^{\mu\nu} \overline{\psi}_\nu) + \frac{ke}{2} \mathcal{W} (\bar{\xi} \overline{\sigma}^{\mu\nu} D^{(S)}_\mu \overline{\psi}_\nu) \quad + \mathrm{h.c.} \end{aligned} \tag{3.106}$$

第 1 項は次のグラビティーノ質量項の δ^0_ψ 変換で相殺できる。

$$\mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} = -\frac{k^2 e}{4}\mathcal{W}(\overline{\psi}_\mu \overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu) \quad + \mathrm{c.c.} \tag{3.107}$$

(3.106) の第 2 項は $\delta'_\psi \mathcal{L}_\psi$ によって相殺できる。すなわち

$$\delta^0_\chi \mathcal{L}_{JW} + \delta'_\chi \mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}} + \delta^0_\psi \mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} + \delta'_\psi \mathcal{L}_\psi = 0 \tag{3.108}$$

(3.97) を用いれば次の式を示すことができる。

$$\delta'_\chi \mathcal{L}_{\chi\mathrm{mass}} + \delta_\phi \mathcal{L}_{\mathrm{pot}} = -\frac{k^2 e}{4}(D_i \mathcal{W})\overline{\mathcal{W}}(\chi^i \xi) + \mathrm{c.c.}. \tag{3.109}$$

さらに $\mathcal{L}_{JW}$ の変分からも同類項が得られる。

$$\delta'_\psi \mathcal{L}_{JW} = -\frac{k^2 e}{2}(D^{(S)}_i \mathcal{W})\overline{\mathcal{W}}(\chi^i \xi) \quad + \mathrm{h.c.} \tag{3.110}$$

これら二つの和は次のように書ける。

$$-\frac{3k^2 e}{2}\delta_\phi \mathcal{W}\overline{\mathcal{W}} \quad + \mathrm{h.c.} \tag{3.111}$$

さらに mass term より

$$\delta'_\psi \mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} = \frac{3k^2 e}{2} e^{K/2}|W|^2 e^{\widehat{m}}_\mu \delta e^\mu_{\widehat{m}}. \tag{3.112}$$

これら二つの変分は次の宇宙項の導入で相殺することができる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cc}} = \frac{3k^2 e}{2} e^{K/2}|W|^2 \tag{3.113}$$

すなわち、次の相殺が起こる。

$$\delta'_\chi \mathcal{L}_{\chi\mathrm{mass}} + \delta_\phi \mathcal{L}_{\mathrm{pot}} + \delta'_\psi \mathcal{L}_{JW} + \delta_\phi \mathcal{L}_{\mathrm{cc}} = 0, \tag{3.114}$$

$$\delta'_\psi \mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} + \delta_e \mathcal{L}_{\mathrm{cc}} = 0. \tag{3.115}$$

ここで得られたグラビティーノの質量項 (3.107) と宇宙項 (3.113) の関係はすでに §3.1.4 で与えられていたものと同じである。ただし今度はグラビティーノの質量は定数ではなく、スカラー場の関数として次のように与えられている。

$$m_{3/2} = \frac{k^2}{2}\mathcal{W}. \tag{3.116}$$

以上ですべての項が相殺され、局所的超対称変換のもとで不変な作用を得る事ができた。新たに加わった項をまとめておくと、

ポテンシャル項

超ポテンシャル W を導入すると、ラグランジアンに次の項が加わる。まず、大域的超対称性の段階ですでに存在する項の共変化したものが以下の 2 つ。

$$\mathcal{L}_{\rm pot} = -e(D_i^{(S)}\mathcal{W})K^{i\bar{j}}(D_{\bar{j}}^{(S)}\overline{\mathcal{W}}), \tag{3.117}$$

$$\mathcal{L}_{\chi\rm mass} = \frac{e}{2}(D_i^{(M,S)}D_j^{(S)}\mathcal{W})(\chi^i\chi^j) \quad + \text{h.c.}. \tag{3.118}$$

ただし、$\mathcal{W} \equiv e^{k^2K/4}W$。次に、上記のラグランジアンから得られるカレントとグラビティーノの結合を表すネーター項。

$$\mathcal{L}_{JW} = -\frac{kie}{2}(D_i^{(S)}\mathcal{W})(\chi^i\sigma^\mu\overline{\psi}_\mu) \quad + \text{h.c.} \tag{3.119}$$

さらに、次のグラビティーノ質量項と宇宙項が必要である。

$$\mathcal{L}_{\psi\rm mass} = -\frac{k^2e}{4}\mathcal{W}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu) \quad + \text{h.c.}, \tag{3.120}$$

$$\mathcal{L}_{\rm cc} = \frac{3k^2e}{2}|\mathcal{W}|^2 \tag{3.121}$$

χ の変換則には次のように補助場 F の寄与が付け加わる。

$$\delta'_\chi\chi^i = \frac{1}{2}\xi K^{i\bar{j}}D_{\bar{j}}^{(S)}\overline{\mathcal{W}}. \tag{3.122}$$

さらにグラビティーノの変換則にも次の項が追加される。

$$\delta'_\psi\psi_\mu = \frac{ik}{4}\mathcal{W}\sigma_\mu\bar{\xi}. \tag{3.123}$$

相殺の様子をまとめておこう。

$$\delta'_\chi\mathcal{L}_\chi + \delta^0_\chi\mathcal{L}_{\chi\rm mass} + \delta^0_\psi\mathcal{L}_{JW} + \delta'_\psi\mathcal{L}_{J\rm chiral} = 0, \tag{3.124}$$

$$\delta'_\chi\mathcal{L}_{JW} + \delta_e\mathcal{L}_{\rm pot} = 0, \tag{3.125}$$

$$\delta^0_\chi\mathcal{L}_{JW} + \delta'_\chi\mathcal{L}_{J\rm chiral} + \delta^0_\psi\mathcal{L}_{\psi\rm mass} + \delta'_\psi\mathcal{L}_\psi = 0, \tag{3.126}$$

$$\delta'_\chi\mathcal{L}_{\chi\rm mass} + \delta_\phi\mathcal{L}_{\rm pot} + \delta'_\psi\mathcal{L}_{JW} + \delta_\phi\mathcal{L}_{\rm cc} = 0, \tag{3.127}$$

$$\delta'_\psi\mathcal{L}_{\psi\rm mass} + \delta_e\mathcal{L}_{\rm cc} = 0. \tag{3.128}$$

3.2.5 カイラル多重項まとめ

大域的な超対称性を持つカイラル多重項の理論は次のように与えられる。

$$\mathcal{L}^{\rm global}_{\rm chiral} = \frac{1}{2}[K(\Phi,\Phi^*)]_D - ([W(\Phi)]_F + \text{c.c.}) \tag{3.129}$$

これを一般座標変換のもとで共変化し、ξ を時空座標の関数として超対称変換を計算すると、次の結果を得る。

$$\delta\mathcal{L}_{\rm chiral} = -\frac{e}{2}K_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu\overline{\sigma}^\lambda D_\mu\xi)(\partial_\lambda\phi^{*\bar{j}}) + \frac{ie}{2}(\chi^i\sigma^\mu D_\mu\bar{\xi})\partial_iW + \text{c.c.} \tag{3.130}$$

Soryushiron Kenkyu

これに対してネーター項 $\mathcal{L}_J = eJ^\mu\psi_\mu$ を導入し、この項のカレントの超対称変換と、もとのカイラル多重項のラグランジアンの多脚場の変分を合わせると、

$$(e\delta J^\mu\psi_\mu + \mathrm{c.c.}) + \delta_e\mathcal{L}_{\mathrm{chiral}} = \frac{e}{2k}S_{\nu\rho}(\psi_\mu\sigma^{\mu\nu\rho}\bar{\xi}) + \frac{ke}{2}(\partial_\nu W)(\bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\mu) + \mathrm{c.c.} \tag{3.131}$$

ただし、$S_2 = dS_1$ であり、

$$S_1 = \frac{ik^2}{8}(K_i d\phi^i - K_{\bar{i}}d\phi^{*\bar{i}}) \tag{3.132}$$

この式の第 1 項はケーラー変換の共変化 $D_\mu \to D_\mu^{(S)} = D_\mu - iRS_\mu$ によって相殺する。このとき W は $\mathcal{W} = e^{k^2K/4}W$ で置き換えられる。第 2 項は重力多重項の質量項の導入で相殺する。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{mass}} = \left(-\frac{k^2e}{4}\mathcal{W}(\overline{\psi}_\mu\bar{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu) + \mathrm{c.c.}\right) + \frac{3k^2e}{2}|\mathcal{W}|^2 \tag{3.133}$$

このときグラビティーノの変換則には次の項が加わる。

$$\delta'\psi_\mu = \frac{ik}{4}\mathcal{W}\sigma_\mu\bar{\xi} \tag{3.134}$$

3.3 ゲージ多重項

3.3.1 ネーター項

ベクトル多重項を重力場に結合させよう。ここではまずカイラル多重項はないものと仮定する。また、FI パラメータも 0 であるとしておく。ベクトル多重項とカイラル多重項の両方を含む理論についてはあとで改めて考える。

超対称性が大域的である場合のベクトル多重項のラグランジアンは (2.174) に与えられている。ここではカイラル多重項を導入しないので関数 τ_{ab} は単なる定数であり、$\widetilde{\tau}_{ab}$ の微分を含む項は無視することにする。

以下のネーター処方の計算は補助場を含まない形式で行う。そこでまず運動方程式を用いて補助場を消去しておく必要があるが、(2.174) を用いて補助場の運動方程式を解くと、$D^a = 0$ となるので、ここでは単に D^a を無視することができる。

このことを踏まえ、ネーター手続きの出発点となるラグランジアンを次の部分の和として表そう。

$$\mathcal{L}_v = -\frac{e}{4}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b}, \tag{3.135}$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -ie(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})(\overline{\lambda}^a\bar{\sigma}^\mu D_\mu^{(G,\omega)}\lambda^b) \tag{3.136}$$

これは $\mathcal{L} = -(1/2)\,\mathrm{Im}[\widetilde{\tau}_{ab}W^aW^b]$ （ワイル表示）を一般座標変換について共変化したものである。変換則は、(2.160) を一般座標変換のもとで共変な形に直した次のものを採用する。

$$\delta v^a_\mu = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\xi\sigma_\mu\overline{\lambda}^a + \frac{i}{2\sqrt{2}}\lambda^a\sigma_\mu\bar{\xi}, \quad \delta\lambda^a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}F^a_2\xi \tag{3.137}$$

これら以外に、重力部分として 70 ページの枠内に与えられたものがあるとする。

局所的超対称性で不変な作用を構成する第一段階として、ネーターカレントを求めよう。そのためには上で与えたラグランジアンを (3.137) で変換してみればよい。もともと大域的な超対称性はあるので、結果は $D_\mu\xi$ に比例するはずである。

まず、フェルミオンの運動項の変分は

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_\lambda &= \frac{ie}{2\sqrt{2}}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu D_\mu^{(G,\omega)}\not{F}_2^a\xi) + \mathrm{c.c.} \\
&= \frac{ie}{2\sqrt{2}}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu (D_\mu^{(G,\omega)}\not{F}_2^a)\xi) + \frac{ie}{2\sqrt{2}}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu \not{F}_2^a D_\mu^{(\omega)}\xi) + \mathrm{c.c.} \quad (3.138)
\end{aligned}
$$

F_2^a に対するビアンキ項等式を用いれば、この第 1 項は

$$
\begin{aligned}
\frac{ie}{2\sqrt{2}}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu (D_\mu^{(G,\omega)}\not{F}_2^a)\xi) &= \frac{ie}{2\sqrt{2}}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}_\nu\xi)D_\mu F^{a\mu\nu} + \mathrm{c.c.} \\
&= -e(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\delta v_\nu D_\mu F^{a\mu\nu} \quad (3.139)
\end{aligned}
$$

となり、部分積分すればちょうどゲージ場運動項のゲージ場に対する超対称変換と相殺することがわかる。

(3.138) の第 2 項は次のネーター結合項の導入によって相殺できる。

$$
\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}} = \frac{kie}{2\sqrt{2}}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\Big[(\psi_\mu\not{F}_2^b\sigma^\mu\overline{\lambda}^a) + (\lambda^a\sigma^\mu\not{F}_2^b\overline{\psi}_\mu)\Big] \quad (3.140)
$$

このラグランジアンの λ^a の変分を行うと、新たに次の変分が現れる。

$$
\delta\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}} = \frac{kie}{8}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\Big[-(\psi_\mu\not{F}_2^b\sigma^\mu\not{F}_2^a\overline{\xi}) + (\xi\not{F}_2^a\sigma^\mu\not{F}_2^b\overline{\psi}_\mu)\Big] \quad (3.141)
$$

これは丁度 $\mathcal{L}_v$ の多脚場の変分によって得られる項と相殺される。これですべての変分が相殺されていることが結論された。

まとめておこう。

ベクトル多重項

重力部分

$$
\mathcal{L}_{\mathrm{grav}} = \frac{1}{k^2}eR + ie(\psi_\mu\sigma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega)}\overline{\psi}_\rho) \quad (3.142)
$$

$$
\delta\psi_\mu = \frac{1}{k}D_\mu^{(\omega)}\xi, \quad \delta e_{\widehat{m}}^\mu = \frac{k}{4}(-i\psi_{\widehat{m}}\sigma^\mu\overline{\xi} + i\overline{\psi}_{\widehat{m}}\overline{\sigma}^\mu\xi) \quad (3.143)
$$

ベクトル多重項の運動項

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_v &= -\frac{e}{4}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b}, \quad (3.144) \\
\mathcal{L}_\lambda &= -ie(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu D_\mu^{(G,\omega)}\lambda^b) \quad (3.145)
\end{aligned}
$$

ネーター結合項

$$
\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}} = \frac{kie}{2\sqrt{2}}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\Big[(\psi_\mu\not{F}_2^b\sigma^\mu\overline{\lambda}^a) + (\lambda^a\sigma^\mu\not{F}_2^b\overline{\psi}_\mu)\Big] \quad (3.146)
$$

ベクトル多重項の変換則

$$
\delta v_\mu^a = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\xi\sigma_\mu\overline{\lambda}^a + \frac{i}{2\sqrt{2}}\lambda^a\sigma_\mu\overline{\xi}, \quad \delta\lambda^a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}_2^a\xi \quad (3.147)
$$

3.3.2 中性カイラル場

ゲージ多重項とカイラル多重項が共存する場合について考えよう。ただし、ここではカイラル多重項は全て中性、すなわち電荷を持たず、ゲージ場との極小結合が無い場合に限る。カイラル多重

項が中性な場合であっても、結合定数 $\widetilde{\tau}_{ab}$ がカイラル多重項のスカラー場に依存することができるため、一般にはゲージ場とカイラル多重項の相互作用が存在する。

具体的には、大域的超対称性を持つ次のラグランジアンを重力に結合することを考える。

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}[K(\Phi,\Phi^*)]_D-([W(\Phi)]_F+\mathrm{c.c.})-\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}[\widetilde{\tau}_{ab}(\Phi)W^aW^b]_F \qquad (3.148)$$

（スピノル超場の積はワイル表示で表されている。）ゲージ多重項が無い場合のラグランジアンと変換則は 80 ページと 84 に与えられているので、ここでもそれらをそのまま用いよう。ゲージ多重項に依存する部分については、大域的な場合のラグランジアンと前節で求めたベクトル多重項についてのネーター項を参考にし、次の 5 つの部分の和として表そう。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_v &= -\frac{e}{4}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b}-\frac{e}{8}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau}_{ab})i\sigma^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^b_{\rho\sigma}=\frac{ie}{4}\widetilde{\tau}_{ab}F^{+a}_{\mu\nu}F^{+b\mu\nu}, && (3.149)\\
\mathcal{L}_\lambda &= \frac{ie}{2}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\Big[(\lambda^a\sigma^\mu D^{(G,\omega,S)}_\mu\overline{\lambda}^b)-(D^{(G,\omega,S)}_\mu\lambda^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^b)\Big]\\
&\quad +\frac{e}{2}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau}_{ab})D^{(G)}_\mu(\lambda^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^b), && (3.150)\\
\mathcal{L}_3 &= \frac{ie}{2\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab,i}(\lambda^a F^b_2\chi^i) \quad +\mathrm{h.c.}, && (3.151)\\
\mathcal{L}_{\lambda\mathrm{mass}} &= +\frac{ie}{4}K^{i\overline{j}}\widetilde{\tau}_{ab,i}(\lambda^a\lambda^b)\overline{\mathcal{W}}_{\overline{j}} \quad +\mathrm{h.c.}, && (3.152)\\
\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}} &= \frac{kie}{2\sqrt{2}}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\Big[(\psi_\mu F^b_2\sigma^\mu\overline{\lambda}^a)+(\lambda^a\sigma^\mu F^b_2\overline{\psi}_\mu)\Big] && (3.153)
\end{aligned}$$

変換則は、(2.160) を一般座標変換のもとで共変な形に直した次のものを採用する。

$$\delta v^a_\mu=-\frac{i}{2\sqrt{2}}\xi\sigma_\mu\overline{\lambda}^a+\frac{i}{2\sqrt{2}}\lambda^a\sigma_\mu\overline{\xi},\quad \delta\lambda^a=-\frac{1}{2\sqrt{2}}F^a_2\xi \qquad (3.154)$$

このラグランジアンは局所的な超対称変換の下で（フェルミオンについて 2 次までの近似で）不変である。相殺の様子は次のようになる。ただし、$\delta\lambda$ のうち、補助場由来の部分を δ'_λ、それ以外を δ^0_λ と表す。

$$\begin{aligned}
&\delta^0_\lambda\mathcal{L}_\lambda+\delta_v\mathcal{L}_v+\delta^0_\chi\mathcal{L}_3+\delta^0_\psi\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}}=0, && (3.155)\\
&\delta^0_\lambda\mathcal{L}_3+\delta_\phi\mathcal{L}_v=0, && (3.156)\\
&\delta^0_\lambda\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}}+\delta_e\mathcal{L}_v=0, && (3.157)\\
&\delta'_\chi\mathcal{L}_3+\delta^0_\lambda\mathcal{L}_{\lambda\mathrm{mass}}=0. && (3.158)
\end{aligned}$$

うしろ 3 つの相殺をチェックするのは簡単である。

$$\delta^0_\lambda\mathcal{L}_3=-\delta_\phi\mathcal{L}_v=\frac{ie}{8}\widetilde{\tau}_{ab,i}(\xi F^a_2F^b_2\chi^i) \quad +\mathrm{h.c.} \qquad (3.159)$$

$$\delta^0_\lambda\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}}=-\delta_e\mathcal{L}_v=\frac{kie}{8}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\Big[-(\psi_\mu F^b_2\sigma^\mu F^a_2\overline{\xi})+(\xi F^a_2\sigma^\mu F^b_2\overline{\psi}_\mu)\Big] \qquad (3.160)$$

$$\delta'_\chi\mathcal{L}_3=-\delta^0_\lambda\mathcal{L}_{\lambda\mathrm{mass}}=\frac{ie}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab,i}(\lambda^aF^b_2\xi)K^{i\overline{j}}D_{\overline{j}}\overline{\mathcal{W}} \quad +\mathrm{h.c.}. \qquad (3.161)$$

(3.155) の相殺が起こることを詳しく示しておこう。まず、フェルミオンの運動項を変分することから始めよう。$\mathcal{L}_\lambda$ は次のように書くこともできる。

$$\mathcal{L}_\lambda=\frac{e}{2}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda^a\sigma^\mu D^{(G,\omega,S)}_\mu\overline{\lambda}^b) \quad +\mathrm{h.c.} \qquad (3.162)$$

このラグランジアンの gaugino の超対称変換から次の変分を得る。

$$\delta\mathcal{L}_\lambda = \frac{e}{4\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu D_\mu^{(G,\omega,S)}(\widetilde{\tau}_{ab}\not{F}^b\xi)) - \frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda^a\sigma^\mu D_\mu^{(G,\omega,S)}(\not{F}_2^b\overline{\xi})) \quad + \mathrm{h.c.} \tag{3.163}$$

ここで現れたそれぞれの項について順に見ていこう。(3.163) の第 1 項は

$$\begin{aligned}
& \frac{e}{4\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu D_\mu^{(G,\omega)}(\widetilde{\tau}_{ab}\not{F}^b)\xi) + \frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu\not{F}^b D_\mu^{(G,\omega,S)}\xi) \\
= \quad & \frac{e}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}_\nu\xi)D_\mu^{(G,\omega)}(\widetilde{\tau}_{ab}\not{F}^{+b\mu\nu}) + \frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu\not{F}^b D_\mu^{(G,\omega,S)}\xi) \\
= \quad & -\frac{e}{2\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}F^{+b\mu\nu}D_\mu^{(G,\omega)}(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}_\nu\xi) + \frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu\not{F}^b D_\mu^{(G,\omega,S)}\xi)
\end{aligned} \tag{3.164}$$

上の式の一行目は微分の分配則を用いた。二行目へ移る際に第 1 項に対して自己双対テンソルが満足する公式（反）自己双対テンソルを含む式を扱う際に次の公式は便利である。

$$\sigma^\mu\not{X}_2^- = 2X^{-\mu\nu}\sigma_\mu, \quad \not{X}_2^+\sigma^\mu = 2\sigma_\nu X^{+\nu\mu}, \quad \overline{\sigma}^\mu\not{X}_2^+ = 2X^{+\mu\nu}\overline{\sigma}_\mu, \quad \not{X}_2^-\overline{\sigma}^\mu = 2\overline{\sigma}_\nu X^{-\nu\mu}. \tag{3.165}$$

を用い、三行目へ移る際には第 1 項を部分積分した。(3.163) の第 2 項は

$$\begin{aligned}
& -\frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda^a\sigma^\mu(D_\mu^{(G,\omega)}\not{F}_2^b)\overline{\xi}) - \frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda^a\sigma^\mu\not{F}_2^b D_\mu^{(G,\omega,S)}\overline{\xi}) \\
= \quad & +\frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda^a(D_\mu^{(G,\omega)}\not{F}_2^b)\sigma^\mu\overline{\xi}) - \frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda^a\sigma^\mu\not{F}_2^b D_\mu^{(G,\omega,S)}\overline{\xi}) \\
= \quad & +\frac{e}{4\sqrt{2}}(\lambda^a D_\mu^{(G,\omega)}(\widetilde{\tau}_{ab}\not{F}_2^b)\sigma^\mu\overline{\xi}) - \frac{e}{4\sqrt{2}}(\lambda^a\not{F}_2^b(\not{D}^{(G,\omega)}\widetilde{\tau}_{ab})\overline{\xi}) - \frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda^a\sigma^\mu\not{F}_2^b D_\mu^{(G,\omega,S)}\overline{\xi}) \\
= \quad & \frac{e}{2\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}F^{+b\mu\nu}D_\mu^{(G,\omega)}(\lambda^a\sigma^\nu\overline{\xi}) - \frac{e}{4\sqrt{2}}(\lambda^a\not{F}_2^b(\not{D}^{(G,\omega)}\widetilde{\tau}_{ab})\overline{\xi}) - \frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda^a\sigma^\mu\not{F}_2^b D_\mu^{(G,\omega,S)}\overline{\xi})
\end{aligned} \tag{3.166}$$

上の式の一行目は微分の分配則を用いた。二行目へ移る際にビアンキ恒等式 $\langle\not{D}\not{F}^a\rangle_3 = 0$ を用いて第 1 項の行列の順序を入れ替えた。三行目へ移る際には、次に行う部分積分の準備として $\not{F}_2$ に作用する微分を $\tau\not{F}$ の微分から τ の微分を取り除く形に変形した。最後に第 1 項に対して自己双対テンソルの満足する関係式 (3.165) を用いてから部分積分した。(3.164) の第 1 項と (3.166) の第 1 項はゲージ場運動項のゲージ場の超対称変換と相殺する。(3.166) の第 2 項は τ_{ab} が正則関数であれば $(\not{\partial}\phi^i)\overline{\xi}$ を含み、$\delta\chi^i$ に比例している。3 点結合項 $\mathcal{L}_3$ の χ^i の超対称変換と相殺する。残った項は (3.164) の第 2 項と (3.166) の第 3 項である。もう一度まとめて書くと、

$$\frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu\not{F}^b D_\mu^{(\omega,S)}\xi) - \frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda^a\sigma^\mu\not{F}_2^b D_\mu^{(\omega,S)}\overline{\xi}) + \mathrm{c.c.} \tag{3.167}$$

この項は $D_\mu^{(\omega,S)}\xi$ に比例しており $\delta_\psi^0\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}}$ によって相殺される。

3.4 荷電カイラル多重項

3.4.1 ゲージ変換とケーラー変換

大域的な超対称理論のところでもそうであったように、ゲージ変換は必ずしもケーラーポテンシャルを不変に保つ必要は無く、ケーラー変換の分だけなら変化させても良い。超重力理論においてはケーラー変換は $\mathrm{U}(1)_R$ 対称性と関係しているため、このことは重要である。まず、ゲージ変換とケーラー変換についての幾つかの関係式を思い出そう。

Soryushiron Kenkyu

- ゲージ変換はケーラーポテンシャルを必ずしも不変にせず、(2.241) に与えられているようにケーラー変換の分だけ変化させる。

$$\delta_{\text{gauge}}K = \epsilon^a(t_a^i K_i + t_a^{\bar{i}} K_{\bar{i}}) = -4\epsilon^a(f_a + f_a^*) \tag{3.168}$$

- ケーラー変換は $\mathrm{U}(1)_R$ 変換を伴う。変換則は (3.74) に与えられている。例えば R 電荷 1 の変換パラメータに対しては

$$K(\phi,\overline{\phi}) \to K(\phi,\overline{\phi}) - 4f(\phi) - 4\overline{f}(\overline{\phi}), \quad \xi \to \exp\frac{k^2}{2}[f(\phi) - \overline{f}(\overline{\phi})]\xi. \tag{3.169}$$

となる。

- 超ポテンシャルも R-電荷を持つから、ケーラー変換 (3.169) のもとで次のように変換される必要がある。

$$W \to W' = e^{2k^2 f}W. \tag{3.170}$$

(3.168) と (3.169) この二つを組み合わせると、ゲージ変換は次のようにケーラー変換を通して余分な変換をする。

$$\xi \to \exp\left[\frac{k^2}{2}\epsilon^a(f_a - f_a^*)\right]\xi. \tag{3.171}$$

この変換パラメータが定数ではないため、微分を共変微分にする必要がある。ξ の微分を見てみると

$$\delta(\partial\xi) = \frac{k^2}{2}\epsilon^a(f_a - f_a^*)\partial\xi + \frac{k^2}{2}\epsilon^a D_\mu^{(G)}(f_a - f_a^*)\partial\xi + \frac{k^2}{2}(D_\mu^{(G)}\epsilon^a)(f_a - f_a^*)\partial\xi \tag{3.172}$$

右辺の 3 つの項のうち、第 2 項は f_a がスカラー多様体上の関数であるために現れる項であり、(3.66) で定義されるケーラー接続によって考慮されている。ただし S_μ の中の微分を共変微分に置き換えておく必要がある。ここでは (3.66) の微分を共変微分で置き換えたものを S_μ^0 としておく。

$$S_\mu^0 = \frac{k^2 i}{8}(K_i D_\mu^{(G)}\phi^i - K_{\bar{i}} D_\mu^{(G)}\overline{\phi}^{\bar{i}}) \tag{3.173}$$

(3.172) の右辺第 3 項は ϵ が時空座標に依存するために現れる項である。この部分をなくすために共変微分は S_μ^0 以外に別の項が必要で、次のように取る必要がある。

$$D_\mu = \partial_\mu - iS_\mu^0 - \frac{k^2}{2}(f_a - f_a^*)A_\mu^a \tag{3.174}$$

そこで、この項まで含めた S_μ を次のように定義する。

$$S_\mu = S_\mu^0 - \frac{ik^2}{2}(f_a - f_a^*)A_\mu^a = \frac{ik^2}{8}(K_i\partial_\mu\phi^i - K_{\bar{i}}\partial_\mu\overline{\phi}^{\bar{i}}) + \frac{k^2}{4}\mu_a A_\mu^a \tag{3.175}$$

ただし、ゲージ場を含む項をまとめたときにその係数として得られる μ_a は (2.248) に与えられているモーメントマップである。

超ポテンシャルが 0 で無いときには (3.168) と (3.170) を組み合わせることによりゲージ変換が引き起こすケーラー変換によって超ポテンシャルが次のように変換されなければならない。

$$W \to W' = e^{2k^2\epsilon^a f_a}W. \tag{3.176}$$

この変換が場 ϕ^i に対するゲージ変換によって自動的に実現されなければならない。このことは

$$|\mathcal{W}|^2 = e^{k^2 K/2}|W|^2 \tag{3.177}$$

がゲージ不変であるということと同じである。また、この条件は次のように書くこともできる。

$$t_a^i D_i W = \frac{ik^2}{2} W \mu_a \tag{3.178}$$

W の共変微分は $D_i W = \partial_i W + (k^2/2) K_i W$ であることを用いた。

この関数がゲージ不変であるようにゲージ変換が決められていれば、W のゲージ変換 (3.176) からスカラー場の正則関数 f_a が自動的に定まる。これは理論の FI パラメータの値も（スカラー場の原点の取り方に起因する任意性を除き）決まることを意味している。超重力理論においては超ポテンシャル W は必ずしもゲージ不変でなくても良いため、それぞれの場の電荷に対する条件が一つ減るが、そのかわり FI パラメータは独立なパラメータではなく、W のゲージ変換性から一意的に決定される。

特に、W がゲージ変換の下で線形に変換されるとき、その電荷が次のように FI パラメータに比例する。

$$W \to W' = e^{2iq_a\epsilon^a} W, \quad q_a = \frac{k^2}{4}\zeta_a \tag{3.179}$$

3.4.2 FI パラメータと R-対称性のゲージ化

前の節では、カイラル多重項がある場合に、スカラー多様体上のゲージ変換とケーラー変換、そして $\mathrm{U}(1)_R$ 変換の関係から幾つかの結論を導いた。そのうちの幾つかは、カイラル多重項が無い場合であってもやはり成り立つ。

カイラル多重項が n 個ある場合、スカラー多様体は複素 n 次元である。カイラル多重項が無い場合には 0 次元、すなわち点状のスカラー多様体を考えることができる。このときケーラーポテンシャル K はその点上の関数、すなわち単なる数であり、ゲージ不変である。従って、ケーラー変換を与える関数 f_a はその実部が 0 である定数であり、次のように置くことができる。

$$f_a = \frac{i}{4}\zeta_a. \tag{3.180}$$

実パラメータ ζ_a は FI パラメータに他ならない。

変換パラメータ ξ など、$\mathrm{U}(1)_R$ 電荷を持つものに対してゲージ変換は (3.171) に従って次のように作用する。

$$\xi \to \exp(iq_a\epsilon^a)\xi. \tag{3.181}$$

ただし q_a は ζ_a と次のように関係している。

$$\zeta_a = \frac{4}{k^2} q_a \tag{3.182}$$

つまり、ゲージ場 A_μ^a は ξ と電荷 q_a で結合している。言い換えると R-対称性がゲージ化されており、R-電荷はゲージ場 $q_a A_\mu^a$ に結合している。

カイラル多重項が無い場合、超ポテンシャル W は単なる定数でしかありえないから、$\zeta_a \neq 0$ のときに (3.179) の変換性と矛盾しないためには $W = 0$ でなければならない。

上で与えた FI パラメータと R-対称性のゲージ化の関係を、カイラル多重項が無い場合にスカラー多様体の上のケーラー変換などを介さずに直接求めておこう。

前の節で与えた、重力多重項とベクトル多重項から成る系は、次の $\mathrm{U}(1)_R$ 対称性のもとで不変である。

$$\psi_\mu \to e^{i\alpha}\psi_\mu, \quad \lambda^a \to e^{i\alpha}\lambda^a, \quad \xi \to e^{i\alpha}\xi. \tag{3.183}$$

そこで、この対称性をゲージ化することを考えよう。

通常、大域的な対称性をゲージ化する場合、もとの理論にはなかった新たなゲージ場を導入する。しかし超重力理論においては、新たに場を導入すると超対称変換のもとでの不変性が自明ではなくなってしまう。そこでここでは、もともとゲージ場を含む超重力理論から出発し、荷電場との結合を導入したうえで再びネーター処方によって超対称なラグランジアンを得るという手順を踏むことにする。

まず、荷電場とゲージ場の相互作用を導入するために、ゲージ変換のもとでフェルミオンに作用する共変微分を次のように変更する。

$$D_\mu^{(\omega)}\xi \to D_\mu^{(\omega,G)}\xi = (D_\mu^{(\omega)} - iq_a v_\mu^a)\xi \tag{3.184}$$

この変更によって、(3.25) にある共変微分の交換関係から、次のようにゲージ場の場の強さに比例する項が現れる。

$$[D_\mu^{(G,\omega)}, D_\nu^{(G,\omega)}]\xi = \left(\frac{1}{4}R_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\rho\sigma} - iq_a F_{\mu\nu}^a\right)\xi \tag{3.185}$$

つまり、ラグランジアンの超対称変換は次の項を余分に与える。

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= -\frac{e}{2k}(\psi_\mu\sigma^{\mu\nu\rho}\bar{\xi})q_a F_{\nu\rho}^a \quad + \mathrm{c.c.} \\
&= -\frac{e}{2k}q_a(\psi_\mu\sigma^\mu \not{F}_2^a\bar{\xi}) - \frac{e}{2k}q_a(\psi_\mu \not{F}_2^a\sigma^\mu\bar{\xi}) \quad + \mathrm{c.c.}
\end{aligned} \tag{3.186}$$

この第 1 項は

$$\mathcal{L}_{\psi\lambda} = -\frac{\sqrt{2}e}{k}q_a(\psi_\mu\sigma^\mu\bar{\lambda}^a) + \mathrm{c.c.} \tag{3.187}$$

を導入すれば、この項の λ^a の超対称変換で相殺できる。第 2 項は $\mathcal{L}_{J\text{vector}}$ と比較すると、λ の変換則に次の項を新たに導入すれば $\delta'_\lambda\mathcal{L}_{J\text{vector}}$ によって相殺できる。

$$\delta'\lambda^a = \frac{\sqrt{2}i}{k^2}(\mathrm{Im}\,\tilde{\tau}^{-1})^{ab}q_b\xi \tag{3.188}$$

これらの変更によって新たに現れる変分のうち、次の二つは相殺する。

$$\delta'_\lambda\mathcal{L}_\lambda + \delta_\psi\mathcal{L}_{\psi\lambda} = 0. \tag{3.189}$$

残るは次の変分である。

$$\delta'\mathcal{L}_{\psi\lambda} = \frac{2ie}{k^3}(\psi_\mu\sigma^\mu\bar{\xi})(\mathrm{Im}\,\tilde{\tau}^{-1})^{ab}q_a q_b + \mathrm{c.c.} = \frac{8e}{k^4}e^\mu_{\hat{m}}\delta e^{\hat{m}}_\mu(\mathrm{Im}\,\tilde{\tau}^{-1})^{ab}q_a q_b \tag{3.190}$$

これは次の宇宙項の導入で相殺できる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{c.c.}} = -\frac{8e}{k^4}(\mathrm{Im}\,\tilde{\tau}^{-1})^{ab}q_a q_b \tag{3.191}$$

λ^a の変換則の変化 (3.188) はちょうどベクトル多重項の補助場 D^a が存在したときに現れるものと同じ形をしている。(2.160) と比較してみると、補助場の値が次のように与えられると、(3.188) が現れることがわかる。

$$D^a = \frac{4}{k^2}(\mathrm{Im}\,\tilde{\tau}^{-1})^{ab}q_b \tag{3.192}$$

さらにこの式を (2.196) と比較すると、(3.182) に与えられた FI パラメータがあると D^a がこの値になることがわかる。また、宇宙項 (3.191) は補助場 D^a が (3.192) の値を取ることによるポテンシャル項に他ならない。

3.4.3　ラグランジアンと変換則

もっとも一般的なケーラーポテンシャルで与えられるカイラル多重項の運動項を重力に結合することを考えよう。実は、答えから先に行ってしまうと、中性カイラル場の場合の超重力理論のラグランジアンを適当にゲージ化したものに大域的な超対称ゲージ理論のラグランジアンから予想される D-term ポテンシャル項や湯川相互作用項などを一般座標変換について共変化したものを付け加えておけば、局所的超対称変換で不変なラグランジアンがほとんど得られる。唯一これまでの計算で現れていないのは $\mathcal{L}_{JD}$ である。ケーラーポテンシャルや超ポテンシャルはゲージ変換のもとで §3.4.1 で述べたような性質を持っているものとする。ラグランジアンは以下の 19 の部分の和である。

まず、重力部分は次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_e = \frac{e}{k^2}R, \tag{3.193}$$

$$\mathcal{L}_\psi = ie(\psi_\mu\sigma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega,S)}\overline{\psi}_\rho). \tag{3.194}$$

これはカイラル多重項が電荷を持たない場合と形式的に同じであるが、共変微分に含まれる S_μ は (3.175) で定義されるゲージ場を含むものである。ベクトル多重項の運動項は大域的な場合のラグランジアン $\mathcal{L} = -(1/2)\,\mathrm{Im}[\widetilde{\tau}_{ab}W^aW^b]$（ワイル表示）を一般座標変換などについて共変化した次のものである。

$$\mathcal{L}_v = -\frac{e}{4}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b} - \frac{e}{8}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau}_{ab})i\sigma^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^b_{\rho\sigma}, \tag{3.195}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\lambda &= \frac{ie}{2}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\Big[(\lambda^a\sigma^\mu D_\mu^{(G,\omega,S)}\overline{\lambda}^b) - (D_\mu^{(G,\omega,S)}\lambda^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^b)\Big]\\ &\quad + \frac{e}{2}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau}_{ab})D_\mu^{(G)}(\lambda^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^b),\end{aligned} \tag{3.196}$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{ie}{2\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab,i}(\lambda^a F_2^b\chi^i) \quad +\mathrm{h.c.} \tag{3.197}$$

カイラル多重項の運動項は $\mathcal{L} = (1/2)[K(\Phi,\Phi^*e^{-2V})]_D$ を一般座標変換のもとで共変化した次のものである。

$$\mathcal{L}_\phi = -eK_{i\bar{j}}D_\mu^{(G)}\phi^i D^{(G)\mu}\overline{\phi}^{\bar{j}}, \tag{3.198}$$

$$\mathcal{L}_\chi = ieK_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu D_\mu^{(G,M,\omega,S)}\overline{\chi}^{\bar{j}}), \tag{3.199}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} = \sqrt{2}et_{ai}(\lambda^a\chi^i) + \sqrt{2}e(\overline{\chi}^{\bar{i}}\overline{\lambda}^a)t_{a\bar{i}}. \tag{3.200}$$

カイラル多重項とゲージ場との結合によって現れる D-term は次の二つ。どちらも補助場 D を消去して得られる項である。

$$\mathcal{L}_D = -\frac{e}{2}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_a\mu_b, \tag{3.201}$$

$$\mathcal{L}_{D\lambda\chi} = \frac{e}{2\sqrt{2}}(\widetilde{\tau}_{ab,i})(\chi^i\lambda^b)(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ac}\mu_c \quad +\mathrm{h.c.} \tag{3.202}$$

超ポテンシャル項 $\mathcal{L} = -[W(\Phi)]_F + \mathrm{c.c.}$ から現れるのは以下の 3 つ。ただし W は $\mathcal{W} = e^{k^2K/4}W$ で置き換えられる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{pot}} = -e(D_i^{(S)}\mathcal{W})K^{i\bar{j}}(D_{\bar{j}}^{(S)}\overline{\mathcal{W}}), \tag{3.203}$$

$$\mathcal{L}_{\chi\mathrm{mass}} = \frac{e}{2}(D_i^{(M,S)}D_j^{(S)}\mathcal{W})(\chi^i\chi^j) \quad +\mathrm{h.c.}, \tag{3.204}$$

$$\mathcal{L}_{\lambda\mathrm{mass}} = +\frac{ie}{4}K^{i\bar{j}}\widetilde{\tau}_{ab,i}(\lambda^a\lambda^b)\overline{\mathcal{W}}_{\bar{j}} \quad +\mathrm{h.c.} \tag{3.205}$$

大域的な理論には存在しない、カレントと重力との結合を表すネーター項が以下の 4 つ。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{J\text{vector}} &= \frac{kie}{2\sqrt{2}}(\operatorname{Im}\widetilde{\tau}_{ab})\Big[(\psi_\mu \mathcal{F}_2^b \sigma^\mu \overline{\lambda}^a) + (\lambda^a \sigma^\mu \mathcal{F}_2^b \overline{\psi}_\mu)\Big], &(3.206)\\
\mathcal{L}_{J\text{chiral}} &= \frac{ke}{2}K_{i\bar{j}}(\chi^i \sigma^\mu \overline{\sigma}^\lambda \psi_\mu)(D_\lambda^{(G)}\overline{\phi}^{\bar{j}}) \quad + \text{h.c.}, &(3.207)\\
\mathcal{L}_{JW} &= -\frac{kie}{2}(D_i^{(S)}\mathcal{W})(\chi^i \sigma^\mu \overline{\psi}_\mu) \quad + \text{h.c.}, &(3.208)\\
\mathcal{L}_{JD} &= -\frac{ke}{2\sqrt{2}}(\psi_\mu \sigma^\mu \overline{\lambda}^a)\mu_a \quad + \text{h.c.}, &(3.209)
\end{aligned}$$

この中で最後の項はこれまでの計算では現れてない項である。これはゲージ多重項の補助場 D を含む超対称カレントに対するネーター項である。さらに、超ポテンシャルが 0 でない場合に次のグラビティーノ質量項と宇宙項が必要である。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\psi\text{mass}} &= -\frac{k^2 e}{4}\mathcal{W}(\overline{\psi}_\mu \overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu) \quad + \text{h.c.}, &(3.210)\\
\mathcal{L}_{\text{cc}} &= \frac{3k^2 e}{2}e^{k^2 K/2}|\mathcal{W}|^2 &(3.211)
\end{aligned}$$

超場を用いた超重力理論の構成においてはこれらは重力多重項の補助場を消去したときに現れる項である。

変換則についても、大域的な場合に得られた結果と、カイラル多重項が中性な場合の超重力理論の結果から簡単に推測することができる。

重力多重項の変換則は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta e^\mu_{\widehat{m}} &= \frac{k}{4}(-i\psi_{\widehat{m}}\sigma^\mu \overline{\xi} + i\overline{\psi}_{\widehat{m}}\overline{\sigma}^\mu \xi), &(3.212)\\
\delta\psi_\mu &= \frac{1}{k}D_\mu^{(\omega,S)}\xi + \frac{ik}{4}\mathcal{W}\sigma_\mu \overline{\xi}. &(3.213)
\end{aligned}$$

ベクトル多重項の変換則は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta v_\mu^a &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}\xi\sigma_\mu \overline{\lambda}^a + \frac{i}{2\sqrt{2}}\lambda^a \sigma_\mu \overline{\xi}, &(3.214)\\
\delta\lambda^a &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{F}_2^a \xi + \frac{i}{2\sqrt{2}}(\operatorname{Im}\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_b \xi. &(3.215)
\end{aligned}$$

カイラル多重項の変換則は

$$\begin{aligned}
\delta\phi^i &= \frac{1}{2}\xi\chi^i, &(3.216)\\
\delta\chi^i &= -\frac{i}{2}\sigma^\mu \overline{\xi} D_\mu^{(G)}\phi^i + \frac{1}{2}\xi K^{i\bar{j}}D_{\bar{j}}^{(S)}\overline{\mathcal{W}}. &(3.217)
\end{aligned}$$

ただし、t_a^i はゲージ変換を表すスカラー多様体上のキリングベクトルであり、μ_a は (2.248) に与えられたモーメントマップである。共変微分 $D_\mu^{(G)}$ は $D_\mu^{(G)}\phi^i = \partial_\mu \phi^i - A_\mu^a t_a^i$ のように定義される。

3.4.4 変分計算

ここでは前にあげたラグランジアンが実際に局所的超対称変換のもとで不変であることを確認する。以下の計算の都合上、フェルミオンの変換則は次のように補助場由来の部分とそれ以外の部分

に分けておく。

$$
\left\{\begin{array}{lcl} \delta^0_\psi \psi_\mu &=& \frac{1}{k} D_\mu^{(\omega,S)}\xi \\ \delta'_\psi \psi_\mu &=& \frac{ik}{4}\mathcal{W}\sigma_\mu\overline{\xi} \end{array}\right.
\quad
\left\{\begin{array}{lcl} \delta^0_\lambda \lambda^a &=& -\frac{1}{2\sqrt{2}} \not{F}^a_2\xi \\ \delta'_\lambda \lambda^a &=& \frac{i}{2\sqrt{2}} (\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_b\xi \end{array}\right.
\quad
\left\{\begin{array}{lcl} \delta^0_\chi \chi^i &=& -\frac{i}{2}\sigma^\mu\overline{\xi} D_\mu^{(G)}\phi^i \\ \delta'_\chi \chi^i &=& \frac{1}{2}\xi K^{i\overline{j}} D_{\overline{j}}^{(S)}\overline{\mathcal{W}} \end{array}\right.
\tag{3.218}
$$

まず、ゲージ多重項についての次の相殺は荷電カイラル多重項が無かったときと同じである。

$$\delta^0_\lambda\mathcal{L}_\lambda + \delta_v\mathcal{L}_v + \delta^0_\chi\mathcal{L}_3 + \delta^0_\psi\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}} = 0, \tag{3.219}$$

$$\delta^0_\lambda\mathcal{L}_3 + \delta_\phi\mathcal{L}_v = 0, \tag{3.220}$$

$$\delta^0_\lambda\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}} + \delta_e\mathcal{L}_v = 0, \tag{3.221}$$

$$\delta'_\chi\mathcal{L}_3 + \delta^0_\lambda\mathcal{L}_{\lambda\mathrm{mass}} = 0. \tag{3.222}$$

次に、カイラル多重項と関係する部分で、超ポテンシャルを含まない部分に注目しよう。

$$\delta_\phi\mathcal{L}_\phi + \delta^0_\chi\mathcal{L}_\chi + \delta^0_\lambda\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} + \delta^0_\psi\mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}} = 0, \tag{3.223}$$

$$\delta_v\mathcal{L}_\phi + \delta^0_\chi\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} + \delta'_\lambda\mathcal{L}_\lambda + \delta^0_\chi\mathcal{L}_{D\lambda\chi} + \delta^0_\psi\mathcal{L}_{JD} = 0, \tag{3.224}$$

$$\delta'_\lambda\mathcal{L}_3 + \delta^0_\lambda\mathcal{L}_{D\lambda\chi} = 0, \tag{3.225}$$

$$\delta_\phi\mathcal{L}_D + \delta'_\lambda\mathcal{L}_{D\lambda\chi} + \delta'_\lambda\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} = 0, \tag{3.226}$$

$$\begin{aligned} &(\delta^0_\chi\mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}} + \delta'_\lambda\mathcal{L}_{JD} + \delta^0_\lambda\mathcal{L}_{JD} + \delta'_\lambda\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}}) \\ &\qquad +(\delta_e\mathcal{L}_\phi + \delta_e\mathcal{L}_D) + (\delta_e\mathcal{L}_e + \delta^0_\psi\mathcal{L}_\psi) = 0, \end{aligned} \tag{3.227}$$

(3.223) を示そう。カイラル多重項が中性な場合の (3.55) と同じ計算を行おう。中性なカイラル多重項の場合と異なるのは ϕ の二階微分はカイラル多重項がゲージ場に結合している場合には可換ではなく、今度はゲージ場の強さに二つの微分は、ゲージ場の強さに比例する部分を与える。

$$D_\mu^{(G,M,\omega)} D_\lambda^{(G)}\overline{\phi}^{\overline{j}} - D_\lambda^{(G,M,\omega)} D_\mu^{(G)}\overline{\phi}^{\overline{j}} = -F_{\mu\lambda} t_a^{\overline{j}} \tag{3.228}$$

こうして現れる $F^a_{\mu\nu}$ が λ の超対称変換に比例する項を与える。この結果次の式を得る。

$$\delta_\phi\mathcal{L}_\phi + \delta^0_\chi\mathcal{L}_\chi = -\sqrt{2}e t_{ai}(\chi^i\delta^0_\lambda\lambda^a) - \frac{e}{2}K_{i\overline{j}}(\chi^i\sigma^\mu\overline{\sigma}^\lambda D_\mu^{(\omega)}\xi)(D_\lambda^{(G,S)}\overline{\phi}^{\overline{j}}) \quad +\mathrm{h.c.} \tag{3.229}$$

新たに現れた $\delta^0_\lambda\lambda^a$ を含む項は湯川項 $\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}}$ の δ^0_λ 変分によって相殺される。第 2 項は $\delta^0_\psi\mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}}$ によって相殺される。以上で (3.223) が示された。

次に (3.224) を示そう。湯川項の δ^0_χ 変分は新たに次の項を与える。

$$\delta^0_\chi\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} = -\frac{ie}{\sqrt{2}}(\lambda^a\sigma_\mu\overline{\xi}) t_{ai} D^{(G)\mu}\phi^i \quad +\mathrm{h.c.} \tag{3.230}$$

これは部分的に $\mathcal{L}_\phi$ の共変微分中に含まれるゲージ場の変分、

$$\begin{aligned} \delta_v\mathcal{L}_\phi &= e\delta v^a_\mu t_{ai} D^{(G)\mu}\phi^i \quad +\mathrm{h.c.} \\ &= \frac{ie}{2\sqrt{2}}\left(-\xi\sigma^\mu\overline{\lambda}^a + \lambda^a\sigma^\mu\overline{\xi}\right) t_{ai} D_\mu^{(G)}\phi^i \quad +\mathrm{h.c.} \end{aligned} \tag{3.231}$$

と相殺して、次の変分が残る。

$$\begin{aligned} \delta_v\mathcal{L}_\phi + \delta^0_\chi\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} &= -\frac{ie}{2\sqrt{2}}\left(\xi\sigma_\mu\overline{\lambda}^a + \lambda^a\sigma_\mu\overline{\xi}\right) t_{ai} D^{(G)\mu}\phi^i \quad +\mathrm{h.c.} \\ &= -\frac{e}{2\sqrt{2}}\left(\xi\sigma_\mu\overline{\lambda}^a + \lambda^a\sigma_\mu\overline{\xi}\right) D_\mu^{(G)}\mu_a \end{aligned} \tag{3.232}$$

$\delta'_\lambda\lambda$ の導入によって、ベクトル多重項のラグランジアン中の λ を含む項から次の変分を得る。

$$\begin{aligned}\delta'_\lambda\mathcal{L}_\lambda &= -\frac{e}{2\sqrt{2}}\mu_a(\xi\sigma^\mu D^{(G,\omega)}_\mu\overline{\lambda}^a)\\ &\quad -\frac{ie}{4\sqrt{2}}D^{(G)}_\mu(\widetilde{\tau}^*_{ab})(\xi\sigma^\mu\overline{\lambda}^b)(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ac}\mu_c \quad +\mathrm{h.c.},\end{aligned} \tag{3.233}$$

この第 2 項は次のものと相殺する。

$$\delta^0_\chi\mathcal{L}_{D\lambda\chi} = -\frac{ie}{4\sqrt{2}}(\widetilde{\tau}_{ab,i})(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\lambda^b)(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ac}\mu_c D^{(G)}_\mu\phi^i \quad +\mathrm{h.c.} \tag{3.234}$$

(3.233) の第 1 項と (3.232) の和は部分積分をすることで $D^{(\omega,S)}_\mu\xi$ に比例した項を与えるが、その項は $\delta^0_\psi\mathcal{L}_{JD}$ で相殺できる。従って (3.224) が示された。

(3.225) のように相殺する二つの項は次のように与えられる。

$$\delta'_\lambda\mathcal{L}_3 = -\delta^0_\lambda\mathcal{L}_{D\lambda\chi} = -\frac{e}{8}\widetilde{\tau}_{ab,i}(\xi\cancel{F}^b_2\chi^i)(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ac}\mu_c \quad +\mathrm{h.c.} \tag{3.235}$$

(3.226) を示そう。D-term ポテンシャル項の変分は

$$\begin{aligned}\delta_\phi\mathcal{L}_D &= -\frac{e}{2}\delta_\phi(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_a\mu_b - e(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_a\delta_\phi\mu_b\\ &= -\frac{ie}{4}(\widetilde{\tau}_{ab,i}\delta\phi^i)(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ac}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{bd}\mu_c\mu_d\\ &\quad +ie(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_a\delta\overline{\phi}^{\overline{k}}t_{a\overline{k}} \quad +\mathrm{h.c.},\end{aligned} \tag{3.236}$$

となるが、第 1 項は

$$\delta'_\lambda\mathcal{L}_{D\lambda\chi} = \frac{e}{8}(\widetilde{\tau}_{ab,i})(\chi^i\xi)(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ac}\mu_c(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{bd}\mu_d \quad +\mathrm{h.c.}, \tag{3.237}$$

第 2 項は

$$\delta'_\lambda\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} = \frac{ie}{2}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_b[t_{ai}(\xi\chi^i) - (\overline{\chi}^{\overline{i}}\overline{\xi})t_{a\overline{i}}] = e(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_a\delta\mu_b. \tag{3.238}$$

で相殺される。従って (3.226) が示された。

(3.227) を示すためにネーター項の次の変分を見てみよう。

$$\begin{aligned}\delta^0_\chi\mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}} &= -\frac{kie}{4}(\overline{\xi}\sigma^\kappa\sigma^\mu\overline{\sigma}^\lambda\psi_\mu)K_{i\overline{j}}(D^{(G)}_\kappa\phi^i)(D^{(G)}_\lambda\overline{\phi}^{\overline{j}}) \quad +\mathrm{h.c.}, & (3.239)\\ \delta'_\lambda\mathcal{L}_{JD} &= -\frac{ke}{8}(-i\psi_\mu\sigma^\mu\overline{\xi} + i\xi\sigma^\mu\overline{\psi}_\mu)(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_a\mu_b, & (3.240)\\ \delta^0_\lambda\mathcal{L}_{JD} &= \frac{ke}{8}(\psi_\mu\sigma^\mu\cancel{F}^a_2\overline{\xi} - \xi\cancel{F}^a_2\sigma^\mu\overline{\psi}_\mu)\mu_a, & (3.241)\\ \delta'_\lambda\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}} &= \frac{ke}{8}\mu_a(\psi_\mu\cancel{F}^a_2\sigma^\mu\overline{\xi} - \xi\sigma^\mu\cancel{F}^a_2\overline{\psi}_\mu) & (3.242)\end{aligned}$$

これらをすべて加えると、新たに現れた変分は次のように二つの部分にまとまる。

$$\delta^0_\chi\mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}} + \delta'_\lambda\mathcal{L}_{JD} + \delta^0_\lambda\mathcal{L}_{JD} + \delta'_\lambda\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}} = eT^{\widehat{m}}_\nu\delta e^\nu_{\widehat{m}} + \frac{e}{2k}S_{\nu\lambda}(\psi^\mu\overline{\sigma}^{\mu\nu\lambda}\overline{\xi} + \overline{\psi}_\mu\sigma^{\mu\nu\lambda}\xi). \tag{3.243}$$

ただし $T_{\mu\nu}$ と $S_{\mu\nu}$ はそれぞれスカラー場のエネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = K_{i\overline{j}}[(D^{(G)}_\mu\phi^i)(D^{(G)}_\nu\overline{\phi}^{\overline{j}}) + (D^{(G)}_\nu\phi^i)(D^{(G)}_\mu\overline{\phi}^{\overline{j}}) - g_{\mu\nu}(D^{(G)}_\alpha\phi^i)(D^{(G)\alpha}\overline{\phi}^{\overline{j}})] - g_{\mu\nu}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_a\mu_b \tag{3.244}$$

および次のように定義される反対称テンソルである。

$$S_{\mu\nu} = -\frac{ik^2}{4} K_{i\bar{j}} [(D_\mu^{(G)}\phi^i)(D_\nu^{(G)}\overline{\phi}^{\bar{j}}) - (D_\nu^{(G)}\phi^i)(D_\mu^{(G)}\overline{\phi}^{\bar{j}})] + \frac{k^2}{4}\mu_a F_{\mu\nu}^a \tag{3.245}$$

変分 (3.243) の第 1 項はエネルギー運動量テンソルを含み、ちょうどスカラー場の運動項 $\mathcal{L}_\phi$ およびポテンシャル項 $\mathcal{L}_D$ に含まれる多脚場の変分と相殺する。一方 (3.243) の第 2 項は、カイラル多重項が中性な場合同様にグラビティーノの運動項の超対称変換で現れた (3.25) の共変微分の交換関係から現れる項と相殺する。実際反対称テンソル $S_{\mu\nu}$ は 2-形式として表わせば次のような閉形式になる。

$$S_2 = -\frac{ik^2}{4} K_{i\bar{j}} (D^{(G)}\phi^i) \wedge (D^{(G)}\overline{\phi}^{\bar{j}}) + \frac{k^2}{4}\mu_a F_2^a = dS_1 \tag{3.246}$$

S_1 は (3.175) で定義されている。従って、グラビティーノの運動項の変分 (3.25) に現れた共変微分の交換関係から、アインシュタイン作用の変分と相殺する曲率テンソルを含む項のほかに、ちょうど (3.243) の第 2 項を相殺する項が現れる。従って (3.227) の相殺が示された。

ポテンシャル項に関係した部分の計算に移ろう。次の相殺は §3.2.4 で与えた中性カイラル多重項の場合の計算とほとんど同じである。違いはスカラー場の微分 $\partial_\mu\phi^i$ が共変微分 $D_\mu^{(G)}\phi^i$ に置き換わるだけであるので、ここでは計算は省略する。

$$\delta'_\chi\mathcal{L}_\chi + \delta^0_\chi\mathcal{L}_{\chi\mathrm{mass}} + \delta^0_\psi\mathcal{L}_{JW} + \delta'_\psi\mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}} = 0, \tag{3.247}$$

$$\delta'_\chi\mathcal{L}_{\chi\mathrm{mass}} + \delta_\phi\mathcal{L}_{\mathrm{pot}} + \delta'_\psi\mathcal{L}_{JW} + \delta_\phi\mathcal{L}_{\mathrm{cc}} = 0, \tag{3.248}$$

$$\delta^0_\chi\mathcal{L}_{JW} + \delta'_\chi\mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}} + \delta^0_\psi\mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} + \delta'_\psi\mathcal{L}_\psi = 0, \tag{3.249}$$

$$\delta'_\chi\mathcal{L}_{JW} + \delta_e\mathcal{L}_{\mathrm{pot}} = 0, \tag{3.250}$$

$$\delta'_\psi\mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} + \delta_e\mathcal{L}_{\mathrm{cc}} = 0, \tag{3.251}$$

中性カイラル多重項の場合にはなかったのは次の 3 つである。

$$\delta'_\chi\mathcal{L}_{D\lambda\chi} + \delta'_\lambda\mathcal{L}_{\lambda\mathrm{mass}} = 0, \tag{3.252}$$

$$\delta'_\chi\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} + \delta'_\psi\mathcal{L}_{JD} = 0,, \tag{3.253}$$

$$\delta'_\psi\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}} = 0. \tag{3.254}$$

(3.252) で相殺する二つの項は次のように与えられる。

$$\delta'_\chi\mathcal{L}_{D\lambda\chi} = -\delta'_\lambda\mathcal{L}_{\lambda\mathrm{mass}} = \frac{e}{4\sqrt{2}}(\widetilde{\tau}_{ab,i})K^{i\bar{k}}D^{(S)}_{\bar{j}}\overline{\mathcal{W}}(\lambda^b\xi)(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ac}\mu_c \quad + \mathrm{h.c.} \tag{3.255}$$

(3.253) のように相殺する二つの項は次のように与えられる。

$$\delta'_\chi\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} = -\delta'_\psi\mathcal{L}_{JD} = -\frac{k^2 ie}{2\sqrt{2}}\overline{\mathcal{W}}(\lambda^a\xi)\mu_a \quad + \mathrm{h.c.} \tag{3.256}$$

(3.254) は恒等式 $\sigma_\mu F_2^a\sigma^\mu = 0$ を用いることでそれだけで 0 になることが示される。

以上ですべての項が相殺され、局所的超対称変換のもとで不変な作用を得る事ができた。

3.4.5 不変関数 G で書かれたラグランジアン

最後にケーラー変換を用いて $W = 2/k^3$ というゲージ固定を行おう。このゲージ変換の結果得られた K を特に G と書くことにする。この場合 W の共変微分が

$$D_i^{(S)}W = \frac{1}{k}G_i, \quad D_i^{(M,S)}D_j^{(S)}W = \frac{1}{k}\left(G_{ij} - G_{ij\bar{k}}G^{\bar{k}l}G_l + \frac{k^2}{2}G_iG_j\right). \tag{3.257}$$

さらに、R-電荷が R の場に対する共変微分が

$$D_\mu^{(S)} = \partial_\mu + \frac{Rk^2}{8}(G_i D_\mu \phi - G_{\bar{i}} D_\mu \overline{\phi}^{\bar{i}}) \tag{3.258}$$

と与えられることを用いれば、関数 G のみを含む次のラグランジアンが得られる。これは [6] に与えられているラグランジアンのフェルミオンの 2 次までのオーダーと一致する。(ただしここで用いているケーラーポテンシャル G は [6] で用いている $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G} = -G/2$ の関係にある。)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_e &= \frac{e}{k^2}R, && (3.259)\\
\mathcal{L}_\psi &= ie(\psi_\mu \sigma^{\mu\nu\rho} D_\nu \overline{\psi}_\rho) \\
&\quad -ik^2 e\frac{1}{8}(G_i D_\nu \phi - G_{\bar{i}} D_\nu \overline{\phi}^{\bar{i}})(\psi_\mu \sigma^{\mu\nu\rho}\overline{\psi}_\rho), && (3.260)\\
\mathcal{L}_v &= -\frac{e}{4}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b} - \frac{e}{8}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau}_{ab})i\sigma^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^b_{\rho\sigma}, && (3.261)\\
\mathcal{L}_\lambda &= \frac{ie}{2}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\Big[(\lambda^a\sigma^\mu D_\mu^{(G,\omega)}\overline{\lambda}^b) - (D_\mu^{(G,\omega)}\lambda^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^b)\Big] \\
&\quad +\frac{e}{2}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau}_{ab})D_\mu^{(G)}(\lambda^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^b) \\
&\quad -\frac{k^2 ie}{8}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})(G_i D_\mu \phi^i - G_{\bar{i}} D_\mu \overline{\phi}^{\bar{i}})(\lambda^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^b), && (3.262)\\
\mathcal{L}_3 &= \frac{ie}{2\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab,i}(\lambda^a \not{F}^b_2 \chi^i) \quad +\mathrm{h.c.}, && (3.263)\\
\mathcal{L}_\phi &= -eG_{i\bar{j}}D_\mu^{(G)}\phi^i D^{(G)\mu}\overline{\phi}^{\bar{j}}, && (3.264)\\
\mathcal{L}_\chi &= \frac{ie}{2}G_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu D_\mu^{(G,M,\omega)}\overline{\chi}^{\bar{j}}) \\
&\quad +ie(D_\mu^{(G)}\phi^k)\left(\frac{k^2}{8}G_{i\bar{j}}G_k - \frac{1}{2}G_{ki\bar{j}}\right)(\chi^i\sigma^\mu\overline{\chi}^{\bar{j}}) \quad +\mathrm{h.c.}, && (3.265)\\
\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} &= -\sqrt{2}i\overline{\phi}^{\bar{i}}(T_a)_{\bar{i}}^{\bar{j}}G_{\bar{j}k}(\lambda^a\chi^k) + \sqrt{2}i(\overline{\chi}^{\bar{i}}\overline{\lambda}^a)G_{\bar{i}j}(T_a)^j{}_k\phi^k, && (3.266)\\
\mathcal{L}_D &= -\frac{e}{2}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_a\mu_b, && (3.267)\\
\mathcal{L}_{D\lambda\chi} &= \frac{e}{2\sqrt{2}}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}(\widetilde{\tau}_{bc,i})\mu_a(\chi^i\lambda^c) \quad +\mathrm{h.c.}, && (3.268)\\
\mathcal{L}_{\mathrm{pot}} &= -\frac{e}{k^2}e^{k^2G/2}G_iG^{i\bar{j}}G_{\bar{j}}, && (3.269)\\
\mathcal{L}_{\chi\mathrm{mass}} &= \frac{e}{2}e^{k^2G/4}\left(\frac{1}{k}G_{ij} - \frac{1}{k}G_{ij\bar{k}}G^{\bar{k}l}G_l + \frac{k}{2}G_iG_j\right)\chi^i\chi^j \quad +\mathrm{h.c.}, && (3.270)\\
\mathcal{L}_{\lambda\mathrm{mass}} &= \frac{ie}{4k}e^{k^2G/4}G^{i\bar{j}}G_{\bar{j}}\widetilde{\tau}_{ab,i}(\lambda^a\lambda^b) \quad +\mathrm{h.c.}, && (3.271)\\
\mathcal{L}_{J\mathrm{vector}} &= \frac{kie}{2\sqrt{2}}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\Big[(\psi_\mu \not{F}^b_2\sigma^\mu\overline{\lambda}^a) + (\lambda^a\sigma^\mu \not{F}^b_2\overline{\psi}_\mu)\Big], && (3.272)\\
\mathcal{L}_{J\mathrm{chiral}} &= \frac{ke}{2}G_{i\bar{j}}(\chi^i\sigma^\mu\overline{\sigma}^\lambda\psi_\mu)(D_\lambda^{(G)}\overline{\phi}^{\bar{j}}) \quad +\mathrm{h.c.}, && (3.273)\\
\mathcal{L}_{JD} &= -\frac{ke}{2\sqrt{2}}(\psi_\mu\sigma^\mu\overline{\lambda}^a)\mu_a \quad +\mathrm{h.c.}, && (3.274)\\
\mathcal{L}_{JW} &= -\frac{ie}{2}e^{k^2G/4}G_i(\chi^i\sigma^\mu\overline{\psi}_\mu) \quad +\mathrm{h.c.}, && (3.275)\\
\mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} &= -\frac{e}{2k}e^{k^2G/4}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu) \quad +\mathrm{h.c.}, && (3.276)\\
\mathcal{L}_{\mathrm{cc}} &= \frac{6e}{k^4}e^{k^2G/2} && (3.277)
\end{aligned}$$

Soryushiron Kenkyu

重力多重項の変換則

$$\delta\psi_\mu = \frac{1}{k}D_\mu\xi + \frac{k}{8}(G_i D_\mu\phi - G_{\bar{i}} D_\mu\overline{\phi}^{\bar{i}})\xi + \frac{i}{2k^2}e^{k^2G/4}\sigma_\mu\bar{\xi}, \quad \delta e^\mu_{\widehat{m}} = \frac{k}{4}(-i\psi_{\widehat{m}}\sigma^\mu\bar{\xi} + i\overline{\psi}_{\widehat{m}}\overline{\sigma}^\mu\xi), \tag{3.278}$$

ベクトル多重項の変換則

$$\delta v^a_\mu = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\xi\sigma_\mu\overline{\lambda}^a + \frac{i}{2\sqrt{2}}\lambda^a\sigma_\mu\bar{\xi}, \quad \delta\lambda^a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}^a_2\xi + \frac{i}{2\sqrt{2}}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}^{-1})^{ab}\mu_b\xi \tag{3.279}$$

カイラル多重項の変換則

$$\delta\phi^i = \frac{1}{2}\xi\chi^i, \quad \delta\chi^i = -\frac{i}{2}\sigma^\mu\bar{\xi}D^{(G)}_\mu\phi^i + \frac{1}{2k}e^{k^2G/4}\xi G^{i\bar{j}}G_{\bar{j}}. \tag{3.280}$$

第4章　超場形式による 4 次元超重力理論

ポアンカレ超重力理論にはいくつかの補助場の取り方があるが、重力場 ${e_\mu}^m$ の独立な成分は局所ローレンツ回転の分を除いて 10 個、グラビティーノ ${\psi_\mu}^\alpha$ については 16 個の自由度を持つので最低でも 6 自由度のボゾン場が必要である。そのような補助場として、複素スカラー場一つと実ベクトル場一つを含む理論は極小超重力理論と呼ばれる [7, 8]。ここではそのような超重力理論の変換則および作用を超場形式を用いて導出する。

4.1　超空間

ここでは、次元を 4 次元には限定せず、一般の超場形式について議論する。

4.1.1　フェルミオン的座標の導入

局所的超対称変換を一般座標変換と統合するために、ボゾン的座標 x^μ のほかにフェルミオン的な座標 θ^α でも張られるような空間を考える。これは超空間 (superspace) と呼ばれる。超場は超空間上の場として定義される。以下では超空間上の座標の添字を大文字のローマ字 $K, L, M, \ldots$ を用い、そのうちのボゾン的座標を表わすのには小文字のギリシア文字 $\kappa, \lambda, \mu, \ldots$ を、フェルミオン的座標を表わすのには小文字のギリシア文字 $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ を用いる。一方超空間上の局所直交座標のボゾン的座標、フェルミオン的座標の両方を走る添字を $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \ldots$ を用い、そのうちのボゾン的座標は $\widehat{k}, \widehat{l}, \widehat{m}, \ldots$、フェルミオン的座標は $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}, \ldots$ を用いて表わすことにする。

$$z^M = (x^\mu, \theta^\alpha), \quad y^{\widehat{A}} = (y^{\widehat{m}}, \theta^{\widehat{\alpha}}). \tag{4.1}$$

局所直交系の座標のうち、ボゾン的座標は時空の次元に応じたローレンツ群 $\mathrm{SO}(1, d-1)$ のベクトル表現に属し、フェルミオン座標はそのスピノル表現に属するものとする。(局所ローレンツ変換群は $\mathrm{SO}(1, d-1|n)$ のような超群に拡大されないことに注意。) 超対称性が複数ある場合にはフェルミオン座標は複数あってもよいが、ここではその場合も一まとめにして θ^α と表わすことにする。スピノル添え字を奇数個持つ量はグラスマン数であるが、それらの交換から現れる負号をあらわすために、次の式にあるような記号を導入する。

$$X_M Y_N = (-)^{MN} Y_N X_M, \tag{4.2}$$

ここで $(-)$ の肩に乗っている添え字は、その添え字がベクトル添え字である場合には 0 を、スピノル添え字である場合には 1 をあらわすものとする。

超空間上の多脚場を導入する準備として、局所座標系での計量や添え字の上げ下げについて見ておこう。まず、局所直交系での添え字の上げ下げを行う行列を $C_{\widehat{A}\widehat{B}}$ とし、添え字を上げる操作を次のように定義する。

$$X^{\widehat{A}} = C^{\widehat{A}\widehat{B}} X_{\widehat{B}}. \tag{4.3}$$

$C^{\widehat{A}\widehat{B}}$ はボゾン的な成分のみをもつと仮定しておく。すなわち $C^{\widehat{m}\widehat{\alpha}} = C^{\widehat{\alpha}\widehat{m}} = 0$ である。また $C^{\widehat{A}\widehat{B}}$ は対称でも反対称でも無いので、添え字の順序には常に注意しておかなければならない。添え字の入れ替えに対して $C^{\widehat{A}\widehat{B}}$ は次のように振舞う。

$$C^{\widehat{A}\widehat{B}} = (-)^{AB} C^{\widehat{B}\widehat{A}}. \tag{4.4}$$

(4.3) より、添え字を下げるためには $C^{\widehat{A}\widehat{B}}$ の逆行列を用いて $X_{\widehat{A}} = (C^{-1})_{\widehat{A}\widehat{B}} X^{\widehat{B}}$ とすればよい。この規則を用いて $C^{\widehat{A}\widehat{B}}$ 自身の二つの添え字を下げると、

$$C_{\widehat{A}\widehat{B}} \equiv (C^{-1})_{\widehat{A}\widehat{C}} (C^{-1})_{\widehat{B}\widehat{D}} C^{\widehat{C}\widehat{D}} = (C^{-1})_{\widehat{B}\widehat{A}}. \tag{4.5}$$

となる。この、下つき添え字の $C_{\widehat{A}\widehat{B}}$ を用いれば、添え字を下げる規則は次のように表される。

$$X_{\widehat{A}} = X^{\widehat{B}} C_{\widehat{B}\widehat{A}} \tag{4.6}$$

(4.3) と (4.6) の規則は、添え字を上げ下げする場合には C を用い、常に左上と右下で縮約する、と覚えておけばよい。具体的には $C_{\widehat{A}\widehat{B}}$ は次のように定義される。

$$C_{\widehat{A}\widehat{B}} = \begin{pmatrix} \eta_{\widehat{m}\widehat{n}} & \\ & C_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

$C_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}$ は荷電共役行列である。

超空間の接空間の座標と局所直交座標を結びつけるために多脚場 ${E_M}^{\widehat{A}}$ を定義する。また、逆行列 ${E_{\widehat{A}}}^M$ を次のように定義する。

$${E_M}^{\widehat{A}} {E_{\widehat{A}}}^N = \delta_M^N, \quad {E_{\widehat{A}}}^N {E_N}^{\widehat{B}} = \delta_{\widehat{A}}^{\widehat{B}}. \tag{4.8}$$

超場の成分はグラスマン数であることもあるために掛ける順序には常に注意しなければならない。多脚場による添字の変換を行う場合にも常に次の式のように左上の添字と右下の添字を縮約することにする。

$$v_{\widehat{A}} = {E_{\widehat{A}}}^N v_N, \quad v^{\widehat{A}} = v^N {E_N}^{\widehat{A}}. \tag{4.9}$$

この規則は逆行列の定義 (4.8) においても満足されている。多脚場の 1 形式もこのルールに従って $E^{\widehat{A}} = dz^M {E_M}^{\widehat{A}}$ と定義される。二つ以上の添字をもつテンソルの場合には、ベクトルのテンソル積と同じように扱われなければならない。たとえば T_{MN} と $T_{\widehat{A}\widehat{B}}$ の間の関係は次のように与えられる。

$$T_{MN} = (-)^{(N+\widehat{B})\widehat{A}} {E_M}^{\widehat{A}} {E_N}^{\widehat{B}} T_{\widehat{A}\widehat{B}}. \tag{4.10}$$

右辺にこのような符号が現れることは、$T_{MN} = v_M w_N$ のような場合にベクトル v_M と w_N の添え字の変換則と矛盾しないために必要である。

超空間上のスピン接続は、共変微分中に次のように現れるものとして定義する。

$$D_M v_{\widehat{A}} = \partial_M v_{\widehat{A}} + {\omega_{M-\widehat{A}}}^{\widehat{B}} v_{\widehat{B}}. \tag{4.11}$$

ここで、ω はローレンツ代数に値をとる。代数の生成子は、ボゾン的座標、フェルミオン的座標に対して次のように与えられる。

$$(T_{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{p}}{}^{\widehat{q}} = \eta_{\widehat{m}\widehat{p}} \delta_{\widehat{n}}^{\widehat{p}} - \eta_{\widehat{n}\widehat{p}} \delta_{\widehat{m}}^{\widehat{p}}, \quad (T_{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = -\frac{1}{2} (\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}. \tag{4.12}$$

このことから、スピン接続の成分について次の式が成り立つ。

$$\omega_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{m}} = \omega_{\widehat{m}}{}^{\widehat{\alpha}} = 0, \quad \omega_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = -\frac{1}{4}\omega_{\widehat{m}\widehat{n}}(\gamma^{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}. \tag{4.13}$$

この式はローレンツ条件と呼ばれる。同じ関係式は曲率テンソルについても成立する。$\omega_{\widehat{m}\widehat{n}}$ と $\omega_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}$ の関係式の符号に注意すること。この符号がマイナスなのは、ローレンツ群のスピノル表現に対する生成子が $+(1/2)\gamma^{mn}$ であることに反するように思われるかも知れないが、超空間での添え字の縮約をとるときの標準位置と、スピノル添え字を省略するときの標準位置が異なることが理由である。つまり、

$$-(\gamma^{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = -(\gamma^{[\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\gamma}}(\gamma^{\widehat{n}]})^{\widehat{\gamma}\widehat{\beta}} = (\gamma^{[\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\gamma}}(\gamma^{\widehat{n}]})_{\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\beta}}. \tag{4.14}$$

のように、γ-行列が上付き添え字と下付き添え字をもつような行列表示を用いれば、符号は正になっている。スピノルの共変微分は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} D\psi^{\widehat{\alpha}} &= d\psi^{\widehat{\alpha}} + \frac{1}{4}(\omega_{\widehat{m}\widehat{n}}\gamma^{\widehat{m}\widehat{n}})^{\widehat{\alpha}}{}_{\widehat{\beta}}\psi^{\widehat{\beta}} = d\psi^{\widehat{\alpha}} - \omega^{\widehat{\alpha}}{}_{\widehat{\beta}}\psi^{\widehat{\beta}} \\ D\psi_{\widehat{\alpha}} &= d\psi_{\widehat{\alpha}} - \frac{1}{4}(\omega_{\widehat{m}\widehat{n}}\gamma^{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}\psi_{\widehat{\beta}} = d\psi_{\widehat{\alpha}} + \omega_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}\psi_{\widehat{\beta}}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

4.1.2 曲率と捩率の定義

超空間上での曲率は、共変微分の交換関係、あるいは反交換関係として次のように定義される。

$$R_{MN} = D_M D_N - (-)^{MN} D_N D_M \tag{4.16}$$

一方、捩率は次のように定義される。

$$T_{MN}{}^{\widehat{A}} = D_M E_N{}^{\widehat{A}} - (-)^{MN} D_N E_M{}^{\widehat{A}} \tag{4.17}$$

多脚場の逆行列の共変微分は、次のように与えられる。

$$D_A E_{\widehat{B}}{}^N = -(-)^{A(\widehat{B}+M)} E_{\widehat{B}}{}^M (D_A E_M{}^{\widehat{C}}) E_{\widehat{C}}{}^N \tag{4.18}$$

この式と曲率、捩率の定義を用いると添え字を局所直交系のものに直した共変微分 $D_{\widehat{A}} \equiv E_{\widehat{A}}{}^M D_M$ に対して次の公式を示すことができる。

$$D_{\widehat{A}} D_{\widehat{B}} - (-)^{\widehat{A}\widehat{B}} D_{\widehat{B}} D_{\widehat{A}} = R_{\widehat{A}\widehat{B}} - T_{\widehat{A}\widehat{B}}{}^M D_M \tag{4.19}$$

この交換関係は超空間を用いた定式化においては非常にしばしば用いられる。

4.1.3 一般座標変換

まずはボゾン的な座標のみを持つ時空上での一般座標変換

$$x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x) \tag{4.20}$$

のもとでの場の変換則について考えよう。何も添え字を持たないスカラー場 $\phi(x)$ の変換は次のように定義される。

$$\phi(x) = \phi'(x'). \tag{4.21}$$

内部対称性に対する添え字を持つ場合でも同様である。1 形式場 $x_\mu(x)$ の変換則は、

$$dx^\mu v_\mu(x) = dx'^\mu v'_\mu(x'). \tag{4.22}$$

によって与えられる。これに対して、局所ローレンツ系の添え字を持つベクトル $v^{\widehat{m}}$ は次のように変換される。

$$v^{\widehat{m}}(x) = v'^{\widehat{m}}(x'). \tag{4.23}$$

つまり、局所ローレンツ対称性は一般座標変換の下では他の内部対称性と同じように扱われる。複数の添え字を持つ場合にはこれらを組み合わせることで変換則が決定される。たとえば多脚場 $e_\mu^{\widehat{m}}$ とスピン接続 $\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}}$ については、次のように座標変換を定義することができる。

$$\begin{aligned} dx^\mu e_\mu{}^{\widehat{m}}(x) &= dx'^\mu e'_\mu{}^{\widehat{m}}(x'), & (4.24)\\ dx^\mu \omega_\mu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}(x) &= dx'^\mu \omega'_\mu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}(x') & (4.25)\end{aligned}$$

特に、無限小変換

$$x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu. \tag{4.26}$$

についての変分を $\delta^0_{\mathrm{gc}}(\epsilon)$ とあらわすことにしよう。添え字の 0 は、局所ローレンツ系などの内部空間の添え字については何も作用しないことを意味している。いくつかの例を与えよう。

$$\begin{aligned} \delta^0_{\mathrm{gc}}(\epsilon)\phi &= \epsilon^\lambda\partial_\lambda\phi, & (4.27)\\ \delta^0_{\mathrm{gc}}(\epsilon)v_\mu &= \epsilon^\lambda\partial_\lambda v_\mu + (\partial_\mu\epsilon^\lambda)v_\lambda, & (4.28)\\ \delta^0_{\mathrm{gc}}(\epsilon)v^{\widehat{m}} &= \epsilon^\lambda\partial_\lambda v^{\widehat{m}}. & (4.29)\end{aligned}$$

一番上のものは共変な形をしている。二番目の変分は、v_μ の微分があるので、v_μ をゲージ場だとすればゲージ変換に対する変換性は共変的ではないが、一般座標変換に対しては次のように共変的である。

$$\delta^0_{\mathrm{gc}}(\epsilon)v_\mu = \epsilon^\lambda(\nabla_\lambda v_\mu + \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}v_\kappa) + (\nabla_\mu\epsilon^\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\epsilon^\kappa)v_\lambda. = \epsilon^\lambda(\nabla_\lambda v_\mu) + (\nabla_\mu\epsilon^\lambda)v_\lambda + \epsilon^\lambda T^\kappa_{\lambda\mu}v_\kappa. \tag{4.30}$$

三番目の変換則も内部対称性である局所ローレンツ変換に対しては共変的になっていないが、一般座標変換については共変的である。

上記の変換と、局所ローレンツ変換を組み合わせることによって座標変換の下での変換則に共変性を持たせることができる。パラメータを λ^{mn} とする局所ローレンツ変換を δ_M と表すことにし、ベクトル $v^{\widehat{m}}$ に対する作用を次のように定義しよう。

$$\delta_M(\lambda)v^{\widehat{m}} = -\lambda^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}v^{\widehat{n}}. \tag{4.31}$$

変換則 (4.29) に現れている微分を共変微分にするようなスピン接続項を導入するためには、次の局所ローレンツ変換を行えばよい。

$$\delta_M(-\epsilon^\mu\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}})v^{\widehat{m}} = \epsilon^\mu\omega_\mu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}v^{\widehat{n}} \tag{4.32}$$

二つの変換を組み合わせたものは、次のように与えられる。

$$\delta^0_{\mathrm{gc}}(\epsilon)v^{\widehat{m}} + \delta_M(-\epsilon^\mu\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}})v^{\widehat{m}} = \epsilon^\lambda D_\lambda v^{\widehat{m}} \tag{4.33}$$

このように、一般座標変換と、共変性を回復するための内部対称性の変換を同時に行う変換を改めて一般座標変換だとみなし、$\delta_{\rm gc}$ と書くことにする。内部対称性が局所ローレンツ変換だけの場合には次のように書ける。

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon)=\delta^0_{\rm gc}(\epsilon)+\delta_M(-\epsilon^\mu\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}}) \tag{4.34}$$

この変換のいくつかの例を挙げておく。

$$\begin{aligned}\delta_{\rm gc}(\epsilon)\phi &= \epsilon^\lambda\partial_\lambda\phi &(4.35)\\ \delta_{\rm gc}(\epsilon)v^{\widehat{m}} &= \epsilon^\lambda D_\lambda v^{\widehat{m}} &(4.36)\\ \delta_{\rm gc}(\epsilon)v_\mu &= \epsilon^\lambda(\nabla_\lambda v_\mu)+(\nabla_\mu\epsilon^\lambda)v_\lambda+\epsilon^\lambda T^\kappa_{\lambda\mu}v_\kappa. &(4.37)\end{aligned}$$

多脚場 $e_\mu^{\widehat{m}}$ とスピン接続 $\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}}$ については、捩率や曲率を用いて変換則を次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}\delta^0_{\rm gc}(\epsilon)e_\mu{}^{\widehat{m}} &= D_\mu\epsilon^{\widehat{m}}+\epsilon^\nu T^{\widehat{m}}_{\nu\mu}-(\epsilon^\nu\omega_\nu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}})e_\mu{}^{\widehat{n}}, &(4.38)\\ \delta^0_{\rm gc}(\epsilon)\omega_\mu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}} &= \epsilon^\nu R_{\nu\mu}{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}+D_\mu(\epsilon^\nu\omega_\nu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}). &(4.39)\end{aligned}$$

これらの変換則は、それぞれの最後の項がテンソルではない量 $\epsilon^\mu\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}}$ を含むため共変的ではない。これらの項も上記の局所ローレンツ変換を組み合わせると相殺できる。多脚場とスピン接続に対する局所ローレンツ変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\delta_M(\lambda)e^{\widehat{m}}_\mu &= -\lambda^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}e^{\widehat{n}}_\mu, &(4.40)\\ \delta_M(\lambda)\omega_\mu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}} &= D_\mu\lambda^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}. &(4.41)\end{aligned}$$

従って、変換 (4.34) の下では多脚場もスピン接続も共変的に変換される。

$$\begin{aligned}\delta_{\rm gc}(\epsilon)e_\mu{}^{\widehat{m}} &= D_\mu\epsilon^{\widehat{m}}+\epsilon^\nu T^{\widehat{m}}_{\nu\mu}, &(4.42)\\ \delta_{\rm gc}(\epsilon)\omega_\mu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}} &= \epsilon^\nu R_{\nu\mu}{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}. &(4.43)\end{aligned}$$

このように、一般座標変換以外のゲージ対称性（ここでは局所ローレンツ変換）による補正を行って結果が共変的になるように定義された変換を、（内部対称性について）共変な一般座標変換と呼ぶことにし、内部対称性については何も考慮しない変換 $\delta^0_{\rm gc}$ は純粋な一般座標変換と呼ぶことにする。

(4.34) は、ほかにも局所的な内部対称性があればそれらについてのゲージ変換も含めて定義される。たとえば、U(1) のゲージ場 A_μ がある場合を考えてみよう。A_μ に対する場に依存しない無限小一般座標変換は (4.28) によって与えられる。ここでは場の強さ F を用いて次のように書いておこう。

$$\delta^0_{\rm gc}(\epsilon)A_\mu=\epsilon^\alpha F_{\alpha\mu}+\partial_\mu(A_\alpha\epsilon^\alpha). \tag{4.44}$$

この右辺第 2 項は U(1) ゲージ変換に対して共変ではない形になっている。この項は、U(1) ゲージ変換について共変な一般座標変換を次のように定義することで打ち消すことができる。

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon^\mu)=\delta^0_{\rm gc}(\epsilon^\mu)-\delta_{\rm U(1)}(\epsilon^\mu A_\mu). \tag{4.45}$$

このように定義されたゲージ場 A の共変な一般座標変換は次のように U(1) ゲージ対称性に対して共変的になる。

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon)A_\mu=\epsilon^\alpha F_{\alpha\mu}. \tag{4.46}$$

Soryushiron Kenkyu

上で考えた一般座標変換はそのまま超空間上の一般座標変換に拡張することができる。超空間上の一般座標変換のパラメータを $\Xi^{\widehat{A}}$、局所ローレンツ変換のパラメータを $\Sigma_{\widehat{m}\widehat{n}}$ とする。$\Xi^{\widehat{A}}$ の成分のうち、$\Xi^{\widehat{m}}$ はボゾン的な一般座標変換に、$\Xi^{\widehat{\alpha}}$ は局所的超対称変換に対応するパラメータである。ただし、これらはどちらもフェルミオン座標 θ^α に対する依存性を持つので、成分場形式での超重力理論の対称性よりもはるかに大きな対称性を表している。これらのパラメータの $\theta=0$ の部分が、次のように成分形式での変換パラメータに対応している。

$$\Xi^{\widehat{m}}|_{\theta=0}=\epsilon^{\widehat{m}},\quad \Xi^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0}=\xi^{\widehat{\alpha}},\quad \Sigma_{\widehat{m}\widehat{n}}|_{\theta=0}=\sigma_{\widehat{m}\widehat{n}}. \tag{4.47}$$

この余分な対称性は、以下で見るように超空間上の多脚場やスピン接続に含まれる余分な自由度が 0 であるというゲージ (4.67) を取ることで固定することができる。

超空間上の共変な一般座標変換は

$$\delta_{\rm gc}(\Xi^M)=\delta^0_{\rm gc}(\Xi)-\delta_M(\Xi^M\Omega_M) \tag{4.48}$$

と定義され、多脚場とスピン接続は次のように変換される。

$$\begin{aligned}\delta_{\rm gc}(\Xi)E_M{}^{\widehat{A}} &= D_M\Xi^{\widehat{A}}+\Xi^N T_{NM}{}^{\widehat{A}}, & (4.49)\\ \delta_{\rm gc}(\Xi)\omega_M{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}} &= \Xi^N R_{NM}{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}. & (4.50)\end{aligned}$$

特に、ゲージ固定されるべき $E_\alpha{}^{\widehat{A}}$ の一般座標変換と $\Omega_\alpha{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}$ の局所ローレンツ変換則は

$$\delta_{\rm gc}(\Xi)E_\alpha{}^{\widehat{A}}=D_\alpha\Xi^{\widehat{A}}+\Xi^N T_{N\alpha}{}^{\widehat{A}},\quad \delta_M(\Sigma)\Omega_\alpha{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}=D_\alpha\Sigma^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}} \tag{4.51}$$

となり、θ 座標について 1 次の項を適当に選ぶことによって (4.67) のようなゲージ固定を行うことができる。

4.1.4 ビアンキ恒等式

多脚場の二階微分の添え字について反対称化または反対称化したものを考える。対称化するか反対称化するかは、添え字の統計性による。

$$D_{[K}D_LE_{M\}}{}^{\widehat{P}}|_{[KLM\}}\equiv D_{[K}D_LE_{M\}}{}^{\widehat{P}} \tag{4.52}$$

共変微分の（反）交換関係を曲率に置き換えると、

$$D_{[K}D_LE_{M\}}{}^{\widehat{P}}=\frac{1}{2}R_{KL}{}^{\widehat{P}}{}_{\widehat{Q}}E_M{}^{\widehat{Q}}|_{[KLM\}} \tag{4.53}$$

一方、先に多脚場の共変微分を計算すると

$$D_{[K}D_LE_{M\}}{}^{\widehat{P}}=\frac{1}{2}D_KT_{LM}{}^{\widehat{P}}|_{[KLM\}} \tag{4.54}$$

従って、次の式が得られる。

$$(D_KT_{LM}{}^{\widehat{P}}-R_{KL}{}^{\widehat{P}}{}_{\widehat{Q}}E_M{}^{\widehat{Q}})|_{[KLM\}}=0 \tag{4.55}$$

次に、多脚場の三階微分を考えてみよう。

$$D_KD_LD_ME_N{}^{\widehat{P}}|_{[KLM\}} \tag{4.56}$$

三つのうち二つの共変微分を選んで曲率テンソルに置き換えよう。このとき二通りのやり方があるので、次の式を得る。

$$D_K D_L D_M E_N{}^{\widehat{P}}|_{[KLM\}} = \frac{1}{2} R_{KL}{}^{\widehat{P}}{}_{\widehat{Q}} D_M E_N{}^{\widehat{Q}}|_{[KLM\}} = \frac{1}{2} D_K (R_{LM}{}^{\widehat{P}}{}_{\widehat{Q}} E_N{}^{\widehat{Q}})|_{[KLM\}} \tag{4.57}$$

これより、次の関係式を得る。

$$0 = (D_K(R_{LM}{}^{\widehat{P}}{}_{\widehat{Q}} E_N{}^{\widehat{Q}}) - R_{KL}{}^{\widehat{P}}{}_{\widehat{Q}} D_M E_N{}^{\widehat{Q}})|_{[KLM\}} = (D_K R_{LM}{}^{\widehat{P}}{}_{\widehat{Q}}) E_N{}^{\widehat{Q}}|_{[KLM\}} \tag{4.58}$$

これらは、外微分形式で表すと、次のようになる。

$$DT^{\widehat{m}} + E^{\widehat{n}} \wedge R_{\widehat{n}}{}^{\widehat{m}} = 0, \quad DT^{\widehat{\alpha}} - \frac{1}{4} E^{\widehat{\beta}} \wedge R^{\widehat{m}\widehat{n}} (\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\alpha}} = 0, \quad DR^{\widehat{m}\widehat{n}} = 0. \tag{4.59}$$

もし $R_{\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\alpha}} = -(1/4) R^{\widehat{m}\widehat{n}} (\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\alpha}}$ と定義すれば、まとめて次のように書くこともできる。

$$DT^{\widehat{A}} + E^{\widehat{B}} \wedge R_{\widehat{B}}{}^{\widehat{A}} = 0, \quad DR^{\widehat{m}\widehat{n}} = 0. \tag{4.60}$$

外微分形式とその成分の関係は次のように定義する。

$$T^{\widehat{K}} = \frac{1}{2}(-)^{MN} E^{\widehat{M}} E^{\widehat{N}} T_{\widehat{M}\widehat{N}}{}^{\widehat{K}}, \quad R_{\widehat{p}\widehat{q}} = \frac{1}{2}(-)^{MN} E^{\widehat{M}} E^{\widehat{N}} R_{\widehat{M}\widehat{N}-\widehat{p}\widehat{q}} \tag{4.61}$$

これを代入すれば、ビアンキ恒等式の左辺は次のように書き換えることが出来る。

$$DR_{\widehat{p}\widehat{q}} = \frac{1}{2}(-)^{KM+KN+MN} E^{\widehat{K}} E^{\widehat{M}} E^{\widehat{N}} I^2_{\widehat{K}\widehat{M}\widehat{N}\widehat{p}\widehat{q}}, \tag{4.62}$$

$$DT^{\widehat{A}} + E^{\widehat{B}} \wedge R_{\widehat{B}}{}^{\widehat{A}} = \frac{1}{2}(-)^{KM+KN+MN} E^{\widehat{K}} E^{\widehat{M}} E^{\widehat{N}} I^1_{\widehat{K}\widehat{M}\widehat{N}}{}^{\widehat{A}} \tag{4.63}$$

ただし、I^1 と I^2 を次のように定義した。

I^1 と I^2 の定義

振率および曲率に対するビアンキ恒等式は以下のテンソルが 0 であるという条件で与えられる。

$$I^2_{\widehat{K}\widehat{M}\widehat{N}\widehat{p}\widehat{q}} = (D_{\widehat{K}} R_{\widehat{M}\widehat{N}-\widehat{p}\widehat{q}} + T_{\widehat{K}\widehat{M}}{}^{\widehat{P}} R_{\widehat{P}\widehat{N}-\widehat{p}\widehat{q}})_{[\widehat{K}\widehat{M}\widehat{N}\}}, \tag{4.64}$$

$$I^1_{\widehat{K}\widehat{M}\widehat{N}}{}^{\widehat{A}} = (D_{\widehat{K}} T_{\widehat{M}\widehat{N}}{}^{\widehat{A}} + T_{\widehat{K}\widehat{M}}{}^{\widehat{P}} T_{\widehat{P}\widehat{N}}{}^{\widehat{A}} + R_{\widehat{K}\widehat{M}\widehat{N}}{}^{\widehat{A}})_{[\widehat{K}\widehat{M}\widehat{N}\}}. \tag{4.65}$$

実は、ローレンツ条件を用いると、$I^1 = 0$ を解くことによって曲率テンソルの全ての成分を捩率で書くことができる。そして $I^1 = 0$ が成り立てば自動的に $I^2 = 0$ も成り立つことを示すことができる。[9] これは、一般相対性理論において、物質場のエネルギー運動量テンソルについての保存則とアインシュタイン方程式を用いれば曲率テンソルに対するビアンキ恒等式の一部が示されることの拡張である。

4.2 超場と成分場の関係について

4.2.1 超場と成分場の関係

超空間を用いて超重力理論を定式化する場合、x 空間上の多脚場 $e_\mu{}^{\widehat{m}}(x)$、グラビティーノ $\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}(x)$ およびスピン接続 $\omega_\mu{}^{\widehat{m}\widehat{n}}(x)$ は超空間上の多脚場 $E_M{}^{\widehat{A}}(z^M)$ およびスピン接続 $\Omega_M{}^{\widehat{A}}{}_{\widehat{B}}$ に次のように埋め込まれる。

$$e_\mu{}^{\widehat{m}}(x) = E_\mu{}^{\widehat{m}}(x, \theta = 0), \quad \psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}(x) = E_\mu{}^{\widehat{\alpha}}(x, \theta = 0), \quad \omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}}(x) = \Omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}}(x, \theta = 0) \tag{4.66}$$

また、これら以外の成分の $\theta=0$ 部分はゲージ自由度であり、超空間上の一般座標変換と局所ローレンツ変換によって次のように取ることができる。

$$E_\alpha{}^{\widehat{m}}(x,\theta=0)=0,\quad E_\alpha{}^{\widehat{\beta}}(x,\theta=0)=e_\alpha{}^{\widehat{\beta}},\quad \Omega_{\alpha-\widehat{m}\widehat{n}}(x,\theta=0)=0. \tag{4.67}$$

ただし $e_\alpha{}^{\widehat{\beta}}$ は任意の定数行列であり、通常は単位行列に取る。実際にゲージ変換を用いてこのように取れることはあとで見る。上記の成分場との関係およびゲージ固定条件は微分形式で書くと次のように簡単に表すことができる。

$$E^{\widehat{m}}|_{\theta=0}=e^{\widehat{m}},\quad E^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0}=\psi^{\widehat{\alpha}}+d\theta^{\widehat{\alpha}},\quad \Omega^{\widehat{m}\widehat{n}}|_{\theta=0}=\omega^{\widehat{m}\widehat{n}}. \tag{4.68}$$

$E_M{}^{\widehat{A}}$ の逆行列 $E_{\widehat{A}}{}^M$ はこのゲージでは次のように与えられる。

$$E_{\widehat{k}}{}^\mu|_{\theta=0}=e_{\widehat{k}}{}^\mu,\quad E_{\widehat{k}}{}^\alpha|_{\theta=0}=-e_{\widehat{k}}{}^\mu\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}\delta_{\widehat{\alpha}}{}^\alpha,\quad E_{\widehat{\alpha}}{}^\mu|_{\theta=0}=0,\quad E_{\widehat{\alpha}}{}^\alpha|_{\theta=0}=\delta_{\widehat{\alpha}}{}^\alpha. \tag{4.69}$$

ここではグラビティーノは質量次元 1/2 を持つ場として定義されている。これは前の章のグラビティーノ（質量次元 3/2）とは 1 だけずれていることに注意。このため、単純超重力理論のラグランジアンは $\mathcal{L}\sim(1/k^2)(R+\psi\partial\psi)$ のように、グラビティーノ運動項にもニュートン定数がつく。通常の規格化に移りたければ、この章で用いられるグラビティーノに対して $\psi_\mu\to k\psi_\mu$ という置き換えを行えばよい。

“ポテンシャル” の間の関係 (4.66) が与えられたので、対応する場の強さについても、超場の中にどのように埋め込まれているかを決めることができる。捩率および曲率の定義より、次の関係式を得る。

$$T_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(x)=T_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(x,\theta=0),\quad \psi_{\mu\nu}{}^{\widehat{\alpha}}(x)=T_{\mu\nu}{}^{\widehat{\alpha}}(x,\theta=0),\quad R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}\widehat{n}}(x)=R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}\widehat{n}}(x,\theta=0). \tag{4.70}$$

ただし、左辺は x 空間上の場であり、右辺は超空間上の場である。グラビティーノの場の強さは次のように定義した。

$$\psi_{\mu\nu}{}^{\widehat{\alpha}}=D_\mu\psi_\nu^{\widehat{\alpha}}-D_\nu\psi_\mu^{\widehat{\alpha}} \tag{4.71}$$

(4.70) に与えられたテンソルはどれも接空間の添え字 μ,ν を持っていることに注意しよう。これを局所ローレンツ系のものに書き換える場合には、その操作を超空間上で行うのか、それとも x 空間上で行うのか注意する必要がある。たとえば、捩率テンソルについて、超空間上で局所ローレンツ系の添え字に直してから $\theta=0$ 成分を取ったもの $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta=0)$ と x 空間上の捩率テンソルの添え字を局所ローレンツ系の添え字に直したもの $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}(x)$ とは異なる。このことを見るために、超空間上での添え字の変換の式

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}{}^{\widehat{k}}(z) &= (-)^{\widehat{A}\widehat{B}}E_\mu{}^{\widehat{A}}(z)E_\nu{}^{\widehat{B}}(z)T_{\widehat{A}\widehat{B}}{}^{\widehat{k}}(z)\\ &= E_\mu{}^{\widehat{m}}(z)E_\nu{}^{\widehat{n}}(z)T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}(z)+E_\mu{}^{\widehat{m}}(z)E_\nu{}^{\widehat{\beta}}(z)T_{\widehat{m}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{k}}(z)\\ &\quad +E_\mu{}^{\widehat{\alpha}}(z)E_\nu{}^{\widehat{n}}(z)T_{\widehat{\alpha}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}(z)-E_\mu{}^{\widehat{\alpha}}(z)E_\nu{}^{\widehat{\beta}}(z)T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{k}}(z)\end{aligned} \tag{4.72}$$

の $\theta=0$ 成分を取り出してみよう。すると次の関係式を得る。

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}{}^{\widehat{k}}(x) &= e_\mu{}^{\widehat{m}}e_\nu{}^{\widehat{n}}T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta=0)+e_\mu{}^{\widehat{m}}\psi_\nu{}^{\widehat{\beta}}T_{\widehat{m}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta=0)\\ &\quad +\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}e_\nu{}^{\widehat{n}}T_{\widehat{\alpha}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta=0)-\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}\psi_\nu{}^{\widehat{\beta}}T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta=0)\end{aligned} \tag{4.73}$$

つまり、

$$T_{\mu\nu}{}^{\widehat{k}}(x)\neq e_\mu{}^{\widehat{m}}e_\nu{}^{\widehat{n}}T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta=0) \tag{4.74}$$

Soryushiron Kenkyu

なのである。この式の右辺のように、超空間上で添え字を局所ローレンツ系のものにしてから $\theta=0$ を取って得られるテンソルは超場形式でしばしば用いられる。これを左辺のものと区別するために、“cov” という添え字を用いることにする。(4.73) より、次の式を得ることができる。

$$T^{\mathrm{cov}\,\widehat{k}}_{\widehat{m}\widehat{n}} = T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}} - \psi_{\widehat{n}}{}^{\widehat{\beta}} T_{\widehat{m}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta=0) - \psi_{\widehat{m}}{}^{\widehat{\alpha}} T_{\widehat{\alpha}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta=0) + \psi_{\widehat{m}}{}^{\widehat{\alpha}} \psi_{\widehat{n}}{}^{\widehat{\beta}} T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta=0) \quad (4.75)$$

$\psi^{\mathrm{cov}\,\widehat{\alpha}}_{\mu\nu}$ や $R^{\mathrm{cov}\,\widehat{m}\widehat{n}}_{\mu\nu}$ についても同様に定義される。これらのテンソルは、もとの “cov” のついていないテンソルの「超共変化」と呼ばれる。この理由については後の節で詳しく述べる。

4.2.2 超共変性

成分形式での超重力理論を知っていたとして、それらをどのようにしたら超場形式で書き換えることができるか、という問題を考えてみよう。超場形式では、全ての場は超空間上でのテンソルとして表される。しかし成分場形式ではそれらがばらばらになっているために、どの場とどの場を組み合わせて超空間上のテンソルを作るかということが問題になる。例えば成分場形式で現れるベクトル場 v_μ があったときに、超場形式ではそれを超空間上のベクトル場 v_M の成分の一部として表す必要がある。従ってスピノル座標の成分 v_α が何であるかを決める必要がある。この問題を解決する上で、場の超共変化が有用であるということを、ベクトル場を例にとって説明しよう。

超空間上で、局所ローレンツ系のベクトル添え字を持つ場の変換則は、(4.36) を一般化すると次のように与えられる。

$$\delta_{\mathrm{gc}}(\Xi^M)V_{\widehat{A}} = \Xi^M D_M V_{\widehat{A}} \quad (4.76)$$

一方、添え字が大域座標のベクトルに対しては、一般座標変換は

$$\delta_{\mathrm{gc}}(\Xi^M)V_N = \Xi^M \partial_M V_N + (\partial_N \Xi^M)V_M \quad (4.77)$$

と作用する。$v_{\widehat{A}}$ と v_N はもちろん

$$v_N = E_N{}^{\widehat{A}} v_{\widehat{A}} \quad (4.78)$$

によって関係しており、片方の変換則からもう片方の変換則を導くことができる。

ここで仮に $v_\mu = V_\mu|_{\theta=0}$ の超対称変換を知っていて、次のように変換パラメータ ξ^α の微分を含まない項と含む項の二つの部分の和として次のように表されているとしよう。

$$\delta_Q(\xi^{\widehat{\alpha}})v_\mu = \xi^{\widehat{\alpha}} x_{\widehat{\alpha}\mu} + (\partial_\mu \xi^{\widehat{\alpha}}) y_{\widehat{\alpha}} \quad (4.79)$$

一方、(4.77) の $\theta=0$ 部分を取ると、

$$\delta_{\mathrm{gc}}(\xi^{\widehat{\alpha}})v_\mu = \xi^{\widehat{\alpha}} \partial_\alpha V_\mu|_{\theta=0} + (\partial_\mu \xi^{\widehat{\alpha}}) V_\alpha|_{\theta=0} \quad (4.80)$$

ただし (4.67) のゲージを取っているとする。（異なるスピノル添え字 α と $\widehat{\alpha}$ が縮約されているのはこのゲージでは $e_\alpha{}^{\widehat{\beta}} = \delta_\alpha^\beta$ だからである。）この二つが等しいとすると、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \partial_\alpha V_\mu|_{\theta=0} &= x_{\widehat{\alpha}\mu}, && (4.81)\\ V_\alpha|_{\theta=0} &= y_{\widehat{\alpha}}. && (4.82) \end{aligned}$$

これらのうち二つ目の式 (4.82) は上で提起した「v_α をどのように決めれば良いか」という問題に対する答えを与えている。実際にはこの式で決まるのは超空間上の場 V_α の $\theta=0$ 部分だけであ

るが、このあとで超空間上の振率テンソルの成分に対する拘束条件を得るためには、この情報だけで十分である。

成分場形式での場の「超共変化」は、「超対称変換が変換パラメータ $\xi^{\widehat{\alpha}}$ の微分を含まないようにグラビティーノを含む補正項を加えたもの」として定義される。例えば上で例として考えたベクトル場 v_μ の場合には、(4.79) の第 2 項を打ち消すように次のように補正項を加える。

$$v_\mu^{\rm cov} = v_\mu - \psi_\mu^{\widehat{\alpha}} y_{\widehat{\alpha}}. \tag{4.83}$$

このように定義された $v_\mu^{\rm cov}$ は、超空間上の場 $V_{\widehat{A}}$ に対応するものである。

$$v_{\widehat{m}}^{\rm cov} = V_{\widehat{m}}|_{\theta=0} \tag{4.84}$$

$V_{\widehat{A}}$ の変換則は V_N のそれとは異なり、(4.76) に与えられているように変換パラメータの微分を含まない。また、関係式 (4.83) は (4.78) において $\theta=0$ 成分を抜き出したものに他ならない。

まとめておくと次のようになる。

成分場の超共変化と超場

成分場形式でのベクトル場を $v_\mu = V_\mu|_{\theta=0}$ という形で含む超空間上の場 V_M があるとする。超場形式では超空間上のテンソルは常に局所ローレンツ系の添え字に取っておくのが便利であるが、そのような超空間上のベクトル場の $\theta=0$ 成分は v_μ の超共変化 $v_{\widehat{m}}^{\rm cov}$ を用いて次のように与えられる。

$$V_{\widehat{m}}|_{\theta=0} = v_{\widehat{m}}^{\rm cov} = v_{\widehat{m}} + \psi_{\widehat{m}}^{\widehat{\alpha}} V_{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0}. \tag{4.85}$$

右辺は、v_μ を超共変化する際の補正項を見ることで $V_{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0}$ を読み取ることができることを意味している。

さらに次のように一般化することができる。大域座標の添え字を持つテンソル $X_{\mu\cdots\nu}(x)$ が超場に

$$X_{\mu\cdots\nu}(x,\theta)|_{\theta=0} = X_{\mu\cdots\nu}(x) \tag{4.86}$$

のように埋め込まれているとき、その超共変化 $X_{\mu\cdots\nu}^{\rm cov}$ は超場に次のように埋め込まれている。

$$X_{\widehat{m}\cdots\widehat{n}}(x,\theta)|_{\theta=0} = X_{\widehat{m}\cdots\widehat{n}}^{\rm cov}(x) \tag{4.87}$$

また、超場の他の成分の情報を次の式から得ることができる。

$$X_{\mu\cdots\nu}(x) = e_\mu^{\widehat{m}} \cdots e_\nu^{\widehat{n}} X_{\widehat{m}\cdots\widehat{n}}^{\rm cov}(x) + \psi_\mu^{\widehat{\alpha}} \cdots e_\nu^{\widehat{n}} X_{\widehat{\alpha}\cdots\widehat{n}}|_{\theta=0} + \cdots \pm \psi_\mu^{\widehat{\alpha}} \cdots \psi_\nu^{\widehat{\beta}} X_{\widehat{\alpha}\cdots\widehat{\beta}}|_{\theta=0} \tag{4.88}$$

（この式の右辺は超空間上で多脚場 ${E_\mu}^{\widehat{A}}$ を用いてテンソルの添え字を局所ローレンツ系のものから大域座標に書き換える式である。このように一般には成分場の超共変化はグラビティーノの二次以上の項を含む場合がある。）

超空間上の振率や曲率テンソルの一部の成分については (4.70) に与えられているようにその $\theta=0$ 成分が x 空間の振率、曲率テンソルに対応していることを見た。上で説明した方法を用いることで、超空間上の振率、曲率のそれ以外の成分を決めることができる。ここでは多脚場とグラビティーノの超対称変換は次のように与えられると仮定しよう。

$$\delta_{\rm ss}(\xi) e_\mu^{\widehat{m}} = -\frac{1}{4}(\psi_\mu \gamma^{\widehat{m}} \xi), \quad \delta_{\rm ss}(\xi)\psi_\mu = D_\mu \xi + K_\mu \xi. \tag{4.89}$$

4 次元の超重力理論の場合は、成分場形式で見たように K_μ はカイラル多重項のスカラー場に依存するから、off-shell 形式ではこの部分は補助場の寄与として現れるはずである。話はそれるが 11

次元超重力理論の超対称変換も同じ形をしていることを注意しておこう。11 次元超重力理論ではグラビティーノ変換則は

$$\delta\psi_\mu = D^{(\omega)}_\mu \xi + \frac{1}{24}\gamma_\mu \not{K}_4 \xi - \frac{1}{8}\not{K}_4 \gamma_\mu \xi \tag{4.90}$$

と与えられ、K_μ は 4 階反対称テンソル場 K_4 と γ 行列を用いて作られる行列である。

変換則 (4.89) を用いて 3 つの場 $e_\mu{}^{\widehat{m}}$、$\omega_\mu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}$、$\psi_\mu{}^\alpha$ について超共変的な場の強さを実際に定義してみよう。まず、多脚場とグラビティーノについて、場の強さに相当するのは次の二つである。

$$T^{\widehat{m}}_{\mu\nu} = D_\mu e_\nu{}^{\widehat{m}} - D_\nu e_\mu{}^{\widehat{m}}, \quad \psi^\alpha_{\mu\nu} = D_\mu\psi_\nu - D_\nu\psi_\mu. \tag{4.91}$$

スピン接続 $\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}}$ の変換則はまだ決まっていないが、ξ の微分を含まないことを仮定すると、それぞれの場の強さの超対称変換は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta_{\rm ss}(\xi)T^{\widehat{m}}_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(\psi_\mu\gamma^{\widehat{m}}D_\nu\xi) - \frac{1}{4}(\psi_\nu\gamma^{\widehat{m}}D_\mu\xi) \quad + (\text{no } D\xi \text{ terms}), & (4.92)\\
\delta_{\rm ss}(\xi)\psi_{\mu\nu} &= -K_\mu D_\nu\xi + K_\nu D_\mu\xi \quad + (\text{no } D\xi \text{ terms}) & (4.93)
\end{aligned}$$

従って、これらの場の強さの超共変化は次のように補正項を加えることで得られる。

$$T^{\mathrm{cov}\,\widehat{m}}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}} - \frac{1}{4}(\psi_\mu\gamma^{\widehat{m}}\psi_\nu), \quad \psi^{\rm cov}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + K_\mu\psi_\nu - K_\nu\psi_\mu. \tag{4.94}$$

これらの式から、超空間上の振率テンソルの $\theta = 0$ 成分を次のように抜き出すことができる。

$$\begin{aligned}
T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}|_{\theta=0} &= T^{\mathrm{cov}\,\widehat{k}}_{\widehat{m}\widehat{n}}, & (4.95)\\
T_{\widehat{\alpha}\widehat{m}}{}^{\widehat{n}}|_{\theta=0} &= 0, & (4.96)\\
T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{m}}|_{\theta=0} &= \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}, & (4.97)\\
T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} &= \psi^{\mathrm{cov}\,\widehat{\alpha}}_{\widehat{m}\widehat{n}}, & (4.98)\\
T_{\widehat{\alpha}\widehat{m}}{}^{\widehat{\beta}}|_{\theta=0} &= (K_{\widehat{m}})^{\widehat{\beta}}{}_{\widehat{\alpha}}, & (4.99)\\
T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}}|_{\theta=0} &= 0. & (4.100)
\end{aligned}$$

振率の $\theta = 0$ 成分がこのように与えられるとき、望ましい超対称変換則が超空間上の一般座標変換として得られることを確認しておこう。多脚場に対する一般座標変換 (4.49) の $\theta = 0$ 成分をばらし、振率に上記の式を代入すれば次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta_{\rm gc}(\xi)e_\mu{}^{\widehat{m}} &= e^{\widehat{k}}_\mu \xi^{\widehat{\beta}} T_{\widehat{\beta}\widehat{k}}{}^{\widehat{m}}|_{\theta=0} + \psi^{\widehat{\alpha}}_\mu \xi^{\widehat{\beta}} T_{\widehat{\beta}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{m}}|_{\theta=0}\\
&= \frac{1}{4}\psi^{\widehat{\alpha}}_\mu (\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\xi^{\widehat{\beta}}, & (4.101)\\
\delta_{\rm gc}(\xi)\psi^{\widehat{\alpha}}_\mu &= D_\mu\xi^{\widehat{\alpha}} + e^{\widehat{k}}_\mu \xi^{\widehat{\beta}} T_{\widehat{\beta}\widehat{k}}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} + \psi^{\widehat{\beta}}_\mu \xi^{\widehat{\gamma}} T_{\widehat{\gamma}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0}\\
&= D_\mu\xi^{\widehat{\alpha}} + e^{\widehat{k}}_\mu (K_{\widehat{m}})^{\widehat{\alpha}}{}_{\widehat{\beta}}\xi^{\widehat{\beta}}. & (4.102)
\end{aligned}$$

これは超対称変換 (4.89) にほかならない。

超対称変換だけではなく、x 空間上の一般座標変換についても同様に超空間上の一般座標変換から再現することができる。ただし超空間上の座標変換パラメータ Ξ^M は x 空間上の一般座標変換のパラメータ ϵ^μ と (4.47) によって関係しており、

$$\Xi^{\widehat{m}}|_{\theta=0} = \epsilon^\mu e_\mu{}^{\widehat{m}}, \quad \Xi^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} = \epsilon^\mu\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}} \tag{4.103}$$

のように $\Xi^{\widehat{\alpha}}$ が 0 では無いことに注意すると、超空間上の一般座標変換のうち $(\Xi^{\widehat{m}}=\epsilon^{\widehat{m}},\Xi^{\widehat{\alpha}}=0)$ によって生成されるのはスピン接続による補正項以外にグラビティーノによる補正項も加えて次のように定義された共変な一般座標変換である。

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon^\mu)=\delta^0_{\rm gc}(\epsilon^\mu)-\delta_Q(\epsilon^\mu\psi_\mu)-\delta_M(\epsilon^\mu\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}}). \tag{4.104}$$

純粋な一般座標変換は以前に与えた定義を用いると次のように決まる。

$$\delta^0_{\rm gc}(\epsilon)e_\mu^{\widehat{m}}=D_\mu\epsilon^{\widehat{m}}+\epsilon^\nu T^{(x)\widehat{m}}_{\nu\mu}-(\epsilon^\nu\omega_\nu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}})e_\mu^{\widehat{n}},\quad \delta^0_{\rm gc}(\epsilon)\psi_\mu=\epsilon^\nu\psi_{\nu\mu}+D_\mu(\epsilon^\nu\psi_\nu)-\frac{1}{4}(\epsilon^\nu\omega_{\nu-\widehat{m}\widehat{n}})\gamma^{\widehat{m}\widehat{n}}\psi_\mu. \tag{4.105}$$

ここでは x 空間の捩率を超空間のそれと区別するために $T^{(x)\widehat{m}}_{\mu\nu}$ と書いた。局所ローレンツ変換 $\delta_M(\sigma_{\widehat{m}\widehat{n}})$ は次のように与えられる。

$$\delta_M(\sigma_{\widehat{m}\widehat{n}})e_\mu^{\widehat{m}}=-\sigma^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}e_\mu^{\widehat{n}},\quad \delta_M(\sigma_{\widehat{m}\widehat{n}})\psi_\mu=-\frac{1}{4}\sigma_{\widehat{m}\widehat{n}}\gamma^{\widehat{m}\widehat{n}}\psi_\mu. \tag{4.106}$$

以上の変換則を組み合わせることにより、共変な一般座標変換が次のように得られる。

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon)e_\mu^{\widehat{m}}=D_\mu\epsilon^{\widehat{m}}+\epsilon^\nu\left(T^{(x)\widehat{m}}_{\nu\mu}-\frac{1}{4}(\psi_\nu\gamma^{\widehat{m}}\psi_\mu)\right),\quad \delta_{\rm gc}(\epsilon)\psi_\mu=\epsilon^\nu\psi_{\nu\mu}-K_\mu\epsilon^\nu\psi_\nu \tag{4.107}$$

一方超空間上の場に依存する一般座標変換のパラメータの $\epsilon^{\widehat{m}}$ 部分のみを 0 でないとし、$\theta=0$ 成分を抜き出すと、(4.49) は次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta_{\rm gc}(\epsilon)e_\mu{}^{\widehat{m}} &= D_\mu\epsilon^{\widehat{m}}+\epsilon^{\widehat{n}}e_\mu{}^{\widehat{k}}T_{\widehat{n}\widehat{k}}{}^{\widehat{m}}|_{\theta=0}+\epsilon^{\widehat{n}}\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}T_{\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{m}}|_{\theta=0}\\ &= D_\mu\epsilon^{\widehat{m}}+\epsilon^{\widehat{n}}e_\mu{}^{\widehat{k}}T^{{\rm cov}\,\widehat{m}}_{\widehat{n}\widehat{k}} \end{aligned}\tag{4.108}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\rm gc}(\epsilon)\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}} &= \epsilon^{\widehat{n}}e_\mu{}^{\widehat{k}}T_{\widehat{n}\widehat{k}}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0}+\epsilon^{\widehat{n}}\psi_\mu{}^{\widehat{\beta}}T_{\widehat{n}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0}\\ &= \epsilon^{\widehat{n}}e_\mu{}^{\widehat{k}}\psi^{{\rm cov}\,\widehat{\alpha}}_{\widehat{n}\widehat{k}}-\epsilon^{\widehat{n}}(K_{\widehat{n}})^{\widehat{\alpha}}{}_{\widehat{\beta}}\psi_\mu{}^{\widehat{\beta}}\end{aligned}\tag{4.109}$$

これらは実際に上記の変換則 (4.107) と一致している。

4.2.3 無矛盾性

重力理論において、スピン接続は常に多脚場やその他の場を用いて書くことができる複合場である。従ってその一般座標変換、超対称変換などの下での変換則はそれを構成する場の変換則によって一意的に決まるはずである。一方、超空間上での一般座標変換はそれとは独立に (4.50) に与えられており、ここからもスピン接続の変換則を決定することができる。これらの間に矛盾がないことが必要である。

超重力理論においてスピン接続を決めるためには、拘束条件 $T^{{\rm cov}\,\widehat{k}}_{\widehat{m}\widehat{n}}=0$ を用いる。(4.94) の第 1 式で $T^{{\rm cov}\,\widehat{k}}_{\widehat{m}\widehat{n}}=0$ とおいたものの両辺を超対称変換してみると、

$$0=\delta_{\rm ss}(\xi)\widetilde{T}^{\widehat{p}}_{\mu\nu}=\frac{1}{4}\psi_{\nu\mu}\gamma^{\widehat{p}}\xi+\left(\delta\omega_\mu{}^{\widehat{p}}{}_{\widehat{q}}e_\nu^{\widehat{q}}-\frac{1}{4}\psi_\mu\gamma^{\widehat{p}}K_\nu\xi\right)-[\mu\nu]. \tag{4.110}$$

添え字を入れ替えたものと適当に足し引きすることでこの式は $\delta\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}}$ について解くことができて、次の結果を得る。

$$\begin{aligned}\delta_{\rm ss}(\xi)\omega_{\rho-\widehat{m}\widehat{n}} &= -\frac{1}{8}\xi S_{\rho-\widehat{m}\widehat{n}}+\frac{1}{2}\psi_\rho K_{\widehat{m}\widehat{n}}\xi\\ &\quad -\frac{1}{2}\psi^\alpha_{\widehat{m}}(\gamma_{\{\widehat{n}}K_{\rho\}})_{\{\alpha\beta\}}\xi^\beta+\frac{1}{2}\psi^\alpha_{\widehat{n}}(\gamma_{\{\widehat{m}}K_{\rho\}})_{\{\alpha\beta\}}\xi^\beta\end{aligned}\tag{4.111}$$

Soryushiron Kenkyu

ただし、$S_{\rho-\widehat{m}\widehat{n}}$ および $K_{\mu\nu}$ は次のように定義される。

$$S_{\rho-\widehat{m}\widehat{n}} = \gamma_\rho \psi^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} + \gamma_{\widehat{m}} \psi^{\rm cov}_{\rho\widehat{n}} + \gamma_{\widehat{n}} \psi^{\rm cov}_{\widehat{m}\rho}, \tag{4.112}$$

$$(K_{\mu\nu})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} = (\gamma_{[\mu} K_{\nu]})_{\{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\}}. \tag{4.113}$$

一方超空間上での一般座標変換の式 (4.50) からは次の式が得られる。

$$\delta_{\rm gc}(\xi)\omega_{\mu\widehat{m}\widehat{n}} = e_\mu{}^{\widehat{k}} \xi^{\widehat{\alpha}} R_{\widehat{\alpha}\widehat{k}\widehat{m}\widehat{n}} + \psi_\mu{}^{\widehat{\beta}} \xi^{\widehat{\alpha}} R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{m}\widehat{n}} \tag{4.114}$$

(4.111) と (4.114) が等しくなるためには、次の式が成り立つ必要がある。

$$\frac{1}{8}(S_{\widehat{k}-\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\alpha}} = R_{\widehat{\alpha}\widehat{k}\widehat{m}\widehat{n}}|_{\theta=0}, \tag{4.115}$$

$$-\frac{1}{2}(K_{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\beta}\widehat{\alpha}} = R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{m}\widehat{n}}|_{\theta=0}, \tag{4.116}$$

$$(\gamma_{\{\mu} K_{\nu\}})_{\{\alpha\beta\}} = 0. \tag{4.117}$$

これらの式の右辺はすべて曲率テンソルで、左辺は全て振率で書かれている。実は後で見るように、これらの式は全てビアンキ項等式 $I^1 = 0$ によって成り立つことが保障されている。

こうして、スピン接続の超対称変換が次のように得られる。

$$\delta_Q(\xi)\omega_{\rho-\widehat{m}\widehat{n}} = -\frac{1}{8}\xi S_{\rho-\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{1}{2}\psi_\rho K_{\widehat{m}\widehat{n}}\xi. \tag{4.118}$$

こうして得られたスピン接続の超対称変換を純粋な一般座標変換

$$\delta^0_{\rm gc}(\epsilon)\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}} = \epsilon^\nu R_{\nu\mu-\widehat{m}\widehat{n}} + D_\mu(\epsilon^\nu \omega_{\nu-\widehat{m}\widehat{n}}). \tag{4.119}$$

および局所ローレンツ変換

$$\delta_M(\sigma_{\widehat{m}\widehat{n}})\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}} = D_\mu \sigma_{\widehat{m}\widehat{n}}. \tag{4.120}$$

と組み合わせれば、共変な一般座標変換を次のように与えることができる。

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon)\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}} = \epsilon^\nu R^{\rm cov}_{\nu\mu-\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{1}{8}\epsilon^\nu \psi_\mu S_{\nu-\widehat{m}\widehat{n}}. \tag{4.121}$$

ただし、$R^{\rm cov}$ は変換則 (4.118) を用いて定義した曲率テンソルの超共変化である。

$$R^{\rm cov}_{\tau\rho-\widehat{m}\widehat{n}} = R_{\tau\rho-\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{1}{4}\psi_{[\tau} S_{\rho]-\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{1}{2}\psi_\tau K_{\widehat{m}\widehat{n}}\psi_\rho \tag{4.122}$$

変換則 (4.121) も (4.115) を用いれば (4.50) に与えられた超空間上の一般座標変換と一致することがわかる。

4.3 拘束条件とビアンキ恒等式

ここでは二つのスカラー場と一つのベクトル場を補助場として含む定式化 [10, 11] について考える。

4.3.1 拘束条件

§4.2.2 で見たように、成分場形式での超対称変換を再現するには、超空間上の捩率テンソルの幾つかの成分は $\theta = 0$ において 0 にならなければならない。この条件を満足させつつ超空間上での一般座標変換不変性を保つためには、これが $\theta = 0$ だけではなく、超空間上の任意の点で成り立つとする必要がある。従って超場形式の 4 次元超重力理論では捩率に対して次の拘束条件が課される。

4 次元超重力理論の捩率に対する拘束条件

$$T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta) = T_{\widehat{\alpha}\widehat{m}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta) = T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}}(x,\theta) = 0, \quad T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta) = \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}. \tag{4.123}$$

以下ではこれらの拘束条件とビアンキ恒等式を組み合わせて解き、どれだけの独立な自由度があるかを決める。その結果、多脚場、グラビティーノ、そしてそれらの off-shell での自由度の差 6 を埋め合わせるための補助場として複素スカラー場と実ベクトル場が現れることがわかる。

上記の拘束条件で固定されているもの以外の捩率の成分は $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ と $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}$ である。後者はその $\theta = 0$ 成分としてグラビティーノの場の強さを含む。前者の $\theta = 0$ 成分については、重力多重項の補助場になる。

4.3.2 成分場に対するビアンキ恒等式

$I^1_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}}$ および $I^1_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{\alpha}}$ はそれぞれ曲率テンソルおよびグラビティーノに対するビアンキ恒等式を与える。

$$I^1_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}} \propto R_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}} + R_{\widehat{n}\widehat{p}\widehat{m}}{}^{\widehat{q}} + R_{\widehat{p}\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{q}} = 0. \tag{4.124}$$

$$I^1_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{\alpha}} \propto (D_{\widehat{m}} T_{\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{\alpha}} + T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\beta}} T_{\widehat{\beta}\widehat{p}}{}^{\widehat{\alpha}})_{[\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}]} = 0. \tag{4.125}$$

これらは曲率テンソルとグラビティーノの場の強さが対応するポテンシャルを用いて書けることを保障している。

たとえば、$I^1_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}} = 0$ は $T_{\mu\nu}{}^{\widehat{k}}$ が次のように書けることを保障している。

$$T_{\mu\nu}{}^{\widehat{k}} = D_\mu e_\nu{}^{\widehat{k}} - D_\nu e_\mu{}^{\widehat{k}} = \partial_\mu e_\nu{}^{\widehat{k}} - \partial_\nu e_\mu{}^{\widehat{k}} + \omega_\mu{}^{\widehat{k}}{}_{\widehat{l}} e_\nu{}^{\widehat{l}} - \omega_\nu{}^{\widehat{k}}{}_{\widehat{l}} e_\mu{}^{\widehat{l}}. \tag{4.126}$$

この式を ω についてとくことでスピン接続を e と ψ を用いて表すことができる。

4.3.3 微分を含まないビアンキ恒等式

微分を含まないビアンキ恒等式を用いると、$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\beta}$ の独立成分がどれだけあるかを明らかにすることができる。また、曲率の成分のうち $R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}$ と $R_{\widehat{\alpha}\widehat{m}}$ を捩率を用いて表すことができる。

具体的には $I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\{\widehat{m}\widehat{n}\}}$ と $I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}\widehat{\delta}}$ が $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\beta}$ の独立成分を与え、$I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}[\widehat{m}\widehat{n}]}$ と $I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}}$ がそれぞれ $R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}$ と $R_{\widehat{\alpha}\widehat{m}}$ を与える。

$I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{m}}{}^{\widehat{n}}$

振率の $T_{\widehat{\alpha}\widehat{m}}{}^{\widehat{\beta}}$ という成分について詳しく見てみよう。この成分に対して、ビアンキ恒等式 $I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{m}}{}^{\widehat{n}} = 0$ は $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ と $R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}-\widehat{m}\widehat{n}}$ の間の代数関係

$$R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}-\widehat{m}}{}^{\widehat{n}} + \frac{1}{4}(T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\gamma}}(\gamma^{\widehat{n}})_{\widehat{\gamma}\widehat{\beta}} + T_{\widehat{m}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}}(\gamma^{\widehat{n}})_{\widehat{\gamma}\widehat{\alpha}}) = 0 \tag{4.127}$$

を与える。この関係式の $\widehat{m}$ と $\widehat{n}$ の対称部分をとると、曲率テンソルの項が消えて次のようになる。

$$I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\{\widehat{m}\widehat{n}\}} \propto (T_{\{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}\}})_{\{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\}} = 0. \tag{4.128}$$

ここでスピノル添え字に対する行列表示 $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = (T_{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ を行った。この節での目的は (4.128) に対する一般解を与えることである。ビアンキ恒等式 $I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\delta}} = 0$ も $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ に対する条件を与えるが、これについては次の節で考える。

$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$、$I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\{\widehat{m}\widehat{n}\}}$ をローレンツ群の規約表現に分解すると、それぞれ次のようになる。

$$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} : 2(1,1) + 2(1,3) + 2(3,1) + 2(3,3) + 4(2,2) + (2,4) + (4,2) \tag{4.129}$$

$$I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\{\widehat{m}\widehat{n}\}} : 2(1,3) + 2(3,1) + 2(3,3) + (3,5) + (5,3) + 2(2,2) + (2,4) + (4,2) + (4,4) \tag{4.130}$$

$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ には一重項が二つ含まれるが、拘束条件に対応する表現がないため、これらは拘束条件によって拘束されない。この部分は

$$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = \frac{1}{2}[(X + iY\gamma_5)\gamma_{\widehat{m}}]_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} \tag{4.131}$$

と与えることができる。これ以外の部分については、ビアンキ恒等式 (4.128) が最も有効に働いたとすると、ベクトル成分が二つ残る。以下では実際にそうなっており、(4.128) の一般解がスカラー二つとベクトル二つで書けることを示す。

まず、$2(1,3) + 2(3,1) + 2(3,3)$ の部分が 0 であることを示そう。この部分は二つのトレースレステンソル $X_{\widehat{m}\widehat{p}}$ と $Y_{\widehat{m}\widehat{p}}$ を用いて次のようにおくことができる。

$$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = [(X_{\widehat{m}\widehat{p}} + iY_{\widehat{m}\widehat{p}}\gamma_5)\gamma^{\widehat{p}}]_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} \tag{4.132}$$

これを (4.128) に代入する。テンソル表現に対して、二つのスピノル添え字に対して対称な成分は、$\gamma^{\widehat{kl}}$ および $\gamma_5\gamma^{\widehat{kl}}$ とトレースをとる事によって取り出すことができる。$\gamma^{\widehat{kl}}$ とトレースを取ると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{tr}}{4}(\gamma^{\widehat{kl}}T_{\{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}\}}) &= \left[X_{\widehat{m}\widehat{p}}\frac{\mathrm{tr}}{4}(\gamma^{\widehat{kl}}\gamma^{\widehat{p}}\gamma_{\widehat{n}}) + iY_{\widehat{m}\widehat{p}}\frac{\mathrm{tr}}{4}(\gamma^{\widehat{kl}}\gamma_5\gamma^{\widehat{p}}\gamma_{\widehat{n}})\right]_{\{\widehat{m}\widehat{n}\}} \\ &= (X_{\widehat{m}}{}^{\widehat{l}}\delta^{\widehat{k}}_{\widehat{n}} - X_{\widehat{m}}{}^{\widehat{k}}\delta^{\widehat{l}}_{\widehat{n}} + iY_{\widehat{m}\widehat{p}}\gamma^{5\widehat{klp}}{}_{\widehat{n}})_{\{\widehat{m}\widehat{n}\}}\end{aligned} \tag{4.133}$$

さらに添え字 $\widehat{n}$ と $\widehat{k}$ の縮約を行うと、

$$4X_{\widehat{m}}{}^{\widehat{l}} + iY_{\widehat{k}\widehat{p}}\gamma^{5\widehat{klp}}{}_{\widehat{m}} = 0 \tag{4.134}$$

を得る。この式より $X_{\widehat{m}\widehat{n}}$ の対称部分が 0 であることがわかる。一方 $\gamma_5\gamma^{\widehat{kl}}$ とトレースを取ると、

$$\begin{aligned}i\frac{\mathrm{tr}}{4}(\gamma^5\gamma^{\widehat{kl}}T_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}}) &= \left[iX_{\widehat{m}\widehat{p}}\frac{\mathrm{tr}}{4}(\gamma^5\gamma^{\widehat{kl}}\gamma^{\widehat{p}}\gamma_{\widehat{n}}) - Y_{\widehat{m}\widehat{p}}\frac{\mathrm{tr}}{4}(\gamma^{\widehat{kl}}\gamma^{\widehat{p}}\gamma_{\widehat{n}})\right]_{\{\widehat{m}\widehat{n}\}} \\ &= (iX_{\widehat{m}\widehat{p}}\gamma^{5\widehat{klp}}{}_{\widehat{n}} - Y_{\widehat{m}}{}^{\widehat{l}}\delta^{\widehat{k}}_{\widehat{n}} + Y_{\widehat{m}}{}^{\widehat{k}}\delta^{\widehat{l}}_{\widehat{n}})_{\{\widehat{m}\widehat{n}\}}\end{aligned} \tag{4.135}$$

Soryushiron Kenkyu

が得られる。添え字 $\widehat{n}$ と $\widehat{k}$ の縮約を行うと、

$$iX_{\widehat{k}\widehat{p}}\gamma^{5\widehat{k}\widehat{l}\widehat{p}}{}_{\widehat{m}} - 4Y_{\widehat{m}}{}^{\widehat{l}} = 0. \tag{4.136}$$

したがって、$Y_{\widehat{m}\widehat{n}}$ の対称成分も 0 であることがわかる。$X_{\widehat{m}\widehat{n}}$ と $Y_{\widehat{m}\widehat{n}}$ がどちらも反対称だとすれば、(4.134) も (4.136) もどちらも $X_{\widehat{m}\widehat{n}}$ と $Y_{\widehat{m}\widehat{n}}$ が双対関係にあることをいっているが、よく見ると係数が異なっている。したがって反対称成分もやはり 0 でなければならない。

次に $4(2,2)$ の部分について考えよう。$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ のこの成分は 4 つのベクトルを用いて次のようにおくことができる。

$$T_{\widehat{m}} = \gamma_{\widehat{m}}\not{A} + \not{B}\gamma_{\widehat{m}} + i\gamma_5\gamma_{\widehat{m}}\not{C} - \frac{i}{6}\gamma_5\not{V}\gamma_{\widehat{m}}. \tag{4.137}$$

最後の項だけ係数 1/6 を付けたのは、このように取っておくとあとで便利だからである。この段階では特に意味はないと思ってよい。ビアンキ恒等式 (4.128) のうち、この成分を含む部分は $\gamma^{\widehat{k}}$ とのトレースを取ることで抜き出すことができる。

$$\frac{\mathrm{tr}}{4}(\gamma^{\widehat{k}}T_{\{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}\}}) = \frac{\mathrm{tr}}{4}(\gamma^{\widehat{k}}\gamma_{\{\widehat{m}}\not{A}\gamma_{\widehat{n}\}}) + \frac{\mathrm{tr}}{4}(\gamma^{\widehat{k}}\not{B}\gamma_{\{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}\}}) = \delta^{\widehat{k}}_{\widehat{n}}A_{\widehat{m}} + \delta^{\widehat{k}}_{\widehat{m}}A_{\widehat{n}} - \eta_{\widehat{m}\widehat{n}}A^{\widehat{k}} + B^{\widehat{k}}\delta_{\widehat{m}\widehat{n}} \tag{4.138}$$

添え字 $\widehat{m}$ と $\widehat{n}$ が対称であるために ϵ テンソルが使えず、C と V はこの式の中に現れない。したがってこの段階ではこれらの係数は未定のまま残る。$\widehat{k}$ と $\widehat{n}$、$\widehat{m}$ と $\widehat{n}$ を縮約するとそれぞれ次の式を得る。

$$4A_{\widehat{m}} + B_{\widehat{m}} = 0, \quad -2A^{\widehat{k}} + 4B^{\widehat{k}} = 0. \tag{4.139}$$

この二つの式が両立するためには $A_{\widehat{m}} = B_{\widehat{m}} = 0$ でなければならない。

残るは $(2,4)+(4,2)$ の部分である。この成分は次のように書くことができる。

$$T_{\widehat{m}} = F_{\widehat{m}-\widehat{p}\widehat{q}}\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}} \tag{4.140}$$

ただし、$F_{\widehat{m}-\widehat{p}\widehat{q}}$ は添え字 $\widehat{p}$ と $\widehat{q}$ について反対称であり、$\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}$ についての完全反対称部分および $\widehat{m}$ と $\widehat{p}$ あるいは $\widehat{q}$ を縮約して得られるトレース部分が 0 であるようなテンソルである。ビアンキ恒等式 (4.128) に代入すれば次の式を得る。

$$(T_{\{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}\}})_{\{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\}} = (F_{\widehat{m}-\widehat{p}\widehat{n}} + F_{\widehat{n}-\widehat{p}\widehat{m}})(\gamma^{\widehat{p}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} = 0 \tag{4.141}$$

この式は $F_{\widehat{m}-\widehat{p}\widehat{q}} = 0$ を意味している。

こうして、ビアンキ恒等式 (4.128) の一般解が次のように求まった。

$$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = [\frac{1}{2}(X + iY\gamma_5)\gamma_{\widehat{m}} + i\gamma_5\gamma_{\widehat{m}}\not{C} - \frac{i}{6}\gamma_5\not{V}\gamma_{\widehat{m}}]_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}. \tag{4.142}$$

ここまでは $I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{m}\widehat{n}}$ の添え字 $\widehat{m}$ と $\widehat{n}$ について対称な部分のみを見てきた。反対称な部分を用いれば曲率テンソルの成分 $R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}-\widehat{m}}{}^{\widehat{n}}$ を決定することができる。(4.127) に対して (4.142) の $T_{\widehat{m}}$ を代入すれば

$$\begin{aligned}
R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}-\widehat{m}\widehat{n}} &= \frac{1}{2}(T_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}})_{\{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\}} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}(X + iY\gamma_5)\gamma_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}} + i\gamma_5\gamma_{\widehat{m}}\not{C}\gamma_{\widehat{n}} - \frac{i}{6}\gamma_5\not{V}\gamma_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}}\Big]_{\{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\}} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}(X + iY\gamma_5)\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}} - i(C^{\widehat{p}} + \frac{1}{6}V^{\widehat{p}})\gamma_5\gamma_{\widehat{p}\widehat{m}\widehat{n}}\Big]_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}
\end{aligned} \tag{4.143}$$

$I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}-\widehat{m}\widehat{n}}$ を用いて得られるのはここまでであるが、二つのベクトル場 $C_{\widehat{m}}$ と $V_{\widehat{m}}$ は $I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}-\widehat{\gamma}\widehat{\delta}} = 0$ を用いるとこの次の節で示すように独立ではないことがわかる。

Soryushiron Kenkyu

$I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\delta}}$

ビアンキ恒等式 $I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\delta}} = 0$ も $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ への条件を与える。$I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}-\widehat{\gamma}\widehat{\delta}}$ をローレンツ群の規約表現に分解すると、次のようになる。

$$I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\delta}} : 2(1,3) + 2(3,1) + 2(3,3) + (1,5) + (5,1) + 2(2,2) + 2(2,4) + 2(4,2) \tag{4.144}$$

やはり一重項を含まないので、$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ に含まれる二つのスカラーの自由度はそのまま残る。もしビアンキ恒等式が有効に働けば、二つのベクトルの自由度が落ちる可能性があるが、実は以下で見るように一つのベクトル場は残る。

解くべきビアンキ恒等式は、

$$I_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\delta}} \sim \left[\frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} T_{\widehat{m}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\delta}} - \frac{1}{4} R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{m}\widehat{n}} (\gamma^{\widehat{m}\widehat{n}})_{\gamma}{}^{\widehat{\delta}}\right]_{\{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}\}} = 0. \tag{4.145}$$

である。これに (4.142) と (4.143) を代入すれば、次のようになる。

$$\left[\frac{i}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}(\gamma_5\gamma_{\widehat{m}}\not{C} - \frac{1}{6}\gamma_5\not{V}\gamma_{\widehat{m}})_{\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\delta}} + \frac{i}{16}(\gamma_5(\not{C} + \frac{1}{6}\not{V})\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}} + \gamma_5\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}(\not{C} + \frac{1}{6}\not{V}))_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}(\gamma^{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\delta}}\right]_{\{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}\}} = 0. \tag{4.146}$$

このビアンキ恒等式にはスピノル添え字が 4 つもあるために解きにくい。そこで、ベクトル場に条件を課す部分を取り出して考えるのがよい。ビアンキ恒等式の成分の中で、ベクトルに対する条件を与えるのは次の二つの部分の少なくともどちらかに含まれる。

$$I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\delta}}(\gamma^{\widehat{k}})^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}, \quad I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\delta}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\delta}}{}^{\widehat{\gamma}}. \tag{4.147}$$

まず、一つ目から見てみよう。$(\gamma_{\widehat{k}})^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}$ を (4.146) にかけてみると、

$$\left[\frac{i}{2}\gamma_5\not{V}\gamma_{\widehat{k}} + \frac{i}{4}\gamma_5\gamma_{\widehat{k}}\not{V} + i\gamma_5\not{C}\gamma_{\widehat{k}} + \frac{i}{2}\gamma_5\gamma_{\widehat{k}}\not{C}\right]_{\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\delta}} = 0. \tag{4.148}$$

次に、(4.147) の二つ目を見てみよう。(4.146) に $(\gamma_{\widehat{k}})_{\widehat{\delta}}{}^{\widehat{\gamma}}$ をかけてみると、

$$-\frac{i}{4}(\frac{1}{2}V^{\widehat{p}} + C^{\widehat{p}})(\gamma_5\gamma_{\widehat{k}\widehat{p}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} = 0 \tag{4.149}$$

となる。(4.148) も (4.149) も、ベクトル $C_{\widehat{m}}$ と $V_{\widehat{m}}$ の間の次の関係を与える。

$$C_{\widehat{m}} = -\frac{1}{2}V_{\widehat{m}}. \tag{4.150}$$

こうして、$T_{\widehat{m}}$ に対する一般解が次のように求まった。

$$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = [\frac{1}{2}(X + iY\gamma_5)\gamma_{\widehat{m}} - \frac{i}{2}\gamma_5\gamma_{\widehat{m}}\not{V} - \frac{i}{6}\gamma_5\not{V}\gamma_{\widehat{m}}]_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}. \tag{4.151}$$

曲率テンソルの $\widehat{\alpha}\widehat{\beta}$ 成分は次のように与えられる。

$$R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}-\widehat{m}\widehat{n}} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}(X + iY\gamma_5)\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{i}{6}\gamma_5\not{V}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{i}{6}\gamma_5\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\not{V}\Big]_{\alpha\beta} \tag{4.152}$$

11 次元超重力理論の場合には、反対称テンソル場のビアンキ恒等式によって $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ の独立成分が反対称テンソル場と同一視された。しかしここではそのような恒等式が存在しないので、上記のスカラー場とベクトル場は補助場として振舞う。実際 $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ が含むボゾンの自由度 6 はグラビトンとグラビティーノの off-shell での自由度の差を埋め合わせるのに必要な個数に一致している。

Soryushiron Kenkyu

$I_{\hat{\alpha}\hat{m}\hat{p}}{}^{\hat{q}}$

$I_{\hat{\alpha}\hat{m}\hat{p}}{}^{\hat{q}} = 0$ は次のように曲率の $\hat{\alpha}\hat{m}$ 成分を捩率を用いて与える式になる。

$$\frac{1}{4}(\gamma^{\hat{q}})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} T_{\hat{m}\hat{p}}{}^{\hat{\beta}} + R_{\hat{\alpha}\hat{m}\hat{p}}{}^{\hat{q}} - R_{\hat{\alpha}\hat{p}\hat{m}}{}^{\hat{q}} = 0 \tag{4.153}$$

曲率テンソルの後ろ二つの添え字について反対称であることを用いれば、この式は次のように曲率テンソルについて解くことができる。

$$R_{\hat{\alpha}\hat{m}\hat{p}\hat{q}} = \frac{1}{8}((\gamma_{\hat{m}})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} T_{\hat{p}\hat{q}}{}^{\hat{\beta}} + (\gamma_{\hat{q}})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} T_{\hat{p}\hat{m}}{}^{\hat{\beta}} + (\gamma_{\hat{p}})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} T_{\hat{m}\hat{q}}{}^{\hat{\beta}}) \tag{4.154}$$

さらに、(4.154) の後ろ二つをスピノル添え字にしたものは次のように与えられる。

$$R_{\hat{\alpha}\hat{m}\hat{\beta}\hat{\gamma}} = -\frac{1}{4} R_{\hat{\alpha}\hat{m}\hat{p}\hat{q}} (\gamma^{\hat{p}\hat{q}})_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} = -\frac{1}{32}((\gamma_{\hat{m}})_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} T_{\hat{p}\hat{q}}{}^{\hat{\delta}} + (\gamma_{\hat{q}})_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} T_{\hat{p}\hat{m}}{}^{\hat{\delta}} + (\gamma_{\hat{p}})_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} T_{\hat{m}\hat{q}}{}^{\hat{\delta}})(\gamma^{\hat{p}\hat{q}})_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} \tag{4.155}$$

4.3.4 θ 微分を含むビアンキ恒等式

θ 微分を含む恒等式 $I_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{m}}{}^{\hat{\gamma}}$ は主にグラビティーノ超場 $T_{\hat{m}\hat{n}}{}^{\hat{\alpha}}$ のうち、物理的自由度であるスピン 3/2 成分以外の部分をその他の場（$T_{\hat{m}\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}$ の成分であるスカラー場やベクトル場）の θ 微分としてあらわすような関係式を与える。そのほかに、グラビティーノ超場を含まない成分から複素スカラー場 $X - iY$ がカイラルであるという情報が得られる。

$I^1_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{m}}{}^{\hat{\gamma}}$ **(1)**

ビアンキ恒等式 $I^1_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{m}}{}^{\hat{\gamma}} = 0$ について考えてみよう。これは次のように、$T_{\hat{m}\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}$ のスピノル微分と、グラビティーノと曲率の項を含む。

$$I_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{m}}{}^{\hat{\gamma}} \propto D_{\hat{\alpha}} T_{\hat{\beta}\hat{m}}{}^{\hat{\gamma}} - D_{\hat{\beta}} T_{\hat{m}\hat{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}} + \frac{1}{4}(\gamma^{\hat{p}})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} T_{\hat{p}\hat{m}}{}^{\hat{\gamma}} + R_{\hat{m}\hat{\alpha}\hat{\beta}}{}^{\hat{\gamma}} - R_{\hat{\beta}\hat{m}\hat{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}} = 0 \tag{4.156}$$

これは、スピノル添え字のカイラリティによって

$$I^1_{\hat{\hat{\alpha}}\hat{\hat{\beta}}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} = 0, \quad I^1_{\hat{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} = 0, \quad I^1_{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} = 0 \tag{4.157}$$

の 3 つの部分（とこれらの複素共役）に分けることができる。これらを順に節に分けて考えていこう。ここでは 3 番目のものについて考える。$I^1_{\underline{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} = 0$ にはグラビティーノと曲率が含まれず、$T_{\hat{\beta}\hat{m}}{}^{\hat{\gamma}}$ に対する次の式を与える。

$$D_{\hat{\hat{\alpha}}} T_{\hat{\hat{\beta}}\hat{m}}{}^{\underline{\hat{\gamma}}} + D_{\hat{\hat{\beta}}} T_{\hat{\hat{\alpha}}\hat{m}}{}^{\underline{\hat{\gamma}}} = 0 \tag{4.158}$$

この式に (4.151) を代入すれば、スカラー部分のみが利いて

$$D_{\hat{\hat{\alpha}}}(X + iY) = 0 \tag{4.159}$$

が得られる。すなわち、超空間上の複素スカラー場 $X + iY$ は反カイラルである。

$I^1_{\alpha\beta m}{}^{\gamma}$ (2)

(4.157) の一つ目、$I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{m}}{}^{\widehat{\widehat{\gamma}}}=0$ について見てみよう。この式は次のものを含む。括弧の中はローレンツ群の表現である。

$$D_{\widehat{\alpha}}V_{\widehat{m}}[(1,2)+(3,2)],\quad R_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}\sim T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\underline{\alpha}}}[(3,2)+(1,4)+(1,2)]. \tag{4.160}$$

ビアンキ恒等式自身も規約分解してみると、

$$I^1_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{m}}{}^{\widehat{\widehat{\gamma}}}:(1,2)+2(3,2)+(5,2) \tag{4.161}$$

となる。従って、グラビティーノ $T^{\widehat{\alpha}}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ の $(1,4)$ 成分に対しては何の条件も与えない。$(3,2)$ および $(1,2)$ 成分については、ベクトル場の θ 微分によってグラビティーノの場の強さを表す式が得られる。

詳しく見てみよう。まず、ビアンキ恒等式の二つの添え字 $\widehat{\alpha}$ と $\widehat{\widehat{\gamma}}$ を縮約すると、次の式が得られる。

$$I_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{m}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}\propto -D_{\widehat{\alpha}}T_{\widehat{m}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}-D_{\widehat{\beta}}T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}+R_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}=0 \tag{4.162}$$

ここに (4.151) と (4.155) を代入すると、

$$I_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{m}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}\propto \frac{i}{3}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{p}})_{\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{\alpha}}V^{\widehat{p}}-2iD_{\widehat{\beta}}V_{\widehat{m}}-\frac{1}{32}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\gamma_{\widehat{m}}T_{\widehat{p}\widehat{q}}+6\gamma^{\widehat{p}}T_{\widehat{p}\widehat{m}})_{\widehat{\beta}}=0. \tag{4.163}$$

この式は $(1,2)$ および $(3,2)$ 成分を含んでいる。それぞれの成分についての関係式を得るために、グラビティーノ成分を次のように分解しておこう。

$$T_{\widehat{p}\widehat{m}}{}^{\underline{\widehat{\gamma}}}=T^{(1,4)}_{\widehat{p}\widehat{m}}{}^{\underline{\widehat{\gamma}}}+T^{(1,2)}_{\widehat{p}\widehat{m}}{}^{\underline{\widehat{\gamma}}}+T^{(3,2)}_{\widehat{p}\widehat{m}}{}^{\underline{\widehat{\gamma}}} \tag{4.164}$$

$$T^{(1,2)}_{\widehat{p}\widehat{m}}{}^{\underline{\widehat{\gamma}}}=(\gamma_{\widehat{p}\widehat{m}})^{\underline{\widehat{\gamma}}}{}_{\underline{\widehat{\delta}}}T^{(1/2)\underline{\widehat{\delta}}} \tag{4.165}$$

$$\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\gamma_{\widehat{m}}T^{(3,2)}_{\widehat{p}\widehat{q}}=4\gamma^{\widehat{p}}T^{(3,2)}_{\widehat{p}\widehat{m}} \tag{4.166}$$

ここで、$T^{(1/2)\underline{\widehat{\alpha}}}$ は $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\underline{\widehat{\alpha}}}$ のスピン 1/2 成分である。この分解を上の式に代入すると、

$$\frac{i}{3}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{p}})_{\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{\alpha}}V^{\widehat{p}}-2iD_{\widehat{\beta}}V_{\widehat{m}}-\frac{1}{16}(5\gamma^{\widehat{p}}T^{(3,2)}_{\widehat{p}\widehat{m}}+3\gamma^{\widehat{p}}T^{(1,2)}_{\widehat{p}\widehat{m}})_{\widehat{\beta}}=0. \tag{4.167}$$

まずは $T^{(1,2)}$ だけを取り出すためにさらに $(\gamma^{\widehat{m}})^{\underline{\widehat{\gamma}}\widehat{\widehat{\beta}}}$ を掛けると、

$$-3i(\gamma_{\widehat{p}})^{\underline{\widehat{\gamma}}\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{\alpha}}V^{\widehat{p}}+\frac{3}{16}(\gamma^{\widehat{m}\widehat{p}}T^{(1,2)}_{\widehat{p}\widehat{m}})^{\underline{\widehat{\gamma}}}=-3i(\gamma_{\widehat{p}})^{\underline{\widehat{\gamma}}\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{\alpha}}V^{\widehat{p}}+\frac{9}{4}T^{(1/2)\underline{\widehat{\gamma}}}=0. \tag{4.168}$$

したがって、$T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\underline{\widehat{\gamma}}}$ の $(1,2)$ 成分が次のように得られる。

$$T^{(1/2)\underline{\widehat{\gamma}}}=\frac{4i}{3}D_{\widehat{\alpha}}V^{\underline{\widehat{\gamma}}\widehat{\widehat{\alpha}}},\quad T^{(1,2)}_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\underline{\widehat{\gamma}}}=\frac{4i}{3}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}})^{\underline{\widehat{\gamma}}}{}_{\underline{\widehat{\delta}}}D_{\widehat{\alpha}}V^{\underline{\widehat{\delta}}\widehat{\widehat{\alpha}}} \tag{4.169}$$

次に $T^{(3,2)}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ 成分を得るために (4.169) を (4.167) に代入して $T^{(1,2)}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ を消去すると、

$$-\frac{5i}{12}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{p}})_{\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{\alpha}}V_{\widehat{p}}-\frac{5i}{4}D_{\widehat{\beta}}V_{\widehat{m}}-\frac{5}{16}(\gamma^{\widehat{p}}T^{(3,2)}_{\widehat{p}\widehat{m}})_{\widehat{\beta}}=0. \tag{4.170}$$

したがって $T^{(3,2)}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ に対して次の式を得る。

$$(\gamma^{\widehat{p}}T^{(3,2)}_{\widehat{p}\widehat{m}})_{\widehat{\beta}}=\frac{4i}{3}(\gamma_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{p}}+2\gamma_{\widehat{p}}\gamma_{\widehat{m}})_{\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{\alpha}}V^{\widehat{p}} \tag{4.171}$$

Soryushiron Kenkyu

右辺にある $P_{\hat{m}\hat{n}} = (1/4)(\gamma_{\hat{m}}\gamma_{\hat{n}} + 2\gamma_{\hat{n}}\gamma_{\hat{m}})$ という因子は $(3,2)$ 成分を抜き出す射影行列である。実際、次の式が成り立つ。

$$P_{\hat{m}\hat{p}}P^{\hat{p}}{}_{\hat{n}} = P_{\hat{m}\hat{n}}, \quad P_{\hat{m}\hat{p}}\gamma^{\hat{p}} = \gamma^{\hat{p}}P_{\hat{p}\hat{m}} = 0. \tag{4.172}$$

(4.169) と (4.171) を組み合わせれば、ベクトル場の θ 微分についての次の式が得られる。

$$D_{\hat{\hat{\alpha}}}V_{\hat{m}} = \frac{3i}{16}(\gamma^{\hat{p}}T^{(3,2)}_{\hat{p}\hat{m}})_{\hat{\hat{\alpha}}} + \frac{i}{16}(\gamma^{\hat{p}}T^{(1,2)}_{\hat{p}\hat{m}})_{\hat{\hat{\alpha}}} \tag{4.173}$$

この式の複素共役とあわせて 4 成分表示に戻ると、次のようになる。

$$D_{\hat{\alpha}}V_{\hat{m}} = \frac{3i}{16}(\gamma_5\gamma^{\hat{p}}T^{(3,2)+(2,3)}_{\hat{p}\hat{m}})_{\hat{\alpha}} + \frac{i}{16}(\gamma_5\gamma^{\hat{p}}T^{(1,2)+(2,1)}_{\hat{p}\hat{m}})_{\hat{\alpha}} \tag{4.174}$$

$I^1_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{m}}{}^{\hat{\gamma}}$ **(3)**

最後に、(4.157) の二番目のビアンキ恒等式 $I^1_{\hat{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} = 0$ について考えよう。

$$I_{\hat{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} \propto D_{\hat{\hat{\alpha}}}T_{\underline{\hat{\beta}}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} - D_{\underline{\hat{\beta}}}T_{\hat{m}\hat{\hat{\alpha}}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} + \frac{1}{4}(\gamma^{\hat{p}})_{\hat{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}T_{\hat{p}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} - R_{\underline{\hat{\beta}}\hat{m}\hat{\hat{\alpha}}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} = 0 \tag{4.175}$$

この式に含まれる変数は次の表現に属する。

$$D_{\hat{\hat{\alpha}}}T_{\underline{\hat{\beta}}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} : (2,1), \quad D_{\underline{\hat{\beta}}}T_{\hat{m}\hat{\hat{\alpha}}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} : (2,3)+(2,1), \quad T_{\hat{p}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}}, R_{\underline{\hat{\beta}}\hat{m}\hat{\hat{\alpha}}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} : (4,1)+(2,1)+(2,3). \tag{4.176}$$

また、ビアンキ恒等式の規約分解は次のようになる。

$$I_{\hat{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} : 2(2,1)+2(2,3)+(4,1)+(4,3). \tag{4.177}$$

まず、$(4,3)$ 成分を持つ場がないので、ビアンキ恒等式の $(4,3)$ 成分は恒等的に成り立つ。ビアンキ恒等式の $(4,1)$ 成分はすなわちグラビティーノのスピン 3/2 成分を他の場によって表す式を与える可能性があるが、もしそうなってしまうとグラビティーノがダイナミカルな場ではなくなってしまうので都合が悪い。実は、ビアンキ恒等式の $(4,1)$ 成分は恒等的に成り立っており、新たな条件が課されないことが以下のようにしてわかる。ビアンキ恒等式から $(4,1)$ 成分を抜き出すために、次のような γ-トレース部分に注目しよう。

$$(\gamma^{\hat{m}})^{\hat{\hat{\delta}}\underline{\hat{\beta}}}I_{\hat{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} \propto (\gamma^{\hat{m}})^{\hat{\hat{\delta}}\underline{\hat{\beta}}}D_{\hat{\hat{\alpha}}}T_{\underline{\hat{\beta}}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} - (\gamma^{\hat{m}})^{\hat{\hat{\delta}}\underline{\hat{\beta}}}D_{\underline{\hat{\beta}}}T_{\hat{m}\hat{\hat{\alpha}}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} + \frac{1}{4}(\gamma^{\hat{p}\hat{m}})^{\hat{\hat{\delta}}}{}_{\hat{\hat{\alpha}}}T_{\hat{p}\hat{m}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} - (\gamma^{\hat{m}})^{\hat{\hat{\delta}}\underline{\hat{\beta}}}R_{\underline{\hat{\beta}}\hat{m}\hat{\hat{\alpha}}}{}^{\hat{\hat{\gamma}}} = 0 \tag{4.178}$$

右辺の第 1 項と第 2 項は $(4,1)$ 成分を含まないのでここでは無視する。第 2 第 3 項はどちらも $(4,1)$ 成分を含むが、それらはちょうど相殺することが以下のようにしてわかる。$R_{\hat{\alpha}\hat{m}}$ は (4.154) に与えられているが、その γ-トレース部分は

$$(\gamma^{\hat{m}})^{\hat{\gamma}\hat{\alpha}}R_{\hat{\alpha}\hat{m}\widehat{pq}} = \frac{1}{8}(-4T_{\widehat{pq}} - \gamma^{\hat{m}}\gamma_{\hat{q}}T_{\hat{p}\hat{m}} + \gamma^{\hat{m}}\gamma_{\hat{p}}T_{\hat{q}\hat{m}})^{\hat{\gamma}} \tag{4.179}$$

$T = T^{(4,1)}$ または $T^{(1,4)}$ の場合、$\gamma^{\hat{m}}T_{\hat{m}\hat{p}} = 0$ なので、$\gamma^{\hat{m}}\gamma_{\hat{q}}T_{\hat{p}\hat{m}} = (\gamma^{\hat{m}}\gamma_{\hat{q}}+\gamma_{\hat{q}}\gamma^{\hat{m}})T_{\hat{p}\hat{m}} = 2\delta^{\hat{m}}_{\hat{q}}T_{\hat{p}\hat{m}} = 2T_{\widehat{pq}}$ であり、

$$(\gamma^m)^{\gamma\alpha}R^{(4,1)+(1,4)}_{\hat{\alpha}\hat{m}\widehat{pq}} = -T^{(4,1)+(1,4)\hat{\gamma}}_{\widehat{pq}} \tag{4.180}$$

となる。添え字 $\widehat{pq}$ をスピノル添え字にすれば

$$(\gamma^{\hat{m}})^{\hat{\delta}\hat{\beta}}R_{\hat{\beta}\hat{m}\hat{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}} = \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{pq}})_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\gamma}}T^{(4,1)+(1,4)\hat{\delta}}_{\widehat{pq}} \tag{4.181}$$

が得られる。これを (4.178) の第 1 項と比較すると、スピノル添え字の順序が異なるが、スピン 3/2 成分については対称であるから、ちょうどこの二つは相殺する。

次に、$(2,1)$ および $(2,3)$ 成分を得るために $\widehat{\widehat{\alpha}}$ と $\widehat{\widehat{\gamma}}$ を縮約してみよう。曲率項が落ちて、次の式を得る。

$$I_{\widehat{\widehat{\alpha}}\underline{\widehat{\beta}}\widehat{m}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}} \propto -\frac{1}{2}(\gamma_{\widehat{m}})_{\underline{\widehat{\beta}}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}} D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}(X-iY) - \frac{4i}{3}D_{\underline{\widehat{\beta}}}V_{\widehat{m}} + \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{p}})_{\widehat{\widehat{\alpha}}\underline{\widehat{\beta}}}T_{\widehat{p}\widehat{m}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}} = 0 \tag{4.182}$$

さらに $(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\widehat{\gamma}}}{}^{\underline{\widehat{\beta}}}$ をかけて $(2,1)$ 部分を取り出すと

$$(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\widehat{\gamma}}}{}^{\underline{\widehat{\beta}}} I_{\widehat{\widehat{\alpha}}\underline{\widehat{\beta}}\widehat{m}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}} \propto -2D_{\widehat{\widehat{\gamma}}}(X-iY) - \frac{4i}{3}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\widehat{\gamma}}}{}^{\underline{\widehat{\beta}}} D_{\underline{\widehat{\beta}}}V_{\widehat{m}} - 3T^{(1/2)}_{\widehat{\widehat{\gamma}}} = 0 \tag{4.183}$$

この式に (4.169) の複素共役 $T^{(1/2)\widehat{\widehat{\gamma}}} = -(4i/3)D_{\underline{\widehat{\alpha}}}\cancel{V}^{\widehat{\widehat{\gamma}}\underline{\widehat{\alpha}}}$ を代入すると、

$$(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\widehat{\gamma}}}{}^{\underline{\widehat{\beta}}} I_{\widehat{\widehat{\alpha}}\underline{\widehat{\beta}}\widehat{m}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}} \propto -2D_{\widehat{\widehat{\gamma}}}(X-iY) + \frac{8i}{3}(\gamma^{\widehat{p}})_{\widehat{\widehat{\gamma}}}{}^{\underline{\widehat{\alpha}}} D_{\underline{\widehat{\alpha}}}V_{\widehat{p}} = 0 \tag{4.184}$$

したがって、カイラル超場の微分について次の式が得られた。

$$D_{\widehat{\widehat{\gamma}}}(X-iY) = \frac{4i}{3}(\gamma^{\widehat{p}})_{\widehat{\widehat{\gamma}}}{}^{\underline{\widehat{\alpha}}} D_{\underline{\widehat{\alpha}}}V_{\widehat{p}} = -T^{(1/2)}_{\widehat{\widehat{\gamma}}} \tag{4.185}$$

(4.185) と、(4.169) の複素共役として得られる $T^{(2,1)}_{mn}$ 成分を (4.182) に代入すると $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}$ の $(2,3)$ 成分に対する次の式が得られる。

$$I_{\widehat{\widehat{\alpha}}\underline{\widehat{\beta}}\widehat{m}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}} \propto \frac{i}{3}(\gamma_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{p}} + 2\gamma_{\widehat{p}}\gamma_{\widehat{m}})_{\underline{\widehat{\beta}}}{}^{\underline{\widehat{\gamma}}} D_{\underline{\widehat{\gamma}}}V^{\widehat{p}} + \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{p}})_{\underline{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\alpha}}}T^{(2,3)\widehat{\widehat{\alpha}}}_{\widehat{p}\widehat{m}} = 0 \tag{4.186}$$

したがって

$$(\gamma^{\widehat{p}}T^{(2,3)}_{\widehat{p}\widehat{m}})_{\underline{\widehat{\beta}}} = -\frac{4i}{3}(\gamma_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{p}} + 2\gamma_{\widehat{p}}\gamma_{\widehat{m}})_{\underline{\widehat{\beta}}}{}^{\underline{\widehat{\gamma}}} D_{\underline{\widehat{\gamma}}}V^{\widehat{p}} \tag{4.187}$$

が得られるが、これは (4.171) の複素共役であり、新たな関係を与えない。

$I^{1}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$

次のビアンキ恒等式について考えてみよう。

$$I_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = D_{\widehat{m}}T_{\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} - D_{\widehat{n}}T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} + D_{\widehat{\alpha}}T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\beta}} - T_{\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\gamma}}T_{\widehat{m}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\beta}} + T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\gamma}}T_{\widehat{n}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\beta}} + R_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}. \tag{4.188}$$

$\widehat{\alpha}$ と $\widehat{\beta}$ のカイラリティを逆にとると、

$$I_{\widehat{m}\widehat{n}\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}} \sim D_{\widehat{m}}T_{\widehat{n}\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}} - D_{\widehat{n}}T_{\widehat{m}\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}} + D_{\underline{\widehat{\alpha}}}T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}} - T_{\widehat{n}\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\gamma}}T_{\widehat{m}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}} + T_{\widehat{m}\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\gamma}}T_{\widehat{n}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}} \tag{4.189}$$

はじめの二項および後ろの二項は $(2,2)$ 成分のみを含んでいる。これに対して第 3 項は $(1,2)\times[(4,1)+(2,1)+(2,3)]$ を含む。特に、$(1,2)\times(4,1)$ から $(2,2)$ は現れないので、次の式が得られる。

$$D_{\underline{\widehat{\alpha}}}T^{(4,1)\widehat{\widehat{\beta}}}_{\widehat{m}\widehat{n}} = 0. \tag{4.190}$$

つまり、グラビティーノのスピン 3/2 成分はカイラル多重項をなす。（カイラル多重項はローレンツ群の $(n,1)$ 表現にのみ定義できることに注意。）

これ以外の成分についても、グラビティーノ場の θ 微分をほかの場によって与える式が得られる。

$$D_{\widehat{\alpha}}T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\beta}} = -D_{\widehat{m}}T_{\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} + D_{\widehat{n}}T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} + T_{\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\gamma}}T_{\widehat{m}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\beta}} - T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\gamma}}T_{\widehat{n}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\beta}} - R_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}. \tag{4.191}$$

4.4 重力多重項

4.4.1 捩率および曲率の間の関係式

ビアンキ恒等式の解として現れた場が満足すべき条件をまとめながら、それぞれの場についての物理的意味についてコメントしておこう。

捩率の成分のうち、拘束条件によって固定されていないのは $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}$ と $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ である。これらのうち、$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ はスカラー場とベクトル場を用いて (4.151) に与えられたように展開される。

$$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = [\frac{1}{2}(X + iY\gamma_5)\gamma_{\widehat{m}} - \frac{i}{2}\gamma_5\gamma_{\widehat{m}}\not{V} - \frac{i}{6}\gamma_5\not{V}\gamma_{\widehat{m}}]_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}. \tag{4.192}$$

一方 $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}$ は次のようにローレンツ群の規約表現に分解される。

$$T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\overline{\alpha}}} = T^{(4,1)\widehat{\overline{\alpha}}}_{\widehat{m}\widehat{n}} + T^{(2,1)\widehat{\overline{\alpha}}}_{\widehat{m}\widehat{n}} + T^{(2,3)\widehat{\overline{\alpha}}}_{\widehat{m}\widehat{n}}, \quad T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\underline{\alpha}}} = T^{(1,4)\widehat{\underline{\alpha}}}_{\widehat{m}\widehat{n}} + T^{(1,2)\widehat{\underline{\alpha}}}_{\widehat{m}\widehat{n}} + T^{(3,2)\widehat{\underline{\alpha}}}_{\widehat{m}\widehat{n}} \tag{4.193}$$

ビアンキ恒等式および拘束条件はこれらの間の関係を与えている。

複素スカラー超場 $X - iY$ は (4.159) にあるように次の条件を満足する。

$$D_{\widehat{\underline{\alpha}}}(X - iY) = 0 \tag{4.194}$$

つまり $X - iY$ はカイラル超場である。この超場はその成分にスカラー曲率を含んでおり、スカラー曲率超場と呼ぶことにする。スカラー曲率超場 $X - iY$ がどのような成分場を持っているのかを見るために、その微分を計算しておこう。まず、一階微分は (4.185) より次のように与えられる。

$$D_{\overline{\alpha}}(X - iY) = \frac{1}{12}(\gamma^{pq})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}T^{(2,1)\overline{\beta}}_{pq} = -T^{(1/2)}_{\widehat{\overline{\alpha}}} \tag{4.195}$$

となる。従って、超場 $X - iY$ は $T^{(2,1)\overline{\beta}}_{pq}$ をその中に含んでいる。二階微分 $D_{\overline{\alpha}}D_{\overline{\beta}}(X - iY)$ は $\overline{\alpha}$ と $\overline{\beta}$ について反対称であるからその縮約を取ったものを計算すれば十分である。は (4.191) を用いれば

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}}D_{\overline{\alpha}}D_{\overline{\beta}}(X - iY) &= -\frac{1}{12}D_{\overline{\alpha}}(\gamma^{mn})^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}T^{\overline{\beta}}_{mn} \\
&= -\frac{1}{12}(\gamma^{mn})_{\overline{\beta}}{}^{\overline{\alpha}}[-2D_mT_{n\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} - 2T_{m\overline{\alpha}}{}^{\gamma}T_{n\gamma}{}^{\overline{\beta}} + \frac{1}{4}R_{mnpq}(\gamma^{pq})_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}] \\
&= -\frac{i}{3}D_mV^m + (X^2 + Y^2) + \frac{2}{9}V_mV^m + \frac{1}{12}R_{mn}{}^{mn}
\end{aligned} \tag{4.196}$$

最後の行への式変形で (4.151) を用いれば次の式が成り立つことを用いた。

$$-\frac{1}{3}(\gamma^{mn})_{\overline{\beta}}{}^{\overline{\alpha}}D_mT_{n\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} = \frac{2i}{3}D_mV^m \tag{4.197}$$

$$-\frac{1}{3}(\gamma^{mn})_{\overline{\beta}}{}^{\overline{\alpha}}T_{m\overline{\alpha}}{}^{\gamma}T_{n\gamma}{}^{\overline{\beta}} = -2(X^2 + Y^2) - \frac{4}{9}V_mV^m \tag{4.198}$$

$$\frac{1}{24}(\gamma^{mn})_{\overline{\beta}}{}^{\overline{\alpha}}R_{mnpq}(\gamma^{pq})_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} = \frac{1}{12}R_{mnpq}(-2\eta^{mp}\eta^{nq} + \gamma^{5mnpq}) = -\frac{1}{6}R_{mn}{}^{mn} \tag{4.199}$$

(4.196) は超場 $X - iY$ の成分として確かにスカラー曲率が現れることを示している。

ベクトル添え字を持つ超場 $V_{\widehat{m}}$ は、その成分にアインシュタインテンソルやグラビティーノの運動方程式を与えるスピノルテンソルなどを含んでいる。そのためアインシュタイン超場と呼ばれ

る。物質場を含まない単純超重力理論の運動方程式は $V_{\widehat{m}} = 0$ によって与えることができる。例えばベクトル場の θ 微分は (4.174) によって次のように与えられる。

$$D_{\widehat{\alpha}} V_{\widehat{m}} = \frac{3i}{16} (\gamma_5 \gamma^{\widehat{p}} T^{(3,2)+(2,3)}_{\widehat{p}\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}} + \frac{i}{16} (\gamma_5 \gamma^{\widehat{p}} T^{(1,2)+(2,1)}_{\widehat{p}\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}} \tag{4.200}$$

この超場の $\theta = 0$ 成分はグラビティーノの運動方程式を与える。また、(4.200) は $V_{\widehat{m}}$ がその一部として $T^{(3,2)+(2,3)\widehat{\alpha}}_{\widehat{p}\widehat{m}}$ と $T^{(1,2)+(2,1)\widehat{\alpha}}_{\widehat{p}\widehat{m}}$ を含むことを表している。

$X - iY$ も $V_{\widehat{m}}$ もどちらも $T^{(2,1)\widehat{\alpha}}_{\widehat{p}\widehat{m}}$ を共通に含んでいる。このことは (4.195) と (4.200) を組み合わせることで得られる次の式によって表される。

$$(\gamma^{\widehat{m}})^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} D_{\underline{\widehat{\beta}}} V_{\widehat{m}} = -\frac{3i}{4} D^{\widehat{\alpha}} (X - iY) \tag{4.201}$$

この式は以前に定義した超カレント J_μ が満足する式 (2.309) と同じ形をしている。実際、物質場が存在する場合のアインシュタイン方程式は次のように与えることができる。

$$V_{\widehat{m}} = -\frac{3k^2}{8} J_{\widehat{m}}, \quad (X - iY) = -\frac{ik^2}{2} K \tag{4.202}$$

通常のアインシュタイン方程式では、アインシュタインテンソルが従うビアンキ恒等式によってエネルギー運動量テンソルの保存則が成り立つことが保障される。このことは (4.202) においてもやはり成り立っている。超場 $V_{\widehat{m}}$ および $X - iY$ は、(4.201) を満足するが、この式と運動方程式 (4.202) を組み合わせることでエネルギー運動量テンソルと超対称性カレントの保存則を含む式 (2.309) が得られる。

グラビティーノ場の全ての成分の θ 微分は (4.191) によって与えられる。

$$D_{\widehat{\alpha}} T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\beta}} = -D_{\widehat{m}} T_{\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} + D_{\widehat{n}} T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} + T_{\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\gamma}} T_{\widehat{m}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\beta}} - T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\gamma}} T_{\widehat{n}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\beta}} - R_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}. \tag{4.203}$$

$T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}}$ の成分のうち、スピン 3/2 の成分 $T^{(4,1)\widehat{\widehat{\beta}}}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ は $X - iY$ にも $V_{\widehat{m}}$ にも含まれない独立な成分である。この成分については (4.190) が成り立ち、この成分がカイラルであることを表している。

$$D_{\underline{\widehat{\alpha}}} T^{(4,1)\widehat{\widehat{\beta}}}_{\widehat{m}\widehat{n}} = 0. \tag{4.204}$$

カイラル超場 $T^{(4,1)\widehat{\widehat{\beta}}}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ はワイルテンソルを含んでおり、ワイル超場と呼ばれる。この超場は、ゲージ理論の場の強さを含む超場 $W_{\widehat{\overline{\alpha}}}$ に対応するものであり、コンフォーマル重力理論のラグランジアンはワイル超場を二つ掛けてスカラーのカイラル超場を作り、この F-項ラグランジアンとして得ることができる。（超重力理論における F-項ラグランジアンの作り方は後で述べる。）また、ポアンカレ超重力理論の場合には、運動方程式で 0 にならない物理的な自由度を含む超場である。

(4.195) のように、$T^{(2,1)\widehat{\widehat{\beta}}}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ は $D_{\overline{\beta}}(X - iY)$ に比例しているから、さらにそれを $D_{\overline{\alpha}}$ で微分したものはローレンツスカラーの成分のみを含む。従って、(4.203) のスピノル添え字 α と β のカイラリティを正にとり、両辺をローレンツ群の表現に規約分解し、$(5,1) + (3,1)$ 成分だけを残すと、

$$D_{\widehat{\widehat{\alpha}}} T^{(4,1)\widehat{\widehat{\beta}}}_{\widehat{m}\widehat{n}} = \left[-D_{\widehat{m}} T_{\widehat{n}\widehat{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}} + D_{\widehat{n}} T_{\widehat{m}\widehat{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}} - R_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}} \right]^{(5,1)+(3,1)} \tag{4.205}$$

捩率の二次の項は $(5,1)$ 成分も $(3,1)$ 成分も含まないので落ちる。捩率の微分は $(3,1)$ 成分のみに寄与し、次のように与えられる。

$$(-D_m T_{\widehat{n}\widehat{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}} + D_n T_{\widehat{m}\widehat{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}})^{(3,1)} = [\frac{2i}{3} V^+_{mn} - \frac{i}{6} \gamma_{\widehat{m}}{}^k V^+_{nk} + \frac{i}{6} \gamma_{\widehat{n}}{}^k V^+_{mk}]_{\widehat{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}} \tag{4.206}$$

Soryushiron Kenkyu

ただし、$V_{mn} = D_m V_n - D_n V_m$ であり、V^+_{mn} はその自己双対部分である。(4.205) の曲率項のうち、(5, 1) 成分はワイルテンソルを含んでおり、(3, 1) 成分は捩率で書き下すことができる。

ここまでに得られた関係を大まかにまとめたのが次の図である。矢印は θ 微分を表す。

$$\begin{array}{ccccc} V_{\widehat{m}} & \rightarrow & T^{(2,3)} & \rightarrow & G_{mn} \\ & \searrow & & & \\ X - iY & \rightarrow & T^{(2,1)} & \rightarrow & R \\ & & & & \\ & & T^{(4,1)} & \rightarrow & C_{mnpq} \end{array} \tag{4.207}$$

$R_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}}$ 以外の曲率の成分は (4.152)

$$R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}-\widehat{m}\widehat{n}} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}(X + iY\gamma_5)\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{i}{6}\gamma_5 \not{V}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{i}{6}\gamma_5\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\not{V}\Big]_{\alpha\beta} \tag{4.208}$$

および (4.154)

$$R_{\widehat{\alpha}\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}} = \frac{1}{8}((\gamma_{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} T_{\widehat{p}\widehat{q}}{}^{\widehat{\beta}} + (\gamma_{\widehat{q}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} T_{\widehat{p}\widehat{m}}{}^{\widehat{\beta}} + (\gamma_{\widehat{p}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} T_{\widehat{m}\widehat{q}}{}^{\widehat{\beta}}) \tag{4.209}$$

によって与えられる。

スピノル添え字の曲率テンソルに対する以下の公式はしばしば便利である。

$$R_{\hat{\hat\alpha}\hat{\hat\gamma}}{}^{\hat{\hat\gamma}\hat{\hat\beta}} = -\frac{1}{4}R_{\hat{\hat\alpha}\hat{\hat\gamma}\widehat{p}\widehat{q}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})^{\hat{\hat\gamma}\hat{\hat\beta}} = \frac{3}{4}(X + iY)\mathbf{1}_{\hat{\hat\alpha}}{}^{\hat{\hat\beta}}, \quad R_{\underline{\hat\alpha}\hat{\hat\gamma}}{}^{\hat{\hat\gamma}\hat{\hat\beta}} = -\frac{1}{4}R_{\underline{\hat\alpha}\hat{\hat\gamma}\widehat{p}\widehat{q}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})^{\hat{\hat\gamma}\hat{\hat\beta}} = -\frac{i}{4}(\not{V})_{\underline{\hat\alpha}}{}^{\hat{\hat\beta}} \tag{4.210}$$

ビアンキ恒等式と拘束条件を解いた際に運動方程式がひとつも得られていないことは重要である。11 次元超重力理論の場合には超空間上でのビアンキ恒等式が成分場に対するビアンキ恒等式と運動方程式の両方を同時に与えた。つまり超場形式の定式化の中に運動方程式が組み込まれており、off-shell の定式化を行うことができない。一方ここで考えている 4 次元の超場形式では成分場に対する運動方程式を与えず、ビアンキ恒等式だけを与えるような拘束条件の組が存在している。したがって、4 次元では超場を用いた off-shell の定式化が可能となる。

4.4.2 超共変的な場の強さ

成分場の超場への埋め込みを以下のように定義する。超空間上の多脚場と x 空間上の多脚場、グラビティーノとの関係は (4.66) および (4.67) に与えられている。それらをまとめて外微分形式の形でもう一度書いておこう。

$$E^{\widehat{m}}|_{\theta=0} = e^{\widehat{m}}, \quad E^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} = \psi^{\widehat{\alpha}} + d\theta^{\widehat{\alpha}} \tag{4.211}$$

超場 $X - iY$ および V_m の $\theta = 0$ 成分は補助場であり、次のように定義しておく。

$$(X - iY)|_{\theta=0} = M, \quad V_{\widehat{m}}|_{\theta=0} = c_{\widehat{m}}. \tag{4.212}$$

これらの量の微分や、微分を用いて書かれる場の強さに対して超共変化を与えておこう。捩率およびグラビティーノの場の強さの超共変化 $T^{\mathrm{cov}\,\widehat{k}}_{\widehat{m}\widehat{n}}$、$\psi^{\mathrm{cov}\,\widehat{\alpha}}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ は (4.94) に与えられている。もう一度与えておこう。まず、超共変化された捩率は次のように与えられる。

$$T^{\mathrm{cov}\,\widehat{k}}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}{}^{\widehat{k}} - \frac{1}{4}(\psi_\mu\gamma^{\widehat{k}}\psi_\nu) \tag{4.213}$$

Soryushiron Kenkyu

超共変化されたグラビティーノの場の強さは、(4.94) の式中の $(K_{\widehat{m}})^{\widehat{\alpha}}{}_{\widehat{\beta}} = T_{\widehat{\beta}\widehat{m}}{}^{\widehat{\beta}}$ にその具体系 (4.151) を代入すれば、次の式を得る。

$$\psi^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} = D_{\widehat{m}}\psi_{\widehat{n}} + \frac{1}{2}(X - iY\gamma_5)|_{\theta=0}\gamma_{\widehat{n}}\psi_{\widehat{m}} + \frac{i}{6}(3\gamma_5\not{c}\gamma_{\widehat{n}} + \gamma_5\gamma_{\widehat{n}}\not{c})\psi_{\widehat{m}} - [\widehat{m} \leftrightarrow \widehat{n}] \tag{4.214}$$

超共変化された曲率テンソルは (4.122) に与えられている。その中の $(S_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\alpha}}$ や $(K_{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}$ を露に書き下せば、次のように成る。

$$\begin{aligned} R^{\rm cov}_{\mu\nu\widehat{p}\widehat{q}} &= R_{\mu\nu\widehat{p}\widehat{q}} + \frac{1}{8}[\psi_\mu\gamma_\nu\psi^{\rm cov}_{pq} + \psi_\mu\gamma_q\psi^{\rm cov}_{p\nu} - \psi_\mu\gamma_p\psi^{\rm cov}_{q\nu}] - \frac{1}{8}[\psi_\nu\gamma_\mu\psi^{\rm cov}_{pq} + \psi_\nu\gamma_q\psi^{\rm cov}_{p\mu} - \psi_\nu\gamma_p\psi^{\rm cov}_{q\mu}] \\ &\quad -\frac{1}{2}\psi_\mu\Big[\frac{1}{2}(X + iY\gamma_5)|_{\theta=0}\gamma_{pq} + \frac{i}{6}\gamma_5\not{c}\gamma_{pq} + \frac{i}{6}\gamma_5\gamma_{pq}\not{c}\Big]\psi_\nu \end{aligned} \tag{4.215}$$

最後に、補助場 $c_{\widehat{m}}$ の微分についても超共変化を定義しておく。

$$\begin{aligned} D^{\rm cov}_{\widehat{m}}c_{\widehat{n}} &= D_{\widehat{m}}V_{\widehat{n}}|_{\theta=0} \\ &= D_{\widehat{m}}c_{\widehat{n}} - \psi_{\widehat{m}}{}^{\alpha}D_\alpha V_{\widehat{n}}|_{\theta=0} \\ &= D_{\widehat{m}}c_{\widehat{n}} + \frac{i}{32}\psi_{\widehat{m}}\left(6\gamma_5\gamma^{\widehat{p}}\psi^{\rm cov}_{\widehat{p}\widehat{n}} + \gamma_5\gamma_{\widehat{n}}\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\psi^{\rm cov}_{\widehat{p}\widehat{q}}\right) \end{aligned} \tag{4.216}$$

4.4.3 超対称変換則

超対称変換則は超空間上の一般座標変換として次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta e_\mu{}^{\widehat{m}} &= \xi^{\widehat{\alpha}}(e_\mu{}^{\widehat{k}}T_{\widehat{\alpha}\widehat{k}}{}^{\widehat{m}}|_{\theta=0} - \psi_\mu{}^{\widehat{\beta}}T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{m}}|_{\theta=0}) \\ &= \frac{1}{4}\xi\gamma^{\widehat{m}}\psi_\mu, \end{aligned} \tag{4.217}$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}} &= D_\mu\xi^{\widehat{\alpha}} + \xi^{\widehat{\beta}}(e_\mu{}^{\widehat{k}}T_{\widehat{\beta}\widehat{k}}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} - \psi_\mu{}^{\widehat{\gamma}}T_{\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0}) \\ &= D_\mu\xi^{\widehat{\alpha}} - [(\frac{1}{2}(X - iY\gamma_5)|_{\theta=0}\gamma_\mu + \frac{i}{2}\gamma_5\not{c}\gamma_\mu + \frac{i}{6}\gamma_5\gamma_\mu\not{c})\xi]^{\widehat{\alpha}} \end{aligned} \tag{4.218}$$

さらに、補助場の超対称変換は次のように得られる。スカラー場 M の変換則を求めるには、(4.185) を用いる。

$$\delta M = \xi^\alpha D_\alpha(X - iY)|_{\theta=0} = -\xi^{\overline{\alpha}}\psi_{\overline{\alpha}} = -\frac{1}{12}\xi_{\overline{\alpha}}\gamma^{mn}\psi^{{\rm cov}(2,1)\overline{\alpha}}_{mn} \tag{4.219}$$

ベクトル場の変換則を求めるには、(4.173) を用いればよい。

$$\delta c_m = \xi^\alpha D_\alpha V_m|_{\theta=0} = -\frac{3i}{16}(\xi\gamma_5\gamma^p\psi^{{\rm cov}(3,2)+(2,3)}_{pm}) - \frac{i}{16}(\xi\gamma_5\gamma^p\psi^{{\rm cov}(1,2)+(2,1)}_{pm}) \tag{4.220}$$

以上の変換則をワイル表示で書き換えたものを以下にまとめておく。

重力多重項の変換則

$$
\begin{aligned}
\delta\psi_\mu &= D_\mu\xi - \frac{i}{2}M\sigma_\mu\overline{\xi} - \frac{i}{6}c_\lambda(3\sigma^\lambda\overline{\sigma}_\mu + \sigma_\mu\overline{\sigma}^\lambda)\xi, && (4.221)\\
\delta e_\mu{}^{\widehat{m}} &= -\frac{i}{4}(\xi\sigma^{\widehat{m}}\overline{\psi}_\mu) + \frac{i}{4}(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\widehat{m}}\psi_\mu), && (4.222)\\
\delta M &= \frac{1}{12}(\xi\sigma^{\widehat{m}\widehat{n}}\psi^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}\widehat{n}})\\
&= \frac{1}{12}(\xi\sigma^{\widehat{pq}}\psi_{\widehat{pq}}) + \frac{i}{4}M(\xi\sigma^{\widehat{p}}\overline{\psi}_{\widehat{p}}) - \frac{i}{6}c^{\widehat{p}}(\xi\psi_{\widehat{p}}), && (4.223)\\
\delta c_{\widehat{m}} &= -\frac{3}{16}\left[(\xi\sigma^p\overline{\psi}^{\mathrm{cov}}_{pm}) + \frac{1}{6}(\xi\sigma_m\overline{\sigma}^{kl}\overline{\psi}^{\mathrm{cov}}_{kl})\right] + \text{c.c.}\\
&= -\left(\frac{1}{8}\overline{\xi}\overline{\sigma}^q\psi_{qm} + \frac{1}{32}\overline{\xi}\overline{\sigma}_m{}^{pq}\psi_{pq}\right) + \frac{3i}{16}M\overline{\xi\psi}_m\\
&\quad -\frac{i}{8}c_{\widehat{m}}(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\widehat{k}}\psi_{\widehat{k}}) + \frac{i}{16}c_{\widehat{k}}(\overline{\xi}\overline{\sigma}_{\widehat{m}}{}^{\widehat{k}\widehat{n}}\psi_{\widehat{n}}) + \text{c.c.} && (4.224)
\end{aligned}
$$

超共変化されたグラビティーノの場の強さは次のように与えられる。

$$
\psi^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}\widehat{n}} = D_{\widehat{m}}\psi_{\widehat{n}} + \frac{i}{2}M\sigma_{\widehat{n}}\overline{\psi}_{\widehat{m}} + \frac{i}{6}(3\not{c}\overline{\sigma}_{\widehat{n}} + \sigma_{\widehat{n}}\not{c})\psi_{\widehat{m}} - [\widehat{m}\leftrightarrow\widehat{n}] \qquad (4.225)
$$

4.5 カイラル多重項

4.5.1 成分場と超対称変換則

超空間上の場を $\Phi(x,\theta)$ としよう。$\Phi(x,\theta)$ がスピノル、あるいはベクトル添え字を持つようなテンソル超場であるとする。このようなテンソル超場は二つのスピンでラベルされるローレンツ群の規約表現に分解することができる。Φ が表現 (s_L, s_R) に属する場合、Φ は $\Phi_{\overline{\alpha}_1\cdots\overline{\alpha}_{2s_L}\underline{\beta}_1\cdots\underline{\beta}_{2s_R}}$ のような添え字を持つ場として表すことができる。ただし $\overline{\alpha}_i$ および $\underline{\beta}_i$ はそれぞれ完全対称である。以下では s_L を左スピン、s_R を右スピンと呼ぶことにする。また、Φ のスピノル添え字は必要がなければ省略する。

この超場が

$$
D_{\underline{\alpha}}\Phi = 0 \qquad (4.226)
$$

を満足するとき、カイラル超場と呼ばれる。$\overline{\theta}$ 微分の交換関係は

$$
\{D_{\underline{\alpha}}, D_{\underline{\beta}}\} = \frac{1}{2}R_{\underline{\alpha}\underline{\beta}pq}\mathcal{T}^{pq} - T_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}{}^A D_A = \frac{1}{8}(X - iY)(\gamma_{pq})_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\mathcal{T}^{pq} \qquad (4.227)
$$

と与えられる。ここで、$\mathcal{T}^{pq}$ は Φ の添え字に作用するローレンツ群の生成子である。$R_{\underline{\alpha}\underline{\beta}pq}$ は (4.152) で与えられることと $T_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}{}^A = 0$ であることを用いた。この式をカイラル超場の定義式 (4.226) に作用させれば、カイラル超場が定義できるための条件として

$$
(\gamma_{pq})_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\mathcal{T}^{pq}\Phi = 0 \qquad (4.228)
$$

が得られる。これは Φ の右スピンが 0 であることを意味している。つまり、カイラル超場はローレンツ群の表現としてもカイラルであり、常に $(s_L, 0)$ 表現に属する。このような、添え字を持ったカイラル超場の例としては、重力多重項に含まれるカイラル超場 $T^{(4,1)\alpha}_{mn}$ $(s_L = 3/2)$ や、ゲージ場の強さを含むスピノルカイラル超場 $W_{\overline{\alpha}}$ $(s_L = 1/2)$ などがある。

左巻きスピンの添え字だけを持つ一般の超場 Φ からカイラル超場の部分を抜き出すカイラル射影演算子が以下のようにして定義できる。超場 Φ （カイラルでも反カイラルでもなくてもよい）が右巻きスピンを持たなければ $\{D_{\underline{\widehat{\alpha}}}, D_{\underline{\widehat{\beta}}}\}\Phi = 0$ が成り立つ。これを用いることで、次の関係式を示すことができる。

$$D_{\underline{\widehat{\alpha}}}(\mathbf{1}^{\underline{\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}} D_{\underline{\widehat{\beta}}} D_{\underline{\widehat{\gamma}}})\Phi = \frac{2}{3}\mathbf{1}^{\underline{\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}}\{D_{\underline{\widehat{\alpha}}}, D_{\underline{\widehat{\beta}}}\} D_{\underline{\widehat{\gamma}}}\Phi \tag{4.229}$$

実際にこの式を示すには、スピノル添え字に実際に 1 や 2 を入れてみて成り立つことをチェックするのが簡単である。(4.229) の右辺はさらに次のように変形できる。

$$\begin{aligned} D_{\underline{\widehat{\alpha}}}(\mathbf{1}^{\underline{\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}} D_{\underline{\widehat{\beta}}} D_{\underline{\widehat{\gamma}}})\Phi &= \frac{2}{3}\mathbf{1}^{\underline{\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}} R_{\underline{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}}{}^{\underline{\widehat{\delta}}} D_{\underline{\widehat{\delta}}}\Phi \\ &= -\frac{1}{6}\mathbf{1}^{\underline{\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}} R_{\underline{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}pq}(\gamma^{pq})_{\underline{\widehat{\gamma}}}{}^{\underline{\widehat{\delta}}} D_{\underline{\widehat{\delta}}}\Phi \\ &= -\frac{1}{24}[(X-iY)\gamma_{pq}]_{\underline{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}}\mathbf{1}^{\underline{\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}}(\gamma^{pq})_{\underline{\widehat{\gamma}}}{}^{\underline{\widehat{\delta}}} D_{\underline{\widehat{\delta}}}\Phi \\ &= \frac{1}{24}[(X-iY)\gamma_{pq}\gamma^{pq})_{\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\underline{\widehat{\delta}}} D_{\underline{\widehat{\delta}}}\Phi \\ &= \frac{1}{2}(X-iY)D_{\underline{\widehat{\alpha}}}\Phi \end{aligned} \tag{4.230}$$

したがって、次の式が成り立つ。

$$D_{\underline{\widehat{\alpha}}}(\mathbf{1}^{\underline{\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}} D_{\underline{\widehat{\beta}}} D_{\underline{\widehat{\gamma}}} - \frac{1}{2}(X-iY))\Phi = 0 \tag{4.231}$$

つまり、超場 $(\mathbf{1}^{\underline{\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}} D_{\underline{\widehat{\beta}}} D_{\underline{\widehat{\gamma}}} - (1/2)(X-iY))\Phi$ はカイラルであり、次の演算子はカイラル射影演算子と呼ばれる。

カイラル射影演算子

右スピンを持たない超場に対して次の演算子を作用させたものはカイラル超場である。

$$P_{\mathrm{chiral}} \equiv -2\mathbf{1}^{\underline{\gamma\delta}} D_{\underline{\gamma}} D_{\underline{\delta}} + (X-iY) = 2D_{\underline{\gamma}} D^{\underline{\gamma}} + (X-iY) \tag{4.232}$$

この演算子は任意のスカラー超場 Φ に対して次の公式を満足する。

$$\mathbf{1}^{\overline{\alpha\beta}} D_{\overline{\alpha}} P_{\mathrm{chiral}} D_{\overline{\beta}}\Phi = \mathbf{1}^{\underline{\alpha\beta}} D_{\underline{\alpha}} P^*_{\mathrm{chiral}} D_{\underline{\beta}}\Phi \tag{4.233}$$

カイラル超場の成分場を次のように定義しよう。

カイラル多重項の成分場

$$\phi = \Phi|_{\theta=0}, \quad \chi_{\overline{\alpha}} = 2D_{\overline{\alpha}}\Phi|_{\theta=0}, \quad F = -2\mathbf{1}^{\overline{\alpha\beta}} D_{\overline{\alpha}} D_{\overline{\beta}}\Phi|_{\theta=0} = 2D_{\overline{\alpha}} D^{\overline{\alpha}}\Phi|_{\theta=0}. \tag{4.234}$$

これは、大雑把にいって次の展開式が成り立つことを意味する。

$$\Phi = \phi + \frac{1}{2}\theta^{\overline{\alpha}}\chi_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{8}\theta^{\overline{\alpha}}\theta_{\overline{\alpha}}F + \cdots = \phi + \frac{1}{2}\theta_{\alpha}\chi^{\alpha} + \frac{1}{8}\theta_{\alpha}\theta^{\alpha}F + \cdots \tag{4.235}$$

さらに高次の成分は次のように与えられる。

$$\begin{array}{lll} \Phi|_{\theta=0} = \phi & D_{\overline{\alpha}}\Phi|_{\theta=0} = \frac{1}{2}\chi_{\overline{\alpha}} & D_{\overline{\alpha}} D^{\overline{\alpha}}\Phi|_{\theta=0} = \frac{1}{2}F \\ D_{\underline{\alpha}}\Phi|_{\theta=0} = 0 & [D_{\overline{\alpha}}, D_{\underline{\beta}}]\Phi|_{\theta=0} = -\frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}} D^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}}\phi & P^*_{\mathrm{chiral}} D_{\underline{\alpha}}\Phi|_{\theta=0} = 0 \\ D_{\underline{\alpha}} D^{\underline{\alpha}}\Phi|_{\theta=0} = 0 & P_{\mathrm{chiral}} D_{\overline{\alpha}}\Phi|_{\theta=0} = 0 & D_{\underline{\alpha}} P_{\mathrm{chiral}} D^{\underline{\alpha}}\Phi|_{\theta=0} = 0 \end{array} \tag{4.236}$$

カイラル多重項を定義するのに用いる共変微分はライプニッツ則を満足するので、二つのカイラル超場の積もまたカイラル超場である。その成分場は以下のように与えられる。まず、スカラー成分はそれぞれのカイラル超場のスカラー成分の積である。

$$\Phi_1\Phi_2|_{\theta=0} = \phi_1\phi_2 \tag{4.237}$$

フェルミオン成分は次のように与えられる。

$$2D_{\overline{\alpha}}(\Phi_1\Phi_2)|_{\theta=0} = \chi_{1\overline{\alpha}}\phi_2 + \chi_{2\overline{\alpha}}\phi_1 \tag{4.238}$$

F 成分は

$$-2\mathbf{1}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}}D_{\overline{\alpha}}D_{\overline{\beta}}(\Phi_1\Phi_2)|_{\theta=0} = F_1\phi_2 + (\chi_{1\overline{\alpha}}\chi^{2\overline{\alpha}}) + \phi_1 F_2. \tag{4.239}$$

4.5.2 超対称変換則

これらの成分場に対する超対称変換則を決定しよう。一般座標変換の元でのカイラル超場の変換則は

$$\delta\Phi = \Xi^A D_A\Phi \tag{4.240}$$

である。したがって、ϕ の変換則は簡単に次のように求められる。

$$\delta\phi = \Xi^\alpha D_\alpha|_{\theta=0} = \frac{1}{2}\xi^{\widehat{\widehat{\alpha}}}\chi_{\widehat{\widehat{\alpha}}}. \tag{4.241}$$

フェルミオン成分 χ の変換則は次の式で与えられる。

$$\delta\chi_{\widehat{\widehat{\alpha}}} = 2\Xi^{\widehat{\beta}}D_{\widehat{\beta}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\Phi|_{\theta=0} = 2\Xi^{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\Phi|_{\theta=0} + 2\Xi^{\underline{\widehat{\beta}}}D_{\underline{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\Phi|_{\theta=0} \tag{4.242}$$

右辺の二つの項を別々に評価しよう。まず第 1 項については $\{D_{\widehat{\widehat{\beta}}}, D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\}\Phi = 0$ であるから次の式が成り立つ。

$$D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\Phi = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\alpha}}}\mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\gamma}}\widehat{\widehat{\delta}}}D_{\widehat{\widehat{\gamma}}}D_{\widehat{\widehat{\delta}}}\Phi \tag{4.243}$$

$\theta = 0$ 成分として次の式を得る。

$$D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\Phi|_{\theta=0} = -\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\alpha}}}F \tag{4.244}$$

(4.242) の第 2 項については

$$D_{\underline{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\Phi = \{D_{\underline{\widehat{\beta}}}, D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\}\Phi = -\frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{k}})_{\underline{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{k}}\Phi \tag{4.245}$$

と変形できる。この右辺の共変微分は、次のように定義されている。

$$D_{\widehat{k}}\Phi = E_{\widehat{k}}{}^\mu\partial_\mu\Phi + E_{\widehat{k}}{}^\alpha\partial_\alpha\Phi \tag{4.246}$$

したがって、この $\theta = 0$ 成分は、次のようにスカラー場の超共変微分を与える。

$$D_{\widehat{k}}\Phi|_{\theta=0} = (e_{\widehat{k}}{}^\mu\partial_\mu\Phi - e_{\widehat{k}}{}^\mu\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}\delta_{\widehat{\alpha}}{}^\alpha\partial_\alpha\Phi)|_{\theta=0} = e_{\widehat{k}}{}^\mu D_\mu^{\mathrm{cov}}\phi, \quad D_\mu^{\mathrm{cov}}\phi = \partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\psi_\mu{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}\chi_{\widehat{\widehat{\alpha}}}. \tag{4.247}$$

したがって (4.245) の $\theta = 0$ 成分は

$$D_{\underline{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\Phi|_{\theta=0} = -\frac{1}{4}(\gamma^\mu)_{\underline{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\alpha}}}D_\mu^{\mathrm{cov}}\phi \tag{4.248}$$

(4.244) と (4.248) を (4.242) に代入すれば、フェルミオン成分 χ の変換則が次のように得られる。

$$\delta\chi_{\widehat{\alpha}} = \frac{1}{2}\xi_{\widehat{\alpha}}F - \frac{1}{2}(\gamma^\mu)_{\widehat{\alpha}\underline{\widehat{\beta}}}\xi^{\underline{\widehat{\beta}}}D_\mu^{\mathrm{cov}}\phi \tag{4.249}$$

最後に、補助場の変換則を求めよう。

$$\delta F = -2\Xi^{\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}(\mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\gamma}}})\Phi|_{\theta=0} - 2\Xi^{\underline{\widehat{\alpha}}}D_{\underline{\widehat{\alpha}}}(\mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\gamma}}})\Phi|_{\theta=0} \tag{4.250}$$

右辺第 1 項は、(4.231) の複素共役

$$D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}(\mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\gamma}}} - \frac{1}{2}(X+iY))\Phi = 0 \tag{4.251}$$

を用いて

$$D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}(\mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\gamma}}})\Phi = \frac{1}{2}(X+iY)D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\Phi \tag{4.252}$$

とできる。第 2 項については、Φ がカイラル超場であることを用いれば次のように変形することができる。

$$\begin{aligned}
D_{\underline{\widehat{\alpha}}}(\mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\gamma}}})\Phi &= \mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}[D_{\underline{\widehat{\alpha}}}, D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\gamma}}}]\Phi \\
&= \mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}\{D_{\underline{\widehat{\alpha}}}, D_{\widehat{\widehat{\beta}}}\}D_{\widehat{\widehat{\gamma}}}\Phi - \mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}\{D_{\underline{\widehat{\alpha}}}, D_{\widehat{\widehat{\gamma}}}\}\Phi \\
&= \mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}R_{\underline{\widehat{\alpha}}\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}{}^{\widehat{\widehat{\delta}}}D_{\widehat{\widehat{\delta}}}\Phi - \mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}(T_{\underline{\widehat{\alpha}}\widehat{\widehat{\beta}}}{}^{\widehat{k}}D_{\widehat{k}})D_{\widehat{\widehat{\gamma}}}\Phi + \mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}(T_{\underline{\widehat{\alpha}}\widehat{\widehat{\gamma}}}{}^{\widehat{k}}D_{\widehat{k}})\Phi \\
&= -\frac{i}{24}V_m(\gamma^{mpq}\gamma^{pq})_{\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}\Phi - \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{k}})_{\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{k}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}\Phi - \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{k}})_{\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{k}}\Phi
\end{aligned} \tag{4.253}$$

さらに、最後の項の微分の順序を次のように入れ替える。

$$D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{k}}\Phi = D_{\widehat{k}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}\Phi + T_{\widehat{k}\widehat{\widehat{\beta}}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\Phi = D_{\widehat{k}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}\Phi - \frac{1}{6}(3i\gamma_{\widehat{k}}\not{V} + i\not{V}\gamma_{\widehat{k}})_{\widehat{\widehat{\beta}}}{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\Phi \tag{4.254}$$

この結果、次の式を得る。

$$D_{\underline{\widehat{\alpha}}}(\mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\gamma}}})\Phi = -\frac{i}{6}V_{\widehat{m}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}\Phi - \frac{1}{2}(\gamma^{\widehat{k}})_{\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{k}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}\Phi \tag{4.255}$$

まとめると、

$$(\Xi^{\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}} + \Xi^{\underline{\widehat{\alpha}}}D_{\underline{\widehat{\alpha}}})(\mathbf{1}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\widehat{\gamma}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\gamma}}})\Phi = \frac{1}{2}(X+iY)\Xi^{\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}}\Phi - \frac{i}{6}V_{\widehat{m}}\Xi^{\underline{\widehat{\alpha}}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}\Phi - \frac{1}{2}\Xi^{\underline{\widehat{\alpha}}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{k}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}\Phi \tag{4.256}$$

この $\theta = 0$ 成分を取り出すと、成分場 F の変換則が次のように得られる。

$$\delta F = -\frac{1}{2}M^*\xi^{\widehat{\widehat{\alpha}}}\chi_{\widehat{\widehat{\alpha}}} + \frac{i}{6}c_{\widehat{m}}\xi^{\underline{\widehat{\alpha}}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}}\chi_{\widehat{\widehat{\beta}}} + \frac{1}{2}\xi^{\underline{\widehat{\alpha}}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\underline{\widehat{\alpha}}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}}D_{\widehat{k}}^{\mathrm{cov}}\chi_{\widehat{\widehat{\beta}}} \tag{4.257}$$

ただし、$D_\mu^{\mathrm{cov}}\chi$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned}
D_{\widehat{k}}^{\mathrm{cov}}\chi_{\widehat{\widehat{\beta}}} &\equiv 2D_{\widehat{k}}D_{\widehat{\widehat{\beta}}}\Phi|_{\theta=0} \\
&= 2e_{\widehat{k}}{}^\mu(D_\mu - \psi_\mu{}^{\widehat{\widehat{\alpha}}}D_{\widehat{\widehat{\alpha}}} - \psi_\mu{}^{\underline{\widehat{\alpha}}}D_{\underline{\widehat{\alpha}}})D_{\widehat{\widehat{\beta}}}\Phi|_{\theta=0} \\
&= e_{\widehat{k}}{}^\mu(D_\mu\chi_{\widehat{\widehat{\beta}}} - \frac{1}{2}\psi_{\mu\widehat{\widehat{\beta}}}F + \frac{1}{2}(\gamma^\lambda)_{\widehat{\widehat{\beta}}\underline{\widehat{\alpha}}}\psi_\mu{}^{\underline{\widehat{\alpha}}}D_\lambda^{\mathrm{cov}}\phi)
\end{aligned} \tag{4.258}$$

最後の表式を得るのに (4.244) と (4.248) を用いた。

スピノル添え字をワイル表示で書き換えた変換則をまとめて書いておこう。

カイラル多重項の成分場の超対称変換

カイラル多重項 $\Phi=(\phi,\chi,F)$ の超対称変換則は次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\delta\phi &= \frac{1}{2}\xi_\alpha\chi^\alpha, && (4.259)\\
\delta\chi^\alpha &= \frac{1}{2}\xi^\alpha F-\frac{i}{2}(\sigma^\mu)^{\alpha\dot\beta}\overline{\xi}_{\dot\beta}D_\mu^{\rm cov}\phi, && (4.260)\\
\delta F &= \frac{i}{2}\overline{\xi}^{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu)_{\dot\alpha\beta}D_\mu^{\rm cov}\chi^\beta-\frac{1}{2}M^*\xi_\alpha\chi^\alpha-\frac{1}{6}c_{\widehat{m}}\overline{\xi}^{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^{\widehat{m}})_{\dot\alpha\beta}\chi^\beta. && (4.261)
\end{aligned}
$$

超共変化された微分 $D_\mu^{\rm cov}$ は次のように定義される。

$$
\begin{aligned}
D_\mu^{\rm cov}\phi &= \partial_\mu\phi-\frac{1}{2}\psi_{\mu\alpha}\chi^\alpha, && (4.262)\\
D_\mu^{\rm cov}\chi^\alpha &= D_\mu\chi^\alpha-\frac{1}{2}\psi_\mu{}^\alpha F+\frac{i}{2}(\sigma^\lambda)^{\alpha\dot\beta}\overline{\psi}_{\mu\dot\beta}D_\lambda^{\rm cov}\phi && (4.263)
\end{aligned}
$$

4.5.3 F 項ラグランジアン

大域的超対称性のみを考えている場合、超場の F 項は超対称変換のもとで全微分項だけ変化する。従ってそれをラグランジアンとして用いることができる。ここではその超重力理論への一般化を考えよう。超重力理論においては eF の超対称変換は全微分項だけではないため、補正項を導入する必要があるが、以下ではその補正項をネーター手続きによって決定する。まず、次のラグランジアンから出発する。

$$\mathcal{L}_0=eF \tag{4.264}$$

この超対称変換は、

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_0 &= \frac{ie}{2}(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu D_\mu^{\rm cov}\chi)-\frac{e}{2}M^*(\xi\chi)-\frac{e}{6}c_{\widehat{m}}(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\widehat{m}}\chi^\beta)-\frac{ie}{4}(\xi\sigma^\mu\overline{\psi}_\mu)F+\frac{ie}{4}(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\psi_\mu)F\\
&= -\frac{ie}{2}((D_\mu\overline{\xi})\overline{\sigma}^\mu\chi)-\frac{e}{6}c_{\widehat{m}}(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\widehat{m}}\chi)-\frac{ie}{4}(\xi\sigma^\mu\overline{\psi}_\mu)F\\
&\quad -\frac{e}{2}M^*(\xi\chi)-\frac{e}{4}(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\lambda\overline{\psi}_\mu)\partial_\lambda\phi\\
&\quad +\left[\frac{ie}{2}e^\mu_{\widehat{m}}D_\mu(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\widehat{m}}\chi)+\frac{e}{8}(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\lambda\overline{\psi}_\mu)(\psi_\lambda\chi)\right]_{\rm 4fermi}
\end{aligned}
\tag{4.265}
$$

二行目への変形は、$D_\mu^{\rm cov}\chi$ の具体形 (4.263) を代入し、$D_\mu\chi$ を含む項を部分積分した。このときの表面項は 4-フェルミ項になる。4 フェルミ項はあとで相殺することをチェックするが、ひとまず括弧に入れてまとめておいた。

この式の初めの 3 項を相殺するために次の項を導入する。

$$\mathcal{L}_1=\frac{ie}{2}(\overline{\psi}_\mu\sigma^\mu\chi) \tag{4.266}$$

この超対称変換は、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= \frac{ie}{2}((D_\mu\overline{\xi})\overline{\sigma}^\mu\chi)+\frac{e}{6}c_\lambda(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\lambda\chi)+\frac{ie}{4}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\xi)F-eM^*(\xi\chi)+\frac{e}{4}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\lambda\overline{\xi})\partial_\lambda\phi\\
&\quad +\left[\frac{i}{2}\delta(ee_{\widehat{m}}{}^\mu)(\overline{\psi}_\mu\sigma^{\widehat{m}}\chi)-\frac{e}{8}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\lambda\xi)(\psi_\lambda\chi)\right]_{\rm 4fermi}
\end{aligned}
\tag{4.267}
$$

(4.265) と比較すれば、初めの 3 つの項が相殺して次のものが残る。

$$\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_1=-\frac{3e}{2}M^*(\xi\chi)-\frac{e}{2}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\lambda}\overline{\psi}_\mu)\partial_\lambda\phi+[\cdots]_{4\mathrm{fermi}} \tag{4.268}$$

これは 4 フェルミ項を除き次の項の超対称変換によって相殺できる。

$$\mathcal{L}_2=3eM^*\phi \tag{4.269}$$

この項の超対称変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_2 &= \frac{3e}{2}M^*(\chi\xi)+\frac{e}{4}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}^{\mathrm{cov}}_{mn})\phi-\frac{3ie}{4}(\xi\sigma^\mu\overline{\psi}_\mu-\bar{\xi}\overline{\sigma}^\mu\psi_\mu)M^*\phi\\ &= \frac{3e}{2}M^*(\chi\xi)-\frac{e}{2}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_{\widehat{n}})\partial_{\widehat{m}}\phi-\frac{e}{2}((D_{\widehat{m}}\bar{\xi})\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_{\widehat{n}})\phi-\frac{3ie}{4}(\xi\sigma^\mu\overline{\psi}_\mu)M^*\phi+\frac{ie}{2}c^m(\overline{\xi\psi}_m)\phi\\ &\quad+\left[\frac{e}{2}e^\mu_{\widehat{m}}e^\nu_{\widehat{n}}D_\mu[(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_\nu)\phi]\right]_{4\mathrm{fermi}}\end{aligned} \tag{4.270}$$

二行目への変形は (4.225) に与えられた ψ^{cov}_{mn} の定義を用い、$D_\mu\psi_\nu$ を含む項を部分積分した。4 フェルミ項を除く 5 つの項のうち始めの 2 項が (4.268) の二項を相殺し、残り 3 項は次の項を導入することによって相殺できる。

$$\mathcal{L}_3=\frac{e}{4}(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_n)\phi \tag{4.271}$$

実際、この項の超対称変換は

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_3 &= \frac{e}{2}(D_m\bar{\xi}\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_n)\phi+\frac{3ie}{4}M^*(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^m\xi)\phi-\frac{ie}{2}c^\lambda(\overline{\psi}_\lambda\bar{\xi})\phi\\ &\quad+\left[\frac{e}{4}(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_n)\delta\phi+\frac{1}{4}\delta(ee_{\widehat{m}}{}^\mu e_{\widehat{n}}{}^\nu)(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^{\widehat{m}\widehat{n}}\overline{\psi}_\nu)\phi\right]_{4\mathrm{fermi}}\end{aligned} \tag{4.272}$$

(4.272) は残されていた (4.270) の項を表面項、4-フェルミ項を除き全て相殺することがわかる。

得られた結果をまとめておくと、

超重力理論における F 項

任意のカイラル多重項 $\Phi=(\phi,\chi,F)$ に対して、次のラグランジアンは超対称変換のもとで表面項を除けば不変である。

$$[\Phi]_F=eF+\frac{ie}{2}(\overline{\psi}_\mu\sigma^\mu\chi)+e\left(3M^*+\frac{1}{4}(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_n)\right)\phi \tag{4.273}$$

ただし、実ではないので、実際にラグランジアンとして用いるためにはこの複素共役も必要。

最後に、4 フェルミ項が全て相殺することを示しておこう。これまでに得られた 4-フェルミ項、表面項の和は次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{4\mathrm{fermi}} &= \partial_\mu\left[\frac{e}{2}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)\phi+\frac{ie}{2}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^\mu\chi)\right]\\ &\quad+\frac{e}{2}T_{\lambda\mu}{}^\lambda(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)\phi+\frac{e}{4}T_{\mu\nu}{}^\lambda(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\lambda)\phi+\frac{1}{4}\delta_{\bar{\xi}}(ee_{\widehat{m}}{}^\mu e_{\widehat{n}}{}^\nu)(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^{\widehat{m}\widehat{n}}\overline{\psi}_\nu)\phi\\ &\quad+\frac{1}{4}\delta_\xi(ee_{\widehat{m}}{}^\mu e_{\widehat{n}}{}^\nu)(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^{\widehat{m}\widehat{n}}\overline{\psi}_\nu)\phi\\ &\quad+\frac{e}{4}(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_n)\delta\phi+\frac{i}{2}\delta_\xi(ee_{\widehat{m}}{}^\mu)(\overline{\psi}_\mu\sigma^{\widehat{m}}\chi)\\ &\quad+\frac{ie}{2}T_{\lambda\mu}{}^\lambda(\bar{\xi}\overline{\sigma}^\mu\chi)-\frac{e}{4}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^{\mu\lambda}\bar{\xi})(\psi_\lambda\chi)+\frac{i}{2}\delta_{\bar{\xi}}(ee_{\widehat{m}}{}^\mu)(\overline{\psi}_\mu\sigma^{\widehat{m}}\chi)\end{aligned} \tag{4.274}$$

表面項と捩率 $T_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ を含む項は、公式 (1.113) と (1.114) を用いて得られた。

一行目は表面項であり、無視することができる。

二行目は $\bar{\xi}\psi\overline{\psi}\overline{\psi}$ を含む項である。1 項目は

$$\begin{aligned}
&\frac{e}{2}T_{\lambda\mu}{}^{\lambda}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_{\nu})\phi+\frac{e}{4}T_{\mu\nu}{}^{\lambda}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_{\lambda})\phi \\
=\;&\frac{ie}{8}(\overline{\psi}_{\nu}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\xi})(\psi_{\lambda}\sigma^{\lambda}\overline{\psi}_{\mu})\phi+\frac{ie}{8}(\overline{\psi}_{\nu}\overline{\sigma}^{\nu\lambda}\bar{\xi})(\psi_{\lambda}\sigma^{\mu}\overline{\psi}_{\mu})\phi+\frac{ie}{8}(\overline{\psi}_{\nu}\overline{\sigma}^{\lambda\mu}\bar{\xi})(\psi_{\lambda}\sigma^{\nu}\overline{\psi}_{\mu})\phi \\
=\;&-\frac{ie}{16}(\psi_{\lambda}\sigma^{\kappa}\bar{\xi})(\overline{\psi}_{\nu}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\sigma_{\kappa}\sigma^{\lambda}\overline{\psi}_{\mu})\phi+[\mu\nu\lambda] \\
=\;&\frac{ie}{16}(\psi_{\lambda}\sigma^{\lambda}\bar{\xi})(\overline{\psi}_{\nu}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_{\mu})\phi+[\mu\nu\lambda] \qquad (4.275)
\end{aligned}$$

ただし、式中の $+[\mu\nu\lambda]$ は、上付き添え字 $\mu\nu\lambda$ を巡回的にまわして得られるあと二つの項を意味している。これはちょうど第 3 項の多脚場の $\bar{\xi}$ 変換によって相殺される。

3 行目は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\delta_{\xi}(ee_{\widehat{m}}{}^{\mu}e_{\widehat{n}}{}^{\nu})(\overline{\psi}_{\mu}\overline{\sigma}^{\widehat{m}\widehat{n}}\overline{\psi}_{\nu})\phi \\
=\;&-\frac{ie}{16}[(\xi\sigma^{\lambda}\overline{\psi}_{\lambda})(\overline{\psi}_{\mu}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_{\nu})+(\xi\sigma^{\lambda}\overline{\psi}_{\nu})(\overline{\psi}_{\lambda}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_{\mu})+(\xi\sigma^{\lambda}\overline{\psi}_{\mu})(\overline{\psi}_{\nu}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_{\lambda})]\phi \qquad (4.276)
\end{aligned}$$

これは、グラビティーノのベクトル添え字について反対称な 3 次の積を含んでいる。このことは、それらのグラビティーノの積に対して対称であることを意味している。

$$\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}_{\mu}\overline{\psi}^{\dot{\beta}}_{\nu}\overline{\psi}^{\dot{\gamma}}_{\rho}|_{[\mu\nu\rho]}=\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}_{\mu}\overline{\psi}^{\dot{\beta}}_{\nu}\overline{\psi}^{\dot{\gamma}}_{\rho}|^{\{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\}}_{[\mu\nu\rho]} \qquad (4.277)$$

従って、この積はローレンツ代数の $(2,2)\times(1,4)$ 表現に属している。一方変換パラメータ ξ^{α} は $(2,1)$ 表現に属している。これらの積から一重項を作ることはできないので、(4.276) は 0 である。

4 行目は $\delta\phi$ および $\delta_{\xi}e_{\mu}{}^{\widehat{m}}$ の具体形を代入すれば次のようになる。

$$+\frac{e}{8}(\overline{\psi}_{m}\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_{n})(\xi\chi)+\frac{e}{4}(\overline{\psi}_{\mu}\sigma^{[\mu}\chi)(\xi\sigma^{\nu]}\overline{\psi}_{\nu}) \qquad (4.278)$$

第 2 項をフィルツ変換すれば第 1 項と相殺することがわかる。

5 行目の後ろ二つの項はフィルツ変換を用いて次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
&\frac{e}{4}(\psi_{\lambda}\chi)(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\lambda}\overline{\psi}_{\mu})-\frac{e}{8}(\overline{\psi}_{\mu}\sigma^{\mu}\chi)(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\lambda}\psi_{\lambda})+\frac{e}{8}(\overline{\psi}_{\mu}\sigma^{\nu}\chi)(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\psi_{\nu}) \\
=\;&-\frac{e}{8}(\overline{\psi}_{\mu}\sigma^{\lambda}\psi_{\lambda})(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu}\chi)+\frac{e}{8}(\overline{\psi}_{\mu}\sigma^{\mu}\psi_{\kappa})(\bar{\xi}\overline{\sigma}_{\kappa}\chi) \qquad (4.279)
\end{aligned}$$

これはちょうど第 1 項と相殺する。

4.5.4 運動カイラル超場

一般のカイラル多重項の運動項を得るためには、大域的な超対称性の場合にもそうであったように、D 項ラグランジアンを用いる必要がある。大域的な場合には D 項ラグランジアンは (2.43) にあるように $[V]_D=4D_{\underline{\alpha}}D^{\underline{\alpha}}V]_F$ のように定義することができたが、超重力理論においては $D_{\underline{\alpha}}D^{\underline{\alpha}}V$ はカイラル多重項にならない。そこで、$D_{\underline{\alpha}}D^{\underline{\alpha}}$ の代わりに (4.232) で定義されたカイラル射影演算子を用いて次のように定義する。

$$[\cdots]_D=2\,\mathrm{Re}[P_{\mathrm{chiral}}\cdots]_F. \qquad (4.280)$$

この D 項ラグランジアンを用いてカイラル多重項の運動項を与えるための準備として、カイラル射影演算子 $P_{\rm chiral}$ を用いて次のように反カイラル超場から定義されたカイラル超場の成分場を元の反カイラル超場の成分場を用いて表しておこう。

$$\Psi = P_{\rm chiral}\Phi^* \tag{4.281}$$

このように定義された超場は運動カイラル超場と呼ばれる。

カイラル超場 Ψ の成分場を $(\phi_\Psi, \chi_\Psi, F_\Psi)$ とする。まず、射影演算子 (4.232) の第 2 項の寄与 $(X-iY)\Phi^*$ に注目しよう。この部分から (4.234) に従って成分場を抜き出すと、微分 $D_{\overline{\alpha}}$ は Φ^* には作用しないから、$(X-iY)$ の成分場が現れる。すなわち、

$$(X-iY)\Phi^* \to (\phi^* M, \phi^*\chi_M, \phi^* F_M) \tag{4.282}$$

が得られる。この部分を分離し、Ψ の成分場を次のように置こう。

$$\phi_\Psi = \phi' + M\phi^*, \quad \chi_\Psi = \chi' + \chi_M\phi^*, \quad F_\Psi = F' + F_M\phi^*. \tag{4.283}$$

(ϕ', χ', F') は射影演算子の第 1 項から得られる成分である。

まず、スカラー成分 ϕ^* であるが、(4.234) を用いると F^* であることがわかる。

$$\phi' = -2\mathbf{1}^{\underline{\gamma}\underline{\delta}} D_{\underline{\gamma}} D_{\underline{\delta}} \Phi^*|_{\theta=0} = F^* \tag{4.284}$$

フェルミオン成分 χ' は次のように得られる。

$$\chi' = 2D_{\overline{\alpha}}[-2(\mathbf{1}^{\underline{\gamma}\underline{\delta}} D_{\underline{\gamma}} D_{\underline{\delta}})\Phi^*]|_{\theta=0} = (\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\underline{\beta}}}{}^{\widehat{\underline{\gamma}}}(D^{\rm cov}_{\widehat{m}} - \frac{i}{3}c_{\widehat{m}})\chi^*_{\underline{\gamma}} \tag{4.285}$$

途中で $\theta = 0$ 成分を得るために (4.255) の複素共役

$$D_{\widehat{\underline{\beta}}}(\mathbf{1}^{\widehat{\underline{\gamma}}\widehat{\underline{\delta}}} D_{\widehat{\underline{\gamma}}} D_{\widehat{\underline{\delta}}})\Phi^* = \frac{i}{6}V_{\widehat{m}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\underline{\beta}}}{}^{\widehat{\underline{\gamma}}} D_{\widehat{\underline{\gamma}}}\Phi^* - \frac{1}{2}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\underline{\beta}}}{}^{\widehat{\underline{\gamma}}} D_{\widehat{m}} D_{\widehat{\underline{\gamma}}}\Phi^* \tag{4.286}$$

を用いた。

F' を決めるのは上の二つに比べて少し面倒である。まず、定義は次のように与えられる。

$$F' = -2(\mathbf{1}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}} D_{\overline{\alpha}} D_{\overline{\beta}})[-2(\mathbf{1}^{\underline{\gamma}\underline{\delta}} D_{\underline{\gamma}} D_{\underline{\delta}})\Phi^*]|_{\theta=0} \tag{4.287}$$

(4.286) に対して $\mathbf{1}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}} D_{\overline{\alpha}}$ を作用させると、

$$(\mathbf{1}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}} D_{\overline{\alpha}} D_{\widehat{\overline{\beta}}})(\mathbf{1}^{\widehat{\underline{\gamma}}\widehat{\underline{\delta}}} D_{\widehat{\underline{\gamma}}} D_{\widehat{\underline{\delta}}})\Phi^* = \frac{i}{6} D_{\widehat{\underline{\gamma}}}\Phi^* (\gamma^{\widehat{m}})^{\widehat{\underline{\gamma}}}{}_{\widehat{\overline{\beta}}}\mathbf{1}^{\overline{\beta}\overline{\alpha}}(D_{\overline{\alpha}} V_{\widehat{m}}) - \frac{i}{6} V_{\widehat{m}}(\gamma^{\widehat{m}})^{\widehat{\overline{\alpha}}\widehat{\underline{\beta}}} D_{\overline{\alpha}} D_{\widehat{\underline{\beta}}}\Phi^* + \frac{1}{2}(\gamma^{\widehat{m}})^{\widehat{\overline{\alpha}}\widehat{\underline{\beta}}} D_{\overline{\alpha}} D_{\widehat{m}} D_{\widehat{\underline{\beta}}}\Phi^* \tag{4.288}$$

この第 3 項に現れる 3 階微分は次のように変形する。

$$\begin{aligned} D_{\underline{\alpha}} D_{\widehat{m}} D_{\widehat{\overline{\beta}}}\Phi &= [D_{\underline{\alpha}}, D_{\widehat{m}}] D_{\widehat{\overline{\beta}}}\Phi + D_{\widehat{m}}\{D_{\underline{\alpha}}, D_{\widehat{\overline{\beta}}}\}\Phi \\ &= -\frac{1}{4} R_{\underline{\alpha}\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})_{\widehat{\overline{\beta}}}{}^{\widehat{\overline{\gamma}}} D_{\widehat{\overline{\gamma}}}\Phi + T_{\widehat{m}\underline{\alpha}}{}^{\gamma} D_\gamma D_{\widehat{\overline{\beta}}}\Phi - \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{k}})_{\underline{\alpha}\widehat{\overline{\beta}}} D_{\widehat{m}} D_{\widehat{k}}\Phi \end{aligned} \tag{4.289}$$

さらに $(\gamma^{\widehat{m}})^{\widehat{\underline{\alpha}}\widehat{\overline{\beta}}}$ をかけて (4.154) (4.151) を用いると、

$$\begin{aligned} (\gamma^{\widehat{m}})^{\widehat{\underline{\alpha}}\widehat{\overline{\beta}}} D_{\underline{\alpha}} D_{\widehat{m}} D_{\widehat{\overline{\beta}}}\Phi &= -\frac{1}{4} D_{\widehat{\overline{\gamma}}}\Phi(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})^{\widehat{\overline{\gamma}}}{}_{\widehat{\overline{\beta}}}(\gamma^{\widehat{m}})^{\widehat{\overline{\beta}}}{}_{\widehat{\underline{\alpha}}} R^{\underline{\alpha}}{}_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}} + (\gamma^{\widehat{m}})^{\widehat{\overline{\beta}}\widehat{\underline{\alpha}}} T_{\widehat{m}\underline{\alpha}}{}^{\gamma} D_\gamma D_{\widehat{\overline{\beta}}}\Phi + \frac{1}{2} D^{\widehat{m}} D_{\widehat{m}}\Phi \\ &= -\frac{1}{16} D_{\widehat{\overline{\alpha}}}\Phi(\gamma^{\widehat{m}n} T_{mn})^{\overline{\alpha}} + 2(X-iY)\mathbf{1}^{\overline{\gamma}\widehat{\overline{\beta}}} D_{\overline{\gamma}} D_{\widehat{\overline{\beta}}}\Phi - \frac{5i}{3} V^{\underline{\gamma}\overline{\beta}} D_{\underline{\gamma}} D_{\widehat{\overline{\beta}}}\Phi + \frac{1}{2} D^{\widehat{m}} D_{\widehat{m}}\Phi \end{aligned} \tag{4.290}$$

この式の $\theta = 0$ 部分はカイラル多重項の成分の定義 (4.234) および (4.248) を用いることで次のように得られる。

$$(\gamma^{\widehat{m}})^{\widehat{\underline{\alpha}}\widehat{\overline{\beta}}} D_{\underline{\alpha}} D_{\widehat{m}} D_{\widehat{\overline{\beta}}} \Phi|_{\theta=0} = -\frac{1}{32}\chi_{\widehat{\alpha}}(\gamma^{\widehat{m}n}\psi^{\rm cov}_{mn})^{\overline{\alpha}} - MF - \frac{5i}{6}c^m D^{\rm cov}_m \phi + \frac{1}{2}\Box^{\rm cov}\phi \quad (4.291)$$

この式を用いることで (4.287) に与えられた F' が次のように決まる。

$$F' = \Box^{\rm cov}\phi^* + \frac{4i}{3}c^{\widehat{m}} D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\phi^* - \frac{1}{12}\chi^*_{\underline{\widehat{\gamma}}}(\gamma^{\widehat{m}n}\psi^{\rm cov}_{mn})^{\underline{\gamma}} - 2M^*F^* \quad (4.292)$$

ただし、$\Box^{\rm cov}$ は超共変化されたダランベルシアンで、次のように定義される。

$$\begin{aligned}
\Box^{\rm cov}\phi &\equiv D^{\widehat{m}} D_{\widehat{m}}\Phi|_{\theta=0} \\
&= D^{\widehat{m}} D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\phi - \psi^{\widehat{m}\widehat{\alpha}} D_{\widehat{\alpha}} D_{\widehat{m}}\Phi|_{\theta=0} \\
&= D^{\widehat{m}} D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\phi + \frac{1}{2}(\psi_{\widehat{m}\overline{\alpha}} D^{{\rm cov}\,m}\chi^{\overline{\alpha}}) - \frac{i}{12}\psi_{\widehat{m}\overline{\alpha}}(3\gamma^m \not{c} + \not{c}\gamma^m)\chi^{\overline{\alpha}} \qquad (4.293)
\end{aligned}$$

こうして得られた Ψ の成分場をワイル表示でまとめて与えておこう。

運動カイラル超場の成分場

$\Psi = P_{\rm chiral}\Phi^*$ の成分場は次のように与えられる。ここではワイル表示を用いている。

$$\begin{aligned}
\phi_\Psi &= F^* + M\phi^*, && (4.294)\\
\chi_\Psi &= i\sigma^{\widehat{m}}(D^{\rm cov}_{\widehat{m}} - \frac{i}{3}c_{\widehat{m}})\overline{\chi} + \chi_M\phi^*, && (4.295)\\
F_\Psi &= \Box^{\rm cov}\phi^* + \frac{4i}{3}c^{\widehat{m}} D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\phi^* + (\overline{\chi}\overline{\chi}_M) - 2M^*F^* + F_M\phi^*. && (4.296)
\end{aligned}$$

超共変ダランベルシアンはワイル表示で次のように定義される。

$$\Box^{\rm cov}\phi = D^{\widehat{m}} D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\phi - \frac{1}{2}(\psi_{\widehat{m}} D^{{\rm cov}\,m}\chi) + \frac{i}{12}(\psi_{\widehat{m}}(3\sigma^m \not{c} + \not{c}\overline{\sigma}^m)\chi) \quad (4.297)$$

4.5.5 単純超重力理論

捩率テンソルの成分には二つのカイラル超場が含まれていた。すなわち、スカラーカイラル超場 $X - iY$ およびスピンを持つカイラル超場 $T^{(4,1)\widehat{\alpha}}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ である。これらはどちらも超重力理論のラグランジアンを構成する際に用いられる。

M をスカラー成分とするカイラル超場 $X - iY$ の成分場を (M, χ_M, F_M) とし、(4.234) に従って抜き出そう。フェルミオン成分は (4.195) の $\theta = 0$ 成分を取ることにより、次のようになる。

$$(\chi_M)_{\overline{\alpha}} = 2D_{\overline{\alpha}}(X - iY)|_{\theta=0} = \frac{1}{6}(\gamma^{pq})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\psi^{{\rm cov}\,\overline{\beta}}_{pq} \quad (4.298)$$

F_M は (4.196) の $\theta = 0$ 成分を取ることにより、次のように決まる。

$$F_M = -2\mathbf{1}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}} D_{\overline{\alpha}} D_{\overline{\beta}}(X - iY)|_{\theta=0} = \frac{2i}{3}D^{\rm cov}_m c^m - 2M^*M - \frac{4}{9}c_m c^m - \frac{1}{6}R^{{\rm cov}\,mn}_{mn} \quad (4.299)$$

ただし、ベクトル場の超共変微分 $D^{\rm cov}_m c^m$ は (4.216) に与えられている。得られた結果をまとめておこう。

重力カイラル超場の成分

M をスカラー成分とするカイラル超場 $X - iY$ の成分は次のように与えられる。

$$\chi_M = \frac{1}{6}\sigma^{pq}\psi^{\mathrm{cov}}_{pq} = \frac{1}{6}\sigma^{pq}\psi_{pq} + \frac{i}{2}M\sigma^{\mu}\overline{\psi}_{\mu} - \frac{i}{3}c^{\mu}\psi_{\mu} \tag{4.300}$$

$$F_M = \frac{2i}{3}D^{\mathrm{cov}}_m c^m - 2M^*M - \frac{4}{9}c_m c^m - \frac{1}{6}R^{\mathrm{cov}\,mn}_{mn} \tag{4.301}$$

ここではワイル表示を用いた。

カイラル超場 $X - iY$ を用いて F 項ラグランジアンを作ってみよう。

$$-6[X-iY]_F = eR^{\mathrm{cov}\,mn}_{mn} - \frac{ie}{2}(\overline{\psi}_{\mu}\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{pq}\psi^{\mathrm{cov}}_{pq}) - 4ieD^{\mathrm{cov}}_m c^m - \frac{3e}{2}(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_n)M - 6eM^*M + \frac{8e}{3}c_m c^m \tag{4.302}$$

この実部をラグランジアンとしよう。

$$\begin{aligned} k^2\mathcal{L} &= -6\,\mathrm{Re}[X-iY]_F \\ &= eR^{\mathrm{cov}\,mn}_{mn} + \frac{ie}{4}(\psi_{\mu}\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{pq}\overline{\psi}^{\mathrm{cov}}_{pq}) - \frac{ie}{4}(\overline{\psi}_{\mu}\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{pq}\psi^{\mathrm{cov}}_{pq}) \\ &\quad -6eM^*M + \frac{8e}{3}c_m c^m - \frac{3e}{4}(\psi_m\sigma^{mn}\psi_n)M^* - \frac{3e}{4}(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_n)M \end{aligned} \tag{4.303}$$

この一行目がほぼアインシュタイン作用と、グラビティーノの作用を与えている。さらに詳しく見るために、R^{cov} にその具体形

$$R^{\mathrm{cov}} \equiv R^{\mathrm{cov}\,\widehat{m}\widehat{n}}_{\widehat{m}\widehat{n}} = R_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} + \left(-\frac{i}{2}(\psi^{\mu}\sigma^{\nu}\overline{\psi}^{\mathrm{cov}}_{\mu\nu}) + \frac{1}{4}M^*(\psi_{\mu}\sigma^{\mu\nu}\psi_{\nu}) - \frac{1}{6}c_{\lambda}(\psi_{\mu}\sigma^{\lambda\mu\nu}\overline{\psi}_{\nu}) + \mathrm{c.c.}\right) \tag{4.304}$$

を代入してみると、

$$\begin{aligned} k^2\mathcal{L} &= eR + \frac{ie}{4}(\psi_{\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}\overline{\psi}^{\mathrm{cov}}_{\nu\rho}) - \frac{ie}{4}(\overline{\psi}_{\mu}\overline{\sigma}^{\mu\nu\rho}\psi^{\mathrm{cov}}_{\nu\rho}) \\ &\quad -6eM^*M + \frac{8e}{3}c_m c^m \\ &\quad -\frac{e}{2}(\psi_m\sigma^{mn}\psi_n)M^* - \frac{e}{2}(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_n)M - \frac{e}{6}c_{\lambda}(\psi_{\mu}\sigma^{\lambda\mu\nu}\overline{\psi}_{\nu}) - \frac{e}{6}c_{\lambda}(\overline{\psi}_{\mu}\overline{\sigma}^{\lambda\mu\nu}\psi_{\nu}) \end{aligned} \tag{4.305}$$

さらに、

$$-\frac{ie}{4}\overline{\psi}_{\mu}\overline{\sigma}^{\mu\nu\rho}\psi^{\mathrm{cov}}_{\nu\rho} = -\frac{ie}{2}\overline{\psi}_{\mu}\overline{\sigma}^{\mu\nu\rho}D_{\nu}\psi_{\rho} + \frac{e}{2}M(\overline{\psi}_{\mu}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_{\nu}) - \frac{e}{3}c^{\lambda}[(\psi_{\lambda}\sigma^{\mu}\overline{\psi}_{\mu}) - (\overline{\psi}_{\lambda}\overline{\sigma}^{\mu}\psi_{\mu})] + \frac{e}{6}c_{\lambda}(\overline{\psi}_{\mu}\overline{\sigma}^{\lambda\mu\nu}\psi_{\nu}) \tag{4.306}$$

を用いて $\psi^{\mathrm{cov}}_{\mu\nu}$ を展開すると、補助場とグラビティーノの結合を与える項がすべて相殺して次の作用を得る。

単純超重力理論のラグランジアン

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{sugra}} &= -\frac{6}{k^2}\,\mathrm{Re}[X-iY]_F \\ &= \frac{e}{k^2}\left[R + \frac{i}{2}(\psi_{\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}D_{\nu}\overline{\psi}_{\rho}) - \frac{i}{2}(\overline{\psi}_{\mu}\overline{\sigma}^{\mu\nu\rho}D_{\nu}\psi_{\rho}) - 6M^*M + \frac{8}{3}c_m c^m\right] \end{aligned} \tag{4.307}$$

補助場に対する運動方程式を解けば $M = c_m = 0$ が得られるが、この解をラグランジアンに代入すると、（以前には無視していて比較できない 4 フェルミオン項を除き）(3.1) で与えられたラグランジアンに帰着する。

さらに、この理論に、新たな自由度を導入することなく質量パラメータ $m_{3/2} \in \mathbf{C}$ で変形することができる。超空間上の定数場、すなわち $\theta = 0$ 成分が定数であり、それ以外の成分が 0 であるような超場を考えよう。

$$\Phi_1 = (1, 0, 0) \tag{4.308}$$

これは超対称変換のもとで不変なカイラル超場とみなすことができる。そこで、この超場を用いて F-項ラグランジアンを作ることができる。

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{k^2}\,\mathrm{Re}[-4m_{3/2}\Phi_1]_F = \frac{e}{k^2}\left[-6m_{3/2}M^* - \frac{1}{2}m_{3/2}(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_n) + \mathrm{c.c.}\right] \tag{4.309}$$

ラグランジアン (4.307) とこのラグランジアンの和をとったものを全ラグランジアンとして補助場の運動方程式を解けば

$$M = -m_{3/2}, \quad c_m = 0. \tag{4.310}$$

を得る。この解を再びラグランジアンに代入すると、宇宙項

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cc}} = \frac{6e}{k^2}|m_{3/2}|^2 \tag{4.311}$$

が得られる。これらをあわせたものは、ラグランジアン (3.44) に帰着する。また、グラビティーノの変換則に、新たな項 $-(i/2)M\sigma_\mu\overline{\xi} = (i/2)m_{3/2}\sigma_\mu\overline{\xi}$ が加わるが、これはちょうど (3.45) に一致する。

4.5.6 カイラル多重項のラグランジアン

カイラル多重項を含む理論のラグランジアンを考えよう。ここでは大まかな構造を見るために、ボゾン部分にのみ注目する。

まず、カイラル多重項の運動項は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{chiral}} = \mathrm{Re}[\Phi P_{\mathrm{chiral}}\Phi^*]_F = \mathrm{Re}[e(\phi F_\Psi + F\phi_\Psi) + 3eM^*(\phi\phi_\Psi)] \tag{4.312}$$

によって与えることができる。ここで、$\Psi = P_{\mathrm{chiral}}\Phi^*$ の成分場を $(\phi_\Psi, \chi_\Psi, F_\Psi)$ とおいた。さらにこれらの成分場を分解し、表面項を無視すると、ラグランジアン (4.312) のボゾンのみからなる部分は次のように書き換えられる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{chiral}} = -e(\partial^\mu\phi - \frac{2i}{3}c^m\phi)(\partial_\mu\phi^* + \frac{2i}{3}c_\mu\phi^*) + e(F + M^*\phi)(F^* + M\phi^*) - \frac{e}{6}|\phi|^2 R \tag{4.313}$$

第 1 項はスカラー場の運動項であり、第 2 項は補助場である。第 3 項にはアインシュタイン項が現れているが、これは超重力理論におけるカイラル射影演算子に重力カイラル超場 $X - iY$ が含まれているためである。このことを利用すれば、先ほどの単純超重力理論の作用を含むラグランジアンを $\mathcal{L}_{\mathrm{sugra}} = -(6/k^2)\,\mathrm{Re}[P_{\mathrm{chiral}}1]_F$ と書くことができる。したがって、重力部分とカイラル多重項部分を次のようにまとめて表すことができる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{sugra}} + \mathcal{L}_{\mathrm{chiral}} = -\frac{6}{k^2}\,\mathrm{Re}\left[P_{\mathrm{chiral}}\left(1 - \frac{k^2}{6}\Phi\Phi^*\right)\right]_F \tag{4.314}$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{chiral}} + \mathcal{L}_{\mathrm{sugra}}$ をさらに一般化し、ϕ の任意の実関数 $K(\phi, \phi^*)$ を用いて次のように表すと便利である。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{6}{k^2}\,\mathrm{Re}[P_{\mathrm{chiral}}e^{-k^2K(\Phi,\Phi^*)/6}]_F \\ &= \frac{e}{k^2}\left[R + 6(\partial^\mu\phi\partial_\phi - \frac{2i}{3}c^\mu)(\partial_\mu\phi^*\partial_{\phi^*} + \frac{2i}{3}c_\mu) - 6(F\partial_\phi + M^*)(F^*\partial_{\phi^*} + M)\right]e^{-k^2K(\phi,\phi^*)/6} \\ &= \mathcal{L}_{\mathrm{kin}} + \mathcal{L}_{\mathrm{aux}}\end{aligned} \tag{4.315}$$

Soryushiron Kenkyu

ただし、$K_\phi = \partial_\phi K$ のように、添え字を用いてスカラー場による微分を表すことにする。∂_ϕ および ∂_{ϕ^*} は末尾の $e^{-k^2K/6}$ に作用する。∂_ϕ と ∂_{ϕ^*} の両方を含む項は $\partial_\phi\partial_{\phi^*}e^{-k^2K/6}$ のように解釈する。$\mathcal{L}_{\rm kin}$ と $\mathcal{L}_{\rm aux}$ は次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = \frac{e}{k^2}e^{-k^2K/6}\left[R + \frac{1}{6}(k^2K_\phi\partial^\mu\phi + 4ic^\mu)(k^2K_{\phi^*}\partial_\mu\phi^* - 4ic_\mu) - k^2K_{\phi\phi^*}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi^*)\right], \tag{4.316}$$

$$\mathcal{L}_{\rm aux} = \frac{e}{k^2}e^{-K/6}\left[k^2K_{\phi\phi^*}FF^* - \frac{1}{6}(6M - k^2F^*K_{\phi^*})(6M^* - k^2FK_\phi)\right]. \tag{4.317}$$

超ポテンシャル項を次のように与えることができる。

$$\mathcal{L}_{\rm pot} = -2\,{\rm Re}[W(\Phi)]_F = -eW_\phi F - 3eM^*W + {\rm c.c.} \tag{4.318}$$

まず、補助場についての運動方程式を解こう。ベクトル場 c_μ についての運動方程式を解くと、

$$c_\mu = \frac{ik^2}{8}(\partial_\mu\phi)K_\phi - \frac{ik^2}{8}(\partial_\mu\phi^*)K_{\phi^*} \tag{4.319}$$

を得る。このベクトル場は、スカラー多様体上の 1-形式場

$$S = \frac{ik^2}{8}K_\phi d\phi - \frac{ik^2}{8}K_{\phi^*}d\phi^* \tag{4.320}$$

の時空への引き戻しであると解釈することができる。この 1 形式は以前に定義した S と同じものである。これを $\mathcal{L}_{\rm kin}$ に代入すれば、次のようになる。

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = ee^{-k^2K/6}\left[\frac{1}{k^2}R + \frac{k^2}{24}(\partial^\mu K)(\partial_\mu K) - K_{\phi\phi^*}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi^*)\right] \tag{4.321}$$

M についての運動方程式を解けば、

$$M = \frac{k^2}{6}F^*K_{\phi^*} - \frac{k^2}{2}e^{k^2K/6}W \tag{4.322}$$

これを代入すると、

$$\mathcal{L}_{\rm aux}+\mathcal{L}_{\rm pot} = e\left[e^{-k^2K/6}K_{\phi\phi^*}|F|^2 - F\left(W_\phi + \frac{k^2}{2}K_\phi W\right) - F^*\left(W^*_{\phi^*} + \frac{k^2}{2}K_{\phi^*}W^*\right) + \frac{3k^2}{2}e^{K/6}|W|^2\right] \tag{4.323}$$

さらに F の運動方程式を解けば

$$F = e^{k^2K/6}K^{\phi\phi^*}\left(W^*_{\phi^*} + \frac{k^2}{2}K_{\phi^*}W^*\right) \tag{4.324}$$

これを代入すれば

$$\mathcal{L}_{\rm aux} + \mathcal{L}_{\rm pot} = ee^{k^2K/6}\left[-K^{\phi\phi^*}\left|W_\phi + \frac{k^2}{2}K_\phi W\right|^2 + \frac{3k^2}{2}|W|^2\right] \tag{4.325}$$

こうして補助場が消去されたラグランジアンが得られた。しかし運動項 (4.321) に含まれるアインシュタイン作用の係数はスカラー場に依存している。そこで、アインシュタイン項の前の係数を定数にするために次のワイル変換を行おう。

$$g'_{\mu\nu} = e^{-k^2K/6}g_{\mu\nu} \tag{4.326}$$

このワイル変換により、アインシュタイン項の係数が定数になると同時に、次のように $(\partial K)^2$ 項がアインシュタイン作用に吸収される。

$$\int d^4x \frac{e}{k^2} e^{-k^2K/6}\left(R + \frac{k^4}{24}(\partial K)^2\right) = \int d^4x \frac{e'}{k^2} R' \tag{4.327}$$

この結果、作用は次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{kin}} &= \frac{e}{k^2}R - eK_{\phi\phi^*}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi^*), &(4.328)\\ \mathcal{L}_{\mathrm{aux}} + \mathcal{L}_{\mathrm{pot}} &= ee^{k^2K/2}\left(-K^{\phi\phi^*}\left|W_\phi + \frac{k^2}{2}K_\phi W\right|^2 + \frac{3k^2}{2}|W|^2\right) &(4.329)\end{aligned}$$

これは §3.2 で得られたラグランジアンのボゾン部分に一致している。

4.5.7 変換則の成分場形式との関係

重力多重項に含まれる多脚場、グラビティーノは on-shell ではどちらも 2 つずつの自由度を持っている。しかし off-shell では多脚場は（局所ローレンツ対称性の分を除き）10 個の自由度を、グラビティーノは 16 個の自由度を持っている。したがって、off-shell でも超対称性が明らかな定式化を行おうとすれば最小でも 6 個のボゾン的自由度を持つ補助場を導入しなければならない。

補助場を含む off-shell 形式では、重力多重項に含まれる場の超対称変換はそれ以外にどのような場が有るかには依存しないはずである。したがって、on-shell 形式でのグラビティーノ変換則

$$\delta\psi_\mu = \frac{1}{k}D_\mu^{(\omega,S)}\xi + \frac{ik}{4}\mathcal{W}\sigma_\mu\overline{\xi} \tag{4.330}$$

の物質場に依存する部分は、off-shell 形式では補助場に置き換えられる必要がある。（ここではゲージ多重項がない場合を考える。）この変換則の右辺で物質場に依存する部分は、超ポテンシャル $\mathcal{W}$ と複合ベクトル場 S_μ である。これらはちょうど 6 個のボゾン的自由度を持つから、重力多重項の補助場として複素スカラー場 M と実ベクトル場 c_μ を導入するのが自然である。補助場の運動方程式を解くことにより、これらは $\mathcal{W}$ や S_μ に置き換えられる。

ただし、off-shell の形式での重力多重項に含まれる多脚場とグラビティーノは off-shell 形式での純粋な重力多重項にはならず、カイラル多重項と混合を起こしている。この混合を解くためには、次のワイル変換を行う必要がある。

$$e_\mu^{\widehat{m}} = e^{-k^2K/12}e_\mu'^{\widehat{m}}, \quad \psi_\mu = e^{-k^2K/24}\psi_\mu', \quad \xi = e^{-k^2K/24}\xi'. \tag{4.331}$$

さらにグラビティーノについてはカイラル多重項のフェルミオンを加える必要がある。このことは (4.331) で定義された多脚場の超対称変換を行ってみるとわかる。以前に得られた多脚場の変換則を用いて $e_\mu'^{\widehat{m}}$ の超対称変換を計算すると、次のようにリスケール因子のスカラー場の変換からカイラル多重項のフェルミオンを含む項が現れる。したがってその部分まで含めたものをグラビティーノとして定義する。

$$\begin{aligned}\delta e_\mu'^{\widehat{m}} &= \delta(e^{k^2K/12}e_\mu^{\widehat{m}})\\ &= \frac{ik}{4}e^{k^2K/12}\left[(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\widehat{m}}\psi_\mu) - \frac{ik}{6}(\overline{\xi}\overline{\chi}^{\overline{i}})K_{\overline{i}}e_\mu^{\widehat{m}}\right] + \text{c.c.}\\ &= \frac{ik}{4}\left[(\overline{\xi}'\overline{\sigma}^{\widehat{m}}\psi_\mu'') + \frac{ik}{6}e^{-k^2K/24}(\overline{\xi}'\overline{\sigma}^{\widehat{m}\widehat{k}}\overline{\chi}^{\overline{i}})K_{\overline{i}}e'_{\mu\widehat{k}}\right] + \text{c.c.} \qquad (4.332)\end{aligned}$$

Soryushiron Kenkyu

ただし、ψ''_μ は次のように定義した。

$$\psi''_\mu = \psi'_\mu - \frac{ik}{6} e^{-k^2 K/24} \sigma'_\mu \overline{\chi}^{\bar{i}} K_{\bar{i}} \tag{4.333}$$

これが off-shell 形式で重力多重項に属するグラビティーノである。$\sigma'_\mu = e'^{\widehat{m}}_\mu \sigma_{\widehat{m}}$ である。次に、グラビティーノ ψ''_μ の変換則を見てみよう。まず ψ'_μ を変換してみると、

$$\delta\psi'_\mu = \frac{1}{k} D^{(\omega')}_\mu \xi' - \frac{k}{24} \sigma'_\mu (\partial\!\!\!/' \phi^i) K_i \xi' - \frac{k}{24} \sigma'_\mu (\partial\!\!\!/' \phi^{\bar{i}}) K_{\bar{i}} \xi' - \frac{i}{k} S_\mu \xi' + \frac{ik}{4} e^{-k^2 K/12} \mathcal{W} \sigma'_\mu \overline{\xi}' \tag{4.334}$$

次に、χ の混合を表す項を変換してみると、

$$\delta \left(-\frac{ik}{6} e^{-k^2 K/24} \sigma'_\mu \overline{\chi}^{\bar{i}} K_{\bar{i}} \right) = \frac{k}{12} \sigma'_\mu (\partial\!\!\!/' \overline{\phi}^{\bar{i}}) \xi' K_{\bar{i}} - \frac{ik}{12} e^{-k^2 K/12} \sigma'_\mu \overline{\xi}' K_{\bar{i}} K^{\bar{i}j} D^{(S)}_j \mathcal{W} \tag{4.335}$$

したがって、これらの和は次のように与えられる。

$$k\delta\psi''_\mu = D^{(\omega')} \xi' + \frac{i}{3} \sigma'_\mu S\!\!\!/' \xi' - i S_\mu \xi' - \frac{i}{2} \sigma'_\mu \overline{\xi}' M \tag{4.336}$$

M は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} M &= k^2 e^{k^2 K/6} \left(-\frac{1}{2} W + \frac{1}{6} K_{\bar{i}} K^{\bar{i}j} D^{(S)}_j W \right) \\ &= k^2 e^{k^2 K/6} \left(-\frac{1}{2} W + \frac{1}{6} K_{\bar{i}} K^{\bar{i}j} \left(W_j + \frac{k^2}{2} K_j W \right) \right) \end{aligned} \tag{4.337}$$

こうして得られた変換則はあとで超場形式、tensor calculus で得られるものに一致する。そこでは M は補助場として現れ、運動方程式を解くことで関係式 (4.337) が得られる。また、複合ベクトル場 S_μ についても、off-shell 形式では独立な補助場として現れ、運動方程式を解くことでスカラー場の複合場として表される。

4.6 ベクトル多重項

4.6.1 成分場と超対称変換

超場 V の成分場を次のように定義する。

ベクトル超場の成分場

V を超空間上の任意の超場とするとき、その成分場を次のように定義する。

$$\begin{array}{lll} V|_{\theta=0} = B & D_{\widehat{\alpha}} V|_{\theta=0} = \frac{1}{2}\eta_{\widehat{\alpha}} & D_{\widehat{\alpha}} D^{\widehat{\alpha}} V|_{\theta=0} = \frac{1}{2} C \\ D_{\underline{\widehat{\alpha}}} V|_{\theta=0} = \frac{1}{2}\eta_{\underline{\widehat{\alpha}}} & i(\gamma^5 \gamma_{\widehat{m}})^{\widehat{\alpha}\underline{\widehat{\beta}}} [D_{\widehat{\alpha}}, D_{\underline{\widehat{\beta}}}] V|_{\theta=0} = \frac{1}{2} v_{\widehat{m}} & P^*_{\mathrm{chiral}} D_{\underline{\widehat{\alpha}}} V|_{\theta=0} = \frac{i}{2\sqrt{2}} \lambda_{\underline{\widehat{\alpha}}} \\ D_{\underline{\widehat{\alpha}}} D^{\underline{\widehat{\alpha}}} V|_{\theta=0} = \frac{1}{2} C^* & P_{\mathrm{chiral}} D_{\widehat{\alpha}} V|_{\theta=0} = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \lambda_{\widehat{\alpha}} & D_{\widehat{\alpha}} P_{\mathrm{chiral}} D^{\widehat{\alpha}} V|_{\theta=0} = \frac{1}{4} D \end{array} \tag{4.338}$$

成分場 $v_{\widehat{m}}$ については次の式も有用である。

$$[D_{\widehat{\alpha}}, D_{\underline{\widehat{\beta}}}] V|_{\theta=0} = \frac{i}{4} (\gamma^5 \gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\underline{\widehat{\beta}}} v_{\widehat{m}} \tag{4.339}$$

Soryushiron Kenkyu

これら成分場の間の超対称変換を求めよう。成分場 B、η、C については、比較的簡単なので、結果をまとめて与えておく。

$$\begin{aligned}\delta B &= \xi^{\hat{\alpha}} D_{\hat{\alpha}} V|_{\theta=0} \\ &= \frac{1}{2}\xi^{\hat{\alpha}}\eta_{\hat{\alpha}}, \end{aligned}\tag{4.340}$$

$$\begin{aligned}\delta\eta_{\hat{\hat{\alpha}}} &= 2\xi^{\hat{\hat{\beta}}} D_{\hat{\hat{\beta}}} D_{\hat{\hat{\alpha}}} V|_{\theta=0} + 2\xi^{\underline{\hat{\beta}}} D_{\underline{\hat{\beta}}} D_{\hat{\hat{\alpha}}} V|_{\theta=0} \\ &= \frac{1}{2}\xi_{\hat{\hat{\alpha}}} C - \frac{i}{4} v_{\hat{m}}(\gamma^{\hat{m}})_{\hat{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}\xi^{\underline{\hat{\beta}}} - \frac{1}{4}(D^{\mathrm{cov}}_{\hat{m}} B)(\gamma^{\hat{m}})_{\hat{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}\xi^{\underline{\hat{\beta}}}, \end{aligned}\tag{4.341}$$

$$\begin{aligned}\delta C &= 2\xi^{\hat{\alpha}} D_{\hat{\alpha}} D_{\hat{\hat{\beta}}} D^{\hat{\hat{\beta}}} V|_{\theta=0} \\ &= -\frac{i}{6}\xi^{\underline{\hat{\alpha}}}(\not{c})_{\underline{\hat{\alpha}}\hat{\hat{\beta}}}\eta^{\hat{\hat{\beta}}} - \frac{1}{2}\xi^{\underline{\hat{\alpha}}}(\gamma^{\hat{m}})_{\underline{\hat{\alpha}}\hat{\hat{\beta}}} D^{\mathrm{cov}}_{\hat{m}}\eta^{\hat{\hat{\beta}}} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi^{\underline{\hat{\alpha}}}\lambda_{\underline{\hat{\alpha}}} - \frac{1}{4}M^*(\xi^{\hat{\hat{\alpha}}}\eta_{\hat{\hat{\alpha}}}) \end{aligned}\tag{4.342}$$

ただし、変換則中に現れた超共変微分 D^{cov}_{μ} は次のように定義される。

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{cov}}_{\mu} B &= \partial_{\mu} B - \psi_{\hat{m}}{}^{\hat{\alpha}}(D_{\hat{\alpha}} V|_{\theta=0}) \\ &= \partial_{\hat{m}} B - \frac{1}{2}\psi_{\hat{m}}{}^{\hat{\alpha}}\eta_{\hat{\alpha}}, \end{aligned}\tag{4.343}$$

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{cov}}_{\mu}\eta_{\hat{\hat{\alpha}}} &= D_{\mu}\eta_{\hat{\hat{\alpha}}} - 2\psi^{\hat{\beta}}_{\mu}(D_{\hat{\beta}} D_{\hat{\hat{\alpha}}} V|_{\theta=0}) \\ &= D_{\mu}\eta_{\hat{\hat{\alpha}}} - \frac{1}{2}\psi_{\mu\hat{\hat{\alpha}}} C + \frac{i}{4}(\gamma^{\hat{k}})_{\hat{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}\psi^{\underline{\hat{\beta}}}_{\mu} v_{\hat{k}} + \frac{1}{4}(\gamma^{\hat{k}})_{\hat{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}\psi^{\underline{\hat{\beta}}}_{\mu} D^{\mathrm{cov}}_{\hat{k}} B \end{aligned}\tag{4.344}$$

次に成分ベクトル場 $v_{\hat{m}}$ の超対称変換を計算しよう。

$$\delta v_{\hat{m}} = 2i(\gamma_{\hat{m}})^{\hat{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}\xi^{\hat{\hat{\gamma}}} D_{\hat{\hat{\gamma}}}[D_{\hat{\hat{\alpha}}}, D_{\underline{\hat{\beta}}}]V|_{\theta=0} + \mathrm{c.c.}\tag{4.345}$$

交換関係を繰り返し用いることで、次のように変形することができる。

$$\begin{aligned}&2i(\gamma_{\hat{m}})^{\hat{\hat{\alpha}}\underline{\hat{\beta}}}\xi^{\hat{\hat{\gamma}}} D_{\hat{\hat{\gamma}}}[D_{\hat{\hat{\alpha}}}, D_{\underline{\hat{\beta}}}]V \\ =\ & -i\xi_{\hat{\hat{\alpha}}}(\gamma_{\hat{m}})^{\hat{\hat{\alpha}}}{}_{\underline{\hat{\beta}}} P^*_{\mathrm{chiral}} D^{\underline{\hat{\beta}}} V + i\xi_{\hat{\hat{\alpha}}} D_{\hat{m}} D^{\hat{\hat{\alpha}}} V \\ & -\frac{1}{2}\xi_{\hat{\hat{\alpha}}}\left(\gamma_{\hat{m}}\not{X} + \frac{1}{3}\not{X}\gamma_{\hat{m}}\right)^{\hat{\hat{\alpha}}}{}_{\hat{\hat{\beta}}} D^{\hat{\hat{\beta}}} V + \frac{i}{2}(X+iY)\xi_{\hat{\hat{\alpha}}}(\gamma_{\hat{m}})^{\hat{\hat{\alpha}}}{}_{\underline{\hat{\beta}}} D^{\underline{\hat{\beta}}} V \end{aligned}\tag{4.346}$$

従って、$\theta = 0$ 成分を取れば、次の変換則を得る。

$$\begin{aligned}\delta v_{\hat{m}} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_{\hat{\hat{\alpha}}}(\gamma_{\hat{m}})^{\hat{\hat{\alpha}}}{}_{\underline{\hat{\beta}}}\lambda^{\underline{\hat{\beta}}} + \frac{i}{2}\xi_{\hat{\hat{\alpha}}} D^{\mathrm{cov}}_{\hat{m}}\eta^{\hat{\hat{\alpha}}} \\ & \quad -\frac{1}{4}\xi_{\hat{\hat{\alpha}}}\left(\gamma_{\hat{m}}\not{c} + \frac{1}{3}\not{c}\gamma_{\hat{m}}\right)^{\hat{\hat{\alpha}}}{}_{\hat{\hat{\beta}}}\eta^{\hat{\hat{\beta}}} + \frac{i}{4}M^*\xi_{\hat{\hat{\alpha}}}(\gamma_{\hat{m}})^{\hat{\hat{\alpha}}}{}_{\underline{\hat{\beta}}}\eta^{\underline{\hat{\beta}}} + \mathrm{c.c.} \end{aligned}\tag{4.347}$$

この変換の二行目には補助場が現れているが、その形は $\delta\psi_{\mu}$ に含まれる補助場の形と良く似ている。実際、$v_{\hat{m}}$ の代わりに次のように v'_{μ} を定義すると、その変換則は補助場を含まない。

$$v'_{\mu} = e^{\hat{m}}_{\mu} v_{\hat{m}} + \frac{i}{2}\eta\gamma^5\psi_{\mu}\tag{4.348}$$

この、新たに定義された 1-形式場 v_{μ} の超対称変換は次のように非常に簡単である。

$$\delta v_{\mu} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi\gamma_{\mu}\lambda) + \frac{i}{2}\partial_{\mu}(\xi\gamma^5\eta)\tag{4.349}$$

残された成分場 λ と D についての変換則は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta\lambda_{\widehat{\alpha}} &= 2\sqrt{2}i\xi^{\widehat{\underline{\beta}}}D_{\widehat{\beta}}P_{\text{chiral}}D_{\widehat{\alpha}}V|_{\theta=0} \\
&= \sqrt{2}i\xi_{\widehat{\alpha}}D_{\widehat{\beta}}P_{\text{chiral}}D^{\widehat{\underline{\beta}}}V|_{\theta=0} + 2\sqrt{2}i\xi^{\widehat{\underline{\beta}}}D_{\{\widehat{\beta}}P_{\text{chiral}}D_{\widehat{\alpha}\}}V|_{\theta=0} \\
&= \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi_{\widehat{\alpha}}D - \frac{1}{4\sqrt{2}}(\gamma^{pq})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}F^{\text{cov}}_{pq}\xi^{\widehat{\underline{\beta}}}, \qquad (4.350) \\
\delta D &= 4\xi^{\widehat{\underline{\alpha}}}D_{\widehat{\alpha}}D_{\underline{\widehat{\beta}}}P^*_{\text{chiral}}D^{\underline{\widehat{\beta}}}V|_{\theta=0} + \text{c.c.} \\
&= -\frac{i}{2\sqrt{2}}\xi^{\widehat{\underline{\alpha}}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\underline{\widehat{\beta}}}D^{\text{cov}}_{\widehat{k}}\lambda^{\underline{\widehat{\beta}}} + \text{c.c.} \qquad (4.351)
\end{aligned}$$

ただし、

$$D_{\{\widehat{\alpha}}P_{\text{chiral}}D_{\widehat{\beta}\}}V|_{\theta=0} = \frac{i}{16}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}F^{\text{cov}}_{\widehat{p}\widehat{q}} \qquad (4.352)$$

によって反対称テンソル場 $F^{\text{cov}}_{\widehat{p}\widehat{q}}$ を定義した。交換関係を繰り返し使用することで、次の式が得られる。

$$F^{\text{cov}}_{\widehat{p}\widehat{q}} = D^{\text{cov}}_{\widehat{p}}v_{\widehat{q}} - D^{\text{cov}}_{\widehat{q}}v_{\widehat{p}} + \frac{i}{2}\eta\gamma^5\psi^{\text{cov}}_{\widehat{p}\widehat{q}} \qquad (4.353)$$

(4.348) と比較すれば、このテンソルは v'_μ に対する場の強さに見える。実際、超共変微分の具体形を代入すれば、$F^{\text{cov}}_{\widehat{p}\widehat{q}}$ は、通常の場の強さ $F_{\mu\nu}$ を、超対称変換にパラメータの微分が現れないように超共変化したものになっていることがわかる。

$$F^{\text{cov}}_{\widehat{p}\widehat{q}} = e^\mu_{\widehat{p}}e^\nu_{\widehat{q}}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(\psi_{\widehat{p}}\gamma_{\widehat{q}}\lambda - \psi_{\widehat{q}}\gamma_{\widehat{p}}\lambda), \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu v'_\nu - \partial_\nu v'_\mu \qquad (4.354)$$

4.6.2 ゲージ多重項

U(1) ゲージ変換は次のように与えられる。

$$V \to V' = V + \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^*) \qquad (4.355)$$

この変換の下で成分ベクトル場は次のように変換される。

$$\delta_{\text{U}(1)}v_{\widehat{m}} = \frac{i}{2}D^{\text{cov}}_{\widehat{m}}\phi + \text{c.c.} = \frac{i}{2}\partial_{\widehat{m}}\phi - \frac{i}{4}\psi^{\widehat{\underline{\alpha}}}_{\widehat{m}}\chi_{\widehat{\alpha}} + \text{c.c.} \qquad (4.356)$$

これは純粋な ϕ の微分ではないから、$v_{\widehat{m}}$ をそのままゲージ場とみなすことはできない。一方 (4.348) によって定義される場 v'_μ の U(1) 変換は次のようになる。

$$\delta_{\text{U}(1)}v'_\mu = \frac{i}{2}\partial_\mu\phi + \text{c.c.} \qquad (4.357)$$

従って、v'_μ を U(1) ゲージ場とみなすことができる。

超場 V の成分場のうちいくつかはゲージ変換 (4.355) によって固定することができる。しばしば用いられるのは Wess-Zumino ゲージ

$$B = \eta = C = 0 \qquad (4.358)$$

である。このゲージは、超対称変換を行うことによって次のように破れる。

$$\delta B = 0, \quad \delta\eta_{\widehat{\alpha}} = -\frac{i}{4}v_{\widehat{m}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\underline{\widehat{\alpha}}\widehat{\beta}}\xi^{\widehat{\underline{\beta}}}, \quad \delta C = -\frac{i}{8}v_{\widehat{k}}\xi^{\underline{\widehat{\alpha}}}(\gamma^{\widehat{m}}\gamma^{\widehat{k}})_{\underline{\widehat{\alpha}}\widehat{\gamma}}\psi^{\underline{\widehat{\gamma}}}_{\widehat{m}} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi^{\underline{\widehat{\alpha}}}\lambda_{\underline{\widehat{\alpha}}} \qquad (4.359)$$

Soryushiron Kenkyu

従って、

$$\phi = 0, \quad \chi_{\widehat{\alpha}} = -2\delta\eta_{\widehat{\alpha}}, \quad F = -2\delta C \tag{4.360}$$

であるようなカイラル多重項 Λ によってゲージ変換 (4.355) を行い、ゲージを取り直す必要がある。しかしながらこのゲージの取り直しには、V の中の物理的な場 v'_μ、λ、D にはまったく影響を与えない。

ラグランジアンを構成するためには、ゲージ場の強さを含む超場 $W_{\widehat{\alpha}}$ を構成しておくのが便利である。これは $\lambda_{\widehat{\alpha}}$ を初項とするカイラル超場として次のように与えることができる。

$$W_{\widehat{\alpha}} = 2\sqrt{2} i P_{\rm chiral} D_{\widehat{\alpha}} V \tag{4.361}$$

この式は、大域的な超対称性の場合の式 (2.166) に対応するものである。このカイラル超場の成分場は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
W_{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} &= \lambda_{\widehat{\alpha}} && (4.362)\\
2D_{\widehat{\beta}} W_{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_{\widehat{\beta}\widehat{\alpha}} D - \frac{1}{2\sqrt{2}} (\gamma^{\widehat{pq}})_{\widehat{\beta}\widehat{\alpha}} F^{\rm cov}_{\widehat{pq}}, && (4.363)\\
2D_{\widehat{\beta}} D^{\widehat{\widehat{\beta}}} W_{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} &= -(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\underline{\widehat{\beta}}} (D^{\rm cov}_{\widehat{m}} \lambda^{\underline{\widehat{\beta}}} + i c_m \lambda^{\underline{\widehat{\beta}}}) - \frac{3}{2} M^* \lambda_{\widehat{\alpha}} && (4.364)
\end{aligned}$$

これらは大域的な場合には (2.166) に与えた $W_{\overline{\alpha}}$ の展開式に帰着する。最後の式を得るのに次のような変形を行った。

$$\begin{aligned}
D_{\widehat{\beta}} D^{\widehat{\widehat{\beta}}} P_{\rm chiral} D_{\widehat{\alpha}} &= \frac{1}{2} (\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\underline{\widehat{\beta}}} D_{\widehat{m}} P^*_{\rm chiral} D^{\underline{\widehat{\beta}}} V + R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\widehat{\beta}}\widehat{\gamma}} P_{\rm chiral} D_{\widehat{\gamma}} V - 2R_{\widehat{\alpha}\underline{\widehat{\beta}}}{}^{\underline{\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}} P^*_{\rm chiral} D_{\underline{\widehat{\gamma}}} V\\
&= \frac{1}{2} (\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\underline{\widehat{\beta}}} D_{\widehat{m}} P^*_{\rm chiral} D^{\underline{\widehat{\beta}}} V - \frac{3}{4} (X + iY) P_{\rm chiral} D_{\widehat{\alpha}} V - \frac{i}{2} (V)_{\widehat{\alpha}}{}^{\underline{\widehat{\beta}}} P^*_{\rm chiral} D_{\underline{\widehat{\beta}}} V
\end{aligned} \tag{4.365}$$

Superconformal tensor calculus の場合のカイラル多重項 $W^{\rm (tc)}_{\overline{\alpha}}$ と比較すると、ここで定義された $W_{\overline{\alpha}}$ は compensator を用いて $W^{\rm (tc)}_{\overline{\alpha}}$ のワイルウェイトを 0 にしたものであることがわかる。すなわち $W_{\overline{\alpha}} = \Phi^{-3/2}_{\rm comp} W^{\rm (tc)}_{\overline{\alpha}}$ である。

4.7 大域的超対称性

大域的な超対称性との対応を見るために、平坦な時空に対応する超空間上の多脚場を決定しよう。その際に注意しなければならないのは、捩率の成分 $T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{m}}$ が拘束条件によって 0 でない値に固定されているために、多脚場を対角的に取ることはできないという点である。

ここでは次のように多脚場、スピン接続をとることにしよう。これが拘束条件を満足することは簡単にチェックすることができる。

$$E_\mu{}^{\widehat{m}} = \delta^{\widehat{m}}_\mu, \quad E_\mu{}^{\widehat{\alpha}} = 0, \quad E_\alpha{}^{\widehat{m}} = \frac{1}{8} (\gamma^{\widehat{m}})_{\alpha\beta} \theta^\beta, \quad E_\alpha{}^{\widehat{\beta}} = \delta^{\widehat{\beta}}_\alpha, \quad \Omega_{\mu\widehat{m}\widehat{n}} = \Omega_{\alpha\widehat{m}\widehat{n}} = 0. \tag{4.366}$$

捩率のうち、拘束条件によって固定されていない成分 $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ もこのとき 0 である。これは、超場 $X + iY$ も $V_{\widehat{m}}$ も 0 であることを意味する。多脚場の逆行列は

$$E_{\widehat{m}}{}^\mu = \delta^{\widehat{m}}_\mu, \quad E_{\widehat{m}}{}^\alpha = 0, \quad E_{\widehat{\alpha}}{}^\mu = -\frac{1}{8} (\gamma^\mu)_{\widehat{\alpha}\beta} \theta^\beta, \quad E_{\widehat{\alpha}}{}^\beta = \delta^\beta_{\widehat{\alpha}} \tag{4.367}$$

大域的な超対称性変換は超空間上の一般座標変換のうち、このゲージを破らないものとして定義される。すなわち、大域的対称性の変換パラメータは次の条件を満足しなければならない。

$$E_{\widehat{B}}{}^M \delta E_M{}^{\widehat{A}} = E_{\widehat{B}}{}^M D_M \epsilon^{\widehat{A}} + \epsilon^{\widehat{C}} T_{\widehat{C}\widehat{B}}{}^{\widehat{A}} = 0. \tag{4.368}$$

(4.368) において $\widehat{B}=\widehat{k}$ の場合には

$$\partial_\kappa \epsilon^{\widehat{A}} = 0. \tag{4.369}$$

となり、ϵ が x^μ に依存しないことがすぐに結論される。$\widehat{B}=\widehat{\alpha}$ の場合には (4.369) を用いれば次の二つの式を与える。

$$\partial_\alpha \epsilon^{\widehat{m}} + \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\epsilon^{\widehat{\beta}} = 0, \quad \partial_\alpha \epsilon^{\widehat{\beta}} = 0. \tag{4.370}$$

右側の式は $\epsilon^{\widehat{\alpha}}$ が θ に依存しない定数であることを表しており、左側の式は次のように解くことができる。

$$\epsilon^{\widehat{\beta}}(z) = \xi^{\widehat{\beta}}, \quad \epsilon^{\widehat{m}}(z) = \epsilon^{\widehat{m}} - \frac{1}{4}\theta^{\widehat{\alpha}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\xi^{\widehat{\beta}}. \tag{4.371}$$

添え字が接空間の場合には次のように係数が変化することに注意すること。

$$\epsilon^\mu(z) = \epsilon^{\widehat{m}}(z)E_{\widehat{m}}{}^\mu + \epsilon^{\widehat{\alpha}}(z)E_{\widehat{\alpha}}{}^\mu = \epsilon^\mu - \frac{1}{8}\theta^\alpha(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\xi^\beta \tag{4.372}$$

定数スピノル ξ^α による超対称変換は次の超空間上のキリングベクトルに対応する。

$$\epsilon^M = (\epsilon^\mu(z), \xi^\alpha(z)) = \left(\epsilon^\mu - \frac{1}{8}\theta^\alpha(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\xi^\beta, \xi^\alpha\right) \tag{4.373}$$

超場に対する超対称変換はこのキリングベクトルについてのリー微分として与えられる。

$$\delta\Phi(z) = \mathcal{L}\Phi(z) = (\xi^\alpha(z)\partial_\alpha + \epsilon^\mu(z)\partial_\mu)\Phi(z) = \xi^\alpha\left(\partial_\alpha + \frac{1}{8}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\theta^\beta\partial_\mu\right)\Phi(z) \tag{4.374}$$

すなわち、パラメータ ξ による超対称変換は次の微分演算子として表すことができる。

$$\delta_\xi = \xi^\alpha\left(\partial_\alpha + \frac{1}{8}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\theta^\beta\partial_\mu\right) = (\xi\partial_\theta) - \frac{1}{8}(\xi\gamma^\mu\theta)\partial_\mu \tag{4.375}$$

超場に作用する微分演算子としての交換関係は

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}] = \frac{1}{4}(\xi_1\gamma^\mu\xi_2)\partial_\mu \tag{4.376}$$

これは、成分場に作用する変換演算子の間の交換関係が次のように与えられることを意味する。

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}] = -\frac{1}{4}(\xi_1\gamma^\mu\xi_2)\partial_\mu \tag{4.377}$$

(4.375) を二成分表示で表すと、

$$\delta_\xi = (\xi\partial_\theta) + \frac{i}{8}(\xi\sigma^\mu\overline{\theta})\partial_\mu, \quad \delta_{\overline{\xi}} = (\overline{\xi}\partial_{\overline{\theta}}) - \frac{i}{8}(\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta)\partial_\mu \tag{4.378}$$

超場に作用する微分演算子としての交換関係は

$$[\delta_\xi, \delta_{\overline{\xi}}] = -\frac{i}{4}(\xi\sigma^\mu\overline{\xi})\partial_\mu \tag{4.379}$$

これは、成分場に作用する変換演算子の交換関係が次のように与えられることを意味している。

$$[\delta_\xi, \delta_{\overline{\xi}}] = \frac{i}{4}(\xi\sigma^\mu\overline{\xi})\partial_\mu \tag{4.380}$$

ここでは ξ に比例する部分と $\overline{\xi}$ に比例する部分を分けて書いたが、両方あわせたものもしばしば δ_ξ と書くので注意すること。

超空間上での共変 θ 微分の添え字を局所ローレンツ系のものにとった $D_{\widehat{\alpha}}$ は次のように表される。

$$D_{\widehat{\alpha}} = E_{\widehat{\alpha}}{}^{\alpha}\partial_\alpha + E_{\widehat{\alpha}}{}^{\mu}\partial_\mu = \partial_\alpha - \frac{1}{8}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\theta^\beta\partial_\mu \tag{4.381}$$

つまり、変換演算子 (4.375) とは逆符号である。大域的超対称性を扱う場合、超空間上の共変 θ 微分といえばこの演算子のことを指す。これはしばしば $D_{\widehat{\alpha}}$ ではなく D_α と書かれるが、その添え字は局所ローレンツ系でのものと解釈されなければならない。(4.381) を二成分表示で表せば、次のようになる。

$$(\xi D_\theta) = (\xi\partial_\theta) - \frac{i}{8}(\xi\sigma^\mu\overline{\theta})\partial_\mu, \quad (\bar{\xi}D_{\overline{\theta}}) = (\bar{\xi}\partial_{\overline{\theta}}) + \frac{i}{8}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta)\partial_\mu \tag{4.382}$$

第5章 Tensor calculus による 4 次元超重力理論

Tensor calculus は超対称変換およびその他の変換のなす代数から出発して多重項を構成し、多重項の積などに対する演算規則および超対称変換のもとで不変な作用の作り方を与える方法である。

代数から多重項を作る方法は、角運動量代数の交換関係を用いて SU(2) の表現を構成する方法に似ている。SU(2) の表現を構成するには、角運動量代数の生成子を昇降演算子 $L_\pm$ とカルタン演算子 L_z とに分ける。L_+ は状態に作用させたときに L_z 固有値を一つ増加させ、L_- が逆に L_z 固有値を一つ減少させる。表現を作るには、その表現の中で最低の L_z 固有値を持つ状態 $|0\rangle$ を与え、そこに L_+ を次々と作用させることで表現に含まれる全ての状態の組 $(|0\rangle, L_+|0\rangle, L_+^2|0\rangle, \ldots)$ を構成する。これらの状態に SU(2) の演算子がどのように作用するかは、代数を用いることで一意的に決めることができる。

Tensor culculus において、T_z の役割を果たすのはディラテーションと呼ばれるスカラー演算子 D である。また、上昇演算子には超対称変換 Q_α が、下降演算子には共形超対称変換 S_α が対応している。演算子 D の固有値はワイルウェイトと呼ばれる。多重項を構成するには、まず出発点として、表現の中で最低のワイルウェイトを持つ場 ϕ を一つ定義し、そのウェイトを決める。この場に超対称変換を次々に行うことでワイルウェイトが大きい場が次々に得られる。これらの中で独立なものを選び出せば、それらは超対称代数の表現になっており、各生成子の作用は一意的に決定される。

上記の方法で多重項を決めるためには前もって代数が分かっていることが必要であるが、この代数は重力多重項の変換則の形で与えられる。つまり、重力多重項だけは代数から決まるのではなく、代数が閉じるように重力多重項の変換則を決める。これにより一旦代数が決まれば、物質場の多重項の変換則は上記の方法で決定される。

tensor calculus は代数が物質場の多重項を与える前に決まっていなければならないので運動方程式を用いることなく代数が閉じている必要がある。つまり、補助場を含む off shell の重力多重項を与える必要がある。補助場の与え方にはいくつかの方法があるが、代表的なものは複素スカラー場を一つと実ベクトル場を一つ含む極小理論と呼ばれるものである。この多重項は超場を用いた定式化においてごく自然に現れる。(複素スカラー場と実ベクトル場は超空間上の捩率の $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ 成分の $\theta=0$ 部分に含まれている。) しかし、ベクトル場は一見いかなる対称性とも関係がなく、ゲージとして解釈することができなかった。

この問題点を解消し、ベクトル補助場にゲージ場としての意味を与えるためには、超ポアンカレ代数を U(1) 対称性を含むより大きな代数に拡張しておくのがよい。超共形代数はその部分群として超ポアンカレ代数を含むだけではなく、超ポアンカレ代数にはなかった U(1) 対称性 (R-対称性) を含んでいる。実際、超コンフォーマル対称性に基づいた超重力理論からゲージ固定を行うことによってポアンカレ超重力理論を得ることができ、その際に $\mathrm{U}(1)_R$ ゲージ場が補助場に化けることが示される。そこで以下ではまず、コンフォーマル超重力理論の tensor calculus を与え、その後でゲージ固定によりポアンカレ超重力理論の tensor calculus を得るという手順を踏む。また、

コンフォーマル超重力理論から出発すると、補助場の選び方の任意性がゲージ固定の仕方の違いとして統一的に説明できるという利点もある。

超コンフォーマル代数には、ローレンツ回転 $M_{\widehat{m}\widehat{n}}$、併進対称性 $P_{\widehat{m}}$、コンフォーマルブースト $K_{\widehat{m}}$、ディラテーション D、$\mathrm{U}(1)_R$ 対称性 A、超対称性 Q_α、超コンフォーマル変換 S_α が含まれる。これをワイルウェイトで分類すると、次のようになる。ワイルウェイトは加法的である。すなわち、ワイルウェイト n_1 の生成子とワイルウェイト n_2 の生成子の（反）交換関係はワイルウェイト n_1+n_2 の生成子を与える。このことから、ワイルウェイトが 0 以上の生成子のみ、あるいは 0 以下の生成子のみを取り出すと、部分代数をなす。前者は超ポアンカレ代数に D と A を加えたものである。また後者もそれと同型な代数をなし、含まれる生成子を並べて MDASK 代数と呼ぶことにする。

表 5.1: 超コンフォーマル代数に含まれる生成子

ワイルウェイト	生成子
$+1$	$P_{\widehat{m}}$
$+1/2$	$Q_{\widehat{\alpha}}$
0	$M_{\widehat{m}\widehat{n}}$, D, A
$-1/2$	$S_{\widehat{\alpha}}$
-1	$K_{\widehat{m}}$

コンフォーマル超重力理論の構成は、この代数を内部対称性としてゲージ化するところから出発する。多脚場やグラビティーノはそのような「ゲージ理論」のゲージ場として自然に現れる。しかしながらこの段階ではゲージ変換は重力理論における一般座標変換とは無関係である。たとえば、ゲージ場のゲージ変換則は代数から一意的に定まるが、変換則の中には場の時空座標による微分が含まれず、純粋に内部的な変換である。また、スピン接続もゲージ場として表れるが、それは多脚場とは独立な場である。このゲージ理論から重力理論を得るために、ゲージ場のうちのいくつかをそのほかのゲージ場の微分を含む関数として与えられる複合場で置き換える。その結果、変換則の中に時空座標での微分が現れ、$P_{\widehat{m}}$ 変換の代わりに一般座標変換が現れる。

問題は、超コンフォーマル対称性をゲージ化して得られたゲージ場のうち、どれを複合場として表せば良いのかということである。少なくとも、$P_{\widehat{m}}$ 変換のゲージ場である多脚場 ${e_\mu}^{\widehat{m}}$ と超対称変換 $Q_{\widehat{\alpha}}$ のゲージ場であるグラビティーノ ${\psi_\mu}^{\widehat{\alpha}}$ は独立な自由度として残す必要がある。一方 $M_{\widehat{m}\widehat{n}}$ に対応するゲージ場であるスピン接続 $\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}}$ は、多脚場の微分を含む複合場として与えなければ幾何学的な解釈ができない。実際にいくつかの場の上で超対称変換の交換関係を計算してみることによって拘束条件はほぼ一意的に決定することができる。それらの拘束条件によって、ゲージ場のうち $M_{\widehat{m}\widehat{n}}$、$S_\alpha$、$K_{\widehat{m}}$ に対応するものが複合場として現される。残った $P_{\widehat{m}}, Q_{\widehat{\alpha}}, D, A$ に対応するゲージ場がコンフォーマル超重力理論の重力多重項をなす。

表 5.2: コンフォーマル超重力理論におけるゲージ場の取り扱い

ゲージ場が独立な自由度になるもの	$P_{\widehat{m}}, Q_{\widehat{\alpha}}, D, A$
ゲージ場が複合場で置き換えられるもの	$M_{\widehat{m}\widehat{n}}, S_{\widehat{\alpha}}, K_{\widehat{m}}$

Soryushiron Kenkyu

5.1 ゲージ理論の変形による重力理論の構成

5.1.1 ゲージ変換と共変微分

以下ではポアンカレ代数や超共形代数などのゲージ理論を変形することで超重力理論を構成する。そこでまず、ゲージ変換や共変微分の取り方を定義しておく。

場 $\Phi(x)$ に対して平行移動が定義されているとしよう。点 $x = x_1$ での場 $\Phi(x_1)$ を点 x_2 まで平行移動したときの値を $\Phi(x_1 \to x_2)$ と表すことにする。平行移動を次のように表すことでゲージ場 V_μ^X を定義する。

$$\Phi(x^\mu + \xi^\mu \to x^\mu) = \Phi(x^\mu + \xi^\mu) + \xi^\mu V_\mu^X T_X \Phi \tag{5.1}$$

共変微分は、ある点の場 $\Phi(x)$ とそのすぐ近くの点での場を平行移動を用いて比較することによって定義される。

$$\xi^\mu \mathcal{D}_\mu \Phi(x^\mu) = \Phi(x^\mu + \xi^\mu \to x^\mu) - \Phi(x^\mu) \tag{5.2}$$

(5.1) と (5.2) を組み合わせることで、次の式が得られる。

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + V_\mu^X T_X \Phi = \partial_\mu \Phi - V_\mu^X \mathcal{O}_X \Phi \tag{5.3}$$

(以前にコンパクトな内部対称性に対する共変微分は $D_\mu^{(G)}\phi = (\partial_\mu - iA_\mu^a T_a)\phi$ と定義していたが、ここでは虚数単位 i が現れないような定義を用いる。)

パラメータ ϵ^X が時空座標に依存するようなゲージ変換

$$\delta\Phi = -\epsilon^X T_X \Phi = \epsilon^X \mathcal{O}_X \Phi \tag{5.4}$$

を考えよう。ここでは T_X や $\mathcal{O}_X$ は時空座標とは無関係な、内部対称性を表すものとする。平行移動とゲージ変換が矛盾しないためには、平行移動してからゲージ変換したものとゲージ変換してから平行移動したものが等しくなければならない。ただし、ゲージ変換によってゲージ場も変化するため、ゲージ変換を行った後に平行移動を行う際には、ゲージ変換されたゲージ場を用いなければならない。ゲージ場のゲージ変換則は上で述べたゲージ変換と平行移動の無矛盾性によって決定される。

ある場の $x + \xi$ での値を Φ_0、それをゲージ変換したものを Φ_1、Φ_1 を平行移動で x まで移動したものを Φ_2 とすると、

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \xi^\mu V_\mu'^X T_X \Phi_1, \quad \Phi_1 = \Phi_0 - \epsilon^X(x+\xi) T_X \Phi_0 \tag{5.5}$$

ここで、$V_\mu'^X$ はゲージ変換後のゲージ場である。次に、Φ_0 を平行移動して x まで移動させたものを Φ_3、そして Φ_3 のゲージ変換を Φ_4 とすると、

$$\Phi_4 = \Phi_3 - \epsilon^X(x) T_X \Phi_3, \quad \Phi_3 = \Phi_0 + \xi^\mu V_\mu^X T_X \Phi_0 \tag{5.6}$$

Φ_2 と Φ_4 はそれぞれ Φ_0 を用いて次のように書ける。

$$\Phi_2 = (\Phi_0 - \epsilon^X(x+\xi) T_X \Phi_0) + \xi^\mu V_\mu'^X T_X (\Phi_0 - \epsilon^X(x+\xi) T_X \Phi_0), \tag{5.7}$$

$$\Phi_4 = (\Phi_0 + \xi^\mu V_\mu^X T_X \Phi_0) - \epsilon^X(x) T_X (\Phi_0 + \xi^\mu V_\mu^X T_X \Phi_0) \tag{5.8}$$

この二つが一致することを要請しよう。このことは、上記の共変微分がゲージ変換のもとで

$$\delta(\mathcal{D}_\mu \Phi) = -\epsilon^X T_X \mathcal{D}_\mu \Phi \tag{5.9}$$

Soryushiron Kenkyu

と共変に変換されることを要請することと同じである。左辺の δ は Φ には (5.4) のように作用し、さらにゲージ場にも非自明に作用する。右辺の T_X は Φ に対して作用する演算子（行列）と全く同じものである。この要請から、ゲージ場 V_μ^X に対する δ の作用が次のように決まる。

$$\delta V_\mu^X = \mathcal{D}_\mu \epsilon^X \tag{5.10}$$

ただし、変換パラメータの共変微分は次のように定義した。

$$\mathcal{D}_\mu \epsilon^X = \partial_\mu \epsilon^X + \epsilon^Y V_\mu^X f_{XY}{}^Z \quad \text{or} \quad (\mathcal{D}\epsilon^X)T_X = (\partial_\mu \epsilon^X)T_X + [V_\mu^X T_X, \epsilon^Y T_Y] \tag{5.11}$$

ゲージ場の変換則は (1.82) の形をしていないので、ゲージ場に対して作用する T_X は定義できない。しかし O_X については

$$\epsilon^X O_X V_\mu^Z = \mathcal{D}_\mu \epsilon^Z. \tag{5.12}$$

のような形式的な表記を認めておくとしばしば便利である。この場合、常にパラメータ ϵ^X と組で用いなければならない。また、微分された場の変分を表すときにも、パラメータが微分の中にあるのか、外にあるのか注意が必要である。この点については実際にそのような使い方をするときに改めて注意する。

曲率テンソルは、共変微分の交換関係を用いて次のように定義する。

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\Phi = -R_{\mu\nu}{}^X O_X \Phi = R_{\mu\nu}{}^X T_X \Phi \tag{5.13}$$

共変微分の定義式 (5.3) のうち、線形演算子 T_X を用いたものを用いれば簡単に次の式が得られる。

$$R_{\mu\nu}{}^X = \partial_\mu V_\nu^X - \partial_\nu V_\mu^X + V_\nu^Y V_\mu^X f_{XY}{}^Z. \tag{5.14}$$

変換記号 O_X による共変微分の定義を用いても同様の式が示されるが、途中の変形が T_X を用いるものとはだいぶ異なるので注意しよう。$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\Phi$ に共変微分の定義式を代入すれば次の 4 つの項に分解される。

$$[\partial_\mu, \partial_\nu]\Phi - [\partial_\mu, V_\nu^Y O_Y]\Phi - [V_\mu^X O_X, \partial_\nu]\Phi + [V_\mu^X O_X, V_\nu^Y O_Y]\Phi \tag{5.15}$$

第 1 項は明らかに 0 である。さらに $V_\mu^X O_X$ という変換が V_μ まで含めて微分を飛び越えて場に作用することに注意すると、第 2 項、第 3 項も 0 である。0 にならないのは第 4 項だけであり、

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\Phi = [V_\mu^X O_X, V_\nu^Y O_Y]\Phi \tag{5.16}$$

が成り立つ。二回の変換のうち、後の変換は初めの変換のパラメータであるゲージ場にも作用することに注意しよう。$V_\mu^X O_X V_\nu^Y$ は (5.10) によって与えられる $\epsilon^X O^X V_\nu^Y$ の変換パラメータ ϵ^X を V_μ^X で置き換えたものであるから、次のように与えられる。

$$V_\mu^X O_X V_\nu^Z = \partial_\nu V_\mu^Z + V_\mu^Y V_\nu^X f_{XY}{}^Z \tag{5.17}$$

したがって、

$$\begin{aligned} V_\mu^X O_X (V_\nu^Y O_Y \Phi) &= V_\nu^Y V_\mu^X O_X O_Y \Phi + (V_\mu^X O_X V_\nu^Y) O_Y \Phi \\ &= V_\nu^Y V_\mu^X O_X O_Y \Phi + (\partial_\nu V_\mu^X + V_\mu^Y V_\nu^X f_{XY}{}^Z) O_Z \Phi \end{aligned} \tag{5.18}$$

μ と ν を入れ替えたものを引き、交換関係を求めると、(5.13) を得ることができる。

曲率テンソルのゲージ変換は、(5.13) の両辺を変換してみることにより

$$(\delta R_{\mu\nu}{}^{Z})T_Z = -[\epsilon^X T_X, R_{\mu\nu}{}^{Y} T_Y] \tag{5.19}$$

あるいは

$$\delta R_{\mu\nu}{}^{Z} = \epsilon^Y R_{\mu\nu}{}^{X} f_{XY}{}^{Z} \tag{5.20}$$

と得られる。

次の式は恒等的に成り立つ。

$$([\mathcal{D}_\lambda, [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]]\Phi)_{[\lambda\mu\nu]} = 0 \tag{5.21}$$

ただし $[\lambda\mu\nu]$ は 3 つの添え字についての完全反対称化を表す。この式の内側の交換関係を (5.13) によって曲率テンソルで置き換えれば、次のビアンキ項等式が得られる。

$$D_\lambda R_{\mu\nu}{}^{X}|_{[\lambda\mu\nu]} = 0. \tag{5.22}$$

5.1.2 一般座標変換

次の無限小一般座標変換を考えよう。

$$x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu, \tag{5.23}$$

この変換を $\delta_{\rm gc}$ と表すことにする。すなわち、ある固定された値 x_0^μ に対して、変換前の座標系 x^μ での座標が x_0^μ である点 $P : x^\mu = x_0^\mu$ と新しい座標系での座標 x'^μ が x_0^μ である点 $Q : x'^\mu = x_0^\mu$ での場 Φ の値の違いを $\delta_{\rm gc}^0\Phi$ と書く。

$$\begin{aligned}\delta_{\rm gc}^0\Phi &= \Phi|_Q - \Phi|_P \\ &= \Phi(x'^\mu = x_0^\mu) - \Phi(x^\mu = x_0^\mu) \\ &= \Phi(x^\mu = x_0^\mu + \epsilon^\mu) - \Phi(x^\mu = x_0^\mu) \\ &= \epsilon^\mu \partial_\mu \Phi. \end{aligned} \tag{5.24}$$

ただし、Φ は大域座標の添え字は持たないものと仮定し、内部対象性の添え字については持っていたとしても無視する。大域座標の添え字を持つゲージ場については、この一般座標変換は次のように定義される。

$$\begin{aligned}\delta_{\rm gc}^0 V_\mu &= V_{\mu'}|_Q - V_\mu|P \\ &= \epsilon^\lambda \partial_\lambda V_\mu + \frac{\partial \epsilon^\lambda}{\partial x^\mu} V_\lambda \end{aligned} \tag{5.25}$$

右辺一行目の添え字 μ' は x'^μ 座標系での添え字であることを表し、二行目第 2 項はこの添え字に対する座標変換によって現れる項である。

$\delta_{\rm gc}^0$ は、内部対称性について何も考慮しない、純粋な一般座標変換という意味で 0 をつけた。$\delta_{\rm gc}^0$ 変換は、内部対称性についてのゲージ変換のもとで共変ではない。例えば (5.24) に現れる微分は Φ が内部対称性のもとでどのような表現に属していても共変微分にはならないし変換 (5.25) にはゲージポテンシャルがゲージ場の強さの形で含まれていない。一般座標変換の下での変分のゲージ共変性を明らかな形にするために、ゲージ変換を組み合わせたゲージ共変な一般座標変換 $\delta_{\rm gc}$（0 を付けない）を次のように定義する。

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon^\mu) = \delta_{\rm gc}^0(\epsilon^\mu) - \delta_{\rm gauge}[\epsilon^\kappa V_\kappa^Z] = \delta_{\rm gc}^0(\epsilon^\mu) - \epsilon^\kappa V_\kappa^Z O_Z \tag{5.26}$$

最後の表式の第 2 項は中間に与えた表式を書き換えたものであり、$\epsilon^\kappa V_\kappa^Z$ を変換パラメータとする O_Z 変換であることに注意。これは V_κ^Z をパラメータとする O_Z 変換を行った後に ϵ^κ を掛けたものとは一般には異なる。(例えば $\partial_\lambda \Phi$ を変換することを考えてみると、前者は $\epsilon^\kappa V_\kappa^Z$ 全体が微分の中に入るのに対して後者は V_κ^Z だけが微分の内側に入り、ϵ^κ は微分の外側に残される。)

スカラー場およびゲージ場はこの変換の下で次のように変換される。

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon^\mu)\Phi = \epsilon^\mu \mathcal{D}_\mu \Phi, \quad \delta_{\rm gc}(\epsilon^\mu) V_\mu^Z = \epsilon^\kappa R_{\kappa\mu}{}^Z \tag{5.27}$$

どちらも共変性が明らかな形をしている。

一般座標変換とゲージ変換の交換関係を求めてみよう。まず、純粋な一般座標変換については、定義に基づいて計算すれば

$$\begin{aligned}
[\delta^0_{\rm gc}(\epsilon^\mu), \delta_{\rm gauge}(\epsilon^X)] V_\mu^Z &= \delta^0_{\rm gc}(\partial_\mu \epsilon^Z + \epsilon^Y V_\mu^X f_{XY}{}^Z) - \delta_{\rm gauge}(\epsilon^\lambda \partial_\lambda V_\mu^Z + (\partial_\mu \epsilon^\lambda) V_\lambda^Z) \\
&= \epsilon^Y (\epsilon^\lambda \partial_\lambda V_\mu^X + (\partial_\mu \epsilon^\lambda) V_\lambda^X) f_{XY}{}^Z \\
&\quad - \epsilon^\lambda \partial_\lambda (\partial_\mu \epsilon^Z + \epsilon^Y V_\mu^X f_{XY}{}^Z) - (\partial_\mu \epsilon^\lambda)(\partial_\lambda \epsilon^Z + \epsilon^Y V_\lambda^X f_{XY}{}^Z) \\
&= -(\epsilon^\lambda \partial_\lambda \epsilon^Y) V_\mu^X f_{XY}{}^Z - \partial_\mu (\epsilon^\lambda \partial_\lambda \epsilon^Z) \\
&= -\delta_{\rm gauge}(\epsilon^\lambda \partial_\lambda \epsilon^X) V_\mu^Z
\end{aligned} \tag{5.28}$$

が任意のゲージ場 V_μ^Z に対して成り立つ。従って次の代数が成り立つ。

$$[\delta^0_{\rm gc}(\epsilon^\mu), \delta_{\rm gauge}(\epsilon^X)] = -\delta_{\rm gauge}(\epsilon^\lambda \partial_\lambda \epsilon^X) \tag{5.29}$$

共変な一般座標変換とゲージ変換との交換関係を計算するために、一般座標変換の共変化に必要な補正項とゲージ変換の交換関係をとってみると、

$$\begin{aligned}
-[\epsilon^\mu V_\mu^X O_X, \delta_{\rm gauge}(\epsilon^X)] &= (\epsilon^\mu V_\mu^Y \epsilon^X f_{XY}{}^Z) O_Z + (\epsilon^\mu D_\mu \epsilon^Z) O_Z \\
&= (\epsilon^\mu \partial_\mu \epsilon^Z) O_Z
\end{aligned} \tag{5.30}$$

となり (5.29) を丁度相殺する項が得られる。従って、共変的な一般座標変換とゲージ変換が可換であることがわかる。

$$[\delta_{\rm gc}, \delta_{\rm gauge}] = 0 \tag{5.31}$$

一般座標変換同士の交換関係をとってみよう。まず、純粋な一般座標変換同士では定義に従って二回変換すると、

$$\begin{aligned}
\delta^0_{\rm gc}(\epsilon_1^\mu)\delta^0_{\rm gc}(\epsilon_2^\mu) V_\mu^Z &= \delta^0_{\rm gc}(\epsilon_1^\mu)(\epsilon_2^\lambda \partial_\lambda V_\mu^Z + (\partial_\mu \epsilon_2^\lambda) V_\lambda^Z) \\
&= \epsilon_2^\lambda \partial_\lambda (\epsilon_1^\kappa \partial_\kappa V_\mu^Z + (\partial_\mu \epsilon_1^\kappa) V_\kappa^Z) + (\partial_\mu \epsilon_2^\lambda)(\epsilon_1^\kappa \partial_\kappa V_\lambda^Z + (\partial_\lambda \epsilon_1^\kappa) V_\kappa^Z)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

順序を入れ替えたものとの差を取ると、次の式が得られる。

$$[\delta^0_{\rm gc}(\epsilon_1^\mu), \delta^0_{\rm gc}(\epsilon_2^\mu)] V_\mu^Z = \epsilon_{12}^\kappa \partial_\kappa V_\mu^Z + (\partial_\mu \epsilon_{12}^\kappa) V_\kappa^Z = \delta^0_{\rm gc}(\epsilon_{12}^\kappa) V_\mu^Z \tag{5.33}$$

ただし、ϵ_{12}^μ が次のように定義される。

$$\epsilon_{12}^\kappa = \epsilon_2^\lambda \partial_\lambda \epsilon_1^\kappa - \epsilon_1^\lambda \partial_\lambda \epsilon_2^\kappa \tag{5.34}$$

次に、ゲージ変換部分との交換関係は (5.29) を用いれば

$$[\delta^0_{\rm gc}(\epsilon_1^\mu), -\epsilon_2^\mu V_\mu^X O_X] = [-\epsilon_1^\mu V_\mu^X O_X, \delta^0_{\rm gc}(\epsilon_2^\mu)] = -\epsilon_{12}^\mu V_\mu^X O_X \tag{5.35}$$

ゲージ変換項同士の交換関係は、二回目の変換が一回目の変換のパラメータとして入っているゲージ場にも作用することに注意して計算すれば

$$\begin{aligned}[\epsilon_1^\mu V_\mu^X O_X, \epsilon_2^\nu V_\nu^Y O_Y] &= \epsilon_2^\nu V_\nu^Y \epsilon_1^\mu V_\mu^X f_{XY}{}^Z O_Z + \epsilon_2^\nu D_\nu(\epsilon_1^\mu V_\mu)^Y O_Y - \epsilon_1^\mu D_\mu(\epsilon_2^\nu V_\nu)^X O_X \\ &= \epsilon_{12}^\mu V_\mu^Y O_Y - \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu R_{\mu\nu}{}^Z O_Z \end{aligned} \tag{5.36}$$

これらの和を取ると、共変な一般座標変換の交換関係が次のように得られる。

$$[\delta_{\rm gc}(\epsilon_1^\mu), \delta_{\rm gc}(\epsilon_2^\mu)] = \delta_{\rm gc}(\epsilon_{12}^\kappa) - \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu R_{\mu\nu}{}^Z O_Z \tag{5.37}$$

5.1.3 拘束条件

重力を含まない、平坦な背景時空上の理論においては、§2.1.1 で見たように、変換 P_m は座標を一定値だけずらす並進変換を与える。

$$\epsilon^m P_m \Phi(x^m) = \epsilon^m \partial_m \Phi(x^m) \tag{5.38}$$

このことから、一般座標変換のもとでの不変性を持つ理論を得ようと思えば、P_m によって生成される対称性をゲージ化すれば良いように思われる。この結果多脚場と同じ添え字を持つ場 e_μ^m が P_m 変換のゲージ場としてあらわれる。しかしながら、単純なゲージ化の結果得られる理論は局所的なポアンカレ「内部」対称性を持った理論であって、そのままでは重力理論を得ることはできない。

局所的 P_m 変換 $\epsilon^m P_m$ と一般座標変換 $\delta_{\rm gc}(\epsilon^\mu)$ との同一視は、拘束条件

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon^\mu) = \epsilon^\mu e_\mu^m P_m \tag{5.39}$$

が理論に含まれる全ての場の上で成り立つことを手で要請することによって実現する必要がある。ここで右辺の変換は $\epsilon^\mu e_\mu^m$ をパラメータとする P_m 変換であり、一般座標変換のパラメータ ϵ^μ の添え字を P_m 変換の添え字に直すためにゲージ場 e_μ^m が用いられる。

内部対称性が有る場合、一般座標変換の下でこの内部対称性についての変換をどのように取るかによって任意性があるが、(5.39) の拘束条件の左辺に現れる一般座標変換は内部対称性について共変な形になるように、ゲージ場をパラメータとした内部対称性変換を同時に行うものであるとする。(5.26) にも与えたように内部対称性について全く考慮しない純粋な一般座標変換を $\delta_{\rm gc}^0$ としたとき、この一般座標変換は次のように与えられる。

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon^\mu) = \delta_{\rm gc}^0(\epsilon^\mu) - \epsilon^\kappa V_\kappa^{X'} O_{X'} \tag{5.40}$$

ここで内部対称性といっているものの中には局所ローレンツ変換や超対称変換なども含まれるが、P_m 変換は含まないとする。この、P_m 変換を除外するということを表すために、(5.40) 中の添え字 X' にはプライムを付けている。

拘束条件 (5.39) の右辺を左辺に移項すれば次のように書くこともできる。

$$\delta_{\rm gc}^{\rm full}(\epsilon^\mu) = 0 \tag{5.41}$$

ただし、$\delta_{\rm gc}^{\rm full}$ は P_m 変換も内部対称性として考慮したゲージ共変な一般座標変換であり、次のように定義される。

$$\delta_{\rm gc}^{\rm full}(\epsilon^\mu) = \delta_{\rm gc}^0(\epsilon^\mu) - \epsilon^\kappa V_\kappa^X O_X \tag{5.42}$$

第 2 項の添え字 X にプライムがついておらず P_m 変換まで含んでいることが $\delta_{\rm gc}$ とは異なる。

5.2 ポアンカレ代数と重力

5.2.1 ポアンカレ代数のゲージ化

ポアンカレ代数は次の交換関係によって定義される。

$$\begin{aligned}
[M_{\hat{a}\hat{b}}, M_{\hat{c}\hat{d}}] &= M_{\hat{a}\hat{d}}\eta_{\hat{b}\hat{c}} - M_{\hat{a}\hat{c}}\eta_{\hat{b}\hat{d}} - M_{\hat{b}\hat{d}}\eta_{\hat{a}\hat{c}} + M_{\hat{b}\hat{c}}\eta_{\hat{a}\hat{d}}, \\
[M_{\hat{a}\hat{b}}, P_{\hat{c}}] &= P_{\hat{a}}\eta_{\hat{b}\hat{c}} - P_{\hat{b}}\eta^{\hat{a}\hat{c}}, \\
[P_{\hat{a}}, P_{\hat{b}}] &= 0.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

この代数を内部対称性として持つゲージ理論を構成しよう。生成子 $P_{\hat{m}}$ と $M_{\hat{m}\hat{n}}$ に対応してゲージ場 $e^{\hat{m}} = dx^\mu e_\mu^{\hat{m}}$ および $\omega^{\hat{m}\hat{n}} = dx^\mu \omega_\mu{}^{\hat{m}\hat{n}}$ を導入する。(5.10) に従い、ゲージ場のゲージ変換則が次のように決まる。

$$\delta_{\mathrm{gauge}} e_\mu{}^m = \partial_\mu \epsilon^m + \omega_\mu{}^m{}_n \epsilon^n + e_\mu{}^n \lambda_n{}^m = D_\mu^{(\omega)} \epsilon^{\hat{m}} + e_\mu{}^{\hat{n}} \lambda_{\hat{n}}{}^{\hat{m}}, \tag{5.44}$$

$$\delta_{\mathrm{gauge}} \omega_\mu{}^{pq} = \partial_\mu \lambda^{pq} + [\omega_\mu, \lambda]^{pq} = D_\mu^{(\omega)} \lambda^{\hat{p}\hat{q}}, \tag{5.45}$$

ϵ^m と λ^{mn} はそれぞれ P_m 変換と M_{mn} 変換のパラメータである。$D_\mu^{(\omega)}$ は接続として $\omega_\mu{}^{mn}$ だけを含む共変微分である。

曲率の $P_{\hat{a}}$ 成分と $M_{\hat{a}\hat{b}}$ 成分をそれぞれ $R^{\hat{m}}(P)$、$R^{\hat{m}\hat{n}}(M)$ とおくと次のように与えられる。

$$R_{\mu\nu}{}^k(P) = \partial_\mu e_\nu{}^k - \partial_\nu e_\mu{}^k + \omega_\mu{}^k{}_m e_\nu{}^m - \omega_\nu{}^k{}_m e_\mu{}^m, \tag{5.46}$$

$$R_{\mu\nu}{}^{mn}(M) = \partial_\mu \omega_\nu{}^{mn} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{mn} + [\omega_\mu, \omega_\nu]^{mn}. \tag{5.47}$$

これらはゲージ変換の下で次のように変換される。

$$\delta_{\mathrm{gauge}} R_{\mu\nu}{}^m(P) = R_{\mu\nu}{}^m{}_n(M)\epsilon^n + R_{\mu\nu}{}^n(P)\lambda_n{}^m, \tag{5.48}$$

$$\delta_{\mathrm{gauge}} R_{\mu\nu}{}^{mn}(M) = [R_{\mu\nu}(M), \lambda]^{mn}. \tag{5.49}$$

変換則 (5.49) には変換パラメータの微分はあらわれない。

曲率 $R(P)$ と $R(M)$ はそれぞれ (1.108) で定義された捩率と (1.117) で定義された曲率と形式的に同じものである。

$$R_{\mu\nu}{}^{\hat{m}}(P) = T_{\mu\nu}{}^{\hat{m}}, \quad R_{\mu\nu}{}^{\hat{m}\hat{n}}(M) = R_{\mu\nu}{}^{\hat{m}\hat{n}}(\omega). \tag{5.50}$$

ただしこの段階ではこれらは内部対称性についての場の強さであり、時空の幾何学との関係は無い。

5.2.2 拘束条件

ここまではポアンカレ対称性は完全に内部対称性である。ポアンカレ対称性を重力と関係させるために、(5.41) に与えた条件 $\delta_{\mathrm{gc}}^{\mathrm{full}} = 0$ を課すことを考えよう。ゲージ場 $e_\mu{}^m$ と $\omega_\mu{}^{mn}$ に対する完全な一般座標変換は (5.27) より次のように得られる。

$$\delta_{\mathrm{gc}}^{\mathrm{full}} e_\mu{}^m = \epsilon^\kappa R_{\kappa\mu}{}^m(P), \quad \delta_{\mathrm{gc}}^{\mathrm{full}} \omega_\mu{}^{mn} = \epsilon^\kappa R_{\kappa\mu}{}^{mn}(M). \tag{5.51}$$

まずは、$e_\mu{}^m$ の上で $\delta_{\mathrm{gc}}^{\mathrm{full}} = 0$ であることを要求し、

$$R_{\mu\nu}{}^{\hat{m}}(P) = 0. \tag{5.52}$$

という拘束条件を設定しよう。(5.50) にあるように $R(P)$ は捩率であるから、この拘束条件は捩率が 0 であることを意味している。したがって、$\omega_{\mu\widehat{m}\widehat{n}}$ について解けば、スピン接続が多脚場を用いて (1.111) に与えられた $\omega_{\mu\widehat{m}\widehat{n}}(e)$ のように表される。そこで、場 $\omega_\mu{}^{mn}$ が現れたら、それは常に $e_\mu{}^m$ の複合場 $\omega_\mu{}^{mn}(e)$ であると解釈し直す事にしよう。このような置き換えの結果得られる $\omega_\mu{}^{mn}(e)$ のゲージ変換は独立な場であるもとの $\omega_\mu{}^{mn}$ とは異なる。

そこで、これらを区別するために $\delta^{\rm ori}_{\rm gauge}$ と $\delta^{\rm mod}_{\rm gauge}$ およびそれらの差を次のように定義する。

- $\delta^{\rm ori}_{\rm gauge}$
  ポアンカレ群をゲージ化して得られる変換で、ω と e はそれぞれ独立な場であると思って変換する。
- $\delta^{\rm mod}_{\rm gauge}$
  拘束条件を解いて ω を e の複合場だと思ったときの変換。ω の変換則は e の変換則から誘導され、もともとのゲージ変換とは異なる。
- $\delta'_{\rm gauge}$
  拘束条件による変換則の補正分。すなわち $\delta^{\rm mod}_{\rm gauge}-\delta^{\rm ori}_{\rm gauge}$ を表す。

複合場 $\omega(e)$ は拘束条件 (5.52) を解くことで決められるので、拘束条件に $\omega(e)$ を代入したものは項等的に 0 になり、その後でゲージ変換してもやはり 0 である。すなわち拘束条件の $\delta^{\rm mod}_{\rm gauge}$ 変換は 0 である。また、場の強さ $R(P)$ の $\delta^{\rm ori}_{\rm gauge}$ 変換は (5.48) に与えられている。これらを用いると次の式が得られる。

$$0=\delta_{\rm gauge}R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P)+\delta' R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P)=R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}\widehat{n}}(M)\epsilon_{\widehat{n}}+\delta' R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P) \tag{5.53}$$

つまり、

$$\delta' R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P)=-R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}\widehat{n}}(M)\epsilon_{\widehat{n}} \tag{5.54}$$

である。ここで、δ' 変換が $R(P)=de+\omega\wedge e$ の中のスピン接続にだけ作用することから、次の式が得られる。

$$\delta'\omega_\mu{}^{\widehat{m}\widehat{n}}e_{\nu\widehat{n}}-\delta'\omega_\nu{}^{\widehat{m}\widehat{n}}e_{\mu\widehat{n}}=-R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}\widehat{n}}(M)\epsilon_{\widehat{n}} \tag{5.55}$$

これは $\delta'\omega_\mu{}^{\widehat{m}\widehat{n}}e_{\nu\widehat{n}}$ について代数的に解くことができて、次の式を得る。

$$\begin{aligned}\delta'\omega_{\mu\widehat{p}\widehat{q}} &= \frac{1}{2}(-R_{\widehat{p}\widehat{q}\mu\widehat{n}}(M)+R_{\widehat{q}\mu\widehat{p}\widehat{n}}(M)+R_{\mu\widehat{p}\widehat{q}\widehat{n}}(M))\epsilon^{\widehat{n}}\\ &= \epsilon^m e_m{}^\nu R_{\nu\mu\widehat{p}\widehat{q}}(M)\end{aligned} \tag{5.56}$$

最後の形に変形するために捩率が (5.52) により 0 であることから従うビアンキ恒等式を用いた。

このように、$\delta^{\rm mod}_{\rm gauge}$ と $\delta^{\rm ori}_{\rm gauge}$ は P 変換の部分が異なっている。そこで、P_m 変換についても $\delta_{\rm gauge}$ と同様に $P^{\rm ori}_m$、$P^{\rm mod}_m$、P'_m などを定義しておく。さらに、一般座標変換についても、同様に書き分けることにする。最終的に要求されるのは、拘束条件を課したあとで、(5.41) が成立すること、すなわち

$$\delta^{\rm full,mod}_{\rm gc}=0 \tag{5.57}$$

である。もともと $e_\mu{}^m$ の上でこの式が成り立つことから拘束条件を設定したのであるが、実は $\omega_\mu{}^{mn}$ の上でも成り立つことが次のように簡単に確かめられる。

$$\delta^{\rm full,mod}_{\rm gc}\omega_\mu{}^{mn}=\delta^{\rm full,ori}_{\rm gc}\omega_\mu{}^{mn}-\epsilon^\mu e_\mu{}^m P'_m\omega_\mu{}^{mn}=\epsilon^\lambda R_{\lambda\mu}{}^{mn}-\epsilon^\lambda R_{\lambda\mu}{}^{mn}=0 \tag{5.58}$$

途中で (5.27) および (5.56) を用いた。このことは、${e_\mu}^m$ が $\delta_{\rm gc}^{\rm full,mod}$ 変換で不変であり、$\omega(e)$ が e だけで書かれているということからも当然の結果である。このように、ω に対して条件 (5.41) は自動的に満足されるため、$R(M)=0$ のような新たな拘束条件を導入する必要は無い。

こうして得られた変換 $P_m^{\rm mod}$ をまとめておこう。

$$\epsilon^k P_k^{\rm mod} {e_\mu}^m = D_\mu^{(\omega)}\epsilon^m, \quad \epsilon^k P_k^{\rm mod} {\omega_\mu}^{mn} = \epsilon^k e_k^\nu R_{\nu\mu\widehat{p}\widehat{q}}(M). \tag{5.59}$$

一般座標変換は $\delta_{\rm gc}=\epsilon^\mu {e_\mu}^m P_m^{\rm mod}$ によって与えられる。

5.2.3 変形された代数

P 変換が拘束条件によって変形されたため、代数の構造も変化する。交換関係を計算してみよう。局所的ローレンツ変換 M に対しては、変換則は変わらないから (5.43) に与えた交換関係がそのまま成り立つ。次に $(\lambda\cdot M)\equiv(1/2)\lambda^{pq}M_{pq}$ と $(\epsilon\cdot P^{\rm mod})\equiv\epsilon^m P_m^{\rm mod}$ の交換関係を計算してみよう。

$$\begin{aligned}(\lambda\cdot M)(\epsilon\cdot P^{\rm mod}){e_\mu}^m &= (\lambda\cdot M)D_\mu^{(\omega)}\epsilon^m=(\lambda\cdot M){\omega_\mu^m}_n\epsilon^n=(D_\mu^{(\omega)}{\lambda^m}_n)\epsilon^n, &(5.60)\\ (\epsilon\cdot P^{\rm mod})(\lambda\cdot M){e_\mu}^m &= (\epsilon\cdot P^{\rm mod})({e_\mu}^n{\lambda_n}^m)=(D_\mu^{(\omega)}\epsilon^n){\lambda_n}^m &(5.61)\end{aligned}$$

従って交換関係は次のように得られる。

$$[(\lambda\cdot M),(\epsilon\cdot P^{\rm mod})]{e_\mu}^m = D_\mu^{(\omega)}({\lambda^m}_n\epsilon^n) \tag{5.62}$$

スピン接続に対しても同じ計算を行うと、

$$\begin{aligned}(\lambda\cdot M)(\epsilon\cdot P^{\rm mod}){\omega_\mu}^{mn} &= (\lambda\cdot M)(\epsilon^p {e_p}^\nu {R_{\nu\mu}}^{mn})=(\epsilon^p {e_q}^\nu {\lambda^q}_p {R_{\nu\mu}}^{mn})+(\epsilon^p {e_p}^\nu [R_{\nu\mu},\lambda]^{mn}) &(5.63)\\ (\epsilon\cdot P^{\rm mod})(\lambda\cdot M){\omega_\mu}^{mn} &= (\epsilon\cdot P^{\rm mod})D_\mu^{(\omega)}\lambda^{mn}=(\epsilon\cdot P^{\rm mod})[\omega_\mu,\lambda^{mn}]=\epsilon^p e_p^\nu[R_{\nu\mu},\lambda]^{mn} &(5.64)\end{aligned}$$

であるから、これらの差を取ることにより次の式が得られる。

$$[(\lambda\cdot M),(\epsilon\cdot P^{\rm mod})]{\omega_\mu}^{mn} = ({\lambda^q}_p\epsilon^p){e_q}^\nu {R_{\nu\mu}}^{mn} \tag{5.65}$$

これらはどちらも次の代数関係が成り立つことを表している。

$$[(\lambda\cdot M),(\epsilon\cdot P^{\rm mod})] = {\lambda^m}_n\epsilon^n P_m^{\rm mod} \tag{5.66}$$

これは、もとのゲージ理論の交換関係と同じものである。

$P^{\rm mod}$ 同士の交換関係を計算しよう。${e_\mu}^m$ に対して二回続けて $P^{\rm mod}$ 変換を行うと、

$$(\epsilon_1\cdot P^{\rm mod})(\epsilon_2\cdot P^{\rm mod}){e_\mu}^m=(\epsilon_1\cdot P^{\rm mod})D_\mu^{(\omega)}\epsilon_2^m=(\epsilon_1\cdot P^{\rm mod}){{\omega_\mu}^m}_n\epsilon_2^n=\epsilon_1^p e_p^\nu {{R_{\nu\mu}}^m}_n\epsilon_2^n \tag{5.67}$$

となる。これと、ϵ_1 と ϵ_2 を入れ替えたものの差を取ることによって、次の交換関係が得られる。

$$\epsilon_1^p\epsilon_2^q({{R_{p\mu}}^m}_q-{{R_{q\mu}}^m}_p)={R^m}_{\mu pq}\epsilon_1^p\epsilon_2^q=-{e_\mu}^n{R_n}^m{}_{pq}\epsilon_1^p\epsilon_2^q \tag{5.68}$$

途中で捩率が 0 である場合のビアンキ項等式を用いた。${\omega_\mu}^{mn}$ の上でも同様の計算を行うと、

$$\begin{aligned}(\epsilon_1\cdot P^{\rm mod})(\epsilon_2\cdot P^{\rm mod}){\omega_\mu}^{mn} &= (\epsilon_1\cdot P^{\rm mod})\epsilon_2^m e_m^\nu R_{\nu\mu}^{mn}\\ &= -\epsilon_2^\lambda(D_\lambda\epsilon_1^k){R_{k\mu}}^{mn}+\epsilon_2^\lambda D_\lambda^{(\omega)}(\epsilon_1^k {R_{k\mu}}^{mn})-\epsilon_2^\lambda D_\mu^{(\omega)}(\epsilon_1^k {R_{k\lambda}}^{mn})\\ &= +\epsilon_2^\lambda\epsilon_1^k D_\lambda^{(\omega)}{R_{k\mu}}^{mn}-\epsilon_2^\lambda D_\mu^{(\omega)}(\epsilon_1^k {R_{k\lambda}}^{mn}) &(5.69)\end{aligned}$$

であるから、ビアンキ恒等式をもちいて次の交換関係が得られる。

$$[(\epsilon_1 \cdot P^{\mathrm{mod}}), (\epsilon_2 \cdot P^{\mathrm{mod}})]\omega_\mu{}^{mn} = -D_\mu^{(\omega)}(\epsilon_1^p \epsilon_2^q R_{pq}{}^{mn}) \tag{5.70}$$

これらはどちらも、次の代数関係が成り立つことを表している。

$$[(\epsilon_1 \cdot P^{\mathrm{mod}}), (\epsilon_2 \cdot P^{\mathrm{mod}})] = -\frac{1}{2}\epsilon_1^p \epsilon_2^q R_{pq}{}^{mn} M_{mn} \tag{5.71}$$

これは、もとの代数の交換関係 $[P_m, P_n] = 0$ とは異なる。

前にも述べたように、P_m^{mod} は一般座標変換と同一視されるが、P_m^{mod} のパラメータ ϵ^m と一般座標変換のパラメータ ϵ^μ は異なる添え字を持っていることに注意すること。上で行ったような交換関係を計算するときに、ϵ^m の代わりに $\epsilon^\mu e_\mu{}^m$ を用いるとこの中の $e_\mu{}^m$ に二回目の変換が作用するために異なる結果が得られる。

5.2.4 物質場の導入

物質場 Φ を導入しよう。拘束条件を導入して代数を変形する前のポアンカレ代数のゲージ理論において、Φ はポアンカレ代数の線形表現に属するものとしておく。ここでは内部座標 y^m を導入し、P_m 変換および M_{mn} 変換の生成子 T_m および T_{mn} が次のような微分演算子として実現されているとする。

$$T_m = -\frac{\partial}{\partial y^m}, \quad T_{mn} = L_{mn} + S_{mn}, \quad L_{mn} = y_m \frac{\partial}{\partial y^n} - y_n \frac{\partial}{\partial y^m}. \tag{5.72}$$

L_{mn} と S_{mn} はそれぞれ y^m 空間上の軌道角運動量とスピンを表している。これらを用いることで、ゲージ変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{gauge}}\Phi &= \epsilon^m P_m \Phi + \frac{1}{2}\lambda^{mn} M_{mn}\Phi \\ &= -\epsilon^m T_m \Phi - \frac{1}{2}\lambda^{mn} T_{mn}\Phi. \end{aligned} \tag{5.73}$$

場 Φ に対する共変微分は (5.3) に従って次のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \Phi &= \partial_\mu \Phi - e_\mu{}^m P_m \Phi - \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{mn} M_{mn}\Phi \\ &= D_\mu^{(\omega)}\Phi + e_\mu{}^m T_m \Phi + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{mn} L_{mn}\Phi \end{aligned} \tag{5.74}$$

ただし、$D_\mu^{(\omega)}$ は y^m 空間のスピンに作用するスピン接続 $\omega_{\mu\widehat{m}\widehat{n}}$ のみを含む共変微分である。完全な一般座標変換はパラメータを ϵ^μ とすると、

$$\delta_{\mathrm{gc}}^{\mathrm{full}}\Phi = \epsilon^\mu \mathcal{D}_\mu \Phi. \tag{5.75}$$

となる。

Φ は連続な内部座標 y^m に依存するので、無限個の自由度を含む。これらは次のように展開することができる。

$$\Phi(x^\mu, y^m) = \phi(x^\mu) + y^m \phi_m(x^\mu) + \frac{1}{2}y^m y^n \phi_{mn}(x^\mu) + \cdots \tag{5.76}$$

一般座標変換 (5.75) のそれぞれの場に対する作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\delta_{\rm gc}^{\rm full}\phi &= \epsilon^\mu D_\mu^{(\omega)}\phi - \epsilon^\mu e_\mu{}^m\phi_m, &(5.77)\\ \delta_{\rm gc}^{\rm full}\phi_m &= \epsilon^\mu D_\mu^{(\omega)}\phi_m - \epsilon^\mu e_\mu{}^k\phi_{km}, &(5.78)\\ \delta_{\rm gc}^{\rm full}\phi_{mn} &= \epsilon^\mu D_\mu^{(\omega)}\phi_{mn} - \epsilon^\mu e_\mu{}^k\phi_{kmn}, &(5.79)\\ &\vdots\end{aligned}$$

スピンに対する共変微分 $D_\mu^{(\omega)}$ は次のように定義されている。

$$\begin{aligned}D_\mu^{(\omega)}\phi &= \partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{mn}S_{mn}\phi, &(5.80)\\ D_\mu^{(\omega)}\phi_m &= \partial_\mu\phi_m + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{mn}S_{mn}\phi_m + \omega_{\mu m}{}^k\phi_k, &(5.81)\\ D_\mu^{(\omega)}\phi_{mn} &= \partial_\mu\phi_{mn} + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{mn}S_{mn}\phi_{mn} + \omega_{\mu m}{}^k\phi_{kn} + \omega_{\mu n}{}^k\phi_{mk}, &(5.82)\\ &\vdots\end{aligned}$$

これらのうち、$\phi(x^\mu)$ だけを取り出すことを考えよう。そのために、$\phi(x^\mu)$ に対して次の式が成り立つことを要請する。

$$\delta_{\rm gc}^{\rm full}\phi = 0. \tag{5.83}$$

これは、次の拘束条件を意味している。

$$\phi_m = e_m^\mu D_\mu^{(\omega)}\phi \tag{5.84}$$

この式によって ϕ_m を全て ϕ を用いて書き換えることができる。その結果 ϕ_m、ϕ_{mn} などを全て忘れ去ることができ、ϕ だけを含む理論を得ることができる。

拘束条件 (5.84) を用いれば、ϕ の P_m 変換を次のように表すことができる。

$$P_m^{\rm mod} = e_m^\mu D_\mu^{(\omega)}\phi. \tag{5.85}$$

場 ϕ の上でも代数をチェックしておこう。まず、M 変換と P 変換を連続して ϕ に作用させると、以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}(\lambda.M)(\epsilon.P^{\rm mod})\phi &= (\lambda.M)(\epsilon^m e_n^\mu\lambda^n{}_m D_\mu^{(\omega)}\phi) = e_n^\mu\lambda^n{}_m\epsilon^m D_\mu^{(\omega)}\phi - \epsilon^m e_m^\mu(\lambda.S)D_\mu^{(\omega)}\phi, &(5.86)\\ (\epsilon.P^{\rm mod})(\lambda.M)\phi &= -(\lambda.S)\epsilon^m e_m^\mu D_\mu^{(\omega)}\phi &(5.87)\end{aligned}$$

従って、これらを組み合わせれば次の交換関係を得る。

$$[(\lambda.M),(\epsilon.P^{\rm mod})]\phi = e_n^\mu\lambda^n{}_m\epsilon^m D_\mu^{(\omega)}\phi. \tag{5.88}$$

これは、ϕ の上でも交換関係 (5.66) が成り立っていることを意味している。

二回 P 変換を行うと、

$$(\epsilon_1.P^{\rm mod})(\epsilon_2.P^{\rm mod})\phi = (\epsilon_1.P^{\rm mod})(\epsilon_2^m e_m^\mu D_\mu^{(\omega)}\phi) = \frac{1}{2}\epsilon_1^\mu\epsilon_2^\nu R_{\mu\nu}{}^{mn}S_{mn}\phi + \epsilon_2^\mu\epsilon_1^k D_\mu^{(\omega)}(e_k^\nu D_\nu^{(\omega)}\phi) \tag{5.89}$$

が得られる。従って交換関係は

$$[(\epsilon_1.P^{\rm mod}),(\epsilon_2.P^{\rm mod})]\phi = \frac{1}{2}\epsilon_1^\mu\epsilon_2^\nu R_{\mu\nu}{}^{mn}S_{mn}\phi. \tag{5.90}$$

これは、ϕ の上でも交換関係 (5.71) が成立していることを表している。

Soryushiron Kenkyu

5.3 超ポアンカレ代数と超重力

5.3.1 超ポアンカレ代数のゲージ化

次に、超ポアンカレ代数のゲージ理論に拘束条件を導入して超重力理論を作ることを考えよう。超ポアンカレ代数は次の（反）交換関係によって定義される。

$$
\begin{aligned}
[M_{\widehat{m}\widehat{n}}, M_{\widehat{p}\widehat{q}}] &= M_{\widehat{m}\widehat{q}}\eta_{\widehat{n}\widehat{p}} - M_{\widehat{m}\widehat{p}}\eta_{\widehat{n}\widehat{q}} - M_{\widehat{n}\widehat{q}}\eta_{\widehat{m}\widehat{p}} + M_{\widehat{n}\widehat{p}}\eta_{\widehat{m}\widehat{q}}, && (5.91)\\
[M_{\widehat{m}\widehat{n}}, P_{\widehat{p}}] &= P_{\widehat{m}}\eta_{\widehat{n}\widehat{p}} - P_{\widehat{n}}\eta_{\widehat{m}\widehat{p}}, && (5.92)\\
[P_{\widehat{m}}, P_{\widehat{n}}] &= 0, && (5.93)\\
[P_{\widehat{m}}, Q_{\widehat{\alpha}}] &= 0, && (5.94)\\
[M_{\widehat{m}\widehat{n}}, Q_{\widehat{\alpha}}] &= \frac{1}{2}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}Q_{\widehat{\beta}}, && (5.95)\\
\{Q_{\widehat{\alpha}}, Q_{\widehat{\beta}}\} &= -\frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}P_{\widehat{m}}. && (5.96)
\end{aligned}
$$

M と P より成る部分代数は以前に与えたポアンカレ代数である。この代数をゲージ化するために、生成子 $P_{\widehat{m}}$、Q_{α}、$M_{\widehat{m}\widehat{n}}$ それぞれに対してゲージ場 $e^{\widehat{m}}$、$\psi^{\widehat{\alpha}}$、$\omega^{\widehat{m}\widehat{n}}$ を導入する。

これらは次のように微分演算子を用いて実現できる。

$$
\begin{aligned}
T_m &= -\partial_m, && (5.97)\\
T_{mn} &= y_m\partial_n - y_n\partial_m - \frac{1}{2}\theta^{\alpha}(\gamma_{mn})_{\alpha}{}^{\beta}\partial_{\beta}, && (5.98)\\
T_{\alpha} &= -\left(\partial_{\alpha} + \frac{1}{8}(\gamma^m)_{\alpha\beta}\theta^{\beta}\partial_m\right). && (5.99)
\end{aligned}
$$

ただし、グラスマン数の微分は $\partial_{\alpha}\theta^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ のように定義する。

この段階でのゲージ群はこの段階では時空の幾何とは何の関係もないものである。§5.1.1 での定義に従い、曲率テンソルは次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P) &= D_{\mu}^{(\omega)}e_{\nu}{}^{m} - D_{\nu}^{(\omega)}e_{\mu}{}^{m} + \frac{1}{4}\psi_{\mu}{}^{\widehat{\alpha}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\psi_{\nu}{}^{\widehat{\beta}}\\
&= T_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(e,\omega) - \frac{1}{4}\psi_{\mu}\gamma^{\widehat{m}}\psi_{\nu} && (5.100)\\
R_{\mu\nu}{}^{\alpha}(Q) &= D_{\mu}^{(\omega)}\psi_{\nu}{}^{\alpha} - D_{\nu}^{(\omega)}\psi_{\mu}{}^{\alpha}, && (5.101)\\
R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}\widehat{n}}(M) &= \partial_{\mu}\omega_{\nu}{}^{mn} - \partial_{\nu}\omega_{\mu}{}^{mn} + [\omega_{\mu}, \omega_{\nu}]^{mn}\\
&= R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}\widehat{n}}(\omega). && (5.102)
\end{aligned}
$$

ただし $T^{\widehat{m}}$ は (1.108) で定義される捩率であり、$R^{\widehat{m}\widehat{n}}(\omega)$ は (1.117) で定義される曲率である。$R^{\widehat{m}}(P)$ は超場形式の章で導入された超共変化された捩率 $T^{\mathrm{cov}\widehat{m}}$ に他ならない。また、$R^{\alpha}(Q)$ はグラビティーノの場の強さ

$$
\psi_{\mu\nu}^{\alpha} = D_{\mu}^{(\omega)}\psi_{\nu}^{\alpha} - D_{\nu}^{(\omega)}\psi_{\mu}^{\alpha}. \qquad (5.103)
$$

と同じものである。

ゲージ場のゲージ変換は次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{gauge}}e_{\mu}{}^{m} &= D_{\mu}^{(\omega)}\epsilon^{m} + e_{\mu}{}^{n}\lambda_{n}{}^{m} + \frac{1}{4}\psi_{\mu}{}^{\alpha}(\gamma^{m})_{\alpha\beta}\xi^{\beta}, && (5.104)\\
\delta_{\mathrm{gauge}}\psi_{\mu}{}^{\alpha} &= D_{\mu}^{(\omega)}\xi^{\alpha} - \frac{1}{4}\psi_{\mu}{}^{\beta}\lambda^{pq}(\gamma_{pq})_{\beta}{}^{\alpha}, && (5.105)\\
\delta_{\mathrm{gauge}}\omega_{\mu}{}^{mn} &= D_{\mu}^{(\omega)}\lambda^{mn} && (5.106)
\end{aligned}
$$

これらのゲージ変換の下で、曲率テンソルは次のように変換される。

$$\delta_{\mathrm{gauge}} R_{\mu\nu}{}^{m}(P) = R_{\mu\nu}{}^{m}{}_{n}(M)\epsilon^{n} + R_{\mu\nu}{}^{n}(P)\lambda_{n}{}^{m} + \frac{1}{4} R_{\mu\nu}{}^{\alpha}(Q)(\gamma^{m})_{\alpha\beta}\xi^{\beta}, \quad (5.107)$$

$$\delta_{\mathrm{gauge}} R_{\mu\nu}{}^{\alpha}(Q) = \frac{1}{4} R_{\mu\nu}{}^{pq}(\gamma_{pq})^{\alpha}{}_{\beta}\xi^{\beta} - \frac{1}{4} R_{\mu\nu}{}^{\beta}\lambda^{pq}(\gamma_{pq})_{\beta}{}^{\alpha}, \quad (5.108)$$

$$\delta_{\mathrm{gauge}} R_{\mu\nu}{}^{mn} = [R_{\mu\nu}(M), \lambda]^{mn} \quad (5.109)$$

5.3.2 拘束条件

完全な一般座標変換は

$$\delta_{\mathrm{gc}}^{\mathrm{full}} e_{\mu}{}^{m} = \epsilon^{\lambda} R_{\lambda\mu}{}^{m}(P), \quad \delta_{\mathrm{gc}}^{\mathrm{full}} \psi_{\mu}{}^{\alpha} = \epsilon^{\lambda} R_{\lambda\mu}{}^{\alpha}(Q), \quad \delta_{\mathrm{gc}}^{\mathrm{full}} \omega_{\mu}{}^{mn} = \epsilon^{\lambda} R_{\lambda\mu}{}^{mn}(M). \quad (5.110)$$

これらを全て 0 にしたいわけであるが、まずはポアンカレ代数の場合の (5.52) と同じ次の拘束条件を導入する。

$$R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P) = 0. \quad (5.111)$$

これにより、$e_{\mu}{}^{m}$ の上で $\delta_{\mathrm{gc}}^{\mathrm{full,mod}} = 0$ が成り立つ。ポアンカレ代数の場合には $R(P)$ は捩率と同じだったのに対し、超ポアンカレ代数の場合は (5.100) のようにグラビティーノの寄与があるために、捩率は次のように与えられる。

$$T_{\mu\nu}^{\widehat{m}} = -\frac{1}{4}\psi_{\mu}^{\alpha}(\gamma^{\widehat{m}})_{\alpha\beta}\psi_{\nu}^{\beta} \quad (5.112)$$

この関係式を用いて、ω を e と ψ の複合場として表すことができる。

$R(P)$ の変換則 (5.107) から分かるように、この拘束条件は P 変換および Q 変換の下で不変ではない。このことは、複合場として表された $\omega(e,\psi)$ の P および Q 変換則が独立な場 ω のものとは異なることを意味している。ω に対する P および Q 変換の補正を求めるため、ポアンカレ代数の場合に P 変換の補正を求めたときと同様に、拘束条件 (5.111) に対する変分をとってみると、

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{\mathrm{gauge}}^{\mathrm{ori}} R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P) + \delta'_{\mathrm{gauge}} R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P) \\ &= R_{\mu\nu}{}^{m}{}_{n}(M)\epsilon^{n} + \frac{1}{4}(\xi\gamma^{\widehat{m}} R_{\mu\nu}(Q)) + \delta'\omega_{\mu}{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}} e_{\nu}^{\widehat{n}} - \delta'\omega_{\nu}{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}} e_{\mu}^{\widehat{n}} \end{aligned} \quad (5.113)$$

これを $\delta'\omega$ について解けば、

$$\begin{aligned} \delta'\omega_{\mu\widehat{p}\widehat{q}} &= \frac{1}{2}(-R_{pq\mu n}(M)\epsilon^{n} + R_{\mu pqn}(M)\epsilon^{n} - R_{\mu qpn}(M)\epsilon^{n}) \\ &\quad + \frac{1}{8}(-\xi\gamma_{\mu} R_{\widehat{p}\widehat{q}}(Q) + \xi\gamma_{\widehat{p}} R_{\widehat{q}\mu}(Q) + \xi\gamma_{\widehat{q}} R_{\mu\widehat{p}}(Q)) \end{aligned} \quad (5.114)$$

が得られる。

このように、Q 変換と P 変換に対して補正が現れるわけであるが、これらの補正を求める際にまずは Q 変換に対する補正を求め、そこから交換関係

$$\{Q_{\alpha}^{\mathrm{mod}}, Q_{\beta}^{\mathrm{mod}}\} = -\frac{1}{4}(\gamma^{m})_{\alpha\beta} P_{m}^{\mathrm{mod}} \quad (5.115)$$

によって P_{m}^{mod} を決めることにしよう。この式は P_{m}^{mod} を定義しているだけではなく、右辺に $(\gamma^{mn})_{\alpha\beta}$ のような項が現れないということまで要求していることに注意しよう。

Soryushiron Kenkyu

${e_\mu}^m$ と ${\psi_\mu}^\alpha$ の Q 変換には変更が無いものとして Q 変換の交換関係を求めてみよう。もとのゲージ変換の交換関係と異なるのは、一回目の変換で ω が現れると、その Q 変換に補正が加わる点である。${e_\mu}^m$ については、補正は加わらず、次の結果を得る。

$$[\xi_1.Q,\xi_2.Q]{e_\mu}^m=-\frac{1}{4}(\xi_1\gamma^k\xi_2)P_k^{\rm ori}{e_\mu}^m \tag{5.116}$$

${\psi_\mu}^\alpha$ に対しては、${\psi_\mu}^\alpha$ の $P_m^{\rm ori}$ 変換は 0 であるから、補正を含まない部分は 0 である。従って、補正部分だけが結果を与える。

$$\begin{aligned}
&[(\xi_1.Q^{\rm mod}),(\xi_2.Q^{\rm mod})]\psi_\mu^\alpha\\
=\;&[(\xi_1.Q')(\xi_2.Q^{\rm ori})-(\xi_2.Q')(\xi_1.Q^{\rm ori})]\psi_\mu^\alpha\\
=\;&\frac{1}{4}(\xi_1.Q')\omega_{\mu\widehat{p}\widehat{q}}\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\xi_2-(\xi_1\leftrightarrow\xi_2)\\
=\;&\frac{1}{32}\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\xi_2(-\xi_1\gamma_\mu R_{\widehat{p}\widehat{q}}(Q)+2\xi_1\gamma_{\widehat{p}}R_{\widehat{q}\mu}(Q))-(\xi_1\leftrightarrow\xi_2)
\end{aligned} \tag{5.117}$$

さらに ξ_1 と ξ_2 が一つの積の中に現れるようにフィルツ変換を行おう。この際に、挿入される行列が対称であるものだけが ξ_1 と ξ_2 の反対称化でのこるので、$\gamma^{\widehat{k}}$ と $\gamma^{\widehat{kl}}$ の挿入だけを考えれば十分である。その結果

$$\begin{aligned}
&[(\xi_1.Q^{\rm mod}),(\xi_2.Q^{\rm mod})]\psi_\mu^\alpha\\
=\;&-\frac{1}{64}(-\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\gamma^{\widehat{k}}\gamma_\mu R_{\widehat{p}\widehat{q}}(Q)+2\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\gamma^{\widehat{k}}\gamma_{\widehat{p}}R_{\widehat{q}\mu}(Q))(\xi_1\gamma_{\widehat{k}}\xi_2)\\
&+\frac{1}{128}(-\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\gamma^{\widehat{kl}}\gamma_\mu R_{\widehat{p}\widehat{q}}(Q)+2\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\gamma^{\widehat{kl}}\gamma_{\widehat{p}}R_{\widehat{q}\mu}(Q))(\xi_1\gamma_{\widehat{kl}}\xi_2)
\end{aligned} \tag{5.118}$$

これが (5.115) と同じ形になるためには、二行目の $\xi_1\gamma_{\widehat{kl}}\xi_2$ を含む項は 0 でなければならない。そのための必要十分条件は、曲率テンソル $R(Q)$ が次の条件を満足することである。

$$\gamma^{\widehat{k}}R_{\widehat{k}\mu}(Q)=0. \tag{5.119}$$

この式が成り立つことを仮定すれば、(5.118) の二行目は消え、1 行目も次のような簡単な形にまとまる。

$$[(\xi_1.Q^{\rm mod}),(\xi_2.Q^{\rm mod})]\psi_\mu^\alpha=-\frac{1}{4}(\xi_1\gamma^{\widehat{k}}\xi_2)R_{\widehat{k}\mu}(Q) \tag{5.120}$$

これは、次の式が成り立つことを意味する。

$$P_k^{\rm mod}{\psi_\mu}^\alpha=P'_k{\psi_\mu}^\alpha={R_{\widehat{k}\mu}}^\alpha(Q) \tag{5.121}$$

これより直ちに、${\psi_\mu}^\alpha$ の上でも $\delta_{\rm gc}^{\rm full,mod}=0$ が成り立つことが示される。

$$\delta_{\rm gc}^{\rm full,mod}{\psi_\mu}^\alpha=\delta_{\rm gc}^{\rm full,ori}{\psi_\mu}^\alpha-\epsilon^\lambda{e_\lambda}^mP'_m{\psi_\mu}^\alpha=\epsilon^\lambda{R_{\lambda\mu}}^\alpha(Q)-\epsilon^\lambda{R_{\lambda\mu}}^\alpha(Q)=0. \tag{5.122}$$

途中で (5.27) と (5.121) を用いた。

こうして、拘束条件として (5.119) を導入することで代数を閉じさせ、$\delta_{\rm gc}^{\rm full}=0$ を成り立たせることができた。しかし、この拘束条件はグラビティーノに対する運動方程式に他ならず、off-shell で代数が閉じることが必要となる tensor calculus では用いることができない。つまり、単純に超ポアンカレ代数のゲージ理論を変形するだけでは off shell で代数を閉じさせることができない。以下で見るように、この問題は超ポアンカレ代数を超コンフォーマル代数にまで拡大することで解決される。

5.4 超コンフォーマル代数

5.4.1 交換関係

超ポアンカレ代数を拡大することで超コンフォーマル代数を構成しよう。超ポアンカレ代数は次の（反）交換関係によって定義される。

$$\begin{aligned}
[M^{\widehat{m}\widehat{n}}, M^{\widehat{p}\widehat{q}}] &= M^{\widehat{m}\widehat{q}}\eta^{\widehat{n}\widehat{p}} - M^{\widehat{m}\widehat{p}}\eta^{\widehat{n}\widehat{q}} - M^{\widehat{n}\widehat{q}}\eta^{\widehat{m}\widehat{p}} + M^{\widehat{n}\widehat{p}}\eta^{\widehat{m}\widehat{q}}, &(5.123)\\
[M^{\widehat{m}\widehat{n}}, P^{\widehat{p}}] &= P^{\widehat{m}}\eta^{\widehat{n}\widehat{p}} - P^{\widehat{n}}\eta^{\widehat{m}\widehat{p}}, &(5.124)\\
[P^{\widehat{m}}, P^{\widehat{n}}] &= 0, &(5.125)\\
[P^{\widehat{m}}, Q^{\widehat{\alpha}}] &= 0, &(5.126)\\
[M_{\widehat{m}\widehat{n}}, Q^{\widehat{\alpha}}] &= -\frac{1}{2}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}})^{\widehat{\alpha}}{}_{\widehat{\beta}}Q^{\widehat{\beta}}, &(5.127)\\
\{Q_{\widehat{\alpha}}, Q_{\widehat{\beta}}\} &= -\frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}P_{\widehat{m}}. &(5.128)
\end{aligned}$$

ただし、ここでは実のパラメータとの積 $\epsilon^{\widehat{m}}P_{\widehat{m}}$、$(1/2)\lambda^{\widehat{m}\widehat{n}}M_{\widehat{m}\widehat{n}}$、$\xi^{\widehat{\alpha}}Q_{\widehat{\alpha}}$ が実であるように定義してあるものとする。

ポアンカレ群は、コンフォーマルブーストと呼ばれるベクトル添え字を持つ生成子 K_m と、ディラテーションと呼ばれるスカラー生成子 D を付け加えることで、コンフォーマル代数に拡張できることが知られている。D がスカラー、K_m がベクトルであるということは次の交換関係によって表される。

$$[M_{mn}, D] = 0, \quad [M^{\widehat{m}\widehat{n}}, K^{\widehat{p}}] = K^{\widehat{m}}\eta^{\widehat{n}\widehat{p}} - K^{\widehat{n}}\eta^{\widehat{m}\widehat{p}}, \tag{5.129}$$

ディラテーション D によって計られる量はワイルウェイトと呼ばれる。たとえば P_m および K_m との交換関係

$$[D, P_m] = P_m, \quad [D, K_m] = -K_m \tag{5.130}$$

は P_m と K_m がワイルウェイト $+1$ と -1 を持つことを表している。Q_α の反交換関係として $P_{\widehat{m}}$ が得られることから、Q_α のワイルウェイトは $+1/2$ であり、次の交換関係が成り立つ。

$$[D, Q_\alpha] = \frac{1}{2}Q_\alpha. \tag{5.131}$$

超ポアンカレ代数に K_m と D を追加することで代数を拡張することを考えてみよう。コンフォーマル代数において $[K, P] \neq 0$ であることと $\{Q, Q\} \sim P$ であることを用いると、$[K, Q] \neq 0$ であることが結論される。K はワイルウェイトが -1、Q はワイルウェイトが P の半分の $+1/2$ であるから、$[K, Q]$ はワイルウェイトが $-1/2$ の新たな生成子を与える。この生成子を S_α としよう。ビアンキ恒等式の成立を要求すると、さらにもうひとつのスカラー生成子 A が必要であることがわかる。以下では、P、Q、M からなる超ポアンカレ代数に生成子 S_α を付け加えることから初めて超コンフォーマル代数を構成していこう。

まず、超ポアンカレ代数に新たな生成子 S_α を導入する。S_α は次の交換関係を満足する。

$$[D, S_\alpha] = -\frac{1}{2}S_\alpha, \quad [M_{\widehat{m}\widehat{n}}, S^{\widehat{\alpha}}] = -\frac{1}{2}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}})^{\widehat{\alpha}}{}_{\widehat{\beta}}S^{\widehat{\beta}}. \tag{5.132}$$

これらは単に S_α がワイルウェイト $-1/2$ のスピノル生成子であることを言っているに過ぎない。S_α が代数を非自明に拡張することは次の式によって表される。

$$[S_\alpha, P_m] = (\gamma_m)_{\alpha\beta}Q^\beta \tag{5.133}$$

S_α と Q_α との交換関係がどうなるかを見るために、(5.133) の両辺と Q_β の反交換関係をとる。すると次の式を得る。

$$\{[S_\alpha, P_m], Q_\beta\} = (\gamma_m)_{\alpha\gamma}\{Q^\gamma, Q_\beta\} = -\frac{1}{4}(\gamma_m\gamma^k)_{\alpha\beta}P_k \tag{5.134}$$

一方ビアンキ恒等式を用いると次の式が成り立つ。

$$\{[S_\alpha, P_m], Q_\beta\} = [\{S_\alpha, Q_\beta\}, P_m] \tag{5.135}$$

(5.134) と (5.135) の二つを比較すると、$\{S, Q\}$ が次のように与えられることがわかる。

$$\{S_\alpha, Q_\beta\} = \frac{1}{8}(\gamma_{pq})_{\alpha\beta}M^{pq} - \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\alpha\beta}D + X_{\alpha\beta} \tag{5.136}$$

ただし、P との交換関係を見ただけでは P と可換な部分は決めることができない。$X_{\alpha\beta}$ はそのような部分を表す P_m と可換な演算子である。$X_{\alpha\beta}$ についての情報を得るために (5.136) の両辺と Q_γ の交換関係をとると、

$$[\{S_\alpha, Q_\beta\}, Q_\gamma] = \frac{1}{16}(\gamma_{pq})_{\alpha\beta}(\gamma^{pq})_\gamma{}^\delta Q_\delta - \frac{1}{8}\mathbf{1}_{\alpha\beta}Q_\gamma + [X_{\alpha\beta}, Q_\gamma] \tag{5.137}$$

一方、ビアンキ恒等式を用いて次の式が得られる。

$$[\{S_\alpha, Q_\beta\}, Q_\gamma] + [\{S_\alpha, Q_\gamma\}, Q_\beta] = [S_\alpha, \{Q_\beta, Q_\gamma\}] = -\frac{1}{4}(\gamma^k)_{\beta\gamma}[S_\alpha, P_k] = \frac{1}{4}(\gamma^k)_{\beta\gamma}(\gamma_k)_\alpha{}^\delta Q_\delta \tag{5.138}$$

(5.137) と (5.138) を比較すると、次の式が成り立たなければならない。

$$\frac{1}{16}(\gamma_{pq})_{\alpha\beta}(\gamma^{pq})_\gamma{}^\delta Q_\delta - \frac{1}{8}\mathbf{1}_{\alpha\beta}Q_\gamma + [X_{\alpha\beta}, Q_\gamma] + \{\beta \leftrightarrow \gamma\} = \frac{1}{4}(\gamma^k)_{\beta\gamma}(\gamma_k)_\alpha{}^\delta Q_\delta \tag{5.139}$$

この式の両辺に $(\gamma^r)^{\beta\gamma}$ および $(\gamma^{rs})^{\beta\gamma}$ をかけてみると、次の二つの式を得る。

$$(\gamma^r)^{\beta\gamma}[X_{\alpha\beta}, Q_\gamma] = -\frac{3}{8}(\gamma_r)_\alpha{}^\delta Q_\delta, \quad (\gamma^{rs})^{\beta\gamma}[X_{\alpha\beta}, Q_\gamma] = \frac{3}{8}(\gamma^{rs})_\alpha{}^\delta Q_\delta \tag{5.140}$$

従って、$X_{\alpha\beta}$ は 0 ではあり得ない。これらを満足するためには、$X_{\alpha\beta}$ と Q_γ の交換関係が次のようになればよい。

$$[X_{\alpha\beta}, Q_\gamma] = -\frac{3}{8}(\gamma^5)_{\alpha\beta}(\gamma^5)_\gamma{}^\delta Q_\delta \tag{5.141}$$

X はワイルウェイトが 0 であるが、これまでに存在しているワイルウェイトが 0 の演算子 D と M からはこの条件を満足する演算子を作ることはできない。そこで、次の交換関係を満足する新たな生成子 A を導入する。

$$[A, Q_\gamma] = i(\gamma^5)_\gamma{}^\delta Q_\delta \tag{5.142}$$

すると $X_{\alpha\beta}$ は次のように表される。

$$X_{\alpha\beta} = \frac{3i}{8}(\gamma^5)_{\alpha\beta}A \tag{5.143}$$

これを (5.136) に代入すると、次の交換関係を得る。

$$\{S_\alpha, Q_\beta\} = \frac{1}{8}(\gamma_{pq})_{\alpha\beta}M^{pq} - \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\alpha\beta}D + \frac{3i}{8}(\gamma^5)_{\alpha\beta}A \tag{5.144}$$

A はスカラーでありワイルウェイトが 0 であるから、

$$[M_{pq}, A] = [D, A] = 0 \tag{5.145}$$

である。さらに、(5.144) の両辺と A の交換関係をとり、ビアンキ恒等式を用いることにより次の交換関係が得られる。

$$[A, S_\alpha] = -i(\gamma^5)_\alpha{}^\delta S_\delta \tag{5.146}$$

次に、$\{S, S\}$ について考えよう。ビアンキ恒等式より

$$\begin{aligned}[Q_\gamma, \{S_\alpha, S_\beta\}] &= [\{Q_\gamma, S_\alpha\}, S_\beta] + [\{Q_\gamma, S_\beta\}, S_\alpha] \\ &= \frac{1}{8}(\gamma_{pq})_{\alpha\gamma}[M^{pq}, S_\beta] - \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\alpha\gamma}[D, S_\beta] + \frac{3i}{8}(\gamma^5)_{\alpha\gamma}[A, S_\beta] + \{\alpha \leftrightarrow \beta\} \\ &= \frac{1}{16}(\gamma_{pq})_{\gamma\alpha}(\gamma^{pq})_\beta{}^\delta S_\delta - \frac{1}{8}\mathbf{1}_{\gamma\alpha}S_\beta - \frac{3}{8}(\gamma^5)_{\gamma\alpha}(\gamma_5)_\beta{}^\delta S_\delta + \{\alpha \leftrightarrow \beta\}\end{aligned} \tag{5.147}$$

この右辺は α と β の入れ替えに対して対称であり、$(\gamma_r)_{\alpha\beta}$、$(\gamma_{rs})^{\alpha\beta}$ を用いて展開できるはずである。しかし $(\gamma_{rs})^{\alpha\beta}$ を右辺にかけてみると、ちょうど 0 になることが分かる。従って $\{S, S\}$ は（少なくとも Q との交換関係に影響する部分については）ベクトル成分のみを持つはずである。そこで、新たな生成子 K_m を次のように定義しよう。

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = -\frac{1}{4}(\gamma^m)_{\alpha\beta}K_m \tag{5.148}$$

K_m はベクトルであり、ワイルウェイトが -1 である。Q との交換関係は、ビアンキ恒等式を用いることで次のように決まる。

$$[Q_\gamma, K_m] = (\gamma_m)^{\alpha\beta}[Q_\gamma, \{S_\alpha, S_\beta\}] = 2(\gamma_m)^{\alpha\beta}[\{Q_\gamma, S_\alpha\}, S_\beta] = (\gamma_m)_{\gamma\beta}S^\beta \tag{5.149}$$

P との交換関係も同様にして決まる。

$$[P_m, K_n] = (\gamma_n)^{\alpha\beta}[P_m, \{S_\alpha, S_\beta\}] = 2(\gamma_n)^{\alpha\beta}\{[P_m, S_\alpha], S_\beta\} = 2(M^{mn} + \delta_{mn}D) \tag{5.150}$$

K を含むこれらの交換関係は K がコンフォーマルブースとに他ならないことを意味している。

こうして P、Q、M、D、A、S、K からなる代数が得られた。これらはビアンキ恒等式を満足することは確かめることができる。まとめておこう。

超コンフォーマル代数

次の交換関係は M がローレンツ代数の生成子であることを意味する。

$$[M^{\hat{m}\hat{n}}, M^{\hat{p}\hat{q}}] = M^{\hat{m}\hat{q}}\eta^{\hat{n}\hat{p}} - M^{\hat{m}\hat{p}}\eta^{\hat{n}\hat{q}} - M^{\hat{n}\hat{q}}\eta^{\hat{m}\hat{p}} + M^{\hat{n}\hat{p}}\eta^{\hat{m}\hat{q}}, \tag{5.151}$$

次の交換関係は、P と K がベクトルであることを意味する。

$$[M^{\hat{m}\hat{n}}, P^{\hat{p}}] = P^{\hat{m}}\eta^{\hat{n}\hat{p}} - P^{\hat{n}}\eta^{\hat{m}\hat{p}}, \quad [M^{\hat{m}\hat{n}}, K^{\hat{p}}] = K^{\hat{m}}\eta^{\hat{n}\hat{p}} - K^{\hat{n}}\eta^{\hat{m}\hat{p}} \tag{5.152}$$

次の交換関係は Q と S がスピノルであることを意味する。

$$[M_{\hat{m}\hat{n}}, Q_{\hat{\alpha}}] = \frac{1}{2}(\gamma_{\hat{m}\hat{n}})_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}Q_{\hat{\beta}}, \quad [M_{\hat{m}\hat{n}}, S_{\hat{\alpha}}] = \frac{1}{2}(\gamma_{\hat{m}\hat{n}})_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}S_{\hat{\beta}} \tag{5.153}$$

D との交換関係は、生成子のワイルウェイトを与える。

$$[D, P_m] = P_m, \quad [D, Q_\alpha] = \frac{1}{2}Q_\alpha, \quad [D, S_\alpha] = -\frac{1}{2}S_\alpha, \quad [D, K_m] = -K_m \tag{5.154}$$

A との交換関係はカイラルウェイトを与える。

$$[A, Q_\alpha] = i(\gamma^5)_\alpha{}^\beta Q_\beta, \quad [A, S_\alpha] = -i(\gamma^5)_\alpha{}^\beta S_\beta \tag{5.155}$$

ベクトル同士の交換関係は

$$[P_m, K_n] = 2(M_{mn} + \delta_{mn}D) \tag{5.156}$$

スピノルとベクトルの間の交換関係は

$$[S_\alpha, P_m] = (\gamma_m)_{\alpha\beta}Q^\beta, \quad [Q_\alpha, K_m] = (\gamma_m)_{\alpha\beta}S^\beta \tag{5.157}$$

スピノル生成子同士の反交換関係は

$$\{Q_{\hat{\alpha}}, Q_{\hat{\beta}}\} = -\frac{1}{4}(\gamma^{\hat{m}})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}P_{\hat{m}}, \quad \{S_\alpha, S_\beta\} = -\frac{1}{4}(\gamma^m)_{\alpha\beta}K_m \tag{5.158}$$

$$\{S_\alpha, Q_\beta\} = \frac{1}{8}(\gamma_{pq})_{\alpha\beta}M^{pq} - \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\alpha\beta}D + \frac{3i}{8}(\gamma^5)_{\alpha\beta}A \tag{5.159}$$

5.4.2 SU(2, 2|1)

前の節で与えた超コンフォーマル代数は、SU(2, 2|1) と呼ばれるものになっている。このことが分かりやすいように書き換えておこう。ただしここでの結果は以下の節では用いない。

まず、ボゾン的な変換のうち、P、M、D、K によって生成されるコンフォーマル代数の部分に

注目してみよう。コンフォーマル代数は次の交換関係によって定義される。

$$[M_{mn}, M_{pq}] = M_{mq}\eta_{np} - M_{mp}\eta_{nq} - M_{nq}\eta_{mp} + M_{np}\eta_{mq}, \tag{5.160}$$

$$[M_{mn}, P_p] = P_m\eta_{np} - P_n\eta_{mp}, \tag{5.161}$$

$$[M_{mn}, K_p] = K_m\eta_{np} - K_n\eta_{mp}, \tag{5.162}$$

$$[D, P_m] = P_m, \tag{5.163}$$

$$[D, K_m] = -K_m, \tag{5.164}$$

$$[P_m, K_n] = 2(M_{mn} + \eta_{mn}D) \tag{5.165}$$

実はこの代数は $\mathrm{SO}(2,4) \sim \mathrm{SU}(2,2)$ であることが以下のように書き換えることで明らかになる。

まず、ベクトル添え字 $m = (0,1,2,3)$ にさらに二つの成分 $+$ と $-$ を加えたもの $M = (0,1,2,3,+,-)$ を定義する。これに対応して、計量を次のように拡張しておく。

$$\eta_{MN} = \left(\begin{array}{c|cc} \eta_{mn} & & \\ \hline & & -2 \\ & -2 & \end{array}\right) \tag{5.166}$$

この計量を不変にする回転変換を M_{MN} とすれば、これは明らかに $\mathrm{SO}(2,4)$ を生成するが、M_{MN} の満足する代数

$$[M_{MN}, M_{PQ}] = M_{MQ}\eta_{NP} - M_{MP}\eta_{NQ} - M_{NQ}\eta_{MP} + M_{NP}\eta_{MQ} \tag{5.167}$$

が実は M_{MN} の成分を次のようにおくことで上記の共形代数と同じものであることが示される。

$$M_{m+} = P_m, \quad M_{m-} = K_m, \quad M_{+-} = -2D. \tag{5.168}$$

以上のことから、4 次元の conformal group は $\mathrm{SO}(2,4)$ であることがわかる。さらに、この代数は $(1/2)(\Gamma_{MN})^A{}_B$ によっても実現することができる。ただし Γ_{MN} は次の行列である。

$$(\Gamma_{mn})_A{}^B = \begin{pmatrix} (\gamma_{mn})_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} & \\ & (\gamma_{mn})_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} \end{pmatrix}, \quad (\Gamma_{+-})_A{}^B = \begin{pmatrix} 2\mathbf{1}_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} & \\ & -2\mathbf{1}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} \end{pmatrix},$$
$$(\Gamma_{m-})_A{}^B = \begin{pmatrix} & 2(\gamma_m)_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad (\Gamma_{m+})_A{}^B = \begin{pmatrix} & 0 \\ 2(\gamma_m)_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} & \end{pmatrix}. \tag{5.169}$$

これらは $T^\dagger\gamma^0 + \gamma^0 T = 0$ を満足するトレースレス行列の完全系をなしている。したがってこの代数は $\mathrm{SU}(2,2)$ でもあることがわかる。

コンフォーマル代数の supercharge への作用は (5.168) の読み替えを用いると、次のように書くことができる。

$$[M_{mn}, Q_{\overline{\alpha}}] = \frac{1}{2}(\gamma_{mn})_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}Q_{\overline{\beta}}, \quad [M_{mn}, S_{\underline{\alpha}}] = \frac{1}{2}(\gamma_{mn})_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}S_{\underline{\beta}} \tag{5.170}$$

$$[M_{m-}, Q_{\overline{\alpha}}] = (\gamma_m)_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}S_{\underline{\beta}}, \quad [M_{m+}, S_{\underline{\alpha}}] = (\gamma_m)_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}Q_{\overline{\beta}} \tag{5.171}$$

$$[M_{+-}, Q_{\overline{\alpha}}] = -Q_{\overline{\alpha}}, \quad [M_{+-}, S_{\underline{\alpha}}] = S_{\underline{\alpha}}. \tag{5.172}$$

これらをまとめて表すには、次の大きなスピノルを定義する。

$$\mathcal{Q}_A = \begin{pmatrix} Q_{\overline{\alpha}} \\ S_{\underline{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathcal{Q}}_A = \begin{pmatrix} S_{\overline{\alpha}} \\ Q_{\underline{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{5.173}$$

Γ_{MN} を用いれば、$M_{MN}=(M_{mn},P_m,K_m,D)$ と supercharge の交換関係は次の一つの式で書くことができる。

$$[M_{MN},\mathcal{Q}_A]=\frac{1}{2}(\Gamma_{MN})_A{}^B\mathcal{Q}_B \tag{5.174}$$

カイラリティが逆のものについても全く同じである。

$$[M_{mn},Q_{\underline{\alpha}}]=\frac{1}{2}(\gamma_{mn})_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}Q_{\underline{\beta}},\quad [M_{mn},S_{\overline{\alpha}}]=\frac{1}{2}(\gamma_{mn})_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}S_{\overline{\beta}} \tag{5.175}$$

$$[M_{m-},Q_{\underline{\alpha}}]=(\gamma_m)_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}S_{\overline{\beta}},\quad [M_{m+},S_{\overline{\alpha}}]=(\gamma_m)_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}Q_{\underline{\beta}} \tag{5.176}$$

$$[M_{+-},Q_{\underline{\alpha}}]=-Q_{\underline{\alpha}},\quad [M_{+-},S_{\overline{\alpha}}]=S_{\overline{\alpha}}. \tag{5.177}$$

であるから、先ほどの行列の転置

$$\begin{aligned}(\Gamma^T_{mn})_A{}^B&=\begin{pmatrix}(\gamma_{mn})_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} & \\ & (\gamma_{mn})_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}\end{pmatrix},\quad (\Gamma^T_{+-})_A{}^B=\begin{pmatrix}-2\mathbf{1}_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} & \\ & 2\mathbf{1}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}\end{pmatrix},\\ (\Gamma^T_{m+})_A{}^B&=\begin{pmatrix} & 2(\gamma_m)_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}\\ 0 & \end{pmatrix},\quad (\Gamma^T_{m-})_A{}^B=\begin{pmatrix} & 0\\ 2(\gamma_m)_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} & \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{5.178}$$

を用いれば次の一つの式で書くことができる。

$$[M_{MN},\overline{\mathcal{Q}}_A]=\frac{1}{2}(\Gamma^T_{MN})_A{}^B\overline{\mathcal{Q}}_B=\frac{1}{2}\overline{\mathcal{Q}}_B(\Gamma_{MN})^B{}_A \tag{5.179}$$

Supercharge 同士の反交換関係も次のように書き換えることができる。

$$\{Q_{\overline{\alpha}},S_{\overline{\beta}}\}=\frac{1}{8}\left((\Gamma^{pq})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}M_{pq}+2(\Gamma^{+-})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}M_{+-}\right)-\frac{3i}{8}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}A \tag{5.180}$$

$$\{S_{\underline{\alpha}},Q_{\underline{\beta}}\}=\frac{1}{8}\left((\Gamma^{pq})_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}M_{pq}+2(\Gamma^{+-})_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}M_{+-}\right)-\frac{3i}{8}\mathbf{1}_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}A \tag{5.181}$$

$$\{Q_{\overline{\alpha}},Q_{\underline{\beta}},\}=\frac{1}{4}(\Gamma^{m+})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}M_{m+} \tag{5.182}$$

$$\{S_{\underline{\alpha}},S_{\overline{\beta}}\}=\frac{1}{4}(\Gamma^{m-})_{\underline{\alpha}\overline{\beta}}M_{m-} \tag{5.183}$$

全てまとめると、次のようになる。

$$\{\mathcal{Q}_A,\overline{\mathcal{Q}}_B\}=\frac{1}{8}(\Gamma^{MN})_{AB}M_{MN}-\frac{3i}{8}\mathbf{1}_{AB}A \tag{5.184}$$

ただし

$$\mathbf{1}_{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} & \\ & \mathbf{1}_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\end{pmatrix} \tag{5.185}$$

すべてをまとめておこう。

4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超共形代数

$$\begin{aligned}[M_{MN},M_{PQ}] &= M_{MQ}\eta_{NP}-M_{MP}\eta_{NQ}-M_{NQ}\eta_{MP}+M_{NP}\eta_{MQ}, && (5.186)\\ [M_{MN},\mathcal{Q}_A] &= \frac{1}{2}(\Gamma_{MN})_A{}^B\mathcal{Q}_B, && (5.187)\\ [M_{MN},\overline{\mathcal{Q}}_A] &= \frac{1}{2}\overline{\mathcal{Q}}_B(\Gamma_{MN})^B{}_A, && (5.188)\\ \{\mathcal{Q}_A,\overline{\mathcal{Q}}_B\} &= \frac{1}{8}(\Gamma^{MN})_{AB}M_{MN}-\frac{3i}{8}\mathbf{1}_{AB}A, && (5.189)\\ [A,\mathcal{Q}_A] &= -i\mathcal{Q}_A, && (5.190)\\ [A,\overline{\mathcal{Q}}_A] &= i\overline{\mathcal{Q}}_A. && (5.191)\end{aligned}$$

この代数は次の行列の（反）交換関係として実現される。（これらの行列の成分はグラスマン数ではなく複素数であることに注意。）

$$T(M_{MN}) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}(\Gamma_{MN})^A{}_B & \\ \hline & 0 \end{array}\right), \quad T(A) = -\frac{i}{3}\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 4 \end{array}\right) \tag{5.192}$$

$$T(\mathcal{Q}^A) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline \delta_B^{(A)} & 0 \end{array}\right), \quad T(\overline{\mathcal{Q}}_A) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c|c} 0 & \delta^B_{(A)} \\ \hline & 0 \end{array}\right) \tag{5.193}$$

ただし (5.189) だけは符号が逆になるように定義した。

$$\{T(\mathcal{Q}_A), T(\overline{\mathcal{Q}}_B)\} = -\frac{1}{8}(\Gamma^{MN})_{AB}T(M_{MN}) + \frac{3i}{8}\mathbf{1}_{AB}T(A) \tag{5.194}$$

これは、パラメータまで含めた生成子の反交換関係を再現するためである。グラスマン数のパラメータと Q が反可換であるのに対して $T(Q)$ とは可換であるため、このように符号を変更しておく必要がある。このとき、パラメータとの積は

$$\frac{1}{2}\lambda^{MN}T(M_{MN}) + \bar{\xi}^A T(\mathcal{Q}_A) + \xi^A T(\overline{\mathcal{Q}}_A) + \theta T(A) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{4}\lambda^{MN}(\Gamma_{MN})^A{}_B - \frac{i}{3}\theta\delta^A_B & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^A \\ \hline -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\xi}_B & -\frac{4i}{3}\theta \end{array}\right). \tag{5.195}$$

ただし、$\delta^B_{(A)}$ および $\delta_B^{(A)}$ は (A) で示された成分だけが 1 になるような列および行ベクトルである。

これらはトレースレス 5×5 反エルミート行列の完全系をなす。したがって、代数は $\mathrm{SU}(2,2|1)$ である。ここで、トレースははじめ 4 つの対角成分から最後の対角成分を引いたものとして定義されることに注意。

交換関係の中で (5.189) が成り立つことを示すには Γ_{MN} に対するフィルツ変換の式が必要となるので示しておこう。まず、X を任意の行列としたときに

$$\Gamma^{MN}X\Gamma_{MN} = \gamma^{mn}X\gamma_{mn} - 2\gamma^5 X\gamma^5 - 4R\gamma^m X\gamma_m R - 4L\gamma^m X\gamma_m L \tag{5.196}$$

を用いれば、

$$\Gamma^{MN}\Gamma_{MN} = -30, \quad \Gamma^{MN}X'\Gamma_{MN} = 2X' \tag{5.197}$$

が得られる。ただし X' は任意のトレースレス行列。これより、次の恒等式が示される。

$$(\Gamma^{MN})^A{}_B(\Gamma_{MN})^C{}_D = 2\delta^A_B\delta^C_D - 8\delta^C_B\delta^A_D \tag{5.198}$$

これを用いると、(5.189) の右辺の行列表示は次のように与えられる。

$$\frac{1}{16}(\Gamma^{MN})^A{}_B(\Gamma_{MN})^C{}_D - \frac{1}{8}\delta^A_B\delta^C_D = -\frac{1}{2}\delta^C_B\delta^A_D \tag{5.199}$$

これが左辺に等しいことはすぐにチェックできる。

5.4.3 超共形代数のゲージ化

超共形代数は次の生成子を含む。

$$O_X = P_m, Q_\alpha, M_{mn}, D, A, S_\alpha, K_m. \tag{5.200}$$

これらに対するゲージ場を次のように置く。

$$V_\mu{}^X = e_\mu{}^m, \psi_\mu{}^\alpha, \omega_\mu{}^{mn}, w_\mu, c_\mu, \phi_\mu{}^\alpha, f_\mu{}^m. \tag{5.201}$$

これらの積は次のように定義されるものとする。スピノル添え字の位置と ωM 項の係数 1/2 に注意。

$$V_\mu{}^X O_X = e_\mu{}^m P_m + \psi_\mu{}^\alpha Q_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{mn} M_{mn} + w_\mu D + c_\mu A + \phi_\mu{}^\alpha S_\alpha + f_\mu{}^m K_m \tag{5.202}$$

曲率にはすべて R を用い、そのあとにカッコつきで対応する生成子を書くことで成分を区別する。

$$R_{\mu\nu}{}^X = R_{\mu\nu}{}^k(P), R_{\mu\nu}{}^\alpha(Q), R_{\mu\nu}{}^{pq}(M), R_{\mu\nu}(D), R_{\mu\nu}(A), R_{\mu\nu}{}^\alpha(S), R_{\mu\nu}{}^k(K) \tag{5.203}$$

積 $R^X O_X$ は (5.202) と同様に定義される。曲率を成分で書いたものを与えておこう。

超コンフォーマル代数の曲率テンソル

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}{}^k(P) &= \partial_\mu e_\nu{}^k - \partial_\nu e_\mu{}^k + \omega_\mu{}^k{}_m e_\nu{}^m - \omega_\nu{}^k{}_m e_\mu{}^m \\
&\quad + w_\mu e_\nu{}^k - w_\nu e_\mu{}^k + \frac{1}{4}\psi_\mu{}^\alpha(\gamma^k)_{\alpha\beta}\psi_\nu{}^\beta, && (5.204)\\
R_{\mu\nu}{}^\alpha(Q) &= \partial_\mu \psi_\nu{}^\alpha - \partial_\nu \psi_\mu{}^\alpha + \frac{1}{4}\omega_{\mu pq}(\gamma^{pq})^\alpha{}_\beta\psi_\nu{}^\beta - \frac{1}{4}\omega_{\nu pq}(\gamma^{pq})^\alpha{}_\beta\psi_\mu{}^\beta \\
&\quad + \frac{1}{2}w_\mu\psi_\nu{}^\alpha - \frac{1}{2}w_\nu\psi_\mu{}^\alpha - ic_\mu(\gamma^5)^\alpha{}_\beta\psi_\nu{}^\beta + ic_\nu(\gamma^5)^\alpha{}_\beta\psi_\mu{}^\beta \\
&\quad - \phi_\mu{}^\beta e_\nu{}^m(\gamma_m)_\beta{}^\alpha + \phi_\nu{}^\beta e_\mu{}^m(\gamma_m)_\beta{}^\alpha, && (5.205)\\
R_{\mu\nu}{}^{mn}(M) &= \partial_\mu\omega_\nu{}^{mn} - \partial_\nu\omega_\mu{}^{mn} + [\omega_\mu, \omega_\nu]^{mn} \\
&\quad + 2e_\mu{}^m f_\nu{}^n - 2e_\nu{}^m f_\mu{}^n - 2e_\mu{}^n f_\nu{}^m + 2e_\nu{}^n f_\mu{}^m \\
&\quad - \frac{1}{4}\phi_\mu{}^\alpha(\gamma^{mn})_{\alpha\beta}\psi_\nu{}^\beta + \frac{1}{4}\phi_\nu{}^\alpha(\gamma^{mn})_{\alpha\beta}\psi_\mu{}^\beta, && (5.206)\\
R_{\mu\nu}(D) &= \partial_\mu w_\nu - \partial_\nu w_\mu + 2e_\mu{}^m f_{\nu m} - 2e_\nu{}^m f_{\mu m} \\
&\quad + \frac{1}{4}\phi_\mu{}^\alpha \mathbf{1}_{\alpha\beta}\psi_\nu{}^\beta - \frac{1}{4}\phi_\nu{}^\alpha \mathbf{1}_{\alpha\beta}\psi_\mu{}^\beta, && (5.207)\\
R_{\mu\nu}(A) &= \partial_\mu c_\nu - \partial_\nu c_\mu - \frac{3i}{8}\phi_\mu{}^\alpha(\gamma^5)_{\alpha\beta}\psi_\nu{}^\beta + \frac{3i}{8}\phi_\nu{}^\alpha(\gamma^5)_{\alpha\beta}\psi_\mu{}^\beta, && (5.208)\\
R_{\mu\nu}{}^\alpha(S) &= \partial_\mu\phi_\nu{}^\alpha - \partial_\nu\phi_\mu{}^\alpha + \frac{1}{4}\omega_{\mu pq}(\gamma^{pq})^\alpha{}_\beta\phi_\nu{}^\beta - \frac{1}{4}\omega_{\nu pq}(\gamma^{pq})^\alpha{}_\beta\phi_\mu{}^\beta \\
&\quad - \frac{1}{2}w_\mu\phi_\nu{}^\alpha + \frac{1}{2}w_\nu\phi_\mu{}^\alpha + ic_\mu(\gamma^5)^\alpha{}_\beta\phi_\nu{}^\beta - ic_\nu(\gamma^5)^\alpha{}_\beta\phi_\mu{}^\beta \\
&\quad - \psi_\mu{}^\beta e_\nu{}^m(\gamma_m)_\beta{}^\alpha + \psi_\nu{}^\beta e_\mu{}^m(\gamma_m)_\beta{}^\alpha, && (5.209)\\
R_{\mu\nu}{}^k(K) &= \partial_\mu f_\nu{}^k - \partial_\nu f_\mu{}^k + \omega_\mu{}^k{}_m f_\nu{}^m - \omega_\nu{}^k{}_m f_\mu{}^m \\
&\quad - w_\mu f_\nu{}^k + w_\nu f_\mu{}^k + \frac{1}{4}\phi_\mu{}^\alpha(\gamma^k)_{\alpha\beta}\phi_\nu{}^\beta. && (5.210)
\end{aligned}$$

ゲージ変換のパラメータ ϵ^X の成分は次のように表す。

$$\epsilon^X = \epsilon^m, \xi^\alpha, \lambda^{mn}, \sigma, \theta, \zeta^\alpha, \epsilon_K^m \tag{5.211}$$

それぞれのゲージ場に対する変換則をまとめておこう。

ゲージ場のゲージ変換

$$\delta_{\rm gauge} e_\mu{}^m = \partial_\mu \epsilon^m + \omega_\mu{}^m{}_n \epsilon^n + e_\mu{}^n \lambda_n{}^m + w_\mu \epsilon^m - e_\mu{}^m \sigma + \frac{1}{4}\psi_\mu{}^\alpha (\gamma^m)_{\alpha\beta}\xi^\beta, \tag{5.212}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\rm gauge}\psi_\mu{}^\alpha &= \partial_\mu \xi^\alpha + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{pq}(\gamma_{pq})^\alpha{}_\beta \xi^\beta + \frac{1}{2} w_\mu \xi^\alpha + i c_\mu \xi^\beta (\gamma^5)_\beta{}^\alpha \\ &\quad -\frac{1}{4}\psi_\mu{}^\beta \lambda^{pq}(\gamma_{pq})_\beta{}^\alpha - \frac{1}{2}\psi_\mu{}^\alpha \sigma - i\psi_\mu^\beta (\gamma^5)_\beta{}^\alpha \theta \\ &\quad -\phi_\mu{}^\beta \epsilon^m (\gamma_m)_\beta{}^\alpha + e_\mu{}^m \zeta^\beta (\gamma_m)_\beta{}^\alpha,\end{aligned} \tag{5.213}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\rm gauge}\omega_\mu{}^{pq} &= \partial_\mu \lambda^{pq} + [\omega_\mu, \lambda]^{pq} + 2e_\mu{}^m \epsilon_K^n - 2e_\mu{}^n \epsilon_K^m - 2f_\mu{}^m \epsilon^n + 2f_\mu{}^n \epsilon^m \\ &\quad -\frac{1}{4}\phi_\mu{}^\alpha \xi^\beta (\gamma^{pq})_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\psi_\mu{}^\alpha \zeta^\beta (\gamma^{pq})_{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{5.214}$$

$$\delta_{\rm gauge} w_\mu = \partial_\mu \sigma + 2e_\mu{}^m \epsilon_{Km} - 2f_\mu{}^m \epsilon_m + \frac{1}{4}\phi_\mu{}^\alpha \xi^\beta \mathbf{1}_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\psi_\mu{}^\alpha \zeta^\beta \mathbf{1}_{\alpha\beta}, \tag{5.215}$$

$$\delta_{\rm gauge} c_\mu = \partial_\mu \theta - \frac{3i}{8}\phi_\mu{}^\alpha \xi^\beta (\gamma^5)_{\alpha\beta} + \frac{3i}{8}\psi_\mu{}^\alpha \zeta^\beta (\gamma^5)_{\alpha\beta}, \tag{5.216}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\rm gauge}\phi_\mu{}^\alpha &= \partial_\mu \zeta^\alpha + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{pq}(\gamma_{pq})^\alpha{}_\beta \zeta^\beta - \frac{1}{2} w_\mu \zeta^\alpha - i c_\mu \zeta^\beta (\gamma^5)_\beta{}^\alpha \\ &\quad -\frac{1}{4}\phi_\mu{}^\beta \lambda^{pq}(\gamma_{pq})_\beta{}^\alpha + \frac{1}{2}\phi_\mu{}^\alpha \sigma + i\phi_\mu{}^\beta (\gamma^5)_\beta{}^\alpha \theta \\ &\quad -\psi_\mu{}^\beta \epsilon_K^m (\gamma_m)_\beta{}^\alpha + f_\mu{}^m \xi^\beta (\gamma_m)_\beta{}^\alpha,\end{aligned} \tag{5.217}$$

$$\delta_{\rm gauge} f_\mu{}^m = \partial_\mu \epsilon_K^m + \omega_\mu{}^m{}_n \epsilon_K^n + f_\mu{}^n \lambda_n{}^m - w_\mu \epsilon_K^m + f_\mu{}^m \sigma + \frac{1}{4}\phi_\mu{}^\alpha (\gamma^m)_{\alpha\beta}\zeta^\beta \tag{5.218}$$

スカラー演算子 D と A に対する電荷はそれぞれワイルウェイト、カイラルウェイトと呼ばれる。ある場 ϕ のワイルウェイトが n_D とカイラルウェイトが n_A であるとき、その場の D および A による変換は次のように与えられる。

$$D\phi = n_D \phi, \quad A\phi = i n_A \phi. \tag{5.219}$$

これらのウェイトは加法的である。すなわち、二つの場 ϕ_1 と ϕ_2 がそれぞれウェイト (n_{D1}, n_{A1}) と (n_{D2}, n_{A2}) を持つとき、積 $\phi_1\phi_2$ はウェイト $(n_{D1}+n_{D2}, n_{A1}+n_{A2})$ を持つ。

超共形代数の生成子のウェイトは表 5.3 のように与えられる。これに対し、対応するゲージ場、

表 5.3: 超コンフォーマル代数の生成子のワイルウェイトとカイラルウェイト

	P_m	$(Q_{\overline{\alpha}}, Q_{\underline{\alpha}})$	M_{mn}	D	A	$(S_{\overline{\alpha}}, S_{\underline{\alpha}})$	K_m
Weyl weight	1	1/2	0	0	0	$-1/2$	-1
chiral weight	0	$(-1, 1)$	0	0	0	$(1, -1)$	0

変換パラメータは表 5.4 に与えられているように逆符号のウェイトを持つ。これらを用いれば、多重項中の成分場の間のウェイトの関係を簡単に決定することができる。

スピンはローレンツ群の生成子 $M_{\widehat{m}\widehat{n}}$ によってどのように変換されるかを表す。スカラー場 ϕ およびスピノル場 χ は $M_{\widehat{m}\widehat{n}}$ によって次のように変換される。

$$M_{\widehat{m}\widehat{n}}\phi = 0, \quad M_{\widehat{m}\widehat{n}}\chi = -\frac{1}{2}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\chi. \tag{5.220}$$

ここで、スピノルの変換則の符号が通常とは逆であることに注意すること。これは (1.82) の符号に起因する。

Soryushiron Kenkyu

表 5.4: 超コンフォーマル代数のゲージ場のワイルウェイトとカイラルウェイト

	${e_\mu}^m$	$({\psi_\mu}^{\overline{\alpha}}, {\psi_\mu}^{\underline{\alpha}})$	${\omega_\mu}^{mn}$	w_μ	c_μ	$({\phi_\mu}^{\overline{\alpha}}, {\phi_\mu}^{\underline{\alpha}})$	${f_\mu}^m$
Weyl weight	-1	$-1/2$	0	0	0	$1/2$	1
chiral weight	0	$(1,-1)$	0	0	0	$(-1,1)$	0

5.5 拘束条件と重力多重項

5.5.1 ${\omega_\mu}^{mn}$ を与える拘束条件

前の節で導入した超コンフォーマル代数のゲージ対称性はこのままでは重力とは無関係の内部対称性である。このゲージ理論を重力理論に変形するには、ゲージ場の一部を他の場の複合場として表す。このゲージ場の間の従属関係は、曲率テンソルに対する拘束条件の形で表される。ここでは [12] に従い拘束条件を導入し、それによって複合場の変換則がどのように補正されるかを見る。

§5.1.3 で説明したように、P 変換を一般座標変換とみなすためには次の拘束条件を設定する必要がある。

$$\delta_{\rm gc}^{\rm full}(\epsilon^\mu) = 0 \tag{5.221}$$

これが全ての場の上で成り立つことを要請する。

この拘束条件を満足するためには Q 変換と P 変換が補正を受ける。この補正を決める際、次の交換関係が成り立つことも要請しよう。

$$\{Q_\alpha^{\rm mod}, Q_\beta^{\rm mod}\} = -\frac{1}{4}(\gamma^m)_{\alpha\beta}P_m^{\rm mod} \tag{5.222}$$

この式は $P^{\rm mod}$ を $Q^{\rm mod}$ の反交換関係として定義すると同時に、右辺に $(\gamma^m)_{\alpha\beta}$ に比例する項以外のものが現れないということを要請する。

まずはゲージ場 e_μ^m の上で (5.221) が成り立つことを要請しよう。e_μ^m の変換則がゲージ変換のままであることを仮定すれば、一般座標変換は (5.27) のように与えられる。すなわち

$$\delta_{\rm gc}^{\rm full}e_\mu^m = \epsilon^\lambda {R_{\lambda\mu}}^m(P) \tag{5.223}$$

したがって (5.221) を満足するためには曲率テンソル $R(P)$ に対する次の拘束条件を課す必要がある。

$${R_{\mu\nu}}^m(P) = 0 \tag{5.224}$$

ただし、$R(P)$ の具体形はポアンカレ代数の場合や超ポアンカレ代数の場合とは異なる。超コンフォーマル代数の場合には $R(P)$ にはグラビティーノや D ゲージ場 $w\mu$ が含まれており、(5.224) は捩率が次のように与えられることを意味している。

$$T_{\mu\nu}^k = \frac{1}{4}(\psi_\mu\gamma^k\psi_\nu) + e_\mu^k w_\nu - e_\nu^k w_\mu \tag{5.225}$$

曲率テンソル $R(P)$ の中にはスピン接続が $e\wedge\omega$ の形で代数的に含まれている。従って、拘束条件 (5.224) を解く事によって ω を複合場として与えることができる。解いた結果は次のように与えられる。(一般式 (1.110) に (5.225) を代入すればよい。)

$$\omega_{\kappa\mu\nu} = \omega_{\kappa\mu\nu}(e) + \frac{1}{8}[\psi_\mu\gamma_\kappa\psi_\nu - \psi_\nu\gamma_\mu\psi_\kappa - \psi_\kappa\gamma^\nu\psi_\mu] - w_\mu e_{\nu\kappa} + w_\nu e_{\mu\kappa} \tag{5.226}$$

$\omega(e)$ は (1.111) に与えられた、$e_\mu^{\widehat{m}}$ だけで書かれたスピン接続である。

拘束条件 (5.224) は独立な場である $e_\mu^{\widehat{m}}$ や $\psi_\mu^{\widehat{m}}$ の変換則を変えないから、二回超対称変換を繰り返してもまったく補正の影響はなく、二つの変換

$$\delta^1_{\text{gauge}} = \xi_1^\alpha Q_\alpha^{\text{gauge}}, \quad \delta^2_{\text{gauge}} = \xi_2^\alpha Q_\alpha^{\text{gauge}}. \tag{5.227}$$

の交換関係は

$$\epsilon^m = -\frac{1}{4}(\xi_1\gamma^m\xi_2) \tag{5.228}$$

をパラメータとする P ゲージ変換となる。

$$(\delta^1_Q\delta^2_Q - \delta^2_Q\delta^1_Q)e_\mu{}^m = D_\mu\epsilon^m + w_\mu\epsilon^m \tag{5.229}$$

これは丁度 e_μ^m の P ゲージ変換にほかならない。これは、e_μ^m の上での Q の反交換関係に拘束条件 (5.224) が影響を与えないことを意味している。このことは拘束条件 (5.224) の下でも e_μ^m と ψ_μ^α は独立な場であり、ゲージ変換を変更しないので当然である。

複合場として表されたスピン接続 (5.226) については、そのゲージ変換のうちの一部は補正を受ける。拘束条件 (5.224) をゲージ変換すると、ワイルウェイトが 1 であることから次のような項が現れる。

$$\delta^{\text{ori}}_{\text{gauge}}R(P) \sim R(Q)\xi + R(M)\epsilon + R(D)\epsilon. \tag{5.230}$$

$R(P)$ を含む項は (5.224) を用いて落とした。このように、P 変換と Q 変換によって拘束条件が変化してしまうことは、これらの変換則が拘束条件によって破れてしまう（補正を受ける）ことを意味している。補正された P 変換は補正された Q 変換の交換関係を用いて与えることにし、ここでは Q 変換の補正に注目しよう。

補正を決定するために、拘束条件を解いて得られた場を拘束条件に代入すれば、明らかにそれは変換の元で不変であるという事実を用いる。もとのゲージ変換 $\delta^{\text{ori}}_{\text{gauge}}$ に対して、(5.226) のような複合場だと思ってその構成要素へのゲージ変換によって決めた複合場のゲージ変換を

$$\delta^{\text{mod}}_{\text{gauge}} = \delta^{\text{ori}}_{\text{gauge}} + \delta'_{\text{gauge}} \tag{5.231}$$

とする。補正されたゲージ変換の具体形を求めるには、(5.231) を拘束条件に作用させてみればよい。拘束条件 (5.224) に作用させてみると、左辺は定義より 0 であり、左辺は曲率テンソルのゲージ変換則 (5.20) と曲率テンソルの具体形 (5.204) を用いれば得ることができる。

$$0 = \delta^{\text{ori}}_{\text{gauge}}R_{\mu\nu}{}^m(P) + \delta'_{\text{gauge}}R_{\mu\nu}{}^m(P) = \frac{1}{4}R_{\mu\nu}{}^\alpha(Q)(\gamma^m)_{\alpha\beta}\xi^\beta + \delta'_{\text{gauge}}\omega_\mu{}^k{}_m e_\nu{}^m - \delta'_{\text{gauge}}\omega_\nu{}^k{}_m e_\mu{}^m \tag{5.232}$$

この式を $\delta'_{\text{gauge}}\omega_{\lambda\mu\nu}$ について解くと、

$$\delta'_{\text{gauge}}\omega_{\mu pq} = \frac{1}{8}(-R_{pq}{}^\alpha(Q)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\xi^\beta + R_{q\mu}{}^\alpha(Q)(\gamma_p)_{\alpha\beta}\xi^\beta + R_{\mu p}{}^\alpha(Q)(\gamma_q)_{\alpha\beta}\xi^\beta) \tag{5.233}$$

5.5.2 $\phi_\mu{}^\alpha$ を与える拘束条件

次に、グラビティーノに対して拘束条件 (5.221) が成り立つこと、すなわち

$$\delta^{\text{full}}_{\text{gc}}(\epsilon^\mu)\psi_\mu^\alpha = 0 \tag{5.234}$$

を要請しよう。そのためにはグラビティーノのゲージ変換を決めておく必要がある。グラビティーノは独立な場であるから、その変換則はもとのゲージ変換のままでもよさそうであるが、Q 変換を行うと複合場の ω が現れるため P 変換が Q 変換の反交換関係として与えられるということを要請すると、ψ_μ^α の P 変換が補正を受けることになる。それと同時に Q の交換関係が P 変換以外の項を与えないという条件から新たな拘束条件が必要となり、その条件は (5.234) が成り立つことも保障することが以下のようにわかる。

グラビティーノに対して Q 変換を二回繰り返してみると、超ポアンカレ代数の場合に §5.3 で行ったのと同じ結果を得る。すなわち、交換関係が一般座標変換になるためには拘束条件

$$(\gamma^m)^\alpha{}_\beta e_m{}^\mu R_{\mu\nu}{}^\beta(Q) = 0 \tag{5.235}$$

が成り立つ必要がある。超ポアンカレ代数の場合には曲率 $R(Q)$ はグラビティーノの場の強さであったために、この拘束条件は運動方程式になってしまい、off shell の定式化には使うことができなかった。しかし超コンフォーマル代数の場合には $R(Q)$ は S_α 変換に対応するゲージ場 $\phi_\mu{}^\alpha$ を代数的に含んでいるために、$\phi_\mu{}^\alpha$ を複合場として与える式であると解釈することができる。(実際、拘束条件の成分の数は $\phi_\mu{}^\alpha$ の成分の数に一致している。)

§5.3 で行った計算の繰り返しになるが、$Q^{\rm mod}$ 変換の交換関係として $P^{\rm mod}$ 変換を与えておこう。補正を受けていない部分は $P^{\rm ori}$ 変換を与えることがわかっているので補正部分のみを計算する。二回の $Q^{\rm mod}$ 変換のうち、一回目の ψ_μ の変換には補正が無く、補正の影響は二回目の変換で ω を変換するときに現れる。拘束条件 (5.235) を用いれば、$\delta'_{\rm gauge}\omega$ の式 (5.233) を少し簡単にすることができる。

$$\delta'\omega_{\mu pq} = -\frac{1}{4}(R_{pq}{}^\alpha(Q)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\xi^\beta) \tag{5.236}$$

(5.236) に与えられた $\delta'\omega$ を用いれば、

$$\delta'^1_Q\delta^2_Q\psi_\mu{}^\alpha = \frac{1}{4}\delta'^1_Q\omega_\mu{}^{pq}(\gamma_{pq})^\alpha{}_\beta\xi_2^\beta = -\frac{1}{16}(\gamma^{pq})^\alpha{}_\beta\xi_2^\beta(\xi_1\gamma_\mu R_{pq}(Q)) \tag{5.237}$$

ξ_1 と ξ_2 が同じ積の中に入るようにフィルツ変換を行おう。$R(Q)$ についての拘束条件を用いれば、γ^k および $\gamma^5\gamma^k$ 挿入項のみが寄与することを簡単に示すことができる。従って、フィルツ変換の結果次の式を得る。

$$\delta'^1_Q\delta^2_Q\psi_\mu = \frac{1}{8}R_{\mu k}(Q)(\xi_1\gamma^k\xi_2) - \frac{1}{8}\gamma^5 R_{\mu k}(Q)(\xi_1\gamma^5\gamma^k\xi_2) \tag{5.238}$$

ξ_1 と ξ_2 の入れ替えに対して第 1 項は反対称、第 2 項は対称であるために交換関係には第 1 項のみが残る。その結果、P 変換の補正は次のように決まる。

$$\epsilon^k P'_k\psi_\mu = (\delta'^1_Q\delta^2_Q - \delta'^2_Q\delta^1_Q)\psi_\mu = \epsilon^k R_{k\mu}(Q) \tag{5.239}$$

ゲージ変換の部分もあわせれば

$$\epsilon^m P^{\rm mod}_m\psi_\mu = (\delta^1_Q\delta^2_Q - \delta^2_Q\delta^1_Q)\psi_\mu = \epsilon^k R_{k\mu}(Q) + \delta_P(\epsilon^m)\psi_\mu \tag{5.240}$$

したがって、

$$\delta^{\rm full,mod}_{\rm gc}\psi_\mu = \delta^{\rm full,ori}_{\rm gc}\psi_\mu - \epsilon^\mu e^m_\mu P'_m\psi_\mu = 0 \tag{5.241}$$

となり、(5.234) は確かに満足されている。

拘束条件 (5.235) を解けば ϕ_μ が次のように決定される。

$$\phi_\nu = -\frac{1}{2}\gamma^\mu R^0_{\mu\nu}(Q) - \frac{1}{12}\gamma_\nu\gamma^{\rho\sigma}R^0_{\rho\sigma}(Q) \tag{5.242}$$

ただし、$R^0(Q)$ は $R(Q)$ から ϕ を含む項を除いたものである。

$$\begin{aligned} R^0_{\mu\nu}(Q) &\equiv \partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu + \frac{1}{4}\omega_{\mu pq}\gamma^{pq}\psi_\nu - \frac{1}{4}\omega_{\nu pq}\gamma^{pq}\psi_\mu \\ &\quad +\frac{1}{2}w_\mu\psi_\nu - \frac{1}{2}w_\nu\psi_\mu - ic_\mu\gamma^5\psi_\nu + ic_\nu\gamma^5\psi_\mu \end{aligned} \tag{5.243}$$

また、

$$\psi_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu + \frac{1}{4}\omega_{\mu pq}\gamma^{pq}\psi_\nu - \frac{1}{4}\omega_{\nu pq}\gamma^{pq}\psi_\mu \tag{5.244}$$

を用いると、次のように書くこともできる。

$$\begin{aligned} \phi_\nu &= -\frac{1}{2}\gamma^\mu\psi_{\mu\nu} - \frac{1}{12}\gamma_\nu\gamma^{\rho\sigma}\psi_{\rho\sigma} \\ &\quad -\frac{1}{4}\gamma^\mu(w_\mu\psi_\nu - w_\nu\psi_\mu) - \frac{1}{12}w_\rho\gamma_\nu\gamma^{\rho\sigma}\psi_\sigma \\ &\quad +\frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^5(c_\mu\psi_\nu - c_\nu\psi_\mu) + \frac{i}{6}c_\rho\gamma_\nu\gamma^{\rho\sigma}\gamma^5\psi_\sigma \end{aligned} \tag{5.245}$$

(5.245) の γ トレース部分は次のように与えられる。

$$\gamma^\nu\phi_\nu = \frac{1}{6}\gamma^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu} + \frac{1}{6}w_\mu\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu - \frac{i}{3}c_\mu\gamma^5\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu \tag{5.246}$$

拘束条件 (5.235) が MDASK 変換の元で不変であることは簡単に示すことができる。しかし Q および P 変換では不変ではない。このことはこの拘束条件によって複合場として表される ${\phi_\mu}^\alpha$ の Q および P 変換則が補正を受けることを意味している。P 変換は Q 変換の交換関係として与えることができるから、複合場として与えられた ${\phi_\mu}^\alpha$ の Q 変換に対する補正 $\delta'\phi$ を計算しよう。$R(Q)$ についての拘束条件 (5.235) に (5.231) を作用させると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma^\mu\delta_{\rm gauge}R_{\mu\nu}(Q) + (\delta_{\rm gauge}{e_m}^\mu)\gamma^m R_{\mu\nu}(Q) + \gamma^\mu\delta' R_{\mu\nu}(Q) \\ &= \frac{1}{4}{R_{\mu\nu}}^{pq}(M)\gamma^\mu\gamma_{pq}\xi + \frac{1}{2}R_{\mu\nu}(D)\gamma^\mu\xi - iR_{\mu\nu}(A)\gamma^\mu\gamma^5\xi - \gamma^\mu\gamma_\nu\delta'\phi_\mu + 4\delta'\phi_\nu \\ &\quad +\frac{1}{4}\gamma^\kappa R_{k\nu}(Q)(\psi_\kappa\gamma^k\xi) - \frac{1}{16}\gamma^\mu\gamma^{pq}\psi_\nu(\xi\gamma_\mu R_{pq}(Q)) + \frac{1}{16}\gamma^\mu\gamma^{pq}\psi_\mu(\xi\gamma_\nu R_{pq}(Q)) \end{aligned} \tag{5.247}$$

最後の二つの項は $R(Q)$ 中の ω に δ' が作用して現れる項である。

この式を少し簡単にするために、$R(M)$ の共変化 $R^{\rm cov}(M)$ を導入するのがよい。ω の変換則の補正 (5.236) の結果、曲率テンソルの変換則も変化し、変換パラメータの微分が現れる可能性がある。例えば、δ' を $R(M)$ に作用させると、その中の $d\omega$ に作用したときに変換パラメータ ξ の微分を含む項が現れる。

$$\begin{aligned} \delta' R_{\mu\nu pq}(M) &= \partial_\mu\delta'\omega_{\nu pq} - \partial_\nu\delta'\omega_{\mu pq} + \cdots \\ &= \frac{1}{4}({R_{pq}}^\alpha(Q)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\partial_\nu\xi^\beta - {R_{pq}}^\alpha(Q)(\gamma_\nu)_{\alpha\beta}\partial_\mu\xi^\beta) + \cdots \end{aligned} \tag{5.248}$$

このことは $\delta' R(M)$ が $\partial\xi$ を含んでしまうことを意味している。変換パラメータの微分は、対応するゲージ場（この場合には ψ）の変換則中でだけ現れるのが望ましい。そこで、次のように、$R(M)$ の共変化を定義し、拘束条件中の $R(M)$ をこれで置き換えることにする。

$$R^{\rm cov}_{\mu\nu pq}(M) = R_{\mu\nu pq}(M) - \frac{1}{4}({R_{pq}}^\alpha(Q)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}{\psi_\nu}^\beta - {R_{pq}}^\alpha(Q)(\gamma_\nu)_{\alpha\beta}{\psi_\mu}^\beta) \tag{5.249}$$

(5.247) を $R(M)$ の代わりに $R^{\rm cov}(M)$ で書き直そう。そのために次の式を代入しよう。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\gamma^\mu\gamma^{pq}\xi R_{\mu\nu pq}(M) &= \frac{1}{4}\gamma^\mu\gamma^{pq}\xi R^{\rm cov}_{\mu\nu pq}(M) \\ &\quad +\frac{1}{16}\gamma^\mu\gamma^{pq}\xi(\psi_\nu\gamma_\mu R_{pq}(Q)) - \frac{1}{16}\gamma^\mu\gamma^{pq}\xi(\psi_\mu\gamma_\nu R_{pq}(Q)) \end{aligned} \tag{5.250}$$

この式の後ろ二項と (5.247) の最後の二項と比較してみると、ちょうど $\cdots\psi_\mu)(\xi\cdots$ を $-\cdots\xi)(\psi_\mu\cdots$ で置き換えた形になっている。このことは ψ_μ と ξ が一つの積に入るようなフィルツ変換をした際に、挿入される行列が対称なもの、すなわち γ^{kl} と γ^k だけが寄与することを意味している。さらに、γ^{kl} を挿入した場合には (5.255) を用いて 0 になることが分かる。従って残るのは γ^k 挿入項だけであるが、実際計算してみるとそれがちょうど (5.247) の後ろから 3 番目の項を相殺することがわかる。

こうして、次の式が得られた。

$$2\delta'\phi_\nu + \gamma_\nu\gamma^\mu\delta'\phi_\mu = -\frac{1}{4}\gamma^\mu\gamma_{pq}\xi R^{\mathrm{cov}\,pq}_{\mu\nu}(M) - \frac{1}{2}\gamma^\mu\xi R_{\mu\nu}(D) - i\gamma^5\gamma^\mu\xi R_{\mu\nu}(A) \tag{5.251}$$

この式の γ トレース部分をとると次の式を得る。

$$6\gamma^\nu\delta'\phi_\nu = \frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\gamma_{pq}\xi R^{\mathrm{cov}\,pq}_{\mu\nu}(M) + \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\xi R_{\mu\nu}(D) - i\gamma^5\gamma^{\mu\nu}\xi R_{\mu\nu}(A) \tag{5.252}$$

(5.252) を (5.251) に代入すれば、$\delta'\phi_\nu$ が次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\delta'\phi_\nu \;=\; & -\frac{1}{8}\gamma^\mu\gamma_{pq}\xi R^{\mathrm{cov}\,pq}_{\mu\nu}(M) - \frac{1}{48}\gamma_\nu\gamma^{\kappa\lambda}\gamma_{pq}\xi R^{\mathrm{cov}\,pq}_{\kappa\lambda}(M)\\ & -\frac{1}{4}\gamma^\mu\xi R_{\mu\nu}(D) - \frac{1}{24}\gamma_\nu\gamma^{\kappa\lambda}\xi R_{\kappa\lambda}(D)\\ & -\frac{i}{2}\gamma^5\gamma^\mu\xi R_{\mu\nu}(A) - \frac{i}{12}\gamma^5\gamma_\nu\gamma^{\kappa\lambda}\xi R_{\kappa\lambda}(A)\end{aligned} \tag{5.253}$$

さらに (5.253) は §5.5.3 で与える曲率テンソルについての恒等式を用いることによって次の形に変形することができる。

$$\delta'\phi_\nu = -\frac{1}{4}\gamma^q\xi R^{\mathrm{cov}}_{\nu q}(M) - \frac{i}{2}\gamma^5\gamma^\mu\xi R_{\mu\nu}(A) - \frac{i}{12}\gamma^5\gamma_\nu\gamma^{\kappa\lambda}\xi R_{\kappa\lambda}(A) \tag{5.254}$$

5.5.3 曲率テンソルに対する恒等式

$R(Q)$ に対する拘束条件から従う式

拘束条件 (5.235) から従ういくつかの公式を与えておこう。次の式は γ 行列の交換関係を用いて直ちに示すことができる。

$$\gamma^{pq}R_{pq}(Q) = \gamma^{pq}\gamma^m R_{pq}(Q) = \gamma^{pq}\gamma^m\gamma^n\gamma^k R_{pq}(Q) = 0, \quad \gamma^{pq}\gamma^m\gamma^n R_{pq}(Q) = -8R_{mn}(Q). \tag{5.255}$$

また、次の式もしばしば用いられる。

$$\widetilde{R}_{mn}{}^{\alpha}(Q) \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{mn}{}^{pq}R_{pq}{}^{\alpha}(Q) = -i(\gamma^5)^\alpha{}_\beta R_{mn}{}^{\beta}(Q) \tag{5.256}$$

これを示すには、$\gamma^{\mu\nu\rho}\gamma^\sigma R_{\rho\sigma}(Q) = 0$ を変形していき、$\epsilon^{mnpq} = i\gamma^5\gamma^{mnpq}$ を用いればよい。また、(5.256) は以下の方法でも示すことができる。拘束条件 (5.235) は $R(Q)$ の低スピン成分を落とすので、残った部分は $(4,1)$ または $(1,4)$ 表現に属するから、3 階対称スピノル $\psi^{\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}}$ および $\psi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\gamma}}$ を用いて次のように表すことができる。

$$R_{pq}{}^{\overline{\gamma}}(Q) = (\gamma_{pq})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\psi^{\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}}, \quad R_{pq}{}^{\underline{\gamma}}(Q) = (\gamma_{pq})_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\psi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\gamma}} \tag{5.257}$$

これを用いると

$$\epsilon^{mnpq}R_{pq}{}^{\overline{\gamma}}(Q) = (i\gamma^{mnpq}\gamma_{pq})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\psi^{\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}} = -2i(\gamma^{mn})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\psi^{\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}} = -2iR^{mn\overline{\gamma}}(Q) \tag{5.258}$$

を示すことができ、カイラリティが逆のもとあわせれば (5.256) を得る。
(5.256) を用いて示される次の式もしばしば用いられる。

$$\gamma_k R_{l\mu}(Q) + \gamma_l R_{\mu k}(Q) + \gamma_\mu R_{kl}(Q) = \epsilon_{kl\mu p}\gamma_q \widetilde{R}^{pq}(Q) = -i\epsilon_{kl\mu p}\gamma_q\gamma^5 R^{pq}(Q) = 0 \tag{5.259}$$

$R(M)$ についての恒等式

リーマン幾何学では、曲率テンソルに対していくつかの恒等式が成り立つが、ここで考えている $R(M)$ は捩率の寄与のためにそのままの恒等式は満足しない。
ここでは $R(P)$ に対するものと $R(Q)$ に対するものの二つの拘束条件を用いて得ることができる拘束条件について述べる。
ビアンキ恒等式 (5.22) から P 成分を取り出せば

$$\begin{aligned} 0 &= [\widehat{e}, \widehat{R}(M)] + [\widehat{e}, \widehat{R}(D)] + [\widehat{\psi}, \widehat{R}(Q)] \\ &= \left(e_k \wedge R^{km}(M) - e^m \wedge R(D) - \frac{1}{4}\psi \wedge \gamma^m R(Q) \right) P_m = 0 \end{aligned} \tag{5.260}$$

ただし、$R(P)$ に対する拘束条件を用いた。(5.259) を用いれば次の式を示すことができる。

$$e_k \wedge R^{\mathrm{cov}km}(M) = e_k \wedge R^{km}(M) - \frac{1}{4}\psi \wedge \gamma^m R(Q) \tag{5.261}$$

したがって、(5.260) は次のように書き換えられる。

$$R^{\mathrm{cov}}_{\mu\nu\lambda}{}^{m}(M)|_{[\lambda\mu\nu]} = e^m_\lambda R_{\mu\nu}(D)|_{[\lambda\mu\nu]} \tag{5.262}$$

ただし、$\cdots|_{[\lambda\mu\nu]}$ は 3 つの添え字に対しての反対称部分を表す。γ 行列の反対称積を用いて次のようにも書ける。

$$\gamma^{\mu\nu\lambda} R^{\mathrm{cov}}_{\mu\nu\lambda}{}^{m}(M) = \gamma^{m\mu\nu} R_{\mu\nu}(D) \tag{5.263}$$

この両辺に γ_m をかければ

$$-2\gamma^{\mu\lambda} R^{\mathrm{cov}}_{\mu\lambda}(M) - \gamma^{\mu\nu\lambda m} R^{\mathrm{cov}}_{\mu\nu\lambda m}(M) = 2\gamma^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(D) \tag{5.264}$$

すなわち、次の二つの式が成り立つ。

$$R^{\mathrm{cov}}_{[\mu\nu pq]}(M)|_{[\mu\nu pq]} = 0, \tag{5.265}$$

$$R^{\mathrm{cov}}_{\mu\nu}(M)|_{[\mu\nu]} = -R_{\mu\nu}(D). \tag{5.266}$$

さらに、公式 (5.262) の添え字を適当に入れ替えてたし引きすることで次の式も示すことができる。

$$R^{\mathrm{cov}\widehat{m}}{}_{\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}}(M)|_{[\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}]} = R_{\widehat{n}\widehat{p}}(D)\delta^{\widehat{m}}_{\widehat{q}}|_{[\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}]} \tag{5.267}$$

5.5.4 $f_\mu{}^m$ を与える拘束条件

$e_\mu{}^{\widehat{m}}$ と $\psi_\mu{}^\alpha$ の上で Q 変換を二回行い、一般座標変換になることを要請すると $R(P)$ と $R(Q)$ に対する拘束条件をおく必要があることが分かった。これら以外のゲージ場に対しても同じ要請をすると、さらにもう一つの拘束条件が必要であることがわかる。そのことを見るために、場 w_μ と

c_μ の上で Q 変換を二回行って交換関係として一般座標変換が現れるかどうかを見てみよう。一回 Q 変換を行うと、

$$\delta_1 w_\mu = -\frac{1}{4}\xi_1\phi_\mu, \quad \delta_1 c_\mu = \frac{3i}{8}\xi_1\gamma^5\phi_\mu \tag{5.268}$$

が得られる。二回目の Q 変換は ϕ_μ に作用するが、ゲージ変換については、交換関係として P_m を与える。補正部分については、(5.254) を用いれば

$$\delta_2'\delta_1 w_\mu = \frac{1}{16}(\xi_1\gamma^q\xi_2)R^{\rm cov}_{\mu q}(M) + \frac{i}{8}(\xi_1\gamma^5\gamma^q\xi_2)R_{q\mu}(A) + \frac{i}{48}(\xi_1\gamma^5\gamma_\mu\gamma^{pq}\xi_2)R_{pq}(A), \tag{5.269}$$

$$\delta_2'\delta_1 c_\mu = -\frac{3i}{32}(\xi_1\gamma^5\gamma^q\xi_2)R^{\rm cov}_{\mu q}(M) + \frac{3}{16}(\xi_1\gamma^q\xi_2)R_{q\mu}(A) + \frac{1}{32}(\xi_1\gamma_\mu\gamma^{pq}\xi_2)R_{pq}(A) \tag{5.270}$$

ξ_1 と ξ_2 の入れ替えに対して反対称な部分をとり、補正 $\delta'\phi$ の交換関係への寄与を求めると、

$$\epsilon^m P'_m w_\mu = (\delta_1'\delta_2 - \delta_2'\delta_1)w_\mu = \epsilon^q\left[\frac{1}{2}R^{\rm cov}_{\mu q}(M) - \frac{1}{6}\epsilon_{q\mu}{}^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}(A)\right], \tag{5.271}$$

$$\epsilon^m P'_m c_\mu = (\delta_1'\delta_2 - \delta_2'\delta_1)c_\mu = \epsilon^q R_{q\mu}(A) \tag{5.272}$$

ただし、ϵ^m は ξ_1 と ξ_2 によって (5.228) のように与えられる。このうち、c_μ の変換については、得られた P_m 変換の補正項は c_μ の上で (5.234) が成り立つことを保障する。しかし、w_μ についてはそうはなっていない。

$$\delta^{\rm full,mod}_{\rm gc}(\epsilon^\lambda)w_\mu = \delta^{\rm full,ori}_{\rm gc}(\epsilon^\lambda)w_\mu - \epsilon^\lambda e^m_\lambda P'_m w_\mu = \epsilon^q R_{q\mu}(D) - \epsilon^q\left[\frac{1}{2}R^{\rm cov}_{\mu q}(M) - \frac{1}{6}\epsilon_{q\mu}{}^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}(A)\right], \tag{5.273}$$

したがって、w_μ の上でも (5.234) が成立するためには次の式が成り立つ必要がある。

$$\frac{1}{2}R^{\rm cov}_{\mu q}(M) - \frac{1}{6}\epsilon_{q\mu}{}^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}(A) = R_{q\mu}(D). \tag{5.274}$$

あるいは、(5.266) を用いることによって次のように書き換えることもできる。

$$R^{\rm cov}_{q\mu}(M) - \frac{1}{3}\epsilon_{q\mu}{}^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}(A) = 0. \tag{5.275}$$

この式を第 3 の拘束条件として採用しよう。この式は $K_{\widehat{m}}$ 変換に対応するゲージ場 $f_\mu{}^{\widehat{m}}$ を代数的に含んでおり、f をそれ以外のゲージ場の複合場として表すのに用いることができる。

この拘束条件が MDAK 変換の元で不変であることはすぐに確かめることができる。また、S 変換の元で不変であることも以下のように確かめられる。

$R(M)$ の S 変換は次のように与えられる。

$$\delta^S_{\rm gauge}R^{\rm cov}_{\mu\nu pq}(M) = -\frac{1}{4}\zeta\gamma_{pq}R_{\mu\nu}(Q) - \frac{1}{2}\zeta\gamma_{\mu\nu}R_{pq}(Q). \tag{5.276}$$

二項目は共変化によって加わる $\psi R(Q)$ 項のグラビティーノの S 変換から得られる。添え字を一組縮約すれば

$$\delta^S_{\rm gauge}R^{\rm cov}_{\mu\nu}(M) = -\frac{1}{4}\zeta R_{\mu\nu}(Q) \tag{5.277}$$

が得られる。一方、$R(A)$ の S ゲージ変換は次のように与えられる。

$$\delta^S_{\rm gauge}R_{\mu\nu}(A) = -\frac{3i}{8}\zeta\gamma^5 R_{\mu\nu}(Q). \tag{5.278}$$

(5.256) を用いれば、このホッジ双対テンソルに対して次の式が得られる。

$$\delta^S_{\rm gauge}\epsilon_{\mu\nu}{}^{pq}R_{pq}(A) = -\frac{3}{4}\zeta R_{\mu\nu}(Q) \tag{5.279}$$

(5.276) と (5.279) を組み合わせれば、拘束条件 (5.275) の S 変換の元での不変性が示される。

拘束条件 (5.275) を解いて ${f_\mu}^m$ を求めよう。拘束条件の f 依存性は

$$0 = R^{\mathrm{cov}\,m\nu}_{\mu\nu}(M) - \frac{1}{3}{\epsilon_\mu}^{m\rho\sigma}R_{\rho\sigma}(A) = 2{e_\mu}^m f + 4{f_\mu}^m + \cdots \tag{5.280}$$

であり、そのトレース部分は

$$0 = R^{\mathrm{cov}\,pq}_{pq}(M) = 12f + \cdots \tag{5.281}$$

従って

$$0 = \frac{1}{4}R^{\mathrm{cov}\,q\lambda}_{\nu\lambda}(M) - \frac{1}{24}{e_\nu}^q R^{\mathrm{cov}\,kl}_{kl}(M) - \frac{1}{12}{\epsilon_\nu}^{q\rho\sigma}R_{\rho\sigma}(A) = {f_\nu}^q + \cdots \tag{5.282}$$

すなわち、f は次のように与えられる。

$${f_\nu}^q = -\frac{1}{4}R^{\mathrm{cov}(f=0)\,q\lambda}_{\nu\lambda}(M) + \frac{1}{24}{e_\nu}^q R^{\mathrm{cov}(f=0)\,kl}_{kl}(M) + \frac{1}{12}{\epsilon_\nu}^{q\rho\sigma}R_{\rho\sigma}(A) \tag{5.283}$$

ただし、$R^{\mathrm{cov}(f=0)}(M)$ は $R^{\mathrm{cov}}(M)$ の f 項を除いたものである。

拘束条件 (5.275) を用いると、${\phi_\mu}^\alpha$ に対する Q 変換の補正 (5.254) は次の形にまで整理することができる。

$$\delta'\phi_\nu = -\frac{i}{3}\gamma^5\gamma^\mu\xi R_{\mu\nu}(A) - \frac{i}{6}\gamma^5{\gamma_\nu}^{\kappa\lambda}\xi R_{\kappa\lambda}(A) = -\frac{i}{6}\gamma^5\gamma^{\kappa\lambda}\gamma_\nu\xi R_{\kappa\lambda}(A) \tag{5.284}$$

ここまでに得られた拘束条件をまとめておこう。

拘束条件

(5.224)

$$R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}}(P) = 0 \tag{5.285}$$

(5.235)

$$\gamma^\mu R_{\mu\nu}(Q) = 0 \tag{5.286}$$

(5.275)

$$R^{\mathrm{cov}}_{\mu\nu}(M) - \frac{1}{3}{\epsilon_{\mu\nu}}^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}(A) = 0 \tag{5.287}$$

これらは全て MDASK 不変である。

上記の拘束条件をおくことにより、ω、ϕ、f が複合場となり、Q 変換則に次の補正がつく。

$$\begin{aligned} \delta'\omega_{\mu\widehat{p}\widehat{q}} &= -\frac{1}{4}(\xi\gamma_\mu R_{\widehat{p}\widehat{q}}(Q)), & (5.288)\\ \delta'\phi_\nu &= -\frac{i}{3}\gamma^5\gamma^\mu\xi R_{\mu\nu}(A) - \frac{i}{6}\gamma^5{\gamma_\nu}^{\kappa\lambda}\xi R_{\kappa\lambda}(A) = -\frac{i}{6}\gamma^5\gamma^{\kappa\lambda}\gamma_\nu\xi R_{\kappa\lambda}(A) & (5.289)\end{aligned}$$

これまでに導入した拘束条件によって、e^m_μ、ψ^α_μ、c_μ、w_μ の上で $\delta^{\mathrm{full}}_{\mathrm{gc}} = 0$ が成り立つことが保障される。また、これら以外のゲージ場 ω、ϕ、f は複合場として表される。したがって全ての場の上で $\delta^{\mathrm{full}}_{\mathrm{gc}} = 0$ が成り立つことが保障される。

5.5.5 補正された代数

拘束条件の設定によって、Q 変換と P 変換は補正を受ける。これらの補正された変換がどのような代数を満足するかを見ておこう。その際、独立な場 e^m_μ、ψ^α_μ、w_μ、c_μ の上での代数を見れば十分である。

MDASK 変換については複合場も含め全ての場の変換則が変化しないから、代数もそのままである。

Q 変換と MDASK 変換の交換関係について見てみよう。独立な場に対しては Q 変換も MDASK 変換も補正が無いので、交換関係に対する補正項が現れる可能性があるのは、MDASK 変換をした結果現れる複合場に Q 変換が作用する場合である。しかし、ゲージ変換則を見てみると、独立な場に対する MDASK 変換を行っても複合場は現れない。したがって Q 変換と MDASK 変換の交換関係も補正される前と全く同じ交換関係が成り立つ。

Q 変換同士の反交換関係については、補正された Q 変換同士の反交換関係を補正された P 変換として定義したので、やはり交換関係は元の形がそのまま成り立つ。

P 変換と MDASK 変換の交換関係については、ヤコビ恒等式を用いることで

$$[P, O] = [\{Q, Q\}, O] = [Q, \{Q, O\}] + [Q, \{Q, O\}] \tag{5.290}$$

のように変形することができ、Q と MDASK 変換の交換関係を組み合わせとして与えられるので、交換関係が変化しないことがわかる。

以上のことから、ϵ_1 と ϵ_2 が P 変換以外の場合、重力多重項中の全ての場の上で次の交換関係が成り立つ。

$$[\delta(\epsilon_1)\delta(\epsilon_2) - \delta(\epsilon_2)\delta(\epsilon_1)]V = (-)^{XY}\epsilon_1^X\epsilon_2^Y f_{XY}{}^Z ZV \tag{5.291}$$

この式は形式的にゲージ変換の場合とまったく同じであるが、Q 変換が含まれる場合には全て補正された Q 変換で置き換えられているとする。また、右辺に P 変換があらわれる場合にはそれも補正された変換に置き換えられる。

独立場に対する P 変換の補正は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} P'_k e_\mu^m &= 0, & (5.292)\\ P'_k \psi_\mu^\alpha &= R_{k\mu}{}^\alpha(Q), & (5.293)\\ P'_k w_\mu^m &= R_{k\mu}(D), & (5.294)\\ P'_k c_\mu^m &= R_{k\mu}(A). & (5.295)\end{aligned}$$

これらは丁度補正される前のゲージ変換を用いた一般座標変換

$$\delta_{\rm gc}^{\rm full,ori}(\epsilon^\mu)V^X = \epsilon^\lambda R_{\lambda\mu}{}^X \tag{5.296}$$

の右辺を相殺し、$\delta_{\rm gc}^{\rm full,mod} = 0$ となるために必要な項である。$\delta_{\rm gc}^{\rm full,mod} = 0$ は複合場に対しても成り立つが、今度は Q 変換に対する補正も考慮しなければならない。すなわち、

$$0 = \delta_{\rm gc}^{\rm full,mod}(\epsilon^\mu) = \delta_{\rm gc}^{\rm full,ori}(\epsilon^\mu) - \epsilon^\mu\psi_\mu^\alpha Q'_\alpha - \epsilon^\mu e_\mu^k P'_k \tag{5.297}$$

が成り立つ。従って、P 変換の補正は

$$P'_k V_\mu^X = R_{k\mu}{}^X - \psi_k^\alpha Q'_\alpha V_\mu^X \tag{5.298}$$

となる。これは複合場だけではなく、独立なゲージ場に対しても成り立つ式である。

P 変換と Q 変換の交換関係は次のように求めることができる。まず、(5.31) より $[\delta_{\rm gc}^{\rm full,ori}(\epsilon^\mu), Q^{\rm ori}(\xi^\alpha)] = 0$ が成り立つ。このことを用いて $[\delta_{\rm gc}^{\rm full,mod}(\epsilon^\mu), Q^{\rm mod}(\xi^\alpha)] = 0$ がどのように与えられるかを考えてみよう。(5.31) を示す際には、ゲージ変換の交換関係が構造定数 $f_{XY}{}^Z$ によって与えられることを用いた。代数が補正された後でも、P 変換を含まない交換関係については、やはり構造定数 $f_{XY}{}^Z$

で与えられる。もし $[P,Q]$ についても同様のことが成り立てば $[P,Q]=0$ であるはずであるが、まだ実際にそうか分からない。さらに (5.31) を示す際には、ゲージ場のゲージ変換が $\delta V_\mu^Z = D_\mu\epsilon^Z$ と与えられることも用いたが、これも代数が補正された後には正しくない。以上のことを考慮すると、交換関係は次のように変更される。

$$[\delta_{\rm gc}^{\rm full,mod}(\epsilon^\mu), Q^{\rm mod}(\xi^\alpha)] = -\xi^\alpha\epsilon^\mu e_\mu^m[P_m^{\rm mod}, Q_\alpha^{\rm mod}] + \delta_X(\epsilon^\mu\delta'_Q(\xi^\alpha)V_\mu^X) \tag{5.299}$$

一方、拘束条件 $\delta_{\rm gc}^{\rm full,mod}=0$ が成り立つから、この式は常に 0 になるはずである。このことから、次の交換関係が得られる。

$$\xi^\alpha\epsilon^m[P_m^{\rm mod}, Q_\alpha^{\rm mod}] = \delta_X(\epsilon^\mu\delta'_Q(\xi^\alpha)V_\mu^X) \tag{5.300}$$

P 変換同士の交換関係も同様の方法で求めることができる。すなわち、$[\delta_{\rm gc}^{\rm full,ori}(\epsilon_1^\mu), P^{\rm ori}(\epsilon_2^m)]=0$ が成り立つことは知っているので、ここから変換則の補正を考慮することで $[\delta_{\rm gc}^{\rm full,mod}(\epsilon_1^\mu), P^{\rm mod}(\epsilon_2^m)]$ を計算すると、

$$\begin{aligned}[\delta_{\rm gc}^{\rm full,mod}(\epsilon_1^\mu), P^{\rm mod}(\epsilon_2^m)] &= -\epsilon_1^\mu e_\mu^m[P_m^{\rm mod}, \epsilon_2^n P_n^{\rm mod}] - \epsilon_1^\mu\psi_\mu^\alpha[Q_\alpha^{\rm mod}, \epsilon_2^n P_n^{\rm mod}] + \epsilon_1^\mu(\epsilon_2^m P'_m V_\mu^X)O_X \\ &= -\epsilon_1^\mu e_\mu^m[P_m^{\rm mod}, \epsilon_2^n P_n^{\rm mod}] - \epsilon_1^\mu\epsilon_2^\nu R_{\mu\nu}^{{\rm cov}\,Z}O_Z \end{aligned} \tag{5.301}$$

最後の行へ移る際に (5.298) と (5.300) を用いた。$R_{\mu\nu}^{{\rm cov}\,Z}$ は超共変化された曲率テンソルであり、次のように定義される。

$$R_{\mu\nu}^{{\rm cov}\,Z}O_Z = R_{\mu\nu}{}^X - \psi_\mu^\alpha Q'_\alpha V_\nu^X + \psi_\nu^\alpha Q'_\alpha V_\mu^X \tag{5.302}$$

$\delta_{\rm gc}^{\rm full,mod}$ が任意の場に対して成り立つことから (5.301) は 0 になるはずである。従って、次の交換関係が得られる。

$$[P_m^{\rm mod}, P_n^{\rm mod}] = -R_{mn}^{{\rm cov}\,Z}O_Z. \tag{5.303}$$

5.5.6 曲率テンソルの展開式

実際にラグランジアンなどを与える場合には、拘束条件を解いて得られた複合場の式を代入し、リーマン曲率テンソルなどを用いて書く必要がある。ここではフェルミオンを含まない部分に注目して補助場の式を曲率テンソルに代入した結果を与えておこう。

まず $R(A)$ はボゾン部分については複合場を含まないので、拘束条件を解く必要が無く、次のように与えられる。

$$R_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu c_\nu - \partial_\nu c_\mu \tag{5.304}$$

拘束条件を用いれば

$$R_{\mu\nu}(M) = -R_{\mu\nu}(D) = \frac{1}{3}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}(A) \tag{5.305}$$

$R(M)$ を与えるためには、補助場 f をまず求める必要がある。補助場 f は $R(\omega)$ を用いて書かれているが、ω は次のように与えられる。

$$\omega_\mu{}^{pq} = \omega_\mu{}^{pq}(e) + e_\mu^p w^q - e_\mu^q w^p \tag{5.306}$$

これを $R(\omega)$ に代入すれば

$$R_{\mu\nu}{}^{pq}(\omega) = R_{\mu\nu}{}^{pq}(\omega(e)) + e_\nu^p D_\mu^{\omega(e)}w^q - e_\nu^q D_\mu^{\omega(e)}w^p - e_\mu^p D_\nu^{\omega(e)}w^q + e_\mu^q D_\nu^{\omega(e)}w^p, \tag{5.307}$$

$$R_\mu{}^p(\omega) = R_\mu{}^p(\omega(e)) - 2D_\mu^{\omega(e)}w^p - e_\mu^p D_q^{\omega(e)}w^q, \tag{5.308}$$

$$R(\omega) = R(\omega(e)) - 6D_q^{\omega(e)}w^q \tag{5.309}$$

これらを用いることで

$$\begin{aligned} f_\mu{}^p &= -\frac{1}{4}R_\mu{}^p(\omega)+\frac{1}{24}e_\mu{}^pR(\omega)+\frac{1}{12}\epsilon_\mu{}^{pqr}R_{qr}(A) \\ &= -\frac{1}{4}R_\mu{}^p(\omega(e))+\frac{1}{24}e_\mu{}^pR(\omega(e))+\frac{1}{12}\epsilon_\mu{}^{pqr}R_{qr}(A)+\frac{1}{2}D_\mu^{\omega(e)}w^p \end{aligned} \tag{5.310}$$

これを $R(M)$ の式に代入すると、

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}{}^{pq}(M) &= R_{\mu\nu}{}^{pq}(\omega)+2(e_\mu{}^pf_\nu{}^q-e_\mu{}^qf_\nu{}^p-e_\nu{}^pf_\mu{}^q+e_\nu{}^qf_\mu{}^p) \\ &= R_{\mu\nu}{}^{pq}(\omega(e))+4\left[-\frac{1}{2}e_\mu^pR_\nu{}^q(\omega(e))+\frac{1}{12}e_\mu^pe_\nu{}^qR(\omega(e))+\frac{1}{6}e_\mu^p\epsilon_\nu{}^{qrs}R_{rs}(A)\right]_{[\mu\nu][pq]} \end{aligned} \tag{5.311}$$

ただし、$[\cdots]_{[\mu\nu][pq]}$ は μ と ν および p と q のそれぞれに対する反対称化を意味する。

5.6 物質場の導入

5.6.1 物質場に対する拘束条件

物質場の変換則は次の二つの関係式が成り立つことを要請することで決めることができる。

$$0=\delta_{\rm gc}^{\rm full}(\epsilon^\mu)\phi=\epsilon^\mu\mathcal{D}_\mu\phi=\epsilon^\mu D_\mu^{\rm cov}\phi-\epsilon^mP_m\phi \tag{5.312}$$

$$[\epsilon_1^{X'}O_{X'},\epsilon_2^{X'}O_{X'}]\phi=\epsilon_2^{Y'}\epsilon_1^{X'}f_{X'Y'}{}^ZO_Z\phi \tag{5.313}$$

ここで、大域座標の添え字を持たない場 ϕ に対する共変微分 $D_\mu^{\rm cov}$ を次のように定義する。

$$D_\mu^{\rm cov}\phi=\partial_\mu\phi-V_\mu{}^{X'}O_{X'}\phi. \tag{5.314}$$

ただし、プライム付きの添え字は P_m を除く生成子についての和を取ることを意味する。上記の二つの関係式が成り立てば、P 変換を含む場合にもゲージ場の上での代数と全く同じものが成り立つことを示すことができる。

これら二つの関係式を用いることで物質多重項を構成し、その変換則を決めることができる。まず、物質多重項には有限個の場が含まれることを仮定しよう。すると、最小のワイルウェイトを持つ場が必ず存在する。その場を X とし、多重項の「初項」と呼ぶことにする。X に対して S 変換か K 変換を行えば、必ずワイルウェイトが減少するが、そのような場が存在すると X が多重項中の最小ワイルウェイトの場であるという仮定に反する。従って次の式が成り立つ。

$$S_\alpha X=K_mX=0. \tag{5.315}$$

多重項の初項に課されるこの条件を初項条件と呼ぶことにする。$S_\alpha X=0$ が成り立てば、交換関係を用いることで $K_{\hat{m}}X=0$ も示されるから、条件として課すのは $S_\alpha X=0$ だけでよい。

初項 X のワイルウェイト、カイラルウェイト、スピンを適当に仮定しよう。これは X に対する MDA 変換を与えることと等価である。

X に対して Q 変換を繰り返し行うことによって多重項中の他の場を与えることができる。ただし、Q 変換の 4 つの成分それぞれは自分自身と反可換であり、同じ Q 変換を二回連続して行うと 0 になる。また、Q 変換の順序を変えて作用させたものは、(5.312) と (5.313) を組み合わせることで得られる

$$\{Q_\alpha,Q_\beta\}\phi=-\frac{1}{4}(\gamma^m)_{\alpha\beta}P_m\phi=-\frac{1}{4}(\gamma^m)_{\alpha\beta}D_m^{\rm cov}\phi \tag{5.316}$$

を用いて互いに関係しているから独立ではない。従って、X の一つの成分に対して Q 変換を作用させることで得ることができる独立な成分は最高でも $2^4 = 16$ 個である。たとえば次のように成分場を与えることができる。

$$\boldsymbol{V}(X) = \begin{bmatrix} X & Q_{\overline{\alpha}}X & Q_{\overline{\alpha}}Q^{\overline{\alpha}}X \\ \\ Q_{\underline{\alpha}}X & i(\gamma^5\gamma_{\hat{m}})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}[Q_{\overline{\alpha}}, Q_{\underline{\beta}}]X & Q_{\overline{\beta}}Q^{\overline{\beta}}Q_{\underline{\alpha}}X \\ \\ Q_{\underline{\alpha}}Q^{\underline{\alpha}}X & Q_{\underline{\beta}}Q^{\underline{\beta}}Q_{\overline{\alpha}}X & Q_{\overline{\alpha}}Q_{\underline{\beta}}Q^{\underline{\beta}}Q^{\overline{\alpha}}X \end{bmatrix} \tag{5.317}$$

X が複素スカラー場であればこの中には、4 つの複素スカラー場、一つの複素ベクトル場（4 成分）4 つのワイルスピノル場が含まれる。

初項条件を満足する場 X が与えられれば、(5.317) のように成分場を定義することで常に X を初項とする多重項を作ることができる。このような多重項を $\boldsymbol{V}(X)$ と表すことにする。ただし、初項 X は定まったウェイトとスピンを持つことを常に仮定する。多重項 $\boldsymbol{V}(X)$ のウェイトは初項 X のウェイトによって定義される。

これら 16 個の成分に対する MDASK 変換は交換関係 (5.313) を用いることで初項の MDASK 変換に帰着させることができる。また、Q 変換や P 変換についても適当に交換関係を用いることで他の成分場の組み合わせとして与えることができる。

S 変換は場に線形に作用するので、スピン、ウェイトの等しい二つの場 X_1 と X_2 がどちらも初項条件 (5.315) を満足すればそれらの和も初項条件を満足する。したがって、$X_1 + X_2$ を初項とする多重項を構成することができる。これによって二つの多重項 $\boldsymbol{V}(X_1)$ と $\boldsymbol{V}(X_2)$ の和を定義する。すなわち

$$\boldsymbol{V}(X_1) + \boldsymbol{V}(X_2) \equiv \boldsymbol{V}(X_1 + X_2) \tag{5.318}$$

超対称変換の線形性より、$\boldsymbol{V}(X_1) + \boldsymbol{V}(X_2)$ の成分場はそれぞれの多重項の対応する成分場の和である。

S 変換は場の積に作用する際にライプニッツルールを満足する。したがって、二つの場 X_1 と X_2 がどちらも初項条件 (5.315) を満足すれば、それらの積 X_1X_2 も同様に初項条件を満足し、X_1X_2 を初項とする多重項 $\boldsymbol{V}(X_1X_2)$ を構成することができる。この多重項を、二つの多重項の積として定義する。すなわち、

$$\boldsymbol{V}(X_1)\boldsymbol{V}(X_2) \equiv \boldsymbol{V}(X_1X_2) \tag{5.319}$$

$\boldsymbol{V}(X_1)$ と $\boldsymbol{V}(X_2)$ のウェイトをそれぞれ (n_D, n_A) および (n'_D, n'_A) とすれば $\boldsymbol{V}(X_1X_2)$ のウェイトはそれらの和 $(n_D + n'_D, n_A + n'_A)$ である。二つの表現の積 $\boldsymbol{V}(X_1)\boldsymbol{V}(X_2)$ の成分場を、$\boldsymbol{V}(X_1)$ と $\boldsymbol{V}(X_2)$ の成分場を用いて表すには、(5.315) による $\boldsymbol{V}(X_1X_2)$ の成分場の定義式に対して Q 変換のライプニッツ則を適用すればよい。

一般に、初項条件を満足するいくつかの場があったときに、それらの任意の関数を初項とする多項式も同様に定義される。

$$f(\boldsymbol{V}(X_1), \ldots, \boldsymbol{V}(X_k)) \equiv \boldsymbol{V}(f(X_1, \ldots, X_k)) \tag{5.320}$$

5.6.2 共変微分

任意の場の共変微分を P_m 以外の生成子

$$\delta = \epsilon^{Y'} O_{Y'} \tag{5.321}$$

Soryushiron Kenkyu

によって変換してみよう。

$$\begin{aligned}\delta(D^{\rm cov}_\mu\phi) &= \partial_\mu\delta\phi-\delta V_\mu{}^{X'}O_{X'}\phi-V_\mu{}^{X'}\delta(O_{X'}\phi)\\ &= \partial_\mu(\epsilon^{Y'}O_{Y'}\phi)-(\partial_\mu\epsilon^{X'}+(-)^{YZ'}V_\mu{}^Y\epsilon^{Z'}f_{YZ'}{}^{X'}+\delta'V_\mu{}^{X'})O_{X'}\phi-V_\mu{}^{X'}\epsilon^{Y'}O_{Y'}O_{X'}\phi\\ &= \epsilon^{Y'}\partial_\mu(O_{Y'}\phi)-\epsilon^{Z'}V_\mu{}^Yf_{YZ'}{}^{X'}O_{X'}\phi-\delta'V_\mu{}^{X'}O_{X'}\phi-V_\mu{}^{X'}\epsilon^{Y'}O_{Y'}O_{X'}\phi \qquad (5.322)\end{aligned}$$

パラメータの微分を含む項は相殺している。その意味でこの微分は共変的である。さらに (5.322) の最後の項を

$$O_{Y'}O_{X'}\phi=f_{Y'X'}{}^ZO_Z\phi+(-)^{Y'X'}O_{X'}O_{Y'}\phi \qquad (5.323)$$

と変形すれば、次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}\delta(D^{\rm cov}_\mu\phi) &= \epsilon^{Y'}\partial_\mu(O_{Y'}\phi)-\epsilon^{Y'}V_\mu{}^{X'}O_{X'}O_{Y'}\phi\\ &\quad -\epsilon^{Z'}V_\mu{}^Yf_{YZ'}{}^{X'}O_{X'}\phi+\epsilon^{Y'}V_\mu{}^{X'}f_{X'Y'}{}^ZO_Z\phi\\ &\quad -(\delta'V_\mu{}^{X'})O_{X'}\phi. \qquad (5.324)\end{aligned}$$

右辺の一行目は、$O_{Y'}\phi$ の共変微分になっている。二行目の二つの項は互いにほぼ相殺するが、添え字が P 変換を含むかどうかについて完全に一致していないので、P 変換を含む部分だけが次のように残る。

$$\delta(D^{\rm cov}_\mu\phi)=\epsilon^{Y'}D^{\rm cov}_\mu(O_{Y'}\phi)-\epsilon^{Z'}e_\mu{}^{\widehat m}f_{P_{\widehat m}Z'}{}^{X'}O_{X'}\phi+\frac{1}{4}(\xi\gamma^{\widehat m}\psi_\mu)P_{\widehat m}\phi-(\delta'V_\mu{}^{X'})O_{X'}\phi \quad (5.325)$$

ここで、右辺第 3 項が次のように表されることに注目しよう。

$$\frac{1}{4}(\xi\gamma^{\widehat m}\psi_\mu)P_{\widehat m}\phi=\delta_Qe_\mu{}^{\widehat m}D^{\rm cov}_{\widehat m}\phi=(\delta e_\mu{}^{\widehat m}-\lambda_\mu{}^{\widehat m}+\sigma e_\mu{}^{\widehat m})D^{\rm cov}_{\widehat m}\phi \qquad (5.326)$$

右辺の括弧の中の $\delta e_\mu{}^{\widehat m}$ の部分は、(5.325) の左辺の共変微分 $D^{\rm cov}_\mu=e_\mu{}^{\widehat m}D^{\rm cov}_{\widehat m}$ を $D^{\rm cov}_{\widehat m}$ で置き換えれば消去することができる。こうして次の式を得る。

$$\delta(D^{\rm cov}_{\widehat m}\phi)=\epsilon^{Y'}D^{\rm cov}_{\widehat m}(O_{Y'}\phi)-\epsilon^{Z'}f_{P_{\widehat m}Z'}{}^{X'}O_{X'}\phi-\lambda_{\widehat m}{}^{\widehat n}D^{\rm cov}_{\widehat n}\phi+\sigma D^{\rm cov}_{\widehat m}\phi-(\delta'V_\mu{}^{X'})O_{X'}\phi \quad (5.327)$$

変換が Q 変換である場合には、次の式が成り立つ。

$$\delta_Q(D^{\rm cov}_{\widehat m}\phi)=\xi^\alpha D^{\rm cov}_{\widehat m}(Q_\alpha\phi)-(\delta'V_{\widehat m}{}^{X'})O_{X'}\phi \qquad (5.328)$$

(5.327) を用いると、共変微分の共変微分が次のように分解できる。

$$\begin{aligned}D^{\rm cov}_{\widehat m}D^{\rm cov}_{\widehat n}\phi &= \partial_{\widehat m}D^{\rm cov}_{\widehat n}\phi-V^{Y'}_{\widehat m}D^{\rm cov}_{\widehat n}(O_{Y'}\phi)+\omega_{\widehat m\widehat n}{}^{\widehat k}D^{\rm cov}_{\widehat k}\phi-w_{\widehat m}D^{\rm cov}_{\widehat n}\phi\\ &\quad +V^{Y'}_{\widehat m}f_{P_{\widehat n}Y'}{}^{Z'}O_{Z'}\phi+\psi_{\widehat m}{}^\alpha Q'_\alpha V_{\widehat n}{}^{X'}O_{X'}\phi \qquad (5.329)\end{aligned}$$

第 1 項の外側の微分 $\partial_{\widehat m}$ が $D^{\rm cov}_{\widehat n}\phi=e_{\widehat n}{}^\nu D^{\rm cov}_\nu\phi$ の多脚場に作用して現れる項は、一行目のそのほかの二つの項と組み合わせて $D^{MD}_\mu e^{\widehat k}_\lambda$ の形にまとめることができる。すなわち、

$$\begin{aligned}\partial_{\widehat m}D^{\rm cov}_{\widehat n}\phi+\omega_{\widehat m\widehat n}{}^{\widehat k}D^{\rm cov}_{\widehat k}\phi-w_{\widehat m}D^{\rm cov}_{\widehat n}\phi &= e^\mu_{\widehat m}e^\nu_{\widehat n}\partial_\mu D^{\rm cov}_\nu\phi-e^\mu_{\widehat m}e^\lambda_{\widehat n}(\partial_\mu e^{\widehat k}_\lambda+\omega_\mu{}^{\widehat k}{}_{\widehat l}e^{\widehat l}_\lambda+w_\mu e^{\widehat k}_\lambda)D^{\rm cov}_{\widehat k}\phi\\ &= e^\mu_{\widehat m}e^\nu_{\widehat n}\partial_\mu D^{\rm cov}_\nu\phi-e^\mu_{\widehat m}e^\lambda_{\widehat n}(D^{(MD)}_\mu e^{\widehat k}_\lambda)D^{\rm cov}_{\widehat k}\phi \qquad (5.330)\end{aligned}$$

m と n についての反対称部分をとれば、$D^{MD}_\mu e^{\widehat k}_\lambda$ の項は捩率のグラビティーノ項になり、

$$(\partial_{\widehat m}D^{\rm cov}_{\widehat n}\phi+\omega_{\widehat m\widehat n}{}^{\widehat k}D^{\rm cov}_{\widehat k}\phi-w_{\widehat m}D^{\rm cov}_{\widehat n}\phi)-[\widehat m\widehat n]=e^\mu_{\widehat m}e^\nu_{\widehat n}\partial_\mu D^{\rm cov}_\nu\phi-[\widehat m\widehat n]-T^{\widehat k}_{\widehat m\widehat n}(\psi)D^{\rm cov}_{\widehat k}\phi \quad (5.331)$$

さらに、(5.331) の第 1 項と (5.329) の第 2 項を定義に従って分解し、整理すると、

$$\begin{aligned} & \partial_\mu\partial_\nu\phi - (\partial_\mu V_\nu^{Y'})O_{Y'}\phi - V_\nu^{Y'}\partial_\mu(O_{Y'}\phi) - V_\mu^{Y'}\partial_\nu(O_{Y'}\phi) + V_\mu^{Y'}V_\nu^{X'}(O_{X'}O_{Y'}\phi) - [\mu\nu] \\ = \;& -(\partial_\mu V_\nu^{Y'})O_{Y'}\phi + V_\mu^{Y'}V_\nu^{X'}(O_{X'}O_{Y'}\phi) - [\mu\nu] \\ = \;& -(\partial_\mu V_\nu^{Y'} - \partial_\nu V_\mu^{Y'})O_{Y'}\phi - V_\nu^{Y'}V_\mu^{X'}f_{X'Y'}{}^Z O_Z\phi \end{aligned} \tag{5.332}$$

これはほぼ $-R_{\mu\nu}^{Y'}O_{Y'}\phi$ を与えるが、添え字が $P_{\widehat{m}}$ を含むかどうかでずれが生じる。

$$= -R_{\mu\nu}{}^{Y'}O_{Y'}\phi + V_\nu^{Y'}e_\mu^{\widehat{m}}f_{P_{\widehat{m}}Y'}{}^{Z'}O_{Z'}\phi - V_\mu^{X'}e_\nu^{\widehat{n}}f_{P_{\widehat{n}}X'}{}^{Z'}O_{Z'}\phi + \frac{1}{4}(\psi_\mu\gamma^{\widehat{m}}\psi_\nu)D_{\widehat{m}}^{\mathrm{cov}}\phi \tag{5.333}$$

この第 2、第 3 項はちょうど (5.329) の二行目第 1 項と、第 4 項は (5.331) の最後の項と相殺し、最終的に次の式を得る。

$$[D_{\widehat{m}}^{\mathrm{cov}}, D_{\widehat{n}}^{\mathrm{cov}}]\phi = -R_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{Y'}O_{Y'}\phi + \Big(\psi_{\widehat{m}}{}^\alpha Q'_\alpha V_{\widehat{n}}{}^{X'}O_{X'}\phi - [\widehat{m}\widehat{n}]\Big) \tag{5.334}$$

5.7 カイラル多重項

初項条件 (5.315) よりもさらに強い次の条件

$$S_{\overline{\alpha}}\phi = S_{\underline{\alpha}}\phi = Q_{\underline{\alpha}}\phi = 0 \tag{5.335}$$

を満足する場 ϕ を初項とする多重項を考えてみよう。

ϕ に $Q_{\underline{\alpha}}$ 変換を作用させると消えてしまうから、成分場の構成に使用できるのはカイラリティが正の $Q_{\overline{\alpha}}$ の二成分だけである。したがって $2^2 = 4$ つの成分を含む多重項が得られる。この多重項はカイラル多重項と呼ばれる。カイラル多重項の初項に対する条件 (5.335) をカイラル条件と呼ぶことにしよう。ϕ がカイラル条件を満足するとき、多重項 $\boldsymbol{V}(\phi)$ がカイラル多重項であることを強調するために $\boldsymbol{\Sigma}(\phi)$ と書くことにする。

ϕ がカイラル条件 (5.335) を満足するとき、その複素共役 ϕ^* は次の条件を満足する。

$$S_{\overline{\alpha}}\phi = S_{\underline{\alpha}}\phi = Q_{\overline{\alpha}}\phi = 0 \tag{5.336}$$

この条件を満足する初項より構成される多重項 $\boldsymbol{V}(\phi^*)$ は反カイラル多重項と呼ばれ、$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}(\phi^*)$ のように表すことにする。

カイラル多重項の成分場

カイラル多重項に含まれる成分場を次のように ϕ, χ, F とおく。

$$\boldsymbol{\Sigma}(\phi) = \Big(\quad \phi, \quad \chi_{\overline{\alpha}} = 2Q_{\overline{\alpha}}\phi, \quad F = Q_{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}} = 2Q^2\phi = 2Q_{\overline{\alpha}}Q^{\overline{\alpha}}\phi \quad \Big). \tag{5.337}$$

これは、超場形式でのカイラル多重項の成分場の定義 (4.234) と対応している。

ϕ のワイルウェイトとカイラルウェイトを n_D および n_A とすれば、カイラル多重項の成分場はそれぞれ次のウェイトを持つ。

	ϕ	$\chi^{\overline{\alpha}}$	F
Weyl weight	n_D	$n_D + 1/2$	$n_D + 1$
chiral weight	n_A	$n_A - 1$	$n_A - 2$

(5.338)

カイラル多重項のウェイトと言った場合にはその成分場 ϕ のウェイトをさす。カイラル条件 (5.335) より $\{S_{\underline{\alpha}}, Q_{\underline{\beta}}\}\phi = 0$ であり、交換関係 (5.159) を用いると、次の関係式を示すことができる。

$$n_D = \frac{3}{2}n_A. \tag{5.339}$$

つまり、カイラル多重項のワイルウェイトとカイラルウェイトは独立に取ることはできない。

物質場、すなわちカイラル多重項とベクトル多重項の変換則などは [13] に与えられている。またそこではゲージ固定によってどのようにコンフォーマル超重力理論からポアンカレ超重力理論を得ることができるかが与えられている。

5.7.1 変換則

MDA 変換はスピンとウェイトが与えられれば決まるので、改めて考える必要はない。P 変換と K 変換については Q 変換と S 変換の交換関係として与えられるから、ここでは Q 変換と S 変換を決めることを考えよう。

まず、成分場 ϕ について見てみよう。S 変換と $Q_{\underline{\alpha}}$ 変換は、ϕ に対する初項条件 (5.335) により 0 である。また、$Q_{\overline{\alpha}}$ 変換は (5.337) に与えられた χ の定義式で与えられる。こうして、スカラー場 ϕ に対する変換則が決定された。

ϕ の変換則

$$\delta\phi = -\frac{1}{2}\xi_{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}} \tag{5.340}$$

これを用いると、(5.314) により定義される共変微分 $D_\mu^{\rm cov}\phi$ の具体形を次のように与えることができる。

$$D_\mu^{\rm cov}\phi = \partial_\mu\phi - n_D w_\mu\phi - in_A c_\mu\phi + \frac{1}{2}\psi_{\mu\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}} \tag{5.341}$$

次に、フェルミオン χ の変換則を決定しよう。まず、$Q^{\overline{\alpha}}$ 変換については、(5.337) に与えられた χ の定義式を用いると、$Q^{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\beta}} = 2Q^{\overline{\alpha}}Q^{\overline{\beta}}\phi$ であるが、$\overline{\alpha}$ と $\overline{\beta}$ について対称な部分については、交換関係を用いれば 0 である。したがってこの右辺は $\mathbf{1}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}}$ に比例しており、(5.337) で定義された成分場 F を用いて次のように書くことができる。

$$Q^{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\beta}} = -\frac{1}{2}\mathbf{1}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}}F \tag{5.342}$$

あるいは、変換パラメータをあらわに書けば $(\xi^{\overline{\alpha}}Q_{\overline{\alpha}})\chi^{\overline{\beta}} = (1/2)\xi^{\overline{\beta}}F$ となる。

$\chi^{\overline{\alpha}}$ の $Q_{\underline{\alpha}}$ 変換は、(5.337) に与えられた χ の定義式および (5.335) を用いて

$$Q^{\underline{\alpha}}\chi^{\overline{\beta}} = 2\{Q^{\underline{\alpha}}, Q^{\overline{\beta}}\}\phi = -\frac{1}{2}(\gamma^\mu)^{\underline{\alpha}\overline{\beta}}D_\mu^{\rm cov}\phi \tag{5.343}$$

となる。

χ の $S_{\underline{\alpha}}$ 変換は $S_{\underline{\alpha}}\chi_{\overline{\beta}} = 2\{S_{\underline{\alpha}}, Q_{\overline{\beta}}\}\phi = 0$ より 0 である。一方 $S_{\overline{\alpha}}$ 変換は

$$\begin{aligned} S_{\overline{\alpha}}\chi_{\overline{\beta}} &= 2\{S_{\overline{\alpha}}, Q_{\overline{\beta}}\}\phi \\ &= \left(-\frac{1}{2}D + \frac{3i}{4}A\right)\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\phi \\ &= -\left(\frac{1}{2}n_D + \frac{3}{4}n_A\right)\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\phi \\ &= -\frac{3}{2}n_A\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\phi \end{aligned} \tag{5.344}$$

Soryushiron Kenkyu

となる。以上で χ の Q 変換および S 変換が全て決定された。χ の K 変換は、ウェイトが $n_D - 1/2$ の場を与えるが、そのようなものは存在しないので 0 である。

χ の変換則をまとめておこう。

χ の変換則

$$\delta\chi^{\overline{\alpha}} = \frac{1}{2}\xi^{\overline{\alpha}}F - \frac{1}{2}(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}D_\mu^{\mathrm{cov}}\phi + \frac{3}{2}n_A\zeta^{\overline{\alpha}}\phi \tag{5.345}$$

共変微分は

$$\begin{aligned} D_\mu^{\mathrm{cov}}\chi^{\overline{\alpha}} &= \partial_\mu\chi^{\overline{\alpha}} + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{pq}(\gamma_{pq})^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\chi^{\overline{\beta}} - \frac{1}{2}\psi_\mu{}^{\overline{\alpha}}F + \frac{1}{2}(\gamma^\lambda)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\psi_\mu{}^{\underline{\beta}}D_\lambda^{\mathrm{cov}}\phi \\ &\quad - \left(\frac{3}{2}n_A + \frac{1}{2}\right)w_\mu\chi^{\overline{\alpha}} - i(n_A - 1)c_\mu\chi^{\overline{\alpha}} - \frac{3}{2}n_A\phi_\mu{}^{\overline{\alpha}}\phi \end{aligned} \tag{5.346}$$

最後に F の変換則を決定しよう。(5.342) の両辺に $Q^{\overline{\gamma}}$ を作用させると、$Q^{\overline{\gamma}}Q^{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\beta}} = -(1/2)\mathbf{1}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}}Q^{\overline{\gamma}}F$ が得られるが、この左辺は $\overline{\gamma}$ と $\overline{\alpha}$ について対称であるから、$\mathbf{1}_{\overline{\gamma}\overline{\alpha}}$ を両辺にかけると、$Q^{\overline{\alpha}}F = 0$ が得られる。したがって、F にこれ以上 $Q^{\overline{\alpha}}$ 変換を作用させても新たな場を得ることはできず、ϕ、χ、F だけで閉じた表現をなす。

(5.342) の両辺に $Q^{\underline{\gamma}}$ を作用させると、交換関係を用いて次のように変形できる。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\mathbf{1}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}}Q^{\underline{\gamma}}F &= Q^{\underline{\gamma}}Q^{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\beta}} \\ &= \{Q^{\underline{\gamma}}, Q^{\overline{\alpha}}\}\chi^{\overline{\beta}} - Q^{\overline{\alpha}}Q^{\underline{\gamma}}\chi^{\overline{\beta}} \\ &= -\frac{1}{4}(\gamma^\mu)^{\underline{\gamma}\overline{\alpha}}D_\mu^{\mathrm{cov}}\chi^{\overline{\beta}} - 2Q^{\overline{\alpha}}\{Q^{\underline{\gamma}}, Q^{\overline{\beta}}\}\phi \\ &= -\frac{1}{4}(\gamma^\mu)^{\underline{\gamma}\overline{\alpha}}D_\mu^{\mathrm{cov}}\chi^{\overline{\beta}} + \frac{1}{2}Q^{\overline{\alpha}}(\gamma^\mu)^{\underline{\gamma}\overline{\beta}}D_\mu^{\mathrm{cov}}\phi \end{aligned} \tag{5.347}$$

最後の項の $Q^{\overline{\alpha}}$ 変換は $\gamma^\mu = \gamma^m e_m{}^\mu$ に含まれる $e_m{}^\mu$ と、$D_\mu^{\mathrm{cov}}\phi$ の両方に作用する。$D_\mu^{\mathrm{cov}}\phi$ の $Q^{\overline{\alpha}}$ 変換については、(5.328) を用いれば、次の式が得られる。

$$Q_{\overline{\alpha}}D_m^{\mathrm{cov}}\phi = \frac{1}{2}D_m^{\mathrm{cov}}\chi_{\overline{\alpha}} \tag{5.348}$$

これを (5.347) に代入すると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\mathbf{1}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}}Q^{\underline{\gamma}}F &= -\frac{1}{4}(\gamma^\mu)^{\underline{\gamma}\overline{\alpha}}D_\mu^{\mathrm{cov}}\chi^{\overline{\beta}} + \frac{1}{4}(\gamma^\mu)^{\underline{\gamma}\overline{\beta}}D_\mu^{\mathrm{cov}}\chi^{\overline{\alpha}} \\ &= \frac{1}{4}\mathbf{1}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\gamma^\mu)^{\underline{\gamma}}{}_{\overline{\delta}}D_\mu^{\mathrm{cov}}\chi^{\overline{\delta}} \end{aligned} \tag{5.349}$$

したがって、F の $Q^{\underline{\gamma}}$ 変換則は次のようになる。

$$Q^{\underline{\gamma}}F = -\frac{1}{2}(\gamma^\mu)^{\underline{\gamma}}{}_{\overline{\delta}}D_\mu^{\mathrm{cov}}\chi^{\overline{\delta}} \tag{5.350}$$

次に S 変換であるが、

$$\begin{aligned} S_{\overline{\alpha}}\mathbf{1}_{\overline{\beta}\overline{\gamma}}F &= -2S_{\overline{\alpha}}Q_{\overline{\beta}}\chi_{\overline{\gamma}} \\ &= -2\{S_{\overline{\alpha}}, Q_{\overline{\beta}}\}\chi_{\overline{\gamma}} + 2Q_{\overline{\beta}}S_{\overline{\alpha}}\chi_{\overline{\gamma}} \\ &= -2\left(\frac{1}{8}(\gamma_{pq})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}M^{pq} - \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}D + \frac{3i}{8}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}A\right)\chi_{\overline{\gamma}} - 3n_A\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\gamma}}Q_{\overline{\beta}}\phi \\ &= \frac{1}{8}(\gamma_{pq})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\gamma^{pq}\chi)_{\overline{\gamma}} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\chi_{\overline{\gamma}} + \frac{3}{2}n_A\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\chi_{\overline{\gamma}} - \frac{3}{2}n_A\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\gamma}}\chi_{\overline{\beta}} \end{aligned} \tag{5.351}$$

うしろ二つの項は $\overline{\beta}\overline{\gamma}$ について反対称であるが、実ははじめ二つの項も $\overline{\beta}\overline{\gamma}$ について反対称であることが分かる。このことは、たとえば $(\gamma^{mn})^{\overline{\beta}\overline{\gamma}}$ を掛けてみればわかる。したがって、フィルツ変換の結果、

$$S_{\overline{\alpha}}F = -\left(\frac{3}{2}n_A - 1\right)\chi_{\overline{\alpha}} \tag{5.352}$$

が得られる。

$S_{\underline{\alpha}}$ 変換は 0 であることが $S_{\underline{\alpha}}\mathbf{1}_{\overline{\beta}\overline{\gamma}}F = -2\{S_{\underline{\alpha}}Q_{\overline{\beta}}\}\chi_{\overline{\gamma}} = 0$ のように示される。K_m 変換についても、$\{S_{\overline{\alpha}}, S_{\underline{\beta}}\}F = S_{\underline{\beta}}\left(\frac{3}{2}n_A - 1\right)\chi_{\overline{\alpha}} = 0$ よりやはり 0 である。

F の変換則

$$\delta F = \frac{1}{2}\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu)^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}D^{\mathrm{cov}}_\mu\chi^{\overline{\beta}} + \left(\frac{3}{2}n_A - 1\right)\zeta_{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}} \tag{5.353}$$

こうして得られた全ての変換則をワイル表示に直してまとめておこう。

カイラル多重項の変換則

カイラル多重項は $S_{\underline{\alpha}}$ 変換と K_m 変換のもとで不変である。スピン、ウェイトを見れば M、D、A 変換則は直ちに分かるのでここでは省略した。また、一般座標変換も省略した。以下に与えるのは $Q_{\overline{\alpha}}$、$Q_{\underline{\alpha}}$、$S_{\overline{\alpha}}$ に対する変換則である。ワイル表示を用いる。

$$\delta\phi = \frac{1}{2}\xi\chi, \tag{5.354}$$

$$\delta\chi = \frac{1}{2}\xi F - \frac{i}{2}\sigma^\mu\overline{\xi}D^{\mathrm{cov}}_\mu\phi + \frac{3}{2}n_A\zeta\phi, \tag{5.355}$$

$$\delta F = \frac{i}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu D^{\mathrm{cov}}_\mu\chi - \left(\frac{3}{2}n_A - 1\right)\zeta\chi \tag{5.356}$$

共変微分は次のように与えられる。

$$D^{\mathrm{cov}}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - \frac{3}{2}n_A w_\mu\phi - in_A c_\mu\phi - \frac{1}{2}\psi_\mu\chi, \tag{5.357}$$

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{cov}}_\mu\chi &= \partial_\mu\chi + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{pq}\sigma_{pq}\chi - \frac{1}{2}\psi_\mu F + \frac{i}{2}\sigma^\lambda\overline{\psi}_\mu D^{\mathrm{cov}}_\lambda\phi \\ &\quad - \left(\frac{3}{2}n_A + \frac{1}{2}\right)w_\mu\chi - i(n_A - 1)c_\mu\chi - \frac{3}{2}n_A\phi_\mu\phi \end{aligned} \tag{5.358}$$

5.7.2 運動多重項

X が初項条件を満足するスカラー場であるとしよう。このとき次の式が成り立つ。

$$Q_{\underline{\alpha}}Q_{\underline{\beta}}Q^{\underline{\beta}}X = 0, \tag{5.359}$$

$$\begin{aligned} S_{\overline{\alpha}}Q_{\underline{\beta}}Q^{\underline{\beta}}X &= Q_{\underline{\beta}}Q^{\underline{\beta}}S_{\overline{\alpha}}X \\ &= 0, \end{aligned} \tag{5.360}$$

$$\begin{aligned} S_{\underline{\alpha}}Q_{\underline{\beta}}Q^{\underline{\beta}}X &= \{S_{\underline{\alpha}}, Q_{\underline{\beta}}\}Q^{\underline{\beta}}X - Q_{\underline{\beta}}\{S_{\underline{\alpha}}, Q^{\underline{\beta}}\}X \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}n_D + \frac{3}{4}n_A\right)Q_{\underline{\alpha}}X \end{aligned} \tag{5.361}$$

したがって、もし X のウェイトが

$$1-\frac{1}{2}n_D+\frac{3}{4}n_A=0 \tag{5.362}$$

を満足すれば、$Q_{\underline{\beta}}Q_{\underline{\beta}}X$ はカイラル条件 (5.335) を満足する。したがってこれを初項としてカイラル多重項を構成することができる。これは運動多重項（kinetic multiplet）と呼ばれる。

例えば、カイラル多重項 $\Phi=\mathbf{\Sigma}(\phi)$ のウェイトが $(n_D,n_A)=(1,2/3)$ のとき、初項の複素共役 ϕ^* はウェイト $(n_D,n_A)=(1,-2/3)$ を持ち、条件 (5.362) が満足されるから、運動多重項

$$T(\Phi^*)=\mathbf{\Sigma}(F^*)=\mathbf{\Sigma}(2Q_{\underline{\alpha}}Q^{\underline{\alpha}}\phi^*) \tag{5.363}$$

を定義することができる。（カイラル多重項のウェイトが $n_D=1$ のときに成分場 F^* がカイラル条件を満足することは変換則 (5.353) からも分かる。）

運動多重項は定義できるのは、反カイラル多重項についてだけではない。一般のベクトル多重項に対しても、ウェイトが (5.362) を満足していれば運動多重項を定義することができる。また、一般のベクトル多重項 $V=\boldsymbol{V}(B)$ とカイラル多重項 $\Phi=\mathbf{\Sigma}(\phi)$ の積 ΦV の運動多重項を定義すると、

$$T(\Phi V)=\mathbf{\Sigma}(2Q_{\underline{\alpha}}Q^{\underline{\alpha}}(\phi B))=\mathbf{\Sigma}(2\phi Q_{\underline{\alpha}}Q^{\underline{\alpha}}B)=\Phi T(V) \tag{5.364}$$

となる。すなわち、カイラル多重項は外に出すことができる。

反カイラル多重項に対する運動多重項 $T(\Phi^*)$ の成分場をもとの多重項 Φ の成分場で表しておこう。$\Phi_K=T(\Phi^*)$ とし、その成分場を $(\phi_K=F^*,\chi_K,F_K)$ とおく。まず、運動多重項の定義より $\phi_K=F^*$ である。

フェルミオン成分 χ_K はこの最低次の成分の超対称変換として (5.337) によって定義されるから、

$$\begin{aligned}
\chi_K^{\overline{\alpha}} &= 2Q^{\overline{\alpha}}F^* \\
&= -(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}D_\mu^{\mathrm{cov}}\chi^{\underline{\beta}} \\
&= \left(-\gamma^\mu D_\mu^{\mathrm{MDA}}\chi+\frac{1}{2}\gamma^\mu\psi_\mu F^*-\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\lambda\psi_\mu D_\lambda^{\mathrm{cov}}\phi^*+\frac{1}{6}\gamma^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}^{MDA}\phi^*\right)^{\overline{\alpha}}
\end{aligned} \tag{5.365}$$

と決まる。

さらに F_K 成分は (5.342) に従いさらにこれを超対称変換することによって定義される。

$$F_K=Q_{\overline{\alpha}}\chi_K^{\overline{\alpha}}=-(\gamma^{\widehat{m}})^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}Q_{\overline{\alpha}}D_{\widehat{m}}^{\mathrm{cov}}\chi^{\underline{\beta}} \tag{5.366}$$

(5.328) を用いれば $D^{\mathrm{cov}}\chi$ の Q 変換が次のようになることがわかる。

$$\begin{aligned}
\delta_Q(D_{\widehat{m}}^{\mathrm{cov}}\chi^{\underline{\beta}}) &= \xi^{\overline{\alpha}}D_{\widehat{m}}^{\mathrm{cov}}(Q_{\overline{\alpha}}\chi^{\underline{\beta}})-(\delta'\phi_{\widehat{m}}{}^{\alpha})S_\alpha\chi^{\underline{\beta}}-\frac{1}{2}(\delta'\omega_{\widehat{m}}{}^{\widehat{pq}})M_{\widehat{pq}}\chi^{\overline{\beta}} \\
&= -\frac{1}{2}(\gamma^{\widehat{n}}\xi)^{\underline{\beta}}D_{\widehat{m}}^{\mathrm{cov}}D_{\widehat{n}}^{\widehat{cov}}\phi^*-\frac{i}{6}(\gamma^{\widehat{pq}}\gamma_{\widehat{m}}\xi)^{\underline{\beta}}R_{\widehat{pq}}(A)\phi^*-\frac{1}{16}(\gamma_{\widehat{pq}}\chi)^{\underline{\beta}}(\xi\gamma_{\widehat{m}}R^{\widehat{pq}}(Q))
\end{aligned} \tag{5.367}$$

ここから ξ を取り除き、$-(\gamma^{\widehat{m}})^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}$ をかけてみると、$R(M)$ および $R(Q)$ を含む項は消え、運動多重項の F 項が次のように得られる。

$$F_K=\Box^{\mathrm{cov}}\phi^* \tag{5.368}$$

ただし、共形共変ダランベルシアン $\Box^{\mathrm{cov}}$ は次のように定義される。

$$\Box^{\mathrm{cov}}\phi^*=\eta^{\widehat{m}\widehat{n}}D_{\widehat{m}}^{\mathrm{cov}}D_{\widehat{n}}^{\widehat{cov}}\phi^* \tag{5.369}$$

Soryushiron Kenkyu

一般のカイラル多重項の ϕ 成分の共変微分について、その変換は (5.325) を用いることにより次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu^{\rm cov}\phi) &= \epsilon^{Y'}D_\mu^{\rm cov}(O_{Y'}\phi)-\frac{1}{2}\zeta^{\underline{\alpha}}(\gamma_\mu)_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}\chi_{\overline{\beta}}-2n_D(\epsilon_K)_\mu\phi+\frac{1}{4}(\xi\gamma^{\widehat{m}}\psi_\mu)D_{\widehat{m}}^{\rm cov}\phi \\ &= \epsilon^{Y'}D_\mu^{\rm cov}(O_{Y'}\phi)-\frac{1}{2}\zeta^{\underline{\alpha}}(\gamma_\mu)_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}\chi_{\overline{\beta}}-2n_D(\epsilon_K)_\mu\phi+(\delta e_\mu^{\widehat{m}}+\sigma e_\mu^{\widehat{m}}-\lambda_\mu{}^{\widehat{m}})D_{\widehat{m}}^{\rm cov}\phi\end{aligned} \tag{5.370}$$

$\delta e_\mu^{\widehat{m}}D_{\widehat{m}}^{\rm cov}\phi$ の部分は、左辺の共変微分の添え字を μ から $\widehat{m}$ にすることによって取り除くことができる。さらに第 1 項の Y' として実際に利くのは $Q^{\overline{\alpha}}$、D、A の 3 つである。その具体系を用いると、

$$\begin{aligned}\delta D_{\widehat{m}}^{\rm cov}\phi &= \frac{1}{2}\xi^{\overline{\alpha}}D_{\widehat{m}}^{\rm cov}\chi_{\overline{\alpha}}+\sigma(n_D+1)D_{\widehat{m}}^{\rm cov}\phi+i\theta n_AD_{\widehat{m}}^{\rm cov}\phi-\lambda_{\widehat{m}\widehat{n}}D^{{\rm cov}\widehat{n}}\phi \\ &\quad -\frac{1}{2}\zeta^{\underline{\alpha}}(\gamma_{\widehat{m}})_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}\chi_{\overline{\beta}}-2n_D(\epsilon_K)_{\widehat{m}}\phi\end{aligned} \tag{5.371}$$

この変換則を用いると、$D_{\widehat{m}}^{\rm cov}\phi$ をさらにもう一度共変微分した表式を得ることは簡単である。そしてダランベルシアンが次のように与えられることを示すことができる。

$$\Box^{\rm cov}\phi=D_{\widehat{m}}^{(MDA)}D^{{\rm cov}\widehat{m}}\phi+\frac{1}{2}\psi_{\mu\overline{\alpha}}D^{{\rm cov}\mu}\chi^{\overline{\alpha}}-\frac{1}{2}\chi_{\overline{\beta}}(\gamma^\mu)^{\overline{\beta}}{}_{\underline{\alpha}}\phi_\mu{}^{\underline{\alpha}}+2n_Df_\mu{}^\mu\phi \tag{5.372}$$

運動多重項の F 成分は、$n_D=1$ とおき、この複素共役をとることにより得られる。複合場 ϕ_μ と $f_\mu{}^{\widehat{m}}$ に対して (5.246) と (5.283) を代入すれば

$$\begin{aligned}F_K &= D_{\widehat{m}}^{(MDA)}D^{{\rm cov}\widehat{m}}\phi^*+\frac{1}{2}\psi_{\mu\underline{\alpha}}D^{{\rm cov}\mu}\chi^{\underline{\alpha}}-\frac{1}{12}\chi_{\underline{\beta}}(\gamma^{\mu\nu})^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\alpha}}\psi_{\mu\nu}^{(MDA)\underline{\alpha}}-\frac{1}{6}R^{{\rm cov}(f=0)}\phi^* \\ &= D_{\widehat{m}}^{(MDA)}D^{{\rm cov}\widehat{m}}\phi^*+\frac{1}{2}(\psi_{\mu\underline{\alpha}}D^{(MDA)\mu}\chi^{\underline{\alpha}})-\frac{1}{12}(\chi_{\underline{\beta}}(\gamma^{\mu\nu})^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\alpha}}\psi_{\mu\nu}^{(MDA)\underline{\alpha}}) \\ &\quad -\frac{1}{6}e_{\widehat{m}}{}^\mu e_{\widehat{n}}^\nu R_{\mu\nu}{}^{\widehat{m}\widehat{n}}(\omega)\phi^*-\frac{1}{6}(\psi_{\mu\underline{\alpha}}(\gamma_\nu)^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\psi^{(MDA)\mu\nu\overline{\beta}})\phi^* \\ &\quad -\frac{1}{4}(\psi_{\mu\underline{\alpha}}\psi^{\mu\underline{\alpha}})F^*+\frac{1}{4}(\psi_{\mu\underline{\alpha}}(\gamma^\lambda)^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\psi^{\mu\overline{\beta}})D_\lambda^{\rm cov}\phi^*-\frac{1}{48}\psi_\mu\gamma^5\gamma^{\mu\nu\rho}\psi_{\nu\rho}^{MDA}\phi^*\end{aligned} \tag{5.373}$$

5.7.3 F 項および D 項ラグランジアン

大域的な超対称性をもつ理論においては、カイラル多重項の F 成分は、超対称変換が全微分項のみを含むため、その積分を超対称不変なラグランジアンとして用いることができた。超共形重力理論においても同様の方法でラグランジアンを作ることができる。ただし、単に

$$\mathcal{L}_0=eF \tag{5.374}$$

では完全な全微分項にはならないので、ネーター処方を用いて補正項を加えていくことにする。

(5.374) が D と A で不変であるためには、F はワイルウェイト $n_D=4$、カイラルウェイト $n_A=0$ を持つ必要がある。このときカイラル多重項のウェイト（すなわち ϕ 成分のウェイト）は $n_D=3$、$n_A=2$ であり、ちょうど (5.339) を満足している。

(5.374) を QS 変換してみると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \left(\frac{ie}{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu^{\rm cov}\chi-2e\zeta\chi\right)+\left(\frac{i}{4}(\psi_\mu\sigma^\mu\bar{\xi})-\frac{i}{4}(\overline{\psi}_\mu\bar{\sigma}^\mu\xi)\right)eF \\ &= \frac{ie}{2}(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\chi)-\frac{ie}{4}(\overline{\psi}_\mu\bar{\sigma}^\mu\xi)F-\frac{e}{4}(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\lambda\overline{\psi}_\mu)D_\lambda^{\rm cov}\phi-\frac{7ie}{4}w_\mu(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\chi) \\ &\quad +\frac{e}{2}c_\mu(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\chi)-\frac{3ie}{2}(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\phi_\mu)\phi-2e(\zeta\chi)\end{aligned} \tag{5.375}$$

ただし、共変微分は次のように定義されている。

$$D_\mu^{\rm cov}\phi = \partial_\mu\phi - 3w_\mu\phi - 2ic_\mu\phi - \frac{1}{2}\psi_\mu\chi, \tag{5.376}$$

$$\begin{aligned} D_\mu^{\rm cov}\chi &= \partial_\mu\chi + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{pq}\sigma_{pq}\chi - \frac{1}{2}\psi_\mu F + \frac{i}{2}\sigma^\lambda\overline{\psi}_\mu D_\lambda^{\rm cov}\phi \\ &\quad -\frac{7}{2}w_\mu\chi - ic_\mu\chi - 3\phi_\mu\phi \end{aligned} \tag{5.377}$$

(5.375) の第 2 項を相殺するために

$$\mathcal{L}_1 = \frac{ie}{2}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\chi) \tag{5.378}$$

を導入しよう。この変換を計算してみると、

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_1 &= \frac{ie}{4}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\xi)F + \frac{e}{4}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi})D_\nu^{\rm cov}\phi + \frac{3ie}{2}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\zeta)\phi \\ &\quad +\frac{ie}{2}((D_\mu\bar{\xi})\overline{\sigma}^\mu\chi) + \frac{ie}{4}w_\mu(\bar{\xi}\overline{\sigma}^\mu\chi) - \frac{e}{2}c_\mu(\bar{\xi}\overline{\sigma}^\mu\chi) + 2e(\zeta\chi) \\ &\quad + \left[\delta(ee_m{}^\mu)\frac{i}{2}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^m\chi)\right]_{\rm 4fermi} \end{aligned} \tag{5.379}$$

となる。(5.375) と (5.379) の間では比較的多くの項が相殺して、次のものが残る。

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_1 &= \frac{ie}{2}e_m{}^\mu D_\mu(\bar{\xi}\overline{\sigma}^m\chi) - \frac{e}{2}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\lambda}\overline{\psi}_\mu)D_\lambda^{\rm cov}\phi \\ &\quad -\frac{3ie}{2}w_\mu(\bar{\xi}\overline{\sigma}^\mu\chi) - \frac{3ie}{2}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^\mu\phi_\mu)\phi + \frac{3ie}{2}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\zeta)\phi + [\cdots]_{\rm 4fermi} \end{aligned} \tag{5.380}$$

(5.380) の第 1 項は全微分項として落とすことはできない。

$$\frac{ie}{2}e_m{}^\mu D_\mu(\bar{\xi}\overline{\sigma}^m\chi) = \frac{3ie}{2}w_\mu(\bar{\xi}\overline{\sigma}^\mu\chi) + [\cdots]_{\rm 4fermi} \tag{5.381}$$

これにより、(5.380) の w_μ を含む項が消える。

$$\delta\mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_1 = -\frac{e}{2}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\lambda}\overline{\psi}_\mu)D_\lambda^{\rm cov}\phi - \frac{3ie}{2}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^\mu\phi_\mu)\phi + \frac{3ie}{2}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\zeta)\phi + [\cdots]_{\rm 4fermi} \tag{5.382}$$

ここで、$\overline{\sigma}^\mu\phi_\mu$ に対して、(5.246) より得られる次の式を代入する。

$$\overline{\sigma}^\nu\phi_\nu = \frac{i}{6}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_{\mu\nu} + \frac{i}{6}w_\mu\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu - \frac{1}{3}c_\mu\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu \tag{5.383}$$

また、$D^{\rm cov}\phi$ についても (5.376) を代入する。代入の結果、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_1 &= \frac{e}{2}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)\partial_\mu\phi + \frac{e}{2}(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}D_\mu\overline{\psi}_\nu)\phi \\ &\quad -\frac{5e}{4}w_\mu(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)\phi - \frac{ie}{2}c_\mu(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)\phi + \frac{3ie}{2}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\zeta)\phi + [\cdots]_{\rm 4fermi} \end{aligned} \tag{5.384}$$

これは次の項の変分によって相殺できる。

$$\mathcal{L}_2 = \frac{e}{4}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)\phi \tag{5.385}$$

$\mathcal{L}_2$ の変換は次のように与えられる。

$$\delta\mathcal{L}_2 = \frac{e}{2}((D_\mu\bar{\xi})\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)\phi + \frac{e}{4}w_\mu(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)\phi + \frac{ie}{2}c_\mu(\bar{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)\phi - \frac{3ie}{2}(\zeta\sigma^\nu\overline{\psi}_\nu)\phi + [\cdots]_{\rm 4fermi} \tag{5.386}$$

(5.384) と (5.386) の和は

$$\delta\mathcal{L}_0+\delta\mathcal{L}_1+\delta\mathcal{L}_2=\frac{e}{2}e_m{}^\mu e_n{}^\nu D_\mu((\overline{\xi}\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_\nu)\phi)-ew_\mu(\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)\phi+[\cdots]_{\rm 4fermi} \tag{5.387}$$

この二つの項は相殺する。

$\mathcal{L}_0$ と $\mathcal{L}_1$ と $\mathcal{L}_2$ を合計すれば次のラグランジアンが得られる。

F 項ラグランジアン

$$\mathcal{L}=[\Phi]_F=eF+\frac{ie}{2}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\chi)+\frac{e}{4}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)\phi \tag{5.388}$$

さらに、D 項ラグランジアンは、次のように定義される。

$$[\cdots]_D=2\,{\rm Re}[T(\cdots)]_F. \tag{5.389}$$

これは、超対称性が大域的な場合の式 (2.43) に対応するものである。ただし、$\cdots$ は $n_D=2, n_A=0$ を持つ一般の多重項である。

5.7.4 重力カイラル多重項

F-項ラグランジアンを用いて重力場のラグランジアンを構成しよう。そのためには重力多重項を含むカイラル多重項を構成する必要がある。

超場形式による解析では、重力場を含む二つのカイラル多重項が現れた。一つはグラビティーノのスピン 3/2 成分を初項に持つ $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\overline{\alpha}}}$ であり、もう一つは補助場 M を初項に持つ $X-iY$ である。まずは前者に対応するものを見てみよう。

カイラル多重項を構成するためには、カイラル条件を満足するような場を見つける必要がある。$R_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\overline{\alpha}}(Q)$ がこの条件を満足する。この場はローレンツ群の表現 $(3/2,0)$ に属し、ワイルウェイト、カイラルウェイトはそれぞれ $n_D=3/2$、$n_A=1$ である。これらはカイラル多重項の初項としての条件を満足している。

S 変換が 0 になることは、曲率テンソルのゲージ変換則と拘束条件 $R(P)=0$ よりすぐにわかる。また、$Q_{\underline{\alpha}}$ 変換が 0 であることも次のように示される。

$R_{\mu\nu}{}^{\underline{\alpha}}(Q)$ を変換してみると、次の項以外は全て 0 であることはすぐにわかる。

$$\begin{aligned}\delta_Q^{\rm mod}(\xi^{\underline{\alpha}})R_{\mu\nu}{}^{\overline{\alpha}}(Q) &= \frac{1}{4}\delta'_Q(\xi^{\underline{\alpha}})\omega_{\mu\widehat{p}\widehat{q}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\psi_\nu{}^{\overline{\beta}}-[\mu\nu]\\ &= -\frac{1}{16}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\psi_\nu{}^{\overline{\beta}}(\xi_{\underline{\gamma}}(\gamma_\mu)^{\underline{\gamma}}{}_{\overline{\delta}}R_{\widehat{p}\widehat{q}}{}^{\overline{\delta}}(Q))-[\mu\nu].\end{aligned} \tag{5.390}$$

さらにフィルツ変換を行うと、

$$\begin{aligned}\delta_Q^{\rm mod}(\xi^{\underline{\alpha}})R_{\mu\nu}{}^{\overline{\alpha}}(Q) &= \frac{1}{32}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\gamma_{\widehat{k}}\gamma_\mu)^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}R_{\widehat{p}\widehat{q}}{}^{\overline{\beta}}(Q))(\xi_{\underline{\gamma}}(\gamma^{\widehat{k}})^{\underline{\gamma}}{}_{\overline{\delta}}\psi_\nu{}^{\overline{\beta}})-[\mu\nu]\\ &= -\frac{1}{4}R_{\widehat{k}\mu}{}^{\overline{\alpha}}(Q))(\xi_{\underline{\gamma}}(\gamma^{\widehat{k}})^{\underline{\gamma}}{}_{\overline{\delta}}\psi_\nu{}^{\overline{\beta}})-[\mu\nu].\\ &= R_{\mu\widehat{k}}{}^{\overline{\alpha}}(Q)\delta(\xi^{\underline{\alpha}})e_\nu^{\widehat{k}}-[\mu\nu].\end{aligned} \tag{5.391}$$

この結果は、$R_{\mu\nu}(Q)=e_\mu{}^{\widehat{m}}e_\nu{}^{\widehat{n}}R_{\widehat{m}\widehat{n}}(Q)$ の変換が多脚場部分の変換だけで表されることを意味している。従って

$$\delta_Q^{\rm mod}(\xi^{\underline{\alpha}})R_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\overline{\alpha}}=0 \tag{5.392}$$

Soryushiron Kenkyu

であり、初項条件は満足されている。

以上より、重力多重項のみを含むカイラル多重項

$$\mathbf{\Sigma}(R_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\overline{\alpha}}(Q)) \tag{5.393}$$

が定義できる。

この多重項の第二成分を決めるために、$R_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\overline{\alpha}}(Q)$ の $Q_{\overline{\alpha}}$ 変換を行ってみよう。まず $R_{\mu\nu}{}^{\overline{\alpha}}(Q)$ の変換をみてみよう。

$$\begin{aligned}\delta_Q^{\mathrm{mod}}(\xi^{\overline{\alpha}})R_{\mu\nu}{}^{\overline{\alpha}}(Q) &= \frac{1}{4}(\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}})^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\xi^{\overline{\beta}}R_{\mu\nu}{}^{\widehat{p}\widehat{q}}(M)+\frac{1}{2}\xi^{\overline{\alpha}}R_{\mu\nu}(D)-i\xi^{\overline{\alpha}}R_{\mu\nu}(A)\\ &\quad+\frac{2}{3}\xi^{\overline{\alpha}}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}(A)\end{aligned} \tag{5.394}$$

右辺二行目は複合場 ϕ_μ の δ'_Q 変換によって現れる項である。拘束条件などを用いて整理すると、

$$\delta_Q^{\mathrm{mod}}(\xi^{\overline{\alpha}})R_{\mu\nu}{}^{\overline{\alpha}}(Q)=\frac{1}{4}(\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}})^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\xi^{\overline{\beta}}R_{\mu\nu}{}^{\widehat{p}\widehat{q}}(M)+\frac{3}{2}\xi^{\overline{\alpha}}\left[R^{\mathrm{cov}}_{\mu\nu}(M)+\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}R^{\mathrm{cov}}_{\rho\sigma}(M)\right] \tag{5.395}$$

が得られる。さらに、多脚場を用いて添え字を局所ローレンツ系のものに変換した $R_{\widehat{m}\widehat{n}}(Q)$ を変換すると、多脚場の Q 変換から右辺第 1 項の $R(M)$ を $R^{\mathrm{cov}}(M)$ にする補正項が現れる。従って、次の式が得られる。

$$\delta_Q^{\mathrm{mod}}(\xi^{\overline{\alpha}})R_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\overline{\alpha}}(Q)=\frac{1}{4}(\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}})^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\xi^{\overline{\beta}}R^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{p}\widehat{q}}(M)+\frac{3}{2}\xi^{\overline{\alpha}}\left[R^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}\widehat{n}}(M)+\frac{i}{2}\epsilon_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{p}\widehat{q}}R^{\mathrm{cov}}_{\widehat{p}\widehat{q}}(M)\right] \tag{5.396}$$

もう一つ、スピンを持たない重力カイラル多重項 $X-iY$ について考えよう。このカイラル超場は定数カイラル超場 1 に対する運動カイラル超場として $X-iY=P_{\mathrm{chiral}}1$ と与えることができた。超コンフォーマル重力理論においても、定数カイラル超場のようなもの Φ_1 を定義し、その運動カイラル超場 $T(\Phi_1^*)$ として、同様のものを定義することができる。運動カイラル超場が定義できるためには Φ_1 のワイルウェイトは $n_D=1$ で無ければならないが、そうすると Φ_1 を定数におくと D 変換や A 変換の対称性が破れる。このことを利用してコンフォーマル対称性を持たない、Poincare 超重力理論を得ることができる。これについては別の節で詳しく見る。

5.7.5 カイラル多重項を含む超共形場理論

重力に結合した超コンフォーマル対称性を持つカイラル多重項の理論のラグランジアンを構成しよう。ここでは最も簡単な、カイラル多重項が一つだけの場合を考える。もし Φ のワイルウェイトが 0 であると、ラグランジアンを構成するためのウェイトについての条件を満足することができない。従って Φ のウェイトは 0 でない値にする必要がある。0 でなければ何乗かすることによってどんなウェイトの場も構成することができるので、どのようなウェイトをとっても良いが、ここではウェイト $n_D=1$ を持つカイラル多重項 Φ を用いることにし、その成分場を $\Phi=(\phi,*,F)$ としよう。ここではボゾン部分のみに注目する。Φ に対する運動多重項 $T(\Phi^*)=(\phi_K,*,F_K)$ の成分場は次のように与えられる。

$$\phi_K = F^*, \tag{5.397}$$

$$F_K = \left(D_m^{\omega(e)}+w_m+\frac{2i}{3}c_m\right)\left(\partial^m-w^m+\frac{2i}{3}c^m\right)\phi^*-\frac{1}{6}R(\omega(e))\phi^*+(D_q^{\omega(e)}w^q)\phi^* \tag{5.398}$$

定数倍の自由度を除き Φ を用いて作ることのできる唯一のポテンシャル項は

$$[\Phi^3]_F = 3e\phi^2 F. \tag{5.399}$$

また、Φ を用いて作ることのできる唯一の運動項は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\Phi\Phi^*]_D &= [\Phi T(\Phi^*)]_F \\ &= e(\phi F_K + F\phi_K) \\ &= -eD_\mu^{(A)}\phi^* D^{(A)\mu}\phi - \frac{e}{6}R(\omega(e))\phi^*\phi - ew_m w^m \phi^*\phi + eF^*F\end{aligned} \tag{5.400}$$

途中で適当に部分積分を行った。共変微分は次のように与えられる。

$$D_\mu^{(A)}\phi = \left(\partial_\mu - \frac{2i}{3}c_\mu\right)\phi, \quad D_\mu^{(A)}\phi^* = \left(\partial_\mu + \frac{2i}{3}c_\mu\right)\phi^*. \tag{5.401}$$

5.8 ポアンカレ超重力理論

5.8.1 ゲージ固定と compensator

超コンフォーマル対称性をもつ理論から、超ポアンカレ対称性のみを持つ理論を得るために、ゲージ固定を行う。ゲージ固定を行う方法にはいろいろあり、異なる補助場を持つ超重力理論を与える。[14] ここでは、§4 で得られた、極小な補助場の組（一つの複素スカラー場と一つのベクトル場）を与える方法について述べる。

そのために、カイラル多重項を一つ用意する。ウェイトは何でもよいが、ここでは $n_D = 1$、$n_A = 2/3$ と取っておくことにする。

$$\Phi_{\rm comp} = (\phi_{\rm comp}, \chi_{\rm comp}, F_{\rm comp}) \tag{5.402}$$

そしてこの成分と、ゲージ場 w_μ に対して次の条件を課すことによってゲージを固定する。

$$\phi_{\rm comp} = 1, \quad \chi_{\rm comp} = 0, \quad w_\mu = 0. \tag{5.403}$$

まず、以下の計算で用いるために (5.403) が成り立つ場合の共変微分を与えておこう。

$$D_\mu^{\rm cov}\phi_{\rm comp} = -\frac{2i}{3}c_\mu, \tag{5.404}$$

$$\begin{aligned}D_\mu^{\rm cov}\chi_{\rm comp} &= -\frac{1}{2}\psi_\mu F_{\rm comp} + \frac{i}{2}\sigma^\lambda\overline{\psi}_\mu D_\lambda^{\rm cov}\phi_{\rm comp} - \phi_\mu \\ &= -\frac{1}{2}\psi_\mu F_{\rm comp} + \frac{1}{3}c_\lambda\sigma^\lambda\overline{\psi}_\mu - \phi_\mu\end{aligned} \tag{5.405}$$

ゲージ固定条件 (5.403) でゲージ変換がどのように固定されているかを見るために、固定されている場に対するゲージ変換を見てみよう。スカラー場 $\phi_{\rm comp}$ のゲージ変換は

$$\delta\phi_{\rm comp} = \sigma + \frac{2i}{3}\theta \tag{5.406}$$

である。したがって、$\delta\phi_{\rm comp} = 0$ は $\sigma = \theta = 0$ を意味し、この条件によって A および D のゲージ変換が完全に固定されている。

次に、フェルミオン χ_{comp} について見てみよう。(5.403) が成り立つとき、χ_{comp} の変換則は

$$\begin{aligned}\delta\chi_{\text{comp}} &= \frac{1}{2}\xi F_{\text{comp}} - \frac{i}{2}\sigma^\mu\bar{\xi}D_\mu^{\text{cov}}\phi_{\text{comp}} + \zeta, \\ &= \frac{1}{2}\xi F_{\text{comp}} - \frac{1}{3}c_\mu\sigma^\mu\bar{\xi} + \zeta, \end{aligned} \tag{5.407}$$

従って、$\delta\chi_{\text{comp}} = 0$ によって S 変換は完全に固定されている。また、ゲージ固定条件を保つために Q 変換と同時に次のパラメータによる S 変換を行うことが必要である。

$$\zeta = -\frac{1}{2}\xi F_{\text{comp}} + \frac{1}{3}c_\mu\sigma^\mu\bar{\xi} \tag{5.408}$$

さらに w のゲージ変換は、まだ残っているゲージ変換に対しては

$$\delta w_\mu = \frac{1}{4}(\phi_\mu\xi) + \frac{1}{4}(\bar{\phi}_\mu\bar{\xi}) + \frac{1}{4}(\psi_\mu\zeta) + \frac{1}{4}(\bar{\psi}_\mu\bar{\zeta}) + 2\epsilon_{K\mu} \tag{5.409}$$

従って、ゲージ固定条件 $\delta w_\mu = 0$ を保つためには、Q 変換と同時に次の K 変換を行う必要がある。

$$\epsilon_{K\mu} = -\frac{1}{8}(\phi_\mu\xi) - \frac{1}{8}(\psi_\mu\zeta) + \text{c.c.} \tag{5.410}$$

まとめると、ポアンカレ超重力理論の超対称変換はコンフォーマル超重力理論における次の変換に対応している。

$$\begin{aligned}\delta^{(P)} &= \delta_Q + \left(-\frac{1}{2}\xi^\alpha F_{\text{comp}} - \frac{i}{3}c_\mu\xi_\beta(\gamma^5\gamma^\mu)^{\beta\alpha}\right)S_\alpha \\ &\quad + \left(\frac{1}{8}(\xi\phi^{\hat{m}}) - \frac{1}{16}(\xi\psi^{\hat{m}})F_{\text{comp}} - \frac{i}{24}c_\mu(\xi\gamma^5\gamma^\mu\psi^{\hat{m}})\right)K_{\hat{m}}\end{aligned} \tag{5.411}$$

5.8.2 重力多重項

上記のゲージ固定の結果、固定されずに残っている独立な場は

$$e_\mu{}^m, \quad \psi_\mu, \quad c_\mu, \quad F_{\text{comp}} \tag{5.412}$$

である。これらは、以前超場形式でビアンキ恒等式と拘束条件を解いて得られた場と自由度が丁度一致する。実は、超場形式で現れた補助場 $c_\mu^{(\text{sf})}$ および M は超コンフォーマル重力理論のゲージ場 $c_\mu^{(\text{sc})}$ と compensator 多重項の補助場 F_{comp} と次のように関係している。

$$F_{\text{comp}} = M^*, \quad c_\mu^{(\text{sc})} = c_\mu^{(\text{sf})}. \tag{5.413}$$

(ここでは二つの c_μ を区別するために添え字を付けた。)

ポアンカレ超対称変換をそれぞれの場について計算してみよう。まず、$e_\mu{}^m$ については、超共形ゲージ変換と同じ変換則である。

$$\delta^{(P)}e_\mu{}^m = \frac{i}{4}(\psi_\mu\sigma^m\bar{\xi}) - \frac{i}{4}(\bar{\psi}_\mu\bar{\sigma}^m\xi) \tag{5.414}$$

グラビティーノの変換則は

$$\begin{aligned}\delta\psi_\mu &= \partial_\mu\xi + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{pq}\sigma_{pq}\xi - ic_\mu\xi + i\sigma_\mu\bar{\zeta} \\ &= \partial_\mu\xi + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{pq}\sigma_{pq}\xi - ic_\mu\xi - \frac{i}{2}\sigma_\mu\bar{\xi}F^*_{\text{comp}} + \frac{i}{3}c_\lambda\sigma_\mu\bar{\sigma}^\lambda\xi \\ &= \partial_\mu\xi + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{pq}\sigma_{pq}\xi - \frac{i}{6}c_\lambda(\sigma_\mu\bar{\sigma}^\lambda + 3\sigma^\lambda\bar{\sigma}_\mu)\xi - \frac{i}{2}\sigma_\mu\bar{\xi}F^*_{\text{comp}}\end{aligned} \tag{5.415}$$

Soryushiron Kenkyu

(5.413) を用いれば超場形式を用いて得られた (4.221) に一致することがわかる。

compensator 多重項の F 成分 $F_{\rm comp}$ については、$\chi_{\rm comp}=0$ であることと、$F_{\rm comp}$ が S 変換を受けないことから超対称変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\delta^{(P)}F_{\rm comp} &= \frac{i}{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu^{\rm cov}\chi_{\rm comp} \\ &= -\frac{i}{4}(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\psi_\mu)F_{\rm comp}+\frac{i}{6}c_\lambda(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\lambda\overline{\psi}_\mu)-\frac{i}{2}(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\phi_\mu) \\ &= -\frac{i}{4}(\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\psi_\mu)F_{\rm comp}+\frac{i}{6}c^\mu(\overline{\xi\psi}_\mu)+\frac{1}{12}(\bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_{\mu\nu})\end{aligned} \tag{5.416}$$

最後の行へ移る際に (5.246) を用い ϕ_μ を他の場で書き換えた。この変換則は (5.413) を通して (4.223) と一致する。

ゲージ場 c_μ の変換則は

$$\begin{aligned}\delta c_\mu &= -\frac{3i}{8}(\phi_\mu\xi)+\frac{3i}{8}(\psi_\mu\zeta)+{\rm c.c.} \\ &= -\frac{1}{8}(\xi\sigma^\rho\overline{\psi}_{\rho\mu})-\frac{1}{32}(\xi\sigma_\mu{}^{\rho\sigma}\overline{\psi}_{\rho\sigma})-\frac{3i}{16}(\psi_\mu\xi)F_{\rm comp} \\ &\quad -\frac{i}{4}c_\rho(\xi\sigma^\rho\overline{\psi}_\mu)+\frac{i}{8}c_\mu(\xi\sigma^\rho\overline{\psi}_\rho)-\frac{i}{16}c_\rho(\xi\sigma_\mu{}^{\rho\sigma}\overline{\psi}_\sigma)\end{aligned} \tag{5.417}$$

これは c_μ の変換則 (4.224) と同じものである。ただし、比較する際にここで変換則を与えた c_μ の添え字は接空間のものであるのに対して (4.224) に与えられた $c_{\widehat{m}}$ の添え字は局所直交系のものであり、$e_\mu{}^m$ の変換 (5.414) による差があることに注意しなければならない。

5.8.3 カイラル多重項

(5.411) によって与えられるポアンカレ超重力理論の超対称変換をカイラルウェイトが n_A カイラル多重項に作用させると、次の変換則を得る。

$$\delta^{(P)}\phi = -\frac{1}{2}\xi_{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}}, \tag{5.418}$$

$$\delta^{(P)}\chi^{\overline{\alpha}} = \frac{1}{2}\xi^{\overline{\alpha}}F-\frac{1}{2}(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}D_\mu^{\rm cov(P)}\phi-\frac{3}{4}n_A\xi^{\overline{\alpha}}F_{\rm comp}\phi, \tag{5.419}$$

$$\begin{aligned}\delta^{(P)}F &= \frac{1}{2}(\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu)^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}D_\mu^{\rm cov(P)}\chi^{\overline{\beta}})+\frac{i}{6}c_\mu(\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu)^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\chi^{\overline{\beta}})+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}n_A\right)(\xi_{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}})F_{\rm comp} \\ &\quad -\frac{i}{4}n_Ac_\lambda(\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu\gamma^\lambda)^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\gamma}}\psi_\mu{}^{\underline{\gamma}})\phi-\frac{3}{4}n_A(\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu)^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\phi_\mu{}^{\overline{\beta}})\phi\end{aligned} \tag{5.420}$$

ここで、ポアンカレ超重力理論における共変微分とコンフォーマル超重力理論における共変微分の関係はゲージ条件により $w_\mu=0$ であることを踏まえ、

$$D_\mu^{\rm cov}\phi = D_\mu^{\rm cov(P)}\phi-in_Ac_\mu\phi, \tag{5.421}$$

$$D_\mu^{\rm cov}\chi^{\overline{\alpha}} = D_\mu^{\rm cov(P)}\chi^{\overline{\alpha}}-\frac{i}{2}n_Ac_\lambda(\gamma^\lambda)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\psi_\mu{}^{\underline{\beta}}\phi-i(n_A-1)c_\mu\chi^{\overline{\alpha}}-\frac{3}{2}n_A\phi_\mu{}^{\overline{\alpha}}\phi \tag{5.422}$$

と与えられることを用いた。

ここで得られたカイラル多重項の変換則を以前に得られたポアンカレ超重力理論におけるカイラル多重項の変換則と比較してみると、$n_A=0$ の時に一致することが分かる。つまり、ポアンカレ超重力理論のカイラル多重項に直接対応するのはウェイトが 0 のカイラル多重項である。これ以外のウェイトを持つ多重項は、次のようにポアンカレ超重力理論のカイラル多重項に compensator

場が掛けられたものであると解釈する。つまり、一般のワイルウェイト n_D を持つコンフォーマル超重力理論のカイラル多重項 $\Phi^{(n_D)}$ は、ポアンカレ超重力理論におけるカイラル多重項 $\Phi^{(0)}$ と次の関係にある。

$$\Phi^{(n_D)} = \Phi_{\rm comp}^{n_D}\Phi^{(0)} \tag{5.423}$$

5.8.4 運動多重項

反カイラル多重項から運動多重項を作るためには、反カイラル多重項のワイルウェイトは 1 でなければならず、できる運動多重項のワイルウェイトは 2 である。したがって、常にウェイトが 0 のカイラル多重項を用いることにすると、適宜 compensator を挿入することによってウェイトの調節を行う必要がある。例えば、ウェイトが 0 のカイラル多重項 Φ の複素共役から運動多重項を構成し、さらにウェイトを 0 に戻したものを $\widetilde{\Phi}$ と書くことにすると、これらは次のように関係している。

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_{\rm comp}^{-2}T(\Phi_{\rm comp}^*\Phi^*) \tag{5.424}$$

$\widetilde{\Phi}$ と Φ の成分場の間の関係を求めてみよう。まず、(5.424) の関係を一段階ずつ次のように分解しよう。

$$\Phi' = \Phi_{\rm comp}\Phi,\quad \text{or}\quad \phi' = \phi,\quad \chi'^{\overline{\alpha}} = \chi^{\overline{\alpha}},\quad F' = F + F_{\rm comp}\phi. \tag{5.425}$$

$$\Phi_K = T(\Phi'^*),\quad \text{or}\quad \phi_K = F'^*,\quad \chi_K^{\overline{\alpha}} = -(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}D_\mu^{\rm cov}\chi'^{\underline{\beta}},\quad F_K = \Box^{\rm cov}\phi'^*, \tag{5.426}$$

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_{\rm comp}^{-2}\Phi_K,\quad \text{or}\quad \widetilde{\phi} = \phi_K,\quad \widetilde{\chi}^{\overline{\alpha}} = \chi_K^{\overline{\alpha}},\quad \widetilde{F} = F_K - 2F_{\rm comp}\phi_K. \tag{5.427}$$

これらを組み合わせることにより、

$$\widetilde{\phi} = F^* + F_{\rm comp}^*\phi^*, \tag{5.428}$$

$$\widetilde{\chi}^{\overline{\alpha}} = -(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}D_\mu^{\rm cov}\chi^{\underline{\beta}}, \tag{5.429}$$

$$\widetilde{F} = \Box^{\rm cov}\phi^* - 2F_{\rm comp}F^* - 2F_{\rm comp}F_{\rm comp}^*\phi^* \tag{5.430}$$

が得られる。ただし、(5.430) に含まれるダランベルシアンの項は、$\Box^{\rm cov}\phi'^*$ に対して $\phi' = \phi$ を代入して得られる項であるが、ϕ と ϕ' ではワイルウェイトが異なっており、ダランベルシアンが作用する時点でのワイルウェイトは $n_D = 1$ であることに注意すること。ダランベルシアンは作用する場のワイルウェイトに依存するので、これはワイルウェイトが 0 である ϕ のダランベルシアンとは異なる。$D_\mu^{\rm cov}\chi^{\underline{\beta}}$ についても同様である。

ここで、大まかな構造を見るためにボゾン部分にのみ注目しよう。補助場の対応関係 (5.413) を用いれば、(5.428) に得られた $\widetilde{\phi}$ の式は (4.294) に与えられた ϕ_Ψ に一致している。

(5.430) に得られた $\widetilde{F}$ の式も、以前に得られたものと一致していることを確認しておこう。コンフォーマル超重力理論の共変ダランベルシアンの展開式は (5.372) に与えられている。作用する場 ϕ のワイルウェイトが 1 のとき

$$\begin{aligned}\Box^{\rm cov}\phi &= D_{\widehat{m}}^{\rm (MA)}D^{\rm (A)\widehat{m}}\phi - \frac{1}{6}R(e)\phi + \text{fermions}\\ &= \Box\phi - \frac{4i}{3}c^\mu(\partial_\mu\phi) - \frac{2i}{3}(D_{\widehat{m}}c^{\widehat{m}})\phi - \frac{4}{9}c_{\widehat{m}}c^{\widehat{m}}\phi - \frac{1}{6}R(e)\phi + \text{fermions}\end{aligned} \tag{5.431}$$

Soryushiron Kenkyu

ただし、複合場 ${f_\mu}^{\widehat{m}}$ の式 (5.283) より ${f_\mu}^\mu = -(1/12)R(e) + \text{fermions}$ であることを用いた。これを用いて (5.430) を書き換えれば

$$\begin{aligned}\widetilde{F} &= \Box\phi + \frac{4i}{3}c^\mu(\partial_\mu\phi^*) + \left(\frac{2i}{3}(D_{\widehat{m}}c^{\widehat{m}}) - 2F_{\text{comp}}F^*_{\text{comp}} - \frac{4}{9}c_{\widehat{m}}c^{\widehat{m}} - \frac{1}{6}R(e)\right)\phi^* - 2F_{\text{comp}}F^* \\ &\quad +\text{fermions}\end{aligned} \tag{5.432}$$

となるが、大きな括弧の中身は (4.301) に与えられた重力カイラル多重項の成分場 F_M に他ならない。そして全体としては (4.296) に与えられた F_Ψ に一致している。

5.8.5 F 項ラグランジアン

F 項ラグランジアンを作る場合にも、コンフォーマル超重力理論の場合にはカイラル多重項のウェイトに制限 $(n_D, n_A) = (3, 2)$ がある。従ってウェイト $(0, 0)$ のカイラル多重項 Φ からラグランジアンを構成するためには compensator を掛けてウェイトを合わせる必要がある。Φ に Φ^3_{comp} を掛けてウェイトを合わせ、(5.388) によってラグランジアンを作ると、次のようになる。

$$[\Phi^3_{\text{comp}}\Phi]_F = e(F + 3F_{\text{comp}}\phi) + \frac{ie}{2}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\chi) + \frac{e}{4}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)\phi \tag{5.433}$$

これは、ポアンカレ超重力理論の F 項ラグランジアンの式 (4.273) と同じものである。

5.8.6 単純超重力理論

コンフォーマル超重力理論をゲージ固定してポアンカレ超重力理論を得るには、少なくとも一つのカイラル多重項 (compensator) が必要である。従って、もっとも単純な超重力理論はカイラル多重項として compensator Φ_{comp} だけを含むものである。compensator だけを用いて作ることのできる D 項ラグランジアンは数係数を除き一意的に $[\Phi_{\text{comp}}\Phi^*_{\text{comp}}]_D$ しかない。これが実際に成分場で書いたときに超重力理論を与えることを確認しておこう。

まず、$\chi_{\text{comp}} = 0$ および $w_\mu = 0$ を用いると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}[\Phi_{\text{comp}}T(\Phi^*_{\text{comp}})]_F &= e\phi_{\text{comp}}D^{(\text{MA})}_{\widehat{m}}D^{(\text{A})\widehat{m}}\phi^*_{\text{comp}} + eF_{\text{comp}}F^*_{\text{comp}} - \frac{e}{6}\phi_{\text{comp}}\phi^*_{\text{comp}}R(\omega, e) \\ &\quad +e\phi_{\text{comp}}\phi^*_{\text{comp}}\left(\frac{1}{12}(\psi_{\mu\underline{\alpha}}\gamma^{\mu\rho\sigma}\psi^{(\text{MA})}_{\rho\sigma}) - \frac{1}{48}(\psi_\mu\gamma^5\gamma^{\mu\rho\sigma}\psi^{(\text{MA})}_{\rho\sigma})\right) \\ &\quad -\frac{e}{4}(\psi_{\mu\underline{\alpha}}\gamma^{\mu\nu}\gamma^\lambda{\psi_\nu}^{\overline{\beta}})\phi_{\text{comp}}D^{(\text{A})}_\lambda\phi^*_{\text{comp}}\end{aligned} \tag{5.434}$$

曲率テンソルはダランベルシアンに含まれる K ゲージ場から、次の関係式によって得られる。

$$\begin{aligned}{f_\mu}^\mu &= -\frac{1}{12}R^{f=0}(M) \\ &= -\frac{1}{12}R(\omega, e) - \frac{1}{24}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu}\phi_\nu) \\ &= -\frac{1}{12}R(\omega, e) - \frac{1}{96}(\psi_\mu\gamma^{\mu\rho\sigma}\psi^{(\text{MDA})}_{\rho\sigma})\end{aligned} \tag{5.435}$$

(5.434) の展開式を得る段階ではまだ部分積分をしていない。第 1 項を部分積分すると、振率項が現れる。

$$e\phi_{\text{comp}}D^{(\text{MA})}_{\widehat{m}}D^{(\text{A})\widehat{m}}\phi^*_{\text{comp}} = \frac{e}{4}(\psi_\lambda\gamma^\lambda\psi_\mu)\phi_{\text{comp}}D^{(\text{A})\mu}\phi^*_{\text{comp}} - eD^{(\text{A})}_{\widehat{m}}\phi_{\text{comp}}D^{(\text{A})\widehat{m}}\phi^*_{\text{comp}} \tag{5.436}$$

Soryushiron Kenkyu

こうして現れた振率項と (5.434) の最後の項を加えると、

$$\frac{e}{4}(\psi_\lambda\gamma^\lambda\psi_\mu)\phi D^{(\mathrm{A})\mu}\phi^* - \frac{e}{4}(\psi_{\mu\underline{\alpha}}\gamma^{\mu\nu}(\gamma^\lambda)^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\psi_\nu{}^{\overline{\beta}})\phi D^{(\mathrm{A})}_\lambda\phi^* = \frac{ie}{12}c_\lambda(\psi_\mu\gamma^5\gamma^{\mu\nu\lambda}\psi_\nu) \tag{5.437}$$

ただし、ゲージ固定条件 $\phi_{\mathrm{comp}} = 1$ を用いた。ここで得られた項はグラビティーノ運動項中の c_μ の項を相殺する。全てを合計し、実部を取ると、

$$\frac{1}{2}[\Phi_{\mathrm{comp}}\Phi^*_{\mathrm{comp}}]_D \quad = \quad -\frac{e}{6}R(\omega, e) + \frac{e}{24}(\psi_\mu\gamma^{\mu\rho\sigma}\psi_{\rho\sigma}) + eF_{\mathrm{comp}}F^*_{\mathrm{comp}} - \frac{4e}{9}c_\mu c^\mu \tag{5.438}$$

ただし $[\cdots]_D$ は次のように定義される。

$$[X]_D = 2\,\mathrm{Re}[T(X)]_F \tag{5.439}$$

アインシュタイン作用の前の係数が 1 になるような規格化を取れば、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{sugra}} = -3[\Phi_{\mathrm{comp}}\Phi^*_{\mathrm{comp}}]_D = eR(\omega, e) - \frac{e}{4}(\psi_\mu\gamma^{\mu\rho\sigma}\psi_{\rho\sigma}) - 6eF_{\mathrm{comp}}F^*_{\mathrm{comp}} + \frac{8e}{3}c_\mu c^\mu \tag{5.440}$$

compensator のみを用いて作ることのできる F 項ラグランジアンは次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{m_{3/2}} \quad &= \quad -2m_{3/2}[\Phi^3_{\mathrm{comp}}]_F + \mathrm{c.c.} \\ &= \quad -6m_{3/2}eF_{\mathrm{comp}} - \frac{-m_{3/2}e}{2}(\psi_{\mu\underline{\alpha}}(\gamma^{\mu\nu})^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\psi_\nu{}^{\underline{\beta}}) + \mathrm{c.c.}\end{aligned} \tag{5.441}$$

このことは補助場を含む定式化、例えば superconformal tensor calculus を用いれば確かめることができる。ここで与えたラグランジアンは、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \quad &= \quad -\frac{3}{k^2}[\Phi^*_{\mathrm{comp}}\Phi_{\mathrm{comp}}]_D + \left(-2\frac{m_{3/2}}{k^2}[\Phi^3_{\mathrm{comp}}]_F + \mathrm{c.c.}\right) \\ &= \quad -\frac{6e}{k^2}F^*_{\mathrm{comp}}F_{\mathrm{comp}} - 6\frac{m_{3/2}}{k^2}eF_{\mathrm{comp}} - 6\frac{m^*_{3/2}}{k^2}eF^*_{\mathrm{comp}} + \cdots\end{aligned} \tag{5.442}$$

と与えられる。Φ_{comp} は $(1, 0, F_{\mathrm{comp}})$ を成分場として持つ compensator 多重項で、初項は次元を持たない数 1 である。F_{comp} の質量次元は通常のカイラル多重項と異なり 1 である。$\cdots$ は補助場 F_{comp} を含まない部分である。運動方程式を解けば、補助場 F_{comp} の期待値は $F_{\mathrm{comp}} = m^*_{3/2}$ と与えられ、これを再びラグランジアンに代入すれば宇宙項 (3.43) を得る。

5.8.7 カイラル多重項

ワイルウェイトが 2、カイラルウェイトが 0 のカイラル多重項の関数に対して、その D 項ラグランジアンを計算してみよう。

一般の関数を多項式展開すれば、それぞれの項はカイラル多重項の正則関数 $\widetilde{f}$ の複素共役と正則関数 $\widetilde{g}$ の積 $\widetilde{f}^*\widetilde{g}$ のように表すことができる。ただし、もとの関数のウェイトを再現するためには $\widetilde{f}$ と $\widetilde{g}$ のワイルウェイトは常に 1 である必要がある。このとき、関数 $\widetilde{f}^*\widetilde{g}$ の D 項ラグランジアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}[\widetilde{f}(\Phi)^*\widetilde{g}(\Phi)]_D = -\frac{e}{6}\widetilde{f}^*\widetilde{g}R - eD^{(A)}_\mu\widetilde{f}^*D^{(A)\mu}\widetilde{g} + e\widetilde{f}^*_F\widetilde{g}_F \tag{5.443}$$

ただし、$w_\mu = 0$ とおいた。ポアンカレ超重力理論のラグランジアンを得るには、関数 $\widetilde{f}$ と $\widetilde{g}$ のワイルウェイトを compensator Φ_{comp} に担わせて、次のように表す。

$$\widetilde{f} = \Phi_{\mathrm{comp}}f(\Phi), \quad \widetilde{g} = \Phi_{\mathrm{comp}}g(\Phi). \tag{5.444}$$

f と g はどちらもワイルウェイトが 0 のカイラル多重項の正則関数である。これらの関数を用いると、$D_\mu^{(A)}\widetilde{f}$ や $\widetilde{f}_F$ は次のように与えられる。

$$D_\mu^{(A)}\widetilde{f} = \partial_\mu f - \frac{2i}{3}c_\mu f, \quad \widetilde{f}_F = f_F + F_{\rm comp} f \tag{5.445}$$

$D_\mu^{(A)}\widetilde{g}$ や $\widetilde{g}_F$ についても同様である。さらに、ラグランジアン中の f^*g をくくり出すために次のように f に微分演算子が作用する形で与えておく。

$$D_\mu^{(A)}\widetilde{f} = \left(\partial_\mu\phi^i\partial_i - \frac{2i}{3}c_\mu\right) f, \quad \widetilde{f}_F = \left(F^i\partial_i + F_{\rm comp}\right) f \tag{5.446}$$

これを用いれば、上記のラグランジアンは次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm kin} &= e\Big[-\frac{1}{6}R - \left(\partial_\mu\phi^{*i^*}\partial_{i^*} + \frac{2i}{3}c_\mu\right)\left(\partial^\mu\phi^i\partial_i - \frac{2i}{3}c^\mu\right) \\ &\qquad + \left(F^{*i^*}\partial_{i^*} + F^*_{\rm comp}\right)\left(F^i\partial_i + F_{\rm comp}\right)\Big] f^*g \end{aligned}\tag{5.447}$$

もっとも簡単な場合、すなわちカイラル多重項として compensator $\Phi_{\rm comp}$ だけを含む場合には、$fg = -6$ とすれば (5.440) が得られる。さらに一般に、カイラル多重項が複数個あるとしよう。$\Phi_{\rm comp}$ のほかにウェイトが 0 のカイラル多重項を Φ^i とおき、f^*g がそれらの関数であるとしよう。関数 f^*g の定数項は上記の単純超重力理論を与えるので、その部分は -6 にとる。そして Φ^i に依存する部分はケーラーポテンシャルになるように、次のように置くのが便利である。

$$f^*g = -6 + K + \cdots = -6e^{-K/6} \tag{5.448}$$

このとき上記のラグランジアンは次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm kin} &= -3[\Phi_{\rm comp}\Phi^*_{\rm comp}e^{-K/6}]_D \\ &= e\Big[R + \frac{1}{24}\partial_\mu K\partial^\mu K - K_{ij^*}\partial_\mu\phi^i\partial_\mu\phi^{*j^*} - K_{ij^*}F^iF^{*j^*} \\ &\qquad + \frac{8}{3}(c_\mu - S_\mu)(c^\mu - S^\mu) \\ &\qquad - \frac{1}{6}\left(6F^*_{\rm comp} - F^{*i^*}K_{i^*}\right)\left(6F_{\rm comp} - F^iK_i\right)\Big]e^{-K/6}\end{aligned}\tag{5.449}$$

ただし、S_μ は次のように定義される複合ベクトル場である。

$$S_\mu = \frac{i}{8}\partial_\mu\phi^iK_i - \frac{i}{8}\partial_\mu\phi^{*i^*}K_{i^*} \tag{5.450}$$

補助場 c_μ についての運動方程式を解くと、$c_\mu = S_\mu$ となる。

さらにポテンシャル項を次のように導入することができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -[\Phi^3_{\rm comp}W(\Phi)]_F + {\rm c.c.} \\ &= -e\left(W_iF^i + 3W(\phi)F_{\rm comp}\right) + {\rm c.c.}\end{aligned}\tag{5.451}$$

5.9 ベクトル多重項

5.9.1 成分と変換則

実ベクトル多重項は、初項が実スカラー場であるような多重項である。ここでは初項を B とし、そのワイルウェイトを n_D とする。B は実であるから、カイラルウェイトは常に 0 である。実多重項 $\boldsymbol{V}(B)$ のワイルウェイトと言った場合には初項 B のワイルウェイトのことをさす。

$\boldsymbol{V}(B)$ の成分場は、B に超対称変換を繰り返し行うことにより次のように定義する。

実ベクトル多重項の成分場の定義

ワイルウェイトが n_D の実ベクトル多重項は、ワイルウェイトが n_D の実スカラー場 B に超対称変換 Q を繰り返し行うことによって以下のように定義する。

$$\begin{array}{lll} B & Q_{\overline{\alpha}}B = \dfrac{1}{2}\eta_{\overline{\alpha}} & Q_{\overline{\alpha}}Q^{\overline{\alpha}}B = \dfrac{1}{2}C \\ Q_{\underline{\alpha}}B = \dfrac{1}{2}\eta_{\underline{\alpha}} & i(\gamma^5\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}[Q_{\overline{\alpha}}, Q_{\underline{\beta}}]B = \dfrac{1}{2}v_{\widehat{m}} & Q_{\overline{\beta}}Q^{\overline{\beta}}Q_{\underline{\alpha}}B = \dfrac{i}{4\sqrt{2}}\lambda_{\underline{\alpha}} \\ Q_{\underline{\alpha}}Q^{\underline{\alpha}}B = \dfrac{1}{2}C^* & Q_{\underline{\beta}}Q^{\underline{\beta}}Q_{\overline{\alpha}}B = -\dfrac{i}{4\sqrt{2}}\lambda_{\overline{\alpha}} & Q_{\overline{\alpha}}Q_{\underline{\beta}}Q^{\underline{\beta}}Q^{\overline{\alpha}}B = \dfrac{1}{8}D \end{array} \tag{5.452}$$

$v_{\widehat{m}}$ と D はそれぞれ実のベクトル場、実のスカラー場である。

成分場 η および C については、定義の仕方は規格化をのぞきほとんど一意的であるが、それ以外の場については $Q_{\overline{\alpha}}$ と $Q_{\underline{\alpha}}$（これらは反可換ではない）を作用させる順序についての任意性がある。この順序を (5.452) のように選んだ理由についてコメントしておこう。

まず、$v_{\widehat{m}}$ についてであるが、$Q_{\overline{\alpha}}$ と $Q_{\underline{\beta}}$ のどちらを作用させるかで $Q_{\overline{\alpha}}Q_{\underline{\beta}}B$ と $Q_{\underline{\beta}}Q_{\overline{\alpha}}B$ の二つの可能性がある。これらの和をとると、Q の交換関係より $D^{\rm cov}_\mu B$ に比例するものを得るから、独立な場を与えない。そこで、二つの差を取るのが自然である。このことを踏まえ、成分場 $v_{\widehat{m}}$ は (5.452) に与えられているように交換関係を用いて定義した。

次に、$\lambda_{\overline{\alpha}}$ であるが、これはカイラリティが正の Q を一つ、カイラリティが負の Q を二つ B に作用させることで定義される。3 つの Q の並べ方によって 3 とおりのものが考えられるが、(5.452) にあるようにカイラリティが負の Q が二つ外側にあると、さらに $Q_{\underline{\alpha}}$ を作用させたときに直ちに 0 になることが分かる。このようにとっておく事により、λ の変換則が簡単になる。また、$n_D = 0$ の場合には、λ を初項とするカイラル多重項を定義したいが、このためにも $Q_{\underline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}} = 0$ が必要である。

最後に D であるが、(5.452) によって成分場 D を定義しておくと、自動的に D が実になる。このことを確かめておこう。(5.452) の D からその複素共役を引き、交換関係を用いることにより、次の式を得る。

$$Q_{\overline{\alpha}}Q_{\underline{\beta}}Q^{\underline{\beta}}Q^{\overline{\alpha}}B - Q_{\underline{\beta}}Q_{\overline{\alpha}}Q^{\overline{\alpha}}Q^{\underline{\beta}}B = -\frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}[P^{\rm gc}_{\widehat{m}}, Q_{\underline{\beta}}Q_{\overline{\alpha}}]B \tag{5.453}$$

交換関係で引かれる二つの項をそれぞれ計算してみると、

$$\frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}P^{\rm gc}_{\widehat{m}}Q_{\underline{\beta}}Q_{\overline{\alpha}}B = \frac{i}{16}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}v^{\widehat{m}} + \frac{1}{16}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}D^{{\rm cov}\widehat{m}}B \tag{5.454}$$

および

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}Q_{\underline{\beta}}Q_{\overline{\alpha}}P^{\rm gc}_{\widehat{m}}B \quad &= \quad \frac{1}{8}(\gamma^{\widehat{m}})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}Q_{\underline{\beta}}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\eta_{\overline{\alpha}} \\ &= \quad \frac{i}{16}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}v^{\widehat{m}} + \frac{1}{16}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}D^{{\rm cov}\widehat{m}}B \\ &\quad\quad +\frac{1}{8}(\gamma^{\widehat{m}})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\left(\frac{1}{4}Q'_{\underline{\beta}}\omega_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\eta)_{\overline{\alpha}} - \frac{n_D}{2}Q'_{\underline{\beta}}\phi_{\widehat{m}\overline{\alpha}}B\right) \end{aligned} \tag{5.455}$$

が得られる。複合場の変換の補正の分だけずれていそうであるが、実際に $\delta'\omega$ および $\delta'\phi$ の式を代入してみると、0 になることが分かる。したがって、(5.452) によって定義される成分場 D は実

Soryushiron Kenkyu

であり、次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{8}D = Q_{\overline{\alpha}}Q_{\underline{\beta}}Q^{\underline{\beta}}Q^{\overline{\alpha}}B = Q_{\underline{\beta}}Q_{\overline{\alpha}}Q^{\overline{\alpha}}Q^{\underline{\beta}}B \tag{5.456}$$

成分場が (5.452) によって定義されると、カイラル多重項の場合と同様に、代数を用いることで変換則が一意的に定まる。以下では成分場それぞれについて、Q 変換と S 変換を決定していく。D 変換、A 変換、M 変換のルールはウェイトとスピンによって自動的に決定されるから、ここでは改めて変換則を与えることは必要ない。

まず、B について考えてみよう。B は最低ウェイトの場であるから、その S 変換および K 変換は 0 である。また、Q 変換は定義により成分場 η を与える。

B の変換則

$$\delta_Q B = \frac{1}{2}\xi^{\alpha}\eta_{\alpha}, \tag{5.457}$$

$$\delta_S B = 0. \tag{5.458}$$

$$D_{\mu}^{\mathrm{cov}}B = \partial_{\mu}B - n_D w_{\mu}B - \frac{1}{2}\psi_{\mu}{}^{\alpha}\eta_{\alpha}. \tag{5.459}$$

η の S 変換は、η の定義と交換関係を用いることによって次の式を得る。

$$S_{\alpha}\eta_{\beta} = 2\{S_{\alpha}, Q_{\beta}\}B = -\frac{n_D}{2}\mathbf{1}_{\alpha\beta}B \tag{5.460}$$

Q 変換についてはカイラリティごとに分けて考えよう。η と Q のカイラリティがどちらも正の場合には、次の式が得られる。

$$Q_{\overline{\alpha}}\eta_{\overline{\beta}} = 2Q_{\overline{\alpha}}Q_{\overline{\beta}}B = \mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\mathbf{1}^{\overline{\gamma}\overline{\delta}}Q_{\overline{\gamma}}Q_{\overline{\delta}}B = -\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}C \tag{5.461}$$

η のカイラリティが正、Q のカイラリティが負の場合には η を QB と書き換え、二つの Q の積を交換関係と反交換関係の和に分解すれば、

$$Q_{\underline{\alpha}}\eta_{\overline{\beta}} = [Q_{\underline{\alpha}}, Q_{\overline{\beta}}]B + \{Q_{\underline{\alpha}}, Q_{\overline{\beta}}\}B = -\frac{i}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\underline{\alpha}\overline{\beta}}v_{\widehat{m}} - \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\underline{\alpha}\overline{\beta}}D_{\widehat{m}}^{\mathrm{cov}}B \tag{5.462}$$

η のカイラリティが負の場合については、これらの式の複素共役として得ることができる。

η の変換則

$$\delta_Q\eta_{\overline{\alpha}} = \frac{1}{2}\xi_{\overline{\alpha}}C - \frac{i}{4}v_{\widehat{m}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}} - \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}D_{\widehat{m}}^{\mathrm{cov}}B, \tag{5.463}$$

$$\delta_S\eta_{\overline{\alpha}} = \frac{n_D}{2}\zeta_{\overline{\alpha}}B \tag{5.464}$$

$$D_{\mu}^{\mathrm{cov}}\eta = D_{\mu}^{MDA}\eta - \frac{1}{2}\psi_{\mu}C_R - \frac{i}{2}\gamma^5\psi_{\mu}C_I + \frac{i}{4}\gamma^5 \not{v}\psi_{\mu} + \frac{1}{4}(\not{D}^{\mathrm{cov}}B)\psi_{\mu} - \frac{n_D}{2}\phi_{\mu}B \tag{5.465}$$

C の $S_{\overline{\alpha}}$ 変換は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} S_{\overline{\alpha}}C &= \{S_{\overline{\alpha}}, Q_{\overline{\beta}}\}\eta^{\overline{\beta}} - Q_{\overline{\beta}}S_{\overline{\alpha}}\eta^{\overline{\beta}} \\ &= \mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\left(-\frac{1}{4}D + \frac{3i}{8}A\right)\eta^{\overline{\beta}} - \frac{1}{16}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\eta)^{\overline{\beta}} - \frac{n_D}{2}Q_{\overline{\alpha}}B \\ &= \left(1 - \frac{n_D}{2}\right)\eta_{\overline{\alpha}} \end{aligned} \tag{5.466}$$

$S_{\underline{\alpha}}$ 変換は次のように 0 になる。

$$S_{\underline{\alpha}}C = -Q_{\overline{\beta}}S_{\underline{\alpha}}\eta^{\overline{\beta}} = 0. \tag{5.467}$$

$Q_{\overline{\alpha}}$ 変換を 3 回行うと必ず 0 になるから、C の $Q_{\overline{\alpha}}$ 変換は 0 である。

$$Q_{\overline{\alpha}}C = 0. \tag{5.468}$$

$Q_{\underline{\alpha}}$ 変換は、

$$\begin{aligned}
Q_{\underline{\alpha}}C &= 2Q_{\underline{\alpha}}Q_{\overline{\beta}}Q^{\overline{\beta}}B \\
&= 2\{Q_{\underline{\alpha}}, Q_{\overline{\beta}}\}Q^{\overline{\beta}}B - 2Q_{\overline{\beta}}\{Q_{\underline{\alpha}}, Q^{\overline{\beta}}\}B + 2Q_{\overline{\beta}}Q^{\overline{\beta}}Q_{\underline{\alpha}}B \\
&= -\frac{1}{2}(\gamma^{\widehat{m}})_{\underline{\alpha}\overline{\beta}}D_{\widehat{m}}\eta^{\overline{\beta}} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\lambda_{\underline{\alpha}}
\end{aligned} \tag{5.469}$$

C の変換則

$$\delta_Q C = -\frac{1}{2}\xi^{\underline{\alpha}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\underline{\alpha}\overline{\beta}}D_{\widehat{m}}\eta^{\overline{\beta}} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi^{\underline{\alpha}}\lambda_{\underline{\alpha}}, \tag{5.470}$$

$$\delta_S C = \left(1 - \frac{n_D}{2}\right)\zeta^{\overline{\alpha}}\eta_{\overline{\alpha}} \tag{5.471}$$

$v_{\widehat{m}}$ の S 変換は

$$\begin{aligned}
S_{\overline{\alpha}}v_{\widehat{m}} &= iS_{\overline{\alpha}}(\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\beta}\underline{\gamma}}(Q_{\overline{\beta}}\eta_{\underline{\gamma}} - Q_{\underline{\gamma}}\eta_{\overline{\beta}}) \\
&= i(\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\beta}\underline{\gamma}}(\{S_{\overline{\alpha}}, Q_{\overline{\beta}}\}\eta_{\underline{\gamma}} + Q_{\underline{\gamma}}S_{\overline{\alpha}}\eta_{\overline{\beta}}) \\
&= i(\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\beta}\underline{\gamma}}\left[\left(\frac{1}{8}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}M_{\widehat{p}\widehat{q}} - \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}D + \frac{3i}{8}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}A\right)\eta_{\underline{\gamma}} - \frac{n_D}{2}Q_{\underline{\gamma}}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}B\right] \\
&= \frac{i}{2}(n_D + 1)(\gamma_{\widehat{m}}\eta)_{\overline{\alpha}}
\end{aligned} \tag{5.472}$$

$v_{\widehat{m}}$ の Q 変換は

$$Q_{\overline{\alpha}}v_{\widehat{m}} = i(\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\beta}\underline{\gamma}}(Q_{\overline{\alpha}}Q_{\overline{\beta}}\eta_{\underline{\gamma}} - Q_{\overline{\alpha}}Q_{\underline{\gamma}}\eta_{\overline{\beta}}) \tag{5.473}$$

第 1 項は

$$i(\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\beta}\underline{\gamma}}(Q_{\overline{\alpha}}Q_{\overline{\beta}}\eta_{\underline{\gamma}}) = -\frac{i}{2}(\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\beta}\underline{\gamma}}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}Q_{\overline{\delta}}Q^{\overline{\delta}}\eta_{\underline{\gamma}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\gamma_{\widehat{m}})_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\gamma}}\lambda_{\underline{\gamma}} \tag{5.474}$$

第 2 項は

$$\begin{aligned}
-i(\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\beta}\underline{\gamma}}Q_{\overline{\alpha}}Q_{\underline{\gamma}}\eta_{\overline{\beta}} &= -i(\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\beta}\underline{\gamma}}\{Q_{\overline{\alpha}}, Q_{\underline{\gamma}}\}\eta_{\overline{\beta}} + i(\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\beta}\underline{\gamma}}Q_{\underline{\gamma}}Q_{\overline{\alpha}}\eta_{\overline{\beta}} \\
&= \frac{i}{4}(\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\beta}\underline{\gamma}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\overline{\alpha}\underline{\gamma}}D^{\mathrm{cov}}_{\widehat{k}}\eta_{\overline{\beta}} - \frac{i}{2}(\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\beta}\underline{\gamma}}Q_{\underline{\gamma}}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}C \\
&= -\frac{i}{2}(D^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}}\eta)_{\overline{\alpha}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}(\gamma_{\widehat{m}}\lambda)_{\overline{\alpha}}
\end{aligned} \tag{5.475}$$

あわせれば

$$Q_{\overline{\alpha}}v_{\widehat{m}} = -\frac{i}{2}(D^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}}\eta)_{\overline{\alpha}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma_{\widehat{m}}\lambda)_{\overline{\alpha}} \tag{5.476}$$

$v_{\widehat{m}}$ の変換則

$$\delta_Q v_{\widehat{m}} = \frac{i}{2}(\xi\gamma^5 D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\eta)_{\overline{\alpha}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi\gamma_{\widehat{m}}\lambda), \tag{5.477}$$

$$\delta_S v_{\widehat{m}} = -\frac{i}{2}(n_D+1)(\zeta\gamma^5\gamma_{\widehat{m}}\eta) \tag{5.478}$$

λ の変換則を求めよう。

S 変換を求めるには、(5.469) より得られる

$$-\frac{i}{2\sqrt{2}}\lambda_{\overline{\alpha}} = Q_{\overline{\alpha}}C^* + \frac{1}{2}(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}D_{\widehat{m}}\eta^{\underline{\beta}} \tag{5.479}$$

および、(5.325) より得られる

$$\delta_S(D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\phi) = \zeta^\alpha D^{\rm cov}_{\widehat{m}}(S_\alpha\phi) - \zeta^\alpha(\gamma_{\widehat{m}})_\alpha{}^\beta Q_\beta\phi \tag{5.480}$$

を用いれば以下のように簡単である。

$$\begin{aligned} S_{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}} &= 2\sqrt{2}iS_{\overline{\alpha}}Q_{\overline{\beta}}C^* + \sqrt{2}i(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\beta}\underline{\gamma}}S_{\overline{\alpha}}D_{\widehat{m}}\eta^{\underline{\gamma}} \\ &= 2\sqrt{2}i\left(-\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}D + \frac{3i}{8}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}A\right)C^* - \sqrt{2}i(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\beta}\underline{\gamma}}(\gamma_{\widehat{m}})_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\delta}}Q_{\underline{\delta}}\eta^{\underline{\gamma}} \\ &= -\frac{in_D}{\sqrt{2}}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}C^* \end{aligned} \tag{5.481}$$

$$\begin{aligned} S_{\underline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}} &= 2\sqrt{2}iS_{\underline{\alpha}}Q_{\overline{\beta}}C^* + \sqrt{2}i(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\beta}\underline{\gamma}}S_{\underline{\alpha}}D_{\widehat{m}}\eta^{\underline{\gamma}} \\ &= 2\sqrt{2}i\left(\frac{n_D}{2}-1\right)Q_{\overline{\beta}}\eta_{\underline{\alpha}} - \sqrt{2}i(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\beta}\underline{\gamma}}(\gamma_{\widehat{m}})_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\delta}}Q_{\overline{\delta}}\eta^{\underline{\gamma}} \\ &= \sqrt{2}in_D(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\beta}\underline{\alpha}}\left(\frac{i}{4}v_{\widehat{m}} - \frac{1}{4}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}B\right) \end{aligned} \tag{5.482}$$

これらはどちらも $n_D=0$ のときに 0 になる。

次に、Q 変換を計算してみよう。$Q^{\underline{\alpha}}$ 変換は 0 である。

$$Q_{\underline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}} = 0. \tag{5.483}$$

$Q_{\overline{\alpha}}$ 変換は

$$Q_{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}} = Q_{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}}|_{\{\overline{\alpha}\overline{\beta}\}} + Q_{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}}|_{[\overline{\alpha}\overline{\beta}]} = Q_{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}}|_{\{\overline{\alpha}\overline{\beta}\}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\mathbf{1}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}D \tag{5.484}$$

のように、添え字について反対称な部分は D である。あとは対称な部分を求めればよい。(5.479) を用いれば

$$Q_{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}} = 2\sqrt{2}iQ_{\overline{\alpha}}Q_{\overline{\beta}}C^* + \sqrt{2}i(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\beta}\underline{\gamma}}Q_{\overline{\alpha}}D_{\widehat{m}}\eta^{\underline{\gamma}} = 2\sqrt{2}iQ_{\overline{\alpha}}Q_{\overline{\beta}}C^* + \frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma^{\widehat{m}}\gamma^{\widehat{k}})_{\overline{\beta}\overline{\alpha}}(\gamma_{\widehat{k}})^{\overline{\delta}}{}_{\underline{\epsilon}}Q_{\overline{\delta}}D_{\widehat{m}}\eta^{\underline{\epsilon}} \tag{5.485}$$

なので、添え字について対称な部分は

$$Q_{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}}|_{\{\overline{\alpha}\overline{\beta}\}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(\gamma^{\widehat{k}\widehat{m}})_{\overline{\beta}\overline{\alpha}}F^{(+)}_{\widehat{k}\widehat{m}}, \quad F^{(+)}_{\widehat{k}\widehat{m}} = -4i(\gamma_{\widehat{k}})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}Q_{\overline{\alpha}}D_{\widehat{m}}\eta_{\underline{\beta}}|^{(+)}_{[\widehat{k}\widehat{m}]} \tag{5.486}$$

ここで、反対称テンソル $F_{\widehat{k}\widehat{m}}$ を定義した。これはベクトル場 $v_{\widehat{m}}$ をゲージ場だとしたときに場の強さに相当するものである。$F_{\widehat{m}\widehat{n}}$ の具体形はこの節の最後で与える。

得られた λ の変換則をまとめておくと、次のようになる。

λ の変換則

$$\delta_Q\lambda = \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi_{\overline{\alpha}}D - \frac{1}{4\sqrt{2}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\xi^{\overline{\beta}}F_{\widehat{p}\widehat{q}}, \tag{5.487}$$

$$\delta_S\lambda = -\frac{in_D}{\sqrt{2}}\zeta_{\overline{\alpha}}C^* + \frac{in_D}{2\sqrt{2}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\zeta^{\underline{\beta}}(iv_{\widehat{m}} - D^{\rm cov}_{\widehat{m}}B) \tag{5.488}$$

最後に、D の変換則について考えよう。

$$\begin{aligned} S_{\overline{\alpha}}D &= -\sqrt{2}i\{S_{\overline{\alpha}}, Q_{\overline{\beta}}\}\lambda^{\overline{\beta}} + \sqrt{2}iQ_{\overline{\beta}}S_{\overline{\alpha}}\lambda^{\overline{\beta}} \\ &= +\frac{in_D}{2\sqrt{2}}\lambda_{\overline{\alpha}} + n_D\left(\frac{1}{2}(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\alpha}\underline{\gamma}}D_{\widehat{m}}\eta^{\underline{\gamma}} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\lambda_{\overline{\alpha}}\right) \\ &= \frac{in_D}{\sqrt{2}}\lambda_{\overline{\alpha}} + \frac{n_D}{2}(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\alpha}\underline{\gamma}}D_{\widehat{m}}\eta^{\underline{\gamma}} \end{aligned} \tag{5.489}$$

$$Q_{\overline{\alpha}}D = \sqrt{2}i\{Q_{\overline{\alpha}}, Q_{\underline{\beta}}\}\lambda^{\underline{\beta}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\lambda^{\underline{\beta}} \tag{5.490}$$

D の変換則

$$\delta_Q D = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\xi\gamma^5\gamma^{\widehat{m}}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\lambda), \tag{5.491}$$

$$\delta_S D = -\frac{in_D}{\sqrt{2}}(\zeta\gamma^5\lambda) - \frac{in_D}{4\sqrt{2}}(\zeta\gamma^5\gamma^{\widehat{m}}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\eta) \tag{5.492}$$

最後に、(5.486) で定義された反対称テンソル $F^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ の具体形を与えておこう。

$$\begin{aligned} F^{(+)}_{\widehat{k}\widehat{m}} &= -4i(\gamma_{\widehat{k}})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}Q_{\overline{\alpha}}D_{\widehat{m}}\eta_{\underline{\beta}}|^{(+)}_{[\widehat{k}\widehat{m}]} \\ &= \left[-2D_{\widehat{m}}v_{\widehat{k}} - 2iD_{\widehat{m}}D_{\widehat{k}}B - iQ'_{\overline{\alpha}}\omega_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}}(\gamma_{\widehat{k}}\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\eta)^{\overline{\alpha}} + 2in_D(\gamma_{\widehat{k}})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}Q'_{\overline{\alpha}}\phi_{\widehat{m}\underline{\beta}}B\right]|^{(+)}_{[\widehat{k}\widehat{m}]} \end{aligned} \tag{5.493}$$

$\cdots|^{(+)}_{[\widehat{k}\widehat{m}]}$ は $\widehat{k}$ と $\widehat{m}$ に対して反対称化し、その自己双対部分をとることを意味する。ただし、ここでいう自己双対部分とは $(\gamma_{\widehat{k}\widehat{m}})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}$ が自己双対、$(\gamma_{\widehat{k}\widehat{m}})_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ が反自己双対であるように定義する。このとき

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{p}\widehat{q}}F^{(+)}_{\widehat{p}\widehat{q}} = -iF^{(+)}_{\widehat{m}\widehat{n}} \tag{5.494}$$

が成り立つ。

ここで、Q 変換の補正によってあらわれる項後ろ二つの項は、$Q'\omega$ および $Q\phi'$ を代入すれば

$$-\frac{i}{4}(\eta\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})_{\underline{\gamma}}(\gamma_{\widehat{k}\widehat{m}})^{\underline{\gamma}}{}_{\underline{\beta}}R_{\widehat{p}\widehat{q}}{}^{\underline{\beta}}(Q) - \frac{n_D}{3}(\gamma^{pq})_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{k}})^{\underline{\gamma}\underline{\beta}}R_{pq}(A)B \tag{5.495}$$

となるが、これらは反自己双対テンソルであり、$F^{(+)}_{\widehat{k}\widehat{m}}$ には効かない。この結果

$$\begin{aligned} F^{(+)}_{\widehat{k}\widehat{m}} &= \left[(D^{\rm cov}_{\widehat{k}}v_{\widehat{m}} - D^{\rm cov}_{\widehat{m}}v_{\widehat{k}}) + i[D^{\rm cov}_{\widehat{k}}, D^{\rm cov}_{\widehat{m}}]B\right]_{(+)} \\ &= \left[(D^{\rm cov}_{\widehat{k}}v_{\widehat{m}} - D^{\rm cov}_{\widehat{m}}v_{\widehat{k}}) - \epsilon_{\widehat{k}\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}}D^{{\rm cov}\widehat{p}}D^{{\rm cov}\widehat{q}}B\right]_{(+)} \end{aligned} \tag{5.496}$$

したがって、$F_{\widehat{m}\widehat{n}} = F^{(+)}_{\widehat{m}\widehat{n}} + (F^{(+)}_{\widehat{m}\widehat{n}})^*$ によって反対称テンソル $F_{\widehat{m}\widehat{n}}$ を定義すると、

$$F_{\widehat{k}\widehat{m}} = (D^{\rm cov}_{\widehat{k}} v_{\widehat{m}} - D^{\rm cov}_{\widehat{m}} v_{\widehat{k}}) - \epsilon_{\widehat{k}\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}} D^{{\rm cov}\widehat{p}} D^{{\rm cov}\widehat{q}} B \tag{5.497}$$

この式によって定義される $F_{\widehat{p}\widehat{q}}$ は実である。公式 (5.334) を用いると、場 B の上での共変微分の交換関係は次のように与えることができる。

$$[D^{\rm cov}_{\widehat{m}}, D^{\rm cov}_{\widehat{n}}]B = -\frac{1}{2}R_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\alpha}(Q)\eta_\alpha - n_D R_{\widehat{m}\widehat{n}}(D)B = \frac{1}{2}\eta_\alpha R_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\alpha}(Q) + \frac{2n_D}{3}\widetilde{R}_{\widehat{m}\widehat{n}}(A)B \tag{5.498}$$

5.9.2 ゲージ多重項

カイラル多重項 Φ に対する次の U(1) ゲージ変換を考えよう。

$$\Phi \to \Phi' = e^{q\Lambda}\Phi. \tag{5.499}$$

ただし、変換パラメータ Λ もカイラル多重項に拡張した。Λ のウェイトは 0 である。

Φ^* から構成される運動多重項を Φ_K としよう。運動項 $[\Phi_K\Phi]$ が (5.499) の元で不変であるためには、Φ_K は次のように変換される必要がある。

$$\Phi_K \to \Phi'_K = \Phi_K e^{-q\Lambda}. \tag{5.500}$$

しかしながら、§5.7.2 で定義された運動多重項 $T(\Phi^*)$ はこの条件を満足しない。(5.499) のもとで共変に振舞う運動多重項を定義するには、ゲージ場を含むベクトル多重項を用いる必要がある。

ウェイトが 0 の実ベクトル多重項 V を導入し、これが (5.499) のもとで次のように変換されるとする。

$$V \to V' = V + \mathrm{Re}\,\Lambda. \tag{5.501}$$

これを用いると、(5.500) のように変換されるゲージ共変な運動多重項を次のように定義することができる。

$$\Phi_K = T(e^{-2V}\Phi^*) \tag{5.502}$$

このように、ゲージ場の役割をするウェイトが 0 のベクトル多重項 V はゲージ多重項と呼ばれる。

V がウェイト 0 の実ベクトル多重項であるとき、その成分場 $v_{\widehat{m}}$ はワイルウェイト 1 を持つ。したがって $v_\mu = e_\mu{}^{\widehat{m}} v_{\widehat{m}}$ のワイルウェイトは 0 であり、これをゲージ場と解釈することが可能である。

変換パラメータのカイラル多重項を $\Lambda = \mathbf{\Sigma}(\phi) = (\phi, \chi, F)$ として (5.501) の変換則がどのようにベクトル場 $v_{\widehat{m}}$ を変換するかを見てみよう。そのために、$\mathrm{Re}\,\Lambda$ の成分場を与えておこう。

$$\begin{array}{lll} \phi_R \equiv \frac{1}{2}(\phi+\phi^*) & Q_{\overline{\alpha}}\phi_R = \frac{1}{4}\chi_{\overline{\alpha}} & Q_{\overline{\alpha}}Q^{\overline{\alpha}}\phi_R = \frac{1}{4}F \\ Q_{\underline{\alpha}}\phi_R = \frac{1}{4}\chi_{\underline{\alpha}} & i(\gamma^5\gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}[Q_{\overline{\alpha}}, Q_{\underline{\beta}}]\phi_R = -\frac{i}{4}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\phi + \frac{i}{4}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\phi^* & Q_{\overline{\beta}}Q^{\overline{\beta}}Q_{\underline{\alpha}}\phi_R = 0 \\ Q_{\underline{\alpha}}Q^{\underline{\alpha}}\phi_R = \frac{1}{4}F^* & Q_{\overline{\beta}}Q^{\underline{\beta}}Q_{\overline{\alpha}}\phi_R = 0 & Q_{\overline{\alpha}}Q_{\underline{\beta}}Q^{\underline{\beta}}Q^{\overline{\alpha}}\phi_R = 0 \end{array} \tag{5.503}$$

この、カイラル多重項のベクトル多重項への埋め込みを用いると、(5.501) のゲージ変換はベクトル場 $v_\mu = e_\mu{}^{\widehat{m}} v_{\widehat{m}}$ に対して次のように作用する。

$$\delta_{\mathrm{U}(1)} v_\mu = -\frac{i}{2}D^{\rm cov}_\mu\phi + \frac{i}{2}D^{\rm cov}_\mu\phi^* = \frac{1}{2i}\partial_\mu(\phi-\phi^*) - \frac{i}{4}(\psi_\mu\gamma^5\chi) \tag{5.504}$$

この変換性は、通常の U(1) ゲージ変換とはグラビティーノを含む項の分だけずれている。このずれを吸収するために、v_μ に補正項を加えた次のベクトル場を定義する。

$$v'_\mu = v_\mu + \frac{i}{2}\psi_\mu\gamma^5\eta \tag{5.505}$$

すると、このベクトル場は変換 (5.501) のもとで U(1) ゲージ場として変換される。

$$\delta_{\mathrm{U}(1)} v'_\mu = \frac{1}{2i}\partial_\mu(\phi - \phi^*). \tag{5.506}$$

$v_{\widehat{m}}$ の代わりに v'_μ を用いて $n_D = 0$ の時の実ベクトル多重項の Q 変換および S 変換を書き下してみよう。まず、Q 変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\delta_Q B &= -\frac{1}{2}\xi\eta, && (5.507)\\
\delta_Q \eta &= \frac{1}{2}\xi C_R + \frac{i}{2}\gamma^5\xi C_I - \frac{i}{4}\gamma^5 \not{v}\xi - \frac{1}{4}(\not{D}^{\mathrm{cov}}B)\xi, && (5.508)\\
\delta_Q C &= \frac{1}{2}\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^{\widehat{m}})^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}} D^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}}\eta^{\overline{\beta}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi_{\underline{\alpha}}\lambda^{\underline{\alpha}}, && (5.509)\\
\delta_Q v'_\mu &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi\gamma_\mu\lambda) + \frac{i}{2}\partial_\mu(\xi\gamma^5\eta), && (5.510)\\
\delta_Q \lambda &= \frac{i}{2\sqrt{2}}\gamma^5\xi D - \frac{1}{4\sqrt{2}}\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}}\xi F^{\mathrm{cov}}_{\widehat{p}\widehat{q}}, && (5.511)\\
\delta_Q D &= \frac{i}{2\sqrt{2}}(\xi\gamma^5\gamma^{\widehat{m}}D^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}}\lambda) && (5.512)
\end{aligned}$$

v'_μ の変換則の第 2 項は U(1) ゲージ変換と解釈することができる。この変換則を見ると、v'_μ、λ、D の 3 つの場の変換則が、v'_μ のゲージ変換部分を除きこれらの場の中で閉じていることがわかる。($\delta\lambda$ の中には反対称テンソル $F_{\widehat{m}\widehat{n}}$ が含まれているが、これも v'_μ と λ だけで書かれていることはすぐあとで示す。)これは S 変換についても同様である。実際には S 変換はほとんど 0 である。特に v'_μ、λ、D の 3 つの場の S 変換は全て 0 である。

$$\begin{aligned}
\delta_S B &= 0, && (5.513)\\
\delta_S \eta &= 0, && (5.514)\\
\delta_S C &= -\zeta_{\overline{\alpha}}\eta^{\overline{\alpha}}, && (5.515)\\
\delta_S v'_\mu &= 0, && (5.516)\\
\delta_S \lambda &= 0, && (5.517)\\
\delta_S D &= 0. && (5.518)
\end{aligned}$$

変換パラメータの展開式 (5.503) を用いると、ゲージ変換 (5.501) によって成分場 B、η、C は任意の値に取ることができる。つまりこれらはゲージ自由度である。これらのゲージ自由度は通常は 0 に取っておくのが便利である。これについては次の節でさらに詳しく述べる。

λ の変換則にあらわれる $F^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ が $n_D = 0$ のときに具体的に成分場を用いてどのように与えられるかを示しておこう。まず、$v_{\widehat{n}}$ の共変微分を展開すると、次のようになる。

$$D^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}} v_{\widehat{n}} = D^{MDA}_{\widehat{m}} v_{\widehat{n}} - \frac{i}{2}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^5 D^{\mathrm{cov}}_{\widehat{n}}\eta) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(\psi_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}}\lambda) + \frac{i}{2}(\phi_{\widehat{m}}\gamma^5\gamma_{\widehat{n}}\eta). \tag{5.519}$$

これを添え字 $\widehat{m}$ と $\widehat{n}$ について反対称化したものが $F_{\widehat{m}\widehat{n}}$ の第 1 項を与える。(5.519) の右辺第 1 項は、$F_{\widehat{m}\widehat{n}}$ に対して次の寄与を与える。

$$D^{MDA}_{\widehat{m}} v_{\widehat{n}} - D^{MDA}_{\widehat{m}} v_{\widehat{n}} = e^{\widehat{m}}_\mu e^{\widehat{n}}_\nu(\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu) - T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}} v_{\widehat{k}} \tag{5.520}$$

Soryushiron Kenkyu

さらに v' で書き換えると、

$$\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu = \partial_\mu v'_\nu - \partial_\nu v'_\mu - \frac{i}{2}(\psi^{MDA}_{\mu\nu}\gamma^5\eta) - \frac{i}{2}(\psi_\nu\gamma^5 D^{MDA}_\mu\eta) + \frac{i}{2}(\psi_\mu\gamma^5 D^{MDA}_\nu\eta) \tag{5.521}$$

となる。(5.519) の第 2 項を、共変微分 $D^{\rm cov}_\mu\eta$ を (5.465) によって展開することで変形すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^5 D^{\rm cov}_{\widehat{n}}\eta) &= -\frac{i}{2}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^5 D^{MDA}_{\widehat{n}}\eta) + \frac{i}{4}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^5\psi_{\widehat{n}})C_R - \frac{1}{4}(\psi_{\widehat{m}}\psi_{\widehat{n}})C_I \\ &\quad + \frac{1}{8}(\psi_{\widehat{m}}\not{v}\psi_{\widehat{n}}) - \frac{i}{8}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^5(\not{D}^{\rm cov}B)\psi_{\widehat{n}}) \end{aligned} \tag{5.522}$$

この中で $\widehat{m}$ と $\widehat{n}$ について反対称なのは二つの項だけである。したがって $F^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ への寄与は次のようになる。

$$-\frac{i}{2}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^5 D^{\rm cov}_{\widehat{n}}\eta) + \frac{i}{2}(\psi_{\widehat{n}}\gamma^5 D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\eta) = -\frac{i}{2}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^5 D^{MDA}_{\widehat{n}}\eta) + \frac{i}{2}(\psi_{\widehat{n}}\gamma^5 D^{MDA}_{\widehat{m}}\eta) + \frac{1}{4}(\psi_{\widehat{m}}\not{v}\psi_{\widehat{n}}) \tag{5.523}$$

(5.523) の右辺第 1 項、第 2 項は (5.521) の後ろ二つの項と相殺し、(5.523) の右辺最後の項は (5.520) の捩率項と相殺する。残ったものをまとめると、次のものが得られる。

$$\begin{aligned} D^{\rm cov}_{\widehat{m}} v_{\widehat{n}} - D^{\rm cov}_{\widehat{n}} v_{\widehat{m}} &= e^\mu_{\widehat{m}} e^\nu_{\widehat{n}}(\partial_\mu v'_\nu - \partial_\nu v'_\mu) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(\psi_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}}\lambda) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\psi_{\widehat{n}}\gamma_{\widehat{m}}\lambda) \\ &\quad - \frac{i}{2}(\psi^{MDA}_{\widehat{m}\widehat{n}}\gamma^5\eta) + \frac{i}{2}(\phi_{\widehat{m}}\gamma^5\gamma_{\widehat{n}}\eta) - \frac{i}{2}(\phi_{\widehat{n}}\gamma^5\gamma_{\widehat{m}}\eta). \end{aligned} \tag{5.524}$$

この右辺の二行目は $R(Q)$ を用いて $-(i/2)(\eta\gamma^5 R_{\widehat{m}\widehat{n}}(Q))$ にまとまる。さらにこの項は $F^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ の定義式 (5.497) の $\epsilon[D,D]B$ 項と相殺し、最終的に $F^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ が次のように与えられる。

$$F^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} = e^\mu_{\widehat{m}} e^\nu_{\widehat{n}}(\partial_\mu v'_\nu - \partial_\nu v'_\mu) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(\psi_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}}\lambda) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\psi_{\widehat{n}}\gamma_{\widehat{m}}\lambda) \tag{5.525}$$

あとで用いるので、この反対称テンソル場の超対称変換を与えておこう。

$$\delta_Q F_{\widehat{m}\widehat{n}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi\gamma_{\widehat{n}} D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\lambda) - [\widehat{m}\widehat{n}] \tag{5.526}$$

5.9.3 ゲージ場の強さと運動項

λ の変換則 (5.511) と (5.517) を見てみると、$\lambda_{\overline{\alpha}}$ はカイラル条件 (5.335) を満足していることがわかる。すなわち

$$Q_{\underline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}} = S_{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}} = S_{\underline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}} = 0 \tag{5.527}$$

が成り立つ。実際 $\lambda_{\overline{\alpha}}$ はワイルウェイト 3/2、カイラルウェイト 1 を持ち、ウェイトに対する条件 (5.339) も満足している。そこで、$\lambda_{\overline{\beta}}$ で始まるカイラル多重項 $W_{\overline{\beta}} = \mathbf{\Sigma}(\lambda_{\overline{\beta}})$ を定義しよう。$\lambda_{\overline{\beta}}$ 以外の成分場は (5.337) に従って定義され、次のように与えられる。

$$2Q_{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}} = \frac{i}{\sqrt{2}}\mathbf{1}_{\overline{\beta}\overline{\alpha}}D - \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})_{\overline{\beta}\overline{\alpha}}F^{\rm cov}_{\widehat{p}\widehat{q}}, \tag{5.528}$$

$$\begin{aligned} 2Q_{\overline{\alpha}}Q^{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}Q_{\overline{\beta}}D + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})_{\overline{\beta}\overline{\alpha}}Q^{\overline{\alpha}}F^{\rm cov}_{\widehat{p}\widehat{q}} \\ &= -\frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\beta}\underline{\gamma}}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\lambda^{\underline{\gamma}} - \frac{3}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\beta}\underline{\gamma}}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\lambda^{\underline{\gamma}} \\ &= -(\gamma^{\widehat{m}})_{\overline{\beta}\underline{\gamma}}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\lambda^{\underline{\gamma}} \end{aligned} \tag{5.529}$$

このように、$W_{\overline{\alpha}}$ の成分場はゲージ共変であり特に場の強さ $F^{\rm cov}_{\mu\nu}$ を含んでいる。

Soryushiron Kenkyu

5.9.4 Wess-Zumino ゲージ

ゲージ多重項の中で、物理的な自由度を担うのは成分場 (v'_μ, λ, D) だけであり、これ以外の場 (B, η, C) はゲージ自由度である。そこでこれらの場を 0 と置いたゲージを取るのが便利である。

$$B = \eta = C = 0. \tag{5.530}$$

これは Wess-Zumino ゲージと呼ばれる。

Q 変換を行うと、このゲージは次のように破られる。

$$\delta_Q B = 0, \tag{5.531}$$

$$\delta_Q \eta = -\frac{i}{4}\gamma^5 \not\partial \xi, \tag{5.532}$$

$$\delta_Q C = \frac{i}{8}\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^m \not\partial \psi_{\widehat{m}})^{\underline{\alpha}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi_{\underline{\alpha}}\lambda^{\underline{\alpha}} \tag{5.533}$$

従って、これを相殺するような U(1) ゲージ変換を行ってゲージを取り直す必要がある。変換 (5.499) によってゲージ条件 (5.530) を回復させるためには、変換パラメータ Λ の成分場を次のように取ればよい。

$$\phi_\Lambda = 0, \quad \chi_\Lambda^{\overline{\alpha}} = \frac{i}{2}(\not\partial)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}, \quad F_\Lambda = -\frac{i}{4}\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^m \not\partial \psi_{\widehat{m}})^{\underline{\alpha}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\xi_{\underline{\alpha}}\lambda^{\underline{\alpha}} \tag{5.534}$$

ゲージ変換 (5.499) は成分場 η と C を $\delta\eta = (1/2)\chi_\Lambda$、$\delta C = (1/2)F$ と変換するから、(5.534) によってよってちょうど上記の超対称変換は打ち消される。

このゲージの取り直しはゲージ多重項の物理的成分場 (v'_μ, λ, D) には全く影響を与えない。これは、今考えているのが U(1) のゲージ場であり、ゲージ多重項自身はベクトル場を除きゲージ変換を受けないからである。

しかし電荷をもつカイラル多重項は次のように引き戻しの影響を受ける。このゲージの取り直しの操作まで含めた超対称変換を δ_{WZ} としよう。これは U(1) 電荷 q を持つカイラル多重項に対して次のように作用する。

$$\delta_{\mathrm{WZ}}\Phi = \delta_Q \Phi + q\Lambda. \tag{5.535}$$

成分場に対して書くと、

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{WZ}}\phi &= \delta\phi \\ &= -\frac{1}{2}\xi_{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}},\end{aligned} \tag{5.536}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{WZ}}\chi^{\overline{\alpha}} &= \delta_Q\chi^{\overline{\alpha}} + \frac{iq}{2}(\not\partial)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}\phi \\ &= \frac{1}{2}\xi^{\overline{\alpha}}F - \frac{1}{2}(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}\mathcal{D}^{\mathrm{cov}}_\mu\phi,\end{aligned} \tag{5.537}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{WZ}}F &= \delta_Q F + \chi_\Lambda\chi + F_\Lambda\phi \\ &= \frac{1}{2}\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^\mu)^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\mathcal{D}^{\mathrm{cov}}_\mu\chi^{\overline{\beta}} + \frac{iq}{\sqrt{2}}\xi_{\underline{\alpha}}\lambda^{\underline{\alpha}}\phi\end{aligned} \tag{5.538}$$

ただし、$\mathcal{D}^{\mathrm{cov}}_\mu$ は U(1) ゲージ変換についても共変化した微分で、次のように定義される。

$$\mathcal{D}^{\mathrm{cov}}_\mu\phi = D^{\mathrm{cov}}_\mu\phi - iqv_\mu\phi, \tag{5.539}$$

$$\mathcal{D}^{\mathrm{cov}}_\mu\chi^{\overline{\beta}} = D^{\mathrm{cov}}_\mu\chi^{\overline{\beta}} - iqv_\mu\chi^{\overline{\beta}} - \frac{iq}{2}(\not\partial\psi_\mu)^{\overline{\beta}}\phi \tag{5.540}$$

$\mathcal{D}^{\mathrm{cov}}_\mu\chi^{\overline{\beta}}$ の定義の最後の項は、$\mathcal{D}^{\mathrm{cov}}_\mu\chi^{\overline{\beta}}$ に含まれる $D^{\mathrm{cov}}_\mu\phi$ を $\mathcal{D}^{\mathrm{cov}}_\mu\phi$ に置き換える役割を果たす。

Soryushiron Kenkyu

S 変換については Wess-Zumino ゲージを破らないから、Q 変換の時のようなゲージの取り直しをする必要はない。

電荷 q、ワイルウェイト $n_D = 1$ を持つカイラル多重項から作られるゲージ共変な運動多重項 $T(\Phi^* e^{-2qV})$ の Wess-Zumino ゲージにおいての成分を計算しよう。

Wess-Zumino ゲージでは、V の初項 B を少なくとも 2 回、カイラリティの異なる Q 変換をしなければ 0 であるから、e^{-2qV} の成分場は次のように与えられる。

$$
\begin{array}{lll}
e^{-2qB}|_{\mathrm{WZ}} = 1 & Q_{\overline{\alpha}} e^{-2qB}|_{\mathrm{WZ}} = 0 & Q_{\overline{\alpha}} Q^{\overline{\alpha}} e^{-2qB}|_{\mathrm{WZ}} = 0 \\
Q_{\underline{\alpha}} e^{-2qB}|_{\mathrm{WZ}} = 0 & i(\gamma^5 \gamma_{\widehat{m}})^{\overline{\alpha}\underline{\beta}} [Q_{\overline{\alpha}}, Q_{\underline{\alpha}}] e^{-2qB}|_{\mathrm{WZ}} = -q v_{\widehat{m}} & Q_{\overline{\beta}} Q^{\overline{\beta}} Q_{\underline{\alpha}} e^{-2qB}|_{\mathrm{WZ}} = -\dfrac{iq}{2\sqrt{2}} \lambda^{\underline{\alpha}} \\
Q_{\underline{\alpha}} Q^{\underline{\alpha}} e^{-2qB}|_{\mathrm{WZ}} = 0 & Q_{\underline{\beta}} Q^{\underline{\beta}} Q_{\overline{\alpha}} e^{-2qB}|_{\mathrm{WZ}} = \dfrac{iq}{2\sqrt{2}} \lambda^{\overline{\alpha}} & Q_{\overline{\alpha}} Q_{\underline{\beta}} Q^{\underline{\beta}} Q^{\overline{\alpha}} e^{-2qB}|_{\mathrm{WZ}} = -\dfrac{q}{4} D - \dfrac{q^2}{4} v_{\widehat{m}} v^{\widehat{m}}
\end{array}
\tag{5.541}
$$

$T(\Phi^*)$ の成分場を (ϕ_K, χ_K, F_K)、$T(\Phi^* e^{-2qV})$ の成分場を (ϕ_G, χ_G, F_G) としておく。まず ϕ_G についてであるが、これは $\phi_G = 2Q_{\underline{\alpha}} Q^{\underline{\alpha}} (\phi^* e^{-2qB})$ によって定義される。B に Q が作用したものは、Wess-Zumino ゲージに置いたときに 0 になるので、

$$
\phi_G = 2Q_{\underline{\alpha}} Q^{\underline{\alpha}} (\phi^* e^{-2qB})|_{WZ} = 2Q_{\underline{\alpha}} Q^{\underline{\alpha}} \phi^* = \phi_K = F^* \tag{5.542}
$$

となる。フェルミオン成分 χ_G は Wess-Zumino ゲージを取る前にさらにもう一つの Q 変換を行う。すると、

$$
\begin{aligned}
4Q^{\overline{\alpha}} Q_{\underline{\beta}} Q^{\underline{\beta}} (\phi^* e^{-2qB})|_{WZ} &= \chi_K^{\overline{\alpha}} + 8(Q^{\underline{\beta}} \phi^*)(Q^{\overline{\alpha}} Q_{\underline{\beta}} e^{-2qB})|_{WZ} + 4\phi^* (Q^{\overline{\alpha}} Q_{\underline{\beta}} Q^{\underline{\beta}} e^{-2qB})|_{WZ} \\
&= \chi_K^{\overline{\alpha}} - (\gamma^{\widehat{m}})^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}} \left(iq v_{\widehat{m}} \chi^{\underline{\beta}} + \frac{iq}{2} (\not{v} \psi_{\widehat{m}})^{\underline{\beta}} \phi^* \right)
\end{aligned}
\tag{5.543}
$$

ここで、χ_K に対して新たに加わる項は、(5.365) に与えられた χ_K の中の共変微分 D_μ^{cov} を (5.540) で定義されたゲージ共変な共変微分 $\mathcal{D}_\mu^{\mathrm{cov}}$ に置き換える役割を果たす。すなわち、

$$
\chi_G^{\overline{\alpha}} = -(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}} \mathcal{D}_\mu^{\mathrm{cov}} \chi^{\underline{\beta}} \tag{5.544}
$$

最後に、F_G について見てみよう。

$$
\begin{aligned}
F_G &= 4Q_{\overline{\alpha}} Q^{\overline{\alpha}} Q_{\underline{\beta}} Q^{\underline{\beta}} (\phi^* e^{-2qV})|_{WZ} \\
&= F_K - 16(Q_{\overline{\alpha}} Q_{\underline{\beta}} \phi^*)(Q^{\overline{\alpha}} Q^{\underline{\beta}} e^{-2qV})|_{WZ} \\
&\quad + 8(Q_{\underline{\beta}} \phi^*)(Q_{\overline{\alpha}} Q^{\overline{\alpha}} Q^{\underline{\beta}} e^{-2qV})|_{WZ} + 4\phi^* (Q_{\overline{\alpha}} Q^{\overline{\alpha}} Q_{\underline{\beta}} Q^{\underline{\beta}} e^{-2qV})|_{WZ} \\
&= F_K + 2qi(D_{\widehat{m}}^{\mathrm{cov}} \phi^*) v_{\widehat{m}} - \sqrt{2} iq (\chi_{\underline{\beta}} \lambda^{\underline{\beta}}) \\
&\quad - \frac{q}{2} \phi^* (\Box^{\mathrm{cov}} B)|_{WZ} + iq\phi^* (D_{\widehat{m}}^{\mathrm{cov}} v^{\widehat{m}})|_{WZ} \\
&\quad - \phi^* (qD + q^2 v_{\widehat{m}} v^{\widehat{m}})
\end{aligned}
\tag{5.545}
$$

$v_{\widehat{m}}$ と $v'_{\widehat{m}}$ は Wess-Zumino ゲージをとると同じであるが、それらの共変微分は Wess-Zumino ゲージを取っても異なることに注意しよう。つまり、(5.505) と共変微分の定義を用いると、

$$
D_\mu^{\mathrm{cov}} v'_{\widehat{n}} = D_\mu^{\mathrm{cov}} v_{\widehat{n}} + \frac{i}{2} D_\mu^{\mathrm{cov}} (\psi_{\widehat{n}} \gamma^5 \eta) \tag{5.546}
$$

であるが、Wess-Zumino ゲージを取っても次のように差が残る。

$$
D_\mu^{\mathrm{cov}} v'_{\widehat{n}}|_{WZ} = D_\mu^{\mathrm{cov}} v_{\widehat{n}}|_{WZ} + \frac{i}{2} (\psi_{\widehat{n}} \gamma^5 D_\mu^{\mathrm{cov}} \eta)|_{WZ} = D_\mu^{\mathrm{cov}} v_{\widehat{n}}|_{WZ} - \frac{1}{8} (\psi_{\widehat{n}} \not{v} \psi_\mu) \tag{5.547}
$$

実は、この差の部分がちょうど $\Box^{\rm cov}B|_{WZ}$ である。$\Box^{\rm cov}B|_{WZ}$ を計算するには、共変微分の定義に戻るのがよい。

$$\Box^{\rm cov}B = (\partial_{\widehat{m}} - V_{\widehat{m}}{}^{X'}O_{X'})(\partial^{\widehat{m}} - V^{\widehat{m}Y'}O_{Y'})B \tag{5.548}$$

最終的に Wess-Zumino ゲージを取ったときに 0 にならないためには、B に二回 Q 変換が作用する必要がある。従って、

$$\Box^{\rm cov}B|_{\rm WZ} = -\psi_{\widehat{m}}{}^{\alpha}\psi^{\widehat{m}\beta}Q_\alpha Q_\beta B|_{\rm WZ} = -\psi_{\widehat{m}}{}^{\overline{\alpha}}\psi^{\widehat{m}\underline{\beta}}[Q_{\overline{\alpha}}, Q_{\underline{\beta}}]B|_{\rm WZ} = -\frac{i}{4}(\psi_{\widehat{m}}{}^{\overline{\alpha}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\overline{\alpha}\underline{\beta}}\psi^{\widehat{m}\underline{\beta}})v_{\widehat{k}} \tag{5.549}$$

これらを用いれば、F_G にあらわれる共変微分は全て U(1) ゲージ変換のもとで共変になっていることがわかる。

$$F_G = \mathcal{D}^{\rm cov}_{\widehat{m}}\mathcal{D}^{{\rm cov}\widehat{m}}\phi^* - \sqrt{2}iq(\chi_{\underline{\beta}}\lambda^{\underline{\beta}}) - q\phi^* D \tag{5.550}$$

まとめておこう。

電荷を持つカイラル多重項の運動多重項

$$\phi_G = F^*, \tag{5.551}$$

$$\chi_G^{\overline{\alpha}} = -(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\mathcal{D}^{\rm cov}_\mu\chi^{\underline{\beta}}, \tag{5.552}$$

$$F_G = \mathcal{D}^{\rm cov}_{\widehat{m}}\mathcal{D}^{{\rm cov}\widehat{m}}\phi^* - \sqrt{2}iq(\chi_{\underline{\beta}}\lambda^{\underline{\beta}}) - q\phi^* D \tag{5.553}$$

5.9.5 ベクトル多重項のラグランジアン

$W_{\overline{\alpha}}$ のワイルウェイトは 3/2 であるから、$W_{\overline{\alpha}}$ を二つ掛けてスピノル添え字を縮約して得られるスカラーカイラル多重項 $W_{\overline{\beta}}W^{\overline{\beta}} = \mathbf{\Sigma}(\lambda_{\overline{\beta}}\lambda^{\overline{\beta}})$ はウェイトが 3 となり、F 項ラグランジアンを構成することができる。これはゲージ場の運動項を与える。

$W_{\overline{\beta}}W^{\overline{\beta}}$ の成分場は次のように与えられる。

$$\lambda_{\overline{\beta}}\lambda^{\overline{\beta}} \tag{5.554}$$

$$\begin{aligned} 2Q_{\overline{\alpha}}(\lambda_{\overline{\beta}}\lambda^{\overline{\beta}}) &= 4(Q_{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}})\lambda^{\overline{\beta}} \\ &= -\sqrt{2}iD\lambda_{\overline{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^{\widehat{pq}})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\lambda^{\overline{\beta}}F^{\rm cov}_{\widehat{pq}} \end{aligned} \tag{5.555}$$

$$\begin{aligned} 2Q_{\overline{\alpha}}Q^{\overline{\alpha}}(\lambda_{\overline{\beta}}\lambda^{\overline{\beta}}) &= 4(Q_{\overline{\alpha}}Q^{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}})\lambda^{\overline{\beta}} - 4(Q_{\overline{\alpha}}\lambda_{\overline{\beta}})(Q^{\overline{\alpha}}\lambda^{\overline{\beta}}) \\ &= 2\lambda_{\overline{\beta}}(\gamma^{\widehat{m}})^{\overline{\beta}}{}_{\underline{\gamma}}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\lambda^{\underline{\gamma}} + D^2 - \frac{1}{2}F^{\rm cov}_{\widehat{pq}}F^{{\rm cov}\widehat{pq}} - \frac{i}{4}\epsilon^{\widehat{pq}\widehat{rs}}F^{\rm cov}_{\widehat{pq}}F^{\rm cov}_{\widehat{rs}} \end{aligned} \tag{5.556}$$

この成分場を用いればゲージ場の運動項を与える F 項ラグランジアンが成分場を用いて次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[W_{\overline{\alpha}}W^{\overline{\alpha}}]_F &= -\frac{e}{4}F^{\rm cov}_{\widehat{pq}}F^{{\rm cov}\widehat{pq}} - \frac{ie}{8}\epsilon^{\widehat{pq}\widehat{rs}}F^{\rm cov}_{\widehat{pq}}F^{\rm cov}_{\widehat{rs}} - ie\lambda\sigma^{\widehat{m}}D^{\rm cov}_{\widehat{m}}\overline{\lambda} + \frac{e}{2}D^2 \\ &\quad + \frac{e}{\sqrt{2}}D(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\lambda) - \frac{ie}{2\sqrt{2}}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^\mu\sigma^{\widehat{pq}}\lambda)F^{\rm cov}_{\widehat{pq}} - \frac{e}{4}(\overline{\psi}_\mu\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}_\nu)(\lambda\lambda) \end{aligned} \tag{5.557}$$

正確にはさらにこの実部をとる必要がある。

カイラル多重項が電荷を持ち、ベクトル多重項に結合している場合を考えてみよう。この場合、ラグランジアンに任意関数 f を導入することができる。ボゾン部分のみ取り出せば、

$$\frac{1}{2}[f(\Phi)W_{\overline{\alpha}}W^{\overline{\alpha}}]_F = ef\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}D^2\right] \tag{5.558}$$

カイラル多重項 Φ^i が電荷 q を持っているとして $[\widetilde{f}^*\widetilde{g}]_D$ を $[\widetilde{f}^*e^{-2qV}\widetilde{g}]_D$ に変更すると、共変微分がゲージ場を含むものに置き換わると同時に次の項が加わる。

$$\mathcal{L} = qef^*gD = -eD\sum_i q_i(f^*g)_i\phi^i \tag{5.559}$$

従って、D についての運動方程式を解くと、

$$D = f^{-1}\sum_i q_i(f^*g)_i\phi^i \tag{5.560}$$

が得られる。

5.9.6 FI パラメータ

こうして、R 電荷にゲージ場が結合していると FI パラメータが現れることがわかった。このことは、superconformal tensor calculus では次のように解釈される。まず、大域的な超対称理論における FI 項 $-\zeta_a[V^a]_D$ は、超重力理論においてはウェイトを合わせるための compensator を用いて $-\zeta_a[\Phi^*_{\rm comp}\Phi_{\rm comp}V_a]_D$ とする必要がある。しかしながらこれはゲージ不変になっていない。ゲージ不変性を回復する唯一の方法は、重力の運動項 $-(3/k^2)[\Phi^*_{\rm comp}\Phi_{\rm comp}]_D$ と組み合わせて

$$\mathcal{L} = -\frac{3}{k^2}[\Phi^*_{\rm comp}e^{k^2\zeta_aV^a/3}\Phi_{\rm comp}] \tag{5.561}$$

とし、compensator に電荷 $-k^2\zeta_a/6$ を持たせることである。これにより、R 対称性にゲージ場が結合するようになる。たとえば、超ポテンシャル項

$$\mathcal{L} = -[\Phi^3_{\rm comp}W(\Phi)]_F + {\rm c.c.} \tag{5.562}$$

がゲージ不変であるためには R 電荷 2 を持つ超ポテンシャル W が電荷 $k^2\zeta_a/2$ を持つ必要がある。このことはあとでネーター手続きにより超ポテンシャルを導入する際にも確認される。従って、R 電荷が 1 であるグラビティーノ ψ_μ のゲージ場との結合の強さは $q_a = k^2\zeta_a/4$ である。

5.9.7 大域的超共形変換

大域的な超コンフォーマル変換は、重力多重項に属する背景場を全て不変に保つような変換として定義される。ここでは背景時空を次のように置く。

$$\eta_\mu{}^{\widehat{m}} = \delta_\mu^{\widehat{m}}, \quad \psi_\mu{}^\alpha = \omega_\mu{}^{\widehat{m}\widehat{n}} = w_\mu = c_\mu = \phi_\mu{}^\alpha = f_\mu{}^{\widehat{m}} = 0. \tag{5.563}$$

このとき、曲率テンソルは全て 0 であり、確かに拘束条件を満足している。

これらのゲージ場を変化させないような変換として大域的な超共系変換を定義することができる。ここでは Q 変換および S 変換に注目しよう。これら以外の変換については、これらの変換の（反）交換関係を用いることで生成することができる。

フェルミオンが全て 0 であるから、QS 変換によるボゾン的な場の変換が 0 であることは明らかである。また、ϕ_μ は拘束条件によって複合場として書かれているから、グラビティーノが不変であることを要求すれば十分である。グラビティーノの変換則は

$$\delta_{Q,S}\psi_\mu{}^\alpha = \partial_\mu\xi^\alpha + (\gamma_\mu)^\alpha{}_\beta\zeta^\beta. \tag{5.564}$$

となる。背景時空は平坦であり、スピン接続が 0 であるから、共変微分は単なる微分になる。グラビティーノが不変であるためには、パラメータが次の微分方程式を満足する必要がある。

$$\partial_\mu\xi + \gamma_\mu\zeta = 0 \tag{5.565}$$

この式を用いて ζ が次の関係式を満足することが示される。($\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]}\zeta = -\partial_{[\mu}\partial_{\nu]}\xi = 0$ とすればよい。)

$$\gamma_{[\mu}\partial_{\nu]}\zeta = 0. \tag{5.566}$$

ここで、任意のスピノルベクトル S_μ に対して $\gamma_{[\mu}S_{\nu]} = 0$ という条件は $S_\mu = 0$ であることを表すということを用いれば、(5.566) は $\partial_\mu\zeta = 0$ を意味し、ζ は定数スピノルである。これを ζ_0 と置こう。あとは (5.565) を積分すれば ξ を決めることができる。一般解は次のように与えられる。

$$\xi = \xi_0 - x^\mu\gamma_\mu\zeta_0, \quad \zeta = \zeta_0. \tag{5.567}$$

定数スピノル ξ_0 および ζ_0 は大域的超コンフォーマル変換のパラメータと解釈されるものであり、

$$\delta^{\mathrm{global}} = \xi_0^\alpha Q_\alpha^{\mathrm{global}} + \zeta_0^\alpha S_\alpha^{\mathrm{global}} = \xi^\alpha Q_\alpha + \zeta^\alpha S_\alpha \tag{5.568}$$

によって大域的変換 Q^{global} と S^{global} を定義することができる。この式に (5.567) を代入すれば

$$Q_\alpha^{\mathrm{global}} = Q_\alpha, \quad S_\alpha^{\mathrm{global}} = S_\alpha - x^\mu(\gamma_\mu)_\alpha{}^\beta Q_\beta \tag{5.569}$$

が得られる。S^{global} の式には座標 x^μ が含まれているが、これを場の微分に作用させる場合には x^μ は微分の内側に入ることに注意すること。例えば、フェルミオンに対して $\delta_S\delta_Q\psi$ のような変換を行うことを考えると、はじめの Q 変換によって $\partial\phi$ が得られるが、二回目の変換は $\partial(\delta_S\phi)$ のように微分の内側の ϕ を $\delta_S\phi$ で置き換える。従って座標 x^μ にも微分が作用する。ただ、超重力理論における局所的超コンフォーマル変換の交換関係は時空座標に依存する任意のパラメータに対してこのようなことを考慮したうえで確立されたものであるから、交換関係を用いる場合にはこのようなことを改めて気にする必要は無い。

このことを踏まえて、大域的 Q 変換および S 変換の交換関係を計算してみよう。

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha^{\mathrm{global}}, Q_\beta^{\mathrm{global}}\} &= -\frac{1}{4}(\gamma^m)_{\alpha\beta}P_m, &(5.570)\\
\{S_\alpha^{\mathrm{global}}, Q_\beta^{\mathrm{global}}\} &= \frac{1}{8}(\gamma^{pq})_{\alpha\beta}M_{pq} - \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\alpha\beta}D + \frac{3i}{8}(\gamma^5)_{\alpha\beta}A - \frac{1}{4}x_m(\gamma^m\gamma^n)_{\alpha\beta}P_n, &(5.571)\\
\{S_\alpha^{\mathrm{global}}, S_\beta^{\mathrm{global}}\} &= -\frac{1}{4}(\gamma^m)_{\alpha\beta}K_m + \frac{1}{2}x^k(\gamma^l)_{\alpha\beta}M_{kl} + \frac{1}{2}x^p(\gamma_p)_{\alpha\beta}D\\
&\quad +\frac{1}{4}(2x^mx^q - x_kx^k\eta^{qm})(\gamma_q)_{\alpha\beta}P_m. &(5.572)
\end{aligned}$$

これらの右辺を見ることによって、大域的な $PMDAK$ 変換を次のように読み取ることができる。

$$
\begin{aligned}
P_m^{\mathrm{global}} &= P_m, &(5.573)\\
M_{pq}^{\mathrm{global}} &= M_{pq} - (x_p P_q - x_q P_p), &(5.574)\\
D^{\mathrm{global}} &= D + x^m P_m, &(5.575)\\
A^{\mathrm{global}} &= A, &(5.576)\\
K_m^{\mathrm{global}} &= K_m - 2x^k M_{km} - 2x_m D - (2x^n x^m - x_k x^k \eta^{mn}) P_n &(5.577)
\end{aligned}
$$

これらのうち、$PMDK$ については、対応するコンフォーマルキリングベクトル

$$V^m[P_p] = \delta_p^m, \quad V^m[K_p] = x^2\delta_p^m - 2x_p x^m, \quad V^m[D] = x^m, \quad V^m[M_{pq}] = -x_p\delta_q^m + x_q\delta_p^m. \tag{5.578}$$

およびこれらの回転および発散

$$V_{mn} = \partial_m V_n - \partial_n V_m, \quad V = \partial_n V^n \tag{5.579}$$

を用いて次のように表すことができる。

$$\delta\Phi = V^k P_k \Phi + \frac{1}{4} V_{mn} M^{mn} \Phi + \frac{1}{4} V D\Phi (+K_m \Phi). \tag{5.580}$$

ただし、最後の項は K^{global} の場合にだけ存在するが、ベクトル多重項、カイラル多重項どちらの場合も局所的 K 変換は 0 であるから、その場合は無視することができる。

ゲージ多重項について、大域的 Q 変換は次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\delta_Q v_m &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi\gamma_m\lambda), &(5.581)\\
\delta_Q \lambda &= \frac{i}{2\sqrt{2}}\gamma^5\xi D - \frac{1}{4\sqrt{2}}\gamma^{mn}\xi F_{mn}, &(5.582)\\
\delta_Q D &= \frac{i}{2\sqrt{2}}(\xi\gamma^5\gamma^m\partial_m\lambda) &(5.583)
\end{aligned}
$$

S 変換は作用しないから、単に Q 変換のパラメータに (5.567) を代入するだけでよい。

$$
\begin{aligned}
\delta_S v_m &= \delta_{Q[\xi=-x\zeta]} v_m, &(5.584)\\
\delta_S \lambda &= \delta_{Q[\xi=-x\zeta]} \lambda, &(5.585)\\
\delta_S D &= \delta_{Q[\xi=-x\zeta]} D. &(5.586)
\end{aligned}
$$

カイラル多重項の Global Q 変換は次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\delta_Q \phi &= -\frac{1}{2}\xi_{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}}, &(5.587)\\
\delta_Q \chi^{\overline{\alpha}} &= \frac{1}{2}\xi^{\overline{\alpha}} F - \frac{1}{2}(\gamma^m)^{\overline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\xi^{\underline{\beta}}\partial_m\phi, &(5.588)\\
\delta_Q F &= \frac{1}{2}\xi_{\underline{\alpha}}(\gamma^m)^{\underline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\partial_m\chi^{\overline{\beta}} &(5.589)
\end{aligned}
$$

Global S 変換は、次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\delta_S \phi &= \delta_{Q[\xi=-x\zeta]}\phi, &(5.590)\\
\delta_S \chi^{\overline{\alpha}} &= \delta_{Q[\xi=-x\zeta]}\chi^{\overline{\alpha}} + n_D\zeta^{\overline{\alpha}}\phi, &(5.591)\\
\delta_S F &= \delta_{Q[\xi=-x\zeta]}F + (n_D - 1)\zeta_{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}} &(5.592)
\end{aligned}
$$

D 変換と A 変換をそれぞれの場に対してまとめておく。まずベクトル多重項は、

	v_m	$\lambda^{\overline{\alpha}}$	D
$D*$	v	$\frac{3}{2}\lambda$	$2D$
$A*$	0	$i\lambda$	0

(5.593)

カイラル多重項の D および A 変換は

	ϕ	$\chi^{\overline{\alpha}}$	F
$D*$	$n_D\phi$	$(n_D+\frac{1}{2})\chi$	$(n_D+1)F$
$A*$	$\frac{2i}{3}n_D\phi$	$i(\frac{2}{3}n_D-1)\chi$	$i(\frac{2}{3}n_D-2)F$

(5.594)

第6章　補遺

6.1　添え字

時空のベクトル添え字としては、大域座標については μ, ν を、局所直交系の添え字としては $\widehat{m}$, $\widehat{n}$ などを用いる。

スピノル添え字としてはギリシャ文字の小文字の初めのほうのもの α, β, γ などや、それらに点や線を付加したものを用いる。曲がった超空間を用いる場合、曲がったグラスマン大域座標について α, β を用い、局所直交グラスマン座標については $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ などを用いる。さらに点、線が付加されたものも用いる。これについては §1.1 を参照のこと。

超空間の座標で、ボゾン的座標とフェルミオン的座標の両方を走る添え字には M, N などを用いる。また、局所直交系の座標には $\widehat{M}, \widehat{N}$ などを用いる。

（これらのルールについては、いまだに統一されていません。しばしば hat が省略されたり違う文字が用いられたりしています。）

6.2　共変微分

- $D_\mu^{(\omega)}$ 局所ローレンツ対称性についてのスピン接続 ω を含む共変微分は $D_\mu^{(\omega)}$ と表し、次のように定義される。
$$D_\mu^{(\omega)} v^{\widehat{m}} = \partial_\mu v^{\widehat{m}} + \omega_\mu{}^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}} v^{\widehat{n}} \tag{6.1}$$
ω が捩率部分を含まず、多脚場だけで書けていることを明示したい場合には $D_\mu^{(\omega(e))}$ が用いられる。

- $D_\mu^{(G)}$ 内部対称性についてのゲージ場 A_μ を含む共変微分は $D_\mu^{(G)}$ と表される。ゲージ群が U(1) の場合、電荷 q の場の共変微分は次のように定義される。
$$D_\mu^{(G)} \phi = \partial_\mu \phi - iqA_\mu \phi \tag{6.2}$$
ゲージ群が非アーベル群の場合、エルミート生成子 T_a を用いて次のように定義される。
$$D_\mu^{(G)} \phi = \partial_\mu \phi - iA_\mu^a T_a \phi \tag{6.3}$$
ゲージ対称性がスカラー多様体の一般のアイソメトリーである場合、スカラー多様体の座標であるスカラー場 ϕ^m の共変微分はスカラー多様体上のキリングベクトル t_a^m を用いて次のように定義される。
$$D_\mu^{(G)} \phi = \partial_\mu \phi - A_\mu^a t_a^m \tag{6.4}$$

- $D_\mu^{(S)}$ スカラー多様体上のケーラー変換についての共変微分は、ケーラー接続 S_μ を用いて次のように定義される。
$$D_\mu^{(S)} \psi = \partial_\mu - iRS_\mu \psi \tag{6.5}$$

Soryushiron Kenkyu

- $D_\mu^{(M)}$ スカラー多様体上のアフィン接続に対する共変微分は $D_\mu^{(M)}$ と表され、次のように定義される。

$$D_\mu^{(M)}\psi^n = \partial_\mu\psi^n + (\partial_\mu\phi^k)\Gamma^m_{kn}\psi^n \tag{6.6}$$

- $D_\mu^{\rm cov}$ 超場形式において、$D_\mu^{\rm cov}$ は次のように定義される。

$$D_\mu^{\rm cov}\phi = e_\mu{}^{\widehat{m}}(E^M_{\widehat{m}} D_M\Phi)|_{\theta=0} \tag{6.7}$$

- $\mathcal{D}_\mu$ Tensor calculus において、$\mathcal{D}_\mu$ は P 変換も含めた全ての超コンフォーマル変換について共変化された共変微分を表す。

$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - V_\mu^X O_X\phi \tag{6.8}$$

- $D_\mu^{\rm cov}$ Tensor calculus において、$D_\mu^{\rm cov}$ は P 変換以外の超コンフォーマル変換について共変化された共変微分を表す。

$$D_\mu^{\rm cov}\phi = \partial_\mu\phi - V_\mu^{X'} O_{X'}\phi \tag{6.9}$$

第 II 部

4 次元 $\mathcal{N} \geq 2$ 超重力理論

第7章　大域的 $\mathcal{N}=2$ 超対称性

7.1　超対称代数と中心電荷

7.1.1　$\mathcal{N}\geq 2$ 超対称代数

一般に、場の理論の対称性としての Poincare 群の拡大はボゾン的なものは存在せず（Coleman-Mandula の定理）フェルミオン的なスピノルの足を持った生成子 $Q^{I\alpha}$ （およびそのエルミート共役 $\overline{Q}{}^{\dot\alpha}_I$）の追加によるものだけであることが知られている。(Haag-Sohnius-Lopuszanski の定理)
Part I では、$\mathcal{N}=1$、つまり $I=1$ の超対称電荷が存在する場合、すなわち $\mathcal{N}=1$ の場合のみを考えた。この場合、変換記号および対応する電荷の交換関係はディラック表示で次のように与えられる。

$$\{Q_\alpha,Q_\beta\}=-\frac{1}{4}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu,\quad \{\widehat{Q}_\alpha,\widehat{Q}_\beta\}=\frac{i}{4}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\widehat{P}_\mu \tag{7.1}$$

パラメータを掛けたものの交換関係も与えておこう。

$$[\xi_1\widehat{Q},\xi_2\widehat{Q}]=\frac{i}{4}\xi_1\gamma^\mu\xi_2\widehat{P}_\mu\quad\text{(Dirac rep.)},\quad [\xi_1\widehat{Q},\overline{\xi}_2\widehat{\overline{Q}}]=\frac{1}{4}\xi_1\sigma^\mu\overline{\xi}_2\widehat{P}_\mu\quad\text{(Weyl rep.)} \tag{7.2}$$

$\mathcal{N}\geq 2$ の場合には、$\widehat{Q}_{\overline{\alpha}}$ と $\widehat{Q}_{\underline{\alpha}}$ は $\mathrm{SU}(\mathcal{N})_R$ 対称性の基本表現と反基本表現に属し、この表現についての添え字をつける際にはカイラル成分に分解したほうが便利である。$\mathrm{SU}(\mathcal{N})_R$ 添え字として I, J などを用いることにし、添え字の付け方は次のように定義する。

$$\begin{aligned}\delta_Q(\xi)\phi &= (\xi_I^{\overline{\alpha}}Q^I_{\overline{\alpha}}+\xi^{I\underline{\alpha}}Q_{I\underline{\alpha}})\phi=[i\xi_I^{\overline{\alpha}}\widehat{Q}^I_{\overline{\alpha}}+i\xi^{I\underline{\alpha}}\widehat{Q}_{I\underline{\alpha}},\phi]\quad\text{(Dirac rep.)}\\ \delta_Q(\xi)\phi &= (\xi_{I\alpha}Q^{I\alpha}+\xi^{I\dot\alpha}Q_{I\dot\alpha})\phi=[i\xi_{I\alpha}\widehat{Q}^{I\alpha}+i\xi^{I\dot\alpha}\widehat{Q}_{I\dot\alpha},\phi]\quad\text{(Weyl rep.)}\end{aligned} \tag{7.3}$$

$\mathcal{N}\geq 2$ の代数には、$\mathcal{N}=1$ の場合には無かった中心電荷と呼ばれる生成子が入ってくる。

$$\{\widehat{Q}^{I\alpha},\widehat{Q}^{\dot\beta}_J\}=\frac{1}{4}\delta^I_J(\sigma^\mu)^{\alpha\dot\beta}\widehat{P}_\mu,\quad \{\widehat{Q}^{I\alpha},\widehat{Q}^{J\beta}\}=-\frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\widehat{Z}^{IJ},\quad \{\widehat{Q}^{\dot\alpha}_I,\widehat{Q}^{\dot\beta}_J\}=-\frac{1}{4}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\widehat{\overline{Z}}_{IJ} \tag{7.4}$$

$\widehat{Z}^{IJ}$ は中心電荷であり、$\widehat{\overline{Z}}_{IJ}$ はそのエルミート共役。二つの $\mathrm{SU}(\mathcal{N})_R$ 添え字 I と J について反対称であり、全ての電荷と可換である。

この章では $\mathcal{N}=2$ の場合を考える。$\mathcal{N}=2$ の場合の代数も (7.4) によって与えられるが、$Z^{IJ}=\epsilon^{IJ}Z$ と置くことができる。

$$\{\widehat{Q}^{I\alpha},\widehat{Q}^{\dot\beta}_J\}=\frac{1}{4}\delta^I_J(\sigma^\mu)^{\alpha\dot\beta}\widehat{P}_\mu,\quad \{\widehat{Q}^{I\alpha},\widehat{Q}^{J\beta}\}=-\frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{IJ}\widehat{Z},\quad \{\widehat{Q}^{\dot\alpha}_I,\widehat{Q}^{\dot\beta}_J\}=-\frac{1}{4}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon_{IJ}\widehat{\overline{Z}} \tag{7.5}$$

変換則が与えられた場合、超対称変換を二回行えば次の式によって中心電荷を読み取ることができる。

$$[\delta_Q(\xi'),\delta_Q(\xi)]\Phi=\delta_P(\epsilon^m)\Phi-i\delta_Z(\alpha)\Phi+i\delta_{\overline{Z}}(\alpha^*)\Phi \tag{7.6}$$

ただし、右辺に現れた ϵ^m と α は

$$\epsilon^m=\frac{i}{4}(\xi'_I\sigma^m\overline{\xi}^I-\xi_I\sigma^m\overline{\xi}'^I),\quad \alpha=\frac{1}{4}\epsilon^{IJ}(\xi'_I\xi_J),\quad \alpha^*=\frac{1}{4}\epsilon_{IJ}(\overline{\xi}'^I\overline{\xi}^J). \tag{7.7}$$

Soryushiron Kenkyu

のように定義されている。また、δ_Z および $\delta_{\overline{Z}}$ は

$$\delta_Z(\alpha)\Phi = i\alpha[\widehat{Z}, \Phi], \quad \delta_{\overline{Z}}(\alpha^*)\Phi = i\alpha^*[\widehat{\overline{Z}}, \Phi] \tag{7.8}$$

のように定義される。

7.1.2 $\mathcal{N} = 2$ 超対称多重項

質量 $M > 0$ の粒子の状態に対してこの代数がどのように作用するかを見てみよう。静止系をとり、運動量を $P_\mu = (M, 0, 0, 0)$ とおき、8 個の超対称性電荷を次のように二つずつに分けておく。

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \widehat{Q}^{11} \\ \widehat{Q}_2{}^{\dot{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}^\dagger = (\widehat{Q}_1{}^{\dot{1}} \widehat{Q}^{22}), \quad \mathcal{Q}' = \begin{pmatrix} \widehat{Q}^{12} \\ \widehat{Q}_2{}^{\dot{1}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}'^\dagger = (\widehat{Q}_1{}^{\dot{2}} \widehat{Q}^{21}) \tag{7.9}$$

これらの反交換関係は次の二つに分解することができる。

$$\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger\} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} M & -Z \\ -\overline{Z} & M \end{pmatrix}, \quad \{\mathcal{Q}', \mathcal{Q}'^\dagger\} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} M & Z \\ \overline{Z} & M \end{pmatrix} \tag{7.10}$$

運動量の固有値 $P_\mu = (M, 0, 0, 0)$ に属する固有状態を $|s\rangle$ とする。この固有状態で、上記の反交換関係の両辺を挟んでみよう。状態空間に負ノルムの状態が無いことを仮定すれば左辺の行列の固有値は非負であるはずである。2×2 エルミート行列の固有値が非負であるための必要十分条件は、そのトレースと行列式がどちらも非負であることである。$M > 0$ という仮定より、トレースは必ず正であるから、行列式が非負であるという条件について考えてみよう。これは中心電荷と質量の間に次の関係を与える。

$$M^2 \geq |Z|^2. \tag{7.11}$$

この、質量の下限は BPS bound と呼ばれる。

質量が BPS bound の下限になっているような状態を BPS 状態と呼ぶ。この場合、行列の行列式が 0 であるから、その固有値のうち一つは 0 である。（そしてもう一つの固有値は $2M$ であることが、トレースからわかる。）$Z = e^{i\alpha}M$ と置こう。この行列を対角化するために、8 個の超対称性電荷を次の 4 個とそれらのエルミート共役に組みなおす。

$$\begin{aligned} a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{M}}(Q^{11} + e^{i\alpha}Q_2{}^{\dot{2}}), \quad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{M}}(Q^{11} - e^{i\alpha}Q_2{}^{\dot{2}}), \\ c &= \frac{1}{\sqrt{M}}(Q^{12} + e^{i\alpha}Q_2{}^{\dot{1}}), \quad d = \frac{1}{\sqrt{M}}(Q^{12} - e^{i\alpha}Q_2{}^{\dot{1}}) \end{aligned} \tag{7.12}$$

a, b, c, d は J_z を 1/2 だけ減少させる。これらは次の反交換関係を満足する。

$$\{a, a^\dagger\} = 0, \quad \{b, b^\dagger\} = 1, \quad \{c, c^\dagger\} = 1, \quad \{d, d^\dagger\} = 0 \tag{7.13}$$

これら以外の組み合わせは全て 0 である。

a と d およびそれらのエルミート共役は、他の電荷と反可換であるから、それらが全て 0 になり、b と c およびそれらのエルミート共役によって互いに結びつく状態の組によって表現を構成することができる。

零質量の場合についても考えてみよう。この場合、静止系を取ることはできない。その代わり運動量が $P_\mu = (E, 0, 0, E)$ となるような座標系を取ることにする。そのような運動量固有空間上でこの代数がどうなるかを見てみよう。

$$(\sigma^0 + \sigma^3)^{\alpha\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad (\overline{\sigma}^0 + \overline{\sigma}^3)^{\dot{\beta}\alpha} = \begin{pmatrix} -2 & \\ & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

であることと、(7.11) より、零質量粒子に対しては中心電荷が 0 であることを用いると、上記の代数は次のようになる。

$$\{\widehat{Q}^{I\alpha}, \widehat{\overline{Q}}^{\dot{\beta}}_J\} = \frac{E}{2}\delta^I_J \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}^{\alpha\dot{\beta}} \tag{7.15}$$

したがって、Q^{I2} および $\overline{Q}^{\dot{2}}_J$ は他の全ての電荷と反可換になり、

$$Q^{I2}|0\rangle = \overline{Q}^{\dot{2}}_J|0\rangle = 0 \tag{7.16}$$

という条件を満足する状態 $|0\rangle$ を考えることができる。生成消滅演算子として

$$\overline{a}^I = \sqrt{\frac{2}{E}}Q^{I1}, \quad a_I = \sqrt{\frac{2}{E}}\overline{Q}^{\dot{\mathrm{i}}}_I \tag{7.17}$$

を定義すると、これらはフェルミオンの生成消滅演算子の反交換関係を満足する。

$$\{\overline{a}^I, a_J\} = \delta^I_J \tag{7.18}$$

$\overline{a}^I$ はヘリシティを 1/2 だけ増加させる。したがって、$\overline{a}^I$ を生成演算子、a_I を消滅演算子として、ヘリシティ $h_{\min}$ をもつ真空状態 $|h_{\min}\rangle$ に作用させると、ヘリシティが $h_{\min}$ から $h_{\min}+1$ の範囲にある次の 4 つの状態が現れる。h

$$|h_{\min}\rangle \quad \overline{a}^1|h_{\min}\rangle \quad \overline{a}^2|h_{\min}\rangle \quad \overline{a}^1\overline{a}^2|h_{\min}\rangle. \tag{7.19}$$

超対象多重項を構成する場合には、ローレンツ対称性をもつ場の理論は常に CPT 対称性を持つことを考慮しなければならない。

- 重力多重項 ($h_{\min} = 1, -2$)

$+2$	$+\frac{3}{2}$	$+1$	$+\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2
1	2	1				1	2	1

(7.20)

  $h_{\min} = 1$ から出発して作ることのできる 4 つの状態は、その CPT パートナーである $h_{\min} = -2$ から作ることのできる 4 つの状態と組になって重力多重項をなす。この多重項は一つの重力場、二つのグラビティーノ、一つの U(1) ゲージ場を含む。

- ベクトル多重項 ($h_{\min} = 0, -1$)

$+2$	$+\frac{3}{2}$	$+1$	$+\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2
		1	2	2	2	1		

(7.21)

  $h_{\min} = 0$ から出発して作ることのできる 4 つの状態は、その CPT パートナーである $h_{\min} = -1$ から作ることのできる 4 つの状態と組になってベクトル多重項をなす。この多重項は一つの U(1) ゲージ場、二つのワイルフェルミオン、一つの複素スカラー場を含む。

- ハイパー多重項 ($h_{\min} = 0, -1$)

$+2$	$+\frac{3}{2}$	$+1$	$+\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2
			2	4	2			

(7.22)

  $h_{\min} = -1/2$ から出発して作ることのできる 4 つの状態はハイパー多重項をなす。ただし、そのうちの二つの $h = 0$ 成分は $\mathrm{SU}(2)_R$ の二重項に属していなければならない。この表現は実ではないから、ハイパー多重項は 8 つの成分を含まなければならない。これらは二つのワイルフェルミオンと二つの複素スカラー場を含む。

7.2 繰り込み可能な $\mathcal{N}=2$ QCD ラグランジアン

7.2.1 ベクトル多重項

$\mathcal{N}=2$ のベクトル多重項は $\mathcal{N}=1$ のベクトル多重項 $V^a=(v_\mu^a,\lambda^a,D^a)$ と随伴表現に属するカイラル多重項 $\Phi^a=(\phi^a,\chi^a,F^a)$ よりなる。繰り込み可能な場合を考えてみよう。これはケーラーポテンシャルが 2 次であり、ゲージ結合関数が定数の場合である。

$$K(\Phi,\overline{\Phi})=K_{a\bar{b}}\Phi^a\overline{\Phi}^{\bar{b}},\quad \widetilde{\tau}_{ab}(\Phi)=\widetilde{\tau}_{ab} \tag{7.23}$$

理論が $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つようにするには、$\mathcal{N}=1$ の超対称性と $\mathrm{SU}(2)_R$ 対称性を同時に持つことを要請すればよい。$\mathrm{SU}(2)_R$ 対称性はベクトル多重項に含まれるフェルミオン λ^a とカイラル多重項に含まれるフェルミオン χ^a を入れ替える。それぞれのフェルミオンの運動項は次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_\chi=iK_{a\bar{b}}(\chi^a\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}^{\bar{b}}),\quad \mathcal{L}_\lambda=i(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})(\lambda^a\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}^{\bar{b}}) \tag{7.24}$$

従って二つのフェルミオンの間の対称性があるためには次の関係式が成り立つ必要がある。

$$K_{a\bar{b}}=\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab}. \tag{7.25}$$

これらを用いて以前に与えたベクトル多重項のラグランジアンは次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\int d^4\theta K(\Phi^*,\Phi)+\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int d^2\theta\widetilde{\tau}_{ab}W^aW^b\\&=\frac{1}{2}[K(\Phi^*,\Phi)]_D-\frac{1}{2}\mathrm{Im}[\widetilde{\tau}_{ab}W^aW^b]_F\end{aligned} \tag{7.26}$$

さらに、非アーベル群に一般化することを考えよう。ここでは群が単純群の場合に限り、次のようにおく。

$$K=\frac{1}{g^2}(\overline{\Phi}^ae^{-2V}\Phi^a),\quad K_{a\bar{b}}=\frac{1}{g^2}\delta_{ab},\quad \widetilde{\tau}_{ab}=\widetilde{\tau}\delta_{ab}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\theta}{2\pi}+\frac{2\pi i}{g^2}\right)\delta_{ab}. \tag{7.27}$$

$\widetilde{\tau}$ は以前にも定義したが、電磁双対性の議論をする際に便利な τ とは $\tau=2\pi\widetilde{\tau}$ の関係にある。ゲージ場だけではなく V および Φ の全ての成分場はリー代数に値を取るものとする。繰り込み可能なベクトル多重項 (V,Φ) の作用で、$\mathcal{N}=1$ 超対称性を持つもっとも一般的な作用は、(2.171) によって与えられる V の作用と (2.191) によって与えられる Φ の作用を合計したものである。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\int d^4\theta\frac{1}{g^2}(\overline{\Phi}^ae^{-2V}\Phi^a)+\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int d^2\theta\,(\widetilde{\tau}W^aW^a)\\&=\frac{1}{2g^2}[\overline{\Phi}^ae^{-2V}\Phi^a]_D-\frac{1}{2}\mathrm{Im}[\widetilde{\tau}W^aW^a]_F\end{aligned} \tag{7.28}$$

成分場で表すと次のようになる。

ベクトル多重項の作用

補助場を含まない部分は次のように $\mathrm{Sp}(1)_R$ 不変になっている。

$$\mathcal{L}^{\text{vector}}_{\text{kin}} = \frac{1}{g^2}\left[-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - D^{(G)}_\mu\overline{\phi}^a D^{(G)\mu}\phi^a\right] - \frac{\theta}{8(2\pi)^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}, \tag{7.29}$$

$$\mathcal{L}^{\text{vector}}_{\text{fermion}} = \frac{1}{g^2}\left[i(\lambda^a_I\sigma^\mu D^{(G)}_\mu\overline{\lambda}^{Ia}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{IJ}f_{abc}(\lambda^a_I\overline{\phi}^b\lambda^c_J) + \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{IJ}f_{abc}(\overline{\lambda}^{Ia}\phi^b\overline{\lambda}^{Jc})\right] \tag{7.30}$$

補助場を含む項は次のように与えられている。

$$\mathcal{L}^{\text{vector}}_{\text{pot}} = \frac{1}{g^2}\left(-if_{abc}D^a\overline{\phi}^b\phi^c + \frac{1}{2}D^aD^a + \overline{F}^aF^a\right) \tag{7.31}$$

補助場を含む部分は一見 $\mathrm{Sp}(1)_R$ 不変ではないが、補助場の運動方程式を解いて得られるポテンシャルは $\mathrm{Sp}(1)_R$ 不変になる。

7.2.2 ハイパー多重項

k 個のハイパー多重項を含む理論を考えよう。k 個のハイパー多重項は全部で $4k$ 個の実スカラー場を含む。これらは $\mathrm{SU}(2)_R$ の $\mathbf{2}$ 表現に属している。従ってフレーバー対称性は $\mathrm{SO}(4k)$ の部分群のうち $\mathrm{Sp}(1)_R$ と可換なものであり、そのような部分群の最大のものは $\mathrm{Sp}(k)$ である。$\mathcal{N}=1$ の超場を用いてラグランジアンを書く際には、$\mathrm{Sp}(k)$ の部分群である $\mathrm{U}(k)$ が明らかになるようにするのが簡単である。$\mathrm{Sp}(k)$ の $\mathbf{2k}$ 表現は $\mathrm{U}(k)$ の $\mathbf{k}+\overline{\mathbf{k}}$ 表現に分解される。$\mathbf{k}$ 表現に属する k 個のカイラル超場を Q、$\overline{\mathbf{k}}$ 表現に属する k 個のカイラル超場を $\widetilde{Q}$ と書くことにする。これらのカイラル超場の運動項は次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[Q^\dagger e^{-2V^{(k)}}Q + \widetilde{Q}^\dagger e^{-2V^{(\overline{k})}}\widetilde{Q}]_D \tag{7.32}$$

ただし、ここではハイパー多重項に結合した $\mathrm{U}(k)$ ゲージ場 V があることを仮定した。$V^{(k)} = V^aT^{(k)}_a$ および $V^{(\overline{k})} = V^aT^{(\overline{k})}_a$ はそれぞれ $\mathbf{k}$ 表現および $\overline{\mathbf{k}}$ 表現に属する $\mathrm{U}(k)$ のベクトル多重項である。ゲージ群は必ずしも $\mathrm{U}(k)$ である必要は無く、その部分群であってもよいし、ゲージ場は無くても良い。ここで、$\overline{\mathbf{k}}$ 表現に対する生成子は $\mathbf{k}$ 表現の生成子と次の関係がある。

$$T^{(\overline{k})}_a = -(T^{(k)}_a)^* = -(T^{(k)}_a)^T \tag{7.33}$$

$\mathrm{Sp}(k)$ 対称性を明らかにするには Q と $\widetilde{Q}$ をひとまとめにした

$$Q^\alpha = \begin{pmatrix} Q \\ \widetilde{Q} \end{pmatrix} \tag{7.34}$$

を定義するのがよい。$\alpha = 1,\ldots,2k$ は Q と $\widetilde{Q}$ をまとめた $2k$ 個のカイラル多重項をラベルする添え字である。これを用いると、(7.32) のラグランジアンは次のように一つの項で表すことができる。

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta(\overline{Q}_\alpha(e^{-2V})^\alpha{}_\beta Q^\beta) = \frac{1}{2}[\overline{Q}_\alpha(e^{-2V})^\alpha{}_\beta Q^\beta]_D \tag{7.35}$$

ただし、この式に現れる V は $\mathrm{U}(k)$ の可約表現 $\mathbf{k}+\overline{\mathbf{k}}$ に対するものであり、$\mathbf{k}$ 表現の生成子を用いて

$$T^{(k+\overline{k})}_a = \begin{pmatrix} T^{(k)}_a & \\ & -(T^{(k)}_a)^T \end{pmatrix} \tag{7.36}$$

と与えられる。さらに、ゲージ群は Sp(k) にまで拡大することができる。この場合には、生成子は次の条件を満足する Sp(k) の **2k** 表現のものに一般化することができる。

$$J_{\alpha\gamma}(T_a^{(2k)})^{\gamma}{}_{\beta} = J_{\beta\gamma}(T_a^{(2k)})^{\gamma}{}_{\alpha} \tag{7.37}$$

ただし Sp(1)$_R$ 不変テンソル ϵ_{IJ} および Sp(k) 不変テンソル $J^{\alpha\beta}$ は以下のように定義される。

$$\epsilon_{IJ} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad J^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_k \\ -\mathbf{1}_k & \end{pmatrix}. \tag{7.38}$$

Sp(1)$_R$ 対称性をあらわに書くには成分場を用いて書く必要がある。カイラル多重項の成分場を $Q(q,\psi)$、$\widetilde{Q}(\widetilde{q},\widetilde{\psi})$ のように定義する。Sp(1)$_R \times$ Sp(k) の対称性を見やすくするために、次のように q_I^{α} を定義しよう。

$$q_1^{\alpha} = \begin{pmatrix} q \\ \widetilde{q} \end{pmatrix}, \quad q_2^{\alpha} = \begin{pmatrix} \widetilde{q}^{\dagger} \\ -q^{\dagger} \end{pmatrix}. \tag{7.39}$$

q_I^{α} の下付き添え字 $I=1,2$ に Sp(1)$_R$ が作用する。このように定義されたスカラー場は次の関係式を満足する。

$$\overline{q}_{\alpha}^{I} = (q_I^{\alpha})^*, \quad q_I^{\alpha} = J^{\alpha\beta}\epsilon_{IJ}q_{\beta}^{J}. \tag{7.40}$$

この関係式のために q_1^{α} と q_2^{α} は独立ではなく

$$q^{\alpha} \equiv q_1^{\alpha} = J^{\alpha\beta}\overline{q}_{\beta}^{2} \tag{7.41}$$

だけを用いてラグランジアンを書くことができる。

上記のラグランジアンの Sp(1)$_R$ 変換のもとで不変になっているかどうかを見てみよう。ゲージ場が存在しない場合は (7.32) は自由場のラグランジアンを与えるから、明らかに Sp(1)$_R$ 対称性を持ち、従って $\mathcal{N}=2$ 対称性のもとで不変になっている。

ゲージ場との結合が存在する場合にはこのラグランジアンは次の Yukawa 項を含み、この部分は Sp(1)$_R$ 不変になっていない。

$$\mathcal{L} = -\sqrt{2}iq_{\alpha}^{\dagger}(T_a^{(2k)})^{\alpha}{}_{\beta}(\psi^{\beta}\lambda^{a}) + \text{h.c.} = -\sqrt{2}iq_{\alpha}^{\dagger 1}(T_a^{(2k)})^{\alpha}{}_{\beta}(\psi^{\beta}\lambda_1^{a}) + \text{h.c.} \tag{7.42}$$

SU(2)$_R$ 不変にするためには、λ_2 を含む次の項を加える必要がある。

$$\mathcal{L} = -\sqrt{2}iq_{\alpha}^{\dagger 2}(T_a)^{\alpha}{}_{\beta}(\psi^{\beta}\lambda_2^{a}) + \text{h.c.} = -\sqrt{2}iq^{\alpha}J_{\alpha\beta}(T_a)^{\beta}{}_{\gamma}(\psi^{\gamma}\chi^{a}) + \text{h.c.} \tag{7.43}$$

この項は次の superpotential の導入に対応する。

$$W = -\frac{i}{\sqrt{2}}Q^{\alpha}J_{\alpha\beta}(T_a)^{\beta}{}_{\gamma}Q^{\gamma}\Phi^{a}. \tag{7.44}$$

この超ポテンシャル項をあわせた次のラグランジアンは Sp(1)$_R$ 不変である。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\overline{Q}_{\alpha}(e^{-2V^{(2k)}})^{\alpha}{}_{\beta}Q^{\beta}]_D + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}[Q^{\alpha}J_{\alpha\beta}(T_a)^{\beta}{}_{\gamma}Q^{\gamma}\Phi^{a}]_F + \text{c.c.}\right) \tag{7.45}$$

次にハイパー多重項に対するポテンシャル項を導入することを考えてみよう。そのために Q^{α} のみからなる超ポテンシャルを書いてみよう。超ポテンシャル W は q^{α} の正則関数でなければならない。これは q_I^{α} の成分のうち q_1^{α} だけで書けることを意味している。W の導入によって得られる

フェルミオンの質量項は $W_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta$ に比例するが、これが $\mathrm{Sp}(1)_R$ 不変であることから $W_{\alpha\beta}$ が定数であることがいえる。従って W は q^α の二次関数であり、次のように表すことができる。

$$W=\frac{1}{2}Q^\alpha J_{\alpha\beta}m^\beta{}_\gamma Q^\gamma. \tag{7.46}$$

これはハイパー多重項の質量項を与える。質量行列 $m^\alpha{}_\beta$ は、$J_{\alpha\beta}m^\beta{}_\gamma$ が対称であるような行列である。これは (7.37) と同じ条件であり、m が $\mathrm{Sp}(k)$ の随伴表現に属していることを表わしている。さらに、超ポテンシャルがゲージ不変であるためには質量行列がゲージ変換のもとで不変でなければならない。このことから、m はゲージ群のリー代数に属する ϕ や $\overline{\phi}$ と可換である。すなわち、質量行列は次の条件を満足する必要がある。

$$[m,\phi]=[m,\overline{\phi}]=0. \tag{7.47}$$

(7.46) と (7.44) は似た形をしており、次の行列を定義しておくと便利である。

$$M^\alpha{}_\beta=m^\alpha{}_\beta-i\sqrt{2}\phi^a(T_a)^\alpha{}_\beta. \tag{7.48}$$

これらを全て加えると、次の作用が得られる。

ハイパー多重項の作用

$\mathcal{N}=2$ ハイパー多重項の作用は superfield を用いれば、次のように表現できる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\text{hyper}} &= \int d^4\theta(\overline{Q}e^{-2V}Q)-\frac{1}{2}\left(\int d^2\theta QJ(m-i\sqrt{2}\Phi)Q \quad +\text{h.c.}\right)\\ &= \frac{1}{2}[\overline{Q}_\alpha(e^{-2V})^\alpha{}_\beta Q^\beta]_D-\frac{1}{2}\left([Q^\alpha J_{\alpha\beta}(m-i\sqrt{2}\Phi)^\beta{}_\gamma Q^\gamma]_F \quad +\text{h.c.}\right)\end{aligned} \tag{7.49}$$

この作用を成分場を用いて書きなおすと、次の 3 つの作用の和になる。

$$\mathcal{L}^{\text{hyper}}_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}D_\mu\overline{q}^I_\alpha D^\mu q^\alpha_I+i\psi^\alpha\sigma^\mu D_\mu\overline{\psi}_\alpha, \tag{7.50}$$

$$\mathcal{L}^{\text{hyper}}_{\text{fermion}} = -\sqrt{2}i\overline{q}^I_\alpha\lambda^a_I(T_a)^\alpha{}_\beta\psi^\beta+\frac{1}{2}\psi^\alpha J_{\alpha\beta}M^\beta{}_\gamma\psi^\gamma+\text{h.c.} \tag{7.51}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{pot}} &= F^\alpha\overline{F}_\alpha-\left(F^\alpha J_{\alpha\beta}M^\beta{}_\gamma q^\gamma+\text{h.c.}\right)\\ &\quad -D_a(\overline{q}^1_\alpha(T_a)^\alpha{}_\beta q^\beta_1)-\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\overline{F}_a(\overline{q}^1_\alpha(T_a)^\alpha{}_\beta q^\beta_2)+\text{h.c.}\right).\end{aligned} \tag{7.52}$$

ポテンシャル項について $\mathrm{Sp}(1)_R$ 対称性を見るために、補助場についての運動方程式を解いてみよう。すると、次の式を得る。

$$J^{\alpha\beta}\overline{F}_\beta=\overline{f}^\alpha_1(q). \tag{7.53}$$

ただし、$f(q)$ は次のように定義されるスカラー場 q の関数である。

$$\overline{f}^\alpha_I(q)=-M^\alpha{}_\beta q^\beta_I \tag{7.54}$$

(7.53) の右辺は $\mathrm{Sp}(1)_R$ 変換のもとで不変ではない。

補助場についての運動方程式を解くと、次の式が得られる。

$$\frac{1}{g^2}F^a = \frac{i}{\sqrt{2}}(\overline{q}^1_\alpha(T_a)^\alpha{}_\beta q^\beta_2), \tag{7.55}$$

$$\frac{1}{g^2}D^a = \frac{i}{g^2}f_{abc}\overline{\phi}^b\phi^c+(\overline{q}^1_\alpha(T_a)^\alpha{}_\beta q^\beta_1), \tag{7.56}$$

$$\overline{F}_\alpha = J_{\alpha\beta}M^\beta{}_\gamma q^\gamma=J_{\alpha\beta}m^\beta{}_\gamma q^\gamma-i\sqrt{2}J_{\alpha\beta}(\phi^a)^\beta{}_\gamma q^\gamma \tag{7.57}$$

これらを用いるとポテンシャル項が次のように得られる。

$$V=\frac{1}{g^2}\left(F^a\overline{F}_a+\frac{1}{2}D^aD^a\right)+F^a\overline{F}_a. \tag{7.58}$$

$F^a\overline{F}_a$ の項に解を代入したものは

$$\frac{1}{g^2}F^a\overline{F}_a=\frac{g^2}{2}(\overline{q}^1_\alpha(T_a)^\alpha{}_\beta q_2^\beta)(\overline{q}^2_\alpha(T_a)^\alpha{}_\beta q_1^\beta) \tag{7.59}$$

D^aD^a の項は次の 3 つに分解できる。

$$\begin{aligned}\frac{g^2}{2}(\overline{q}^1_\alpha(T_a)^\alpha{}_\beta q_1^\beta)^2 &= \frac{g^2}{4}(\overline{q}^1_\alpha(T_a)^\alpha{}_\beta q_1^\beta)^2+\frac{g^2}{4}(\overline{q}^2_\alpha(T_a)^\alpha{}_\beta q_2^\beta)^2, && (7.60)\\ if_{abc}\overline{\phi}^b\phi^c(\overline{q}^1_\alpha(T_a)^\alpha{}_\beta q_1^\beta) &= -(\overline{q}^1_\alpha[\overline{\phi},\phi]^\alpha{}_\beta q_1^\beta) && (7.61)\\ \frac{1}{2g^2}\left(if_{abc}\overline{\phi}^b\phi^c\right)^2 & && (7.62)\end{aligned}$$

$F^\alpha\overline{F}_\alpha$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}F^\alpha\overline{F}_\alpha &= q^{\dagger 1}M^\dagger Mq_1=q^{\dagger 2}MM^\dagger q_2\\ &= \frac{1}{2}(q^{\dagger 1}M^\dagger Mq_1+q^{\dagger 2}MM^\dagger q_2)\\ &= \frac{1}{2}(q^{\dagger I}MM^\dagger q_I)+\frac{1}{2}(q^{\dagger 1}[M^\dagger,M]q_1)\\ &= \frac{1}{2}(q^{\dagger I}MM^\dagger q_I)+\frac{1}{2}(q^{\dagger 1}[m^\dagger,m]q_1)+(q^{\dagger 1}[\phi^\dagger,\phi]q_1) \end{aligned} \tag{7.63}$$

最後に m がゲージ不変であることから従う (7.47) を用いた。これらを全て加えると、

$$V=\frac{g^2}{4}(\overline{q}^IT_aq_J)(\overline{q}^JT_aq_I)+\frac{1}{2g^2}\left(if_{abc}\overline{\phi}^b\phi^c\right)^2+\frac{1}{2}(q^{\dagger I}MM^\dagger q_I)+\frac{1}{2}(q^{\dagger 1}[m^\dagger,m]q_1) \tag{7.64}$$

これらの項のうち、最後のものだけが $\mathrm{Sp}(1)_R$ 不変性を持たない。したがって、作用が $\mathrm{Sp}(1)_R$ 不変性を持つためには質量行列は次の関係を満足する必要がある。

$$[m^\dagger,m]=0 \tag{7.65}$$

この条件が成り立つとき、ポテンシャルは明らかに $\mathrm{Sp}(1)_R$ 不変である。
ポテンシャルを全て合わせれば $\mathrm{Sp}(1)_R$ 対称性が回復する。

$\mathcal{N}=2$ SQCD のポテンシャル

$$V=\frac{g^2}{4}(\overline{q}^IT_aq_J)(\overline{q}^JT_aq_I)+\frac{1}{2g^2}\left(if_{abc}\overline{\phi}^b\phi^c\right)^2+\frac{1}{2}(q^{\dagger I}MM^\dagger q_I) \tag{7.66}$$

3 つの項は全て非負であり、ポテンシャルの値が最小値 $V=0$ をとるのは次の条件が満足される場合である。

$$(\overline{q}^IT_aq_J)=0,\quad [\phi^\dagger,\phi]=0,\quad M^\dagger q_I=0. \tag{7.67}$$

$$V=\frac{1}{4g^2}(D^a{}_I{}^JD^a{}_J{}^I)+\frac{1}{2}f^m\overline{f}_m \tag{7.68}$$

Soryushiron Kenkyu

運動方程式を解いて得られる補助場の値は

$$(D^a)_I{}^J = if_{abc}\phi^{\dagger b}\phi^c\delta_I^J + \zeta_I{}^J + g^2\overline{q}_\alpha^J(T_a)^\alpha{}_\beta q_I^\beta, \quad f^m = -\widehat{\overline{M}}\overline{q}^m. \tag{7.69}$$

$\mathcal{N}=1$ のときと同様に、幾つかの量の絶対値の二乗の和として書けているので、それらが全て 0 であることが真空であるための条件である。すなわち、真空条件は次のように与えられる。

$$[\phi^\dagger, \phi] = \phi q_I = \phi^\dagger q_I = \mu_D + \zeta_D = \mu_F + \zeta_F = 0. \tag{7.70}$$

7.3 ハイパー多重項

7.3.1 超対称性がモジュライ空間に課す条件について

ある超対称代数の多重項に n_ϕ 個の実スカラー場 ϕ^a と、n_λ 個のワイルフェルミオン λ^i が含まれるとする。さらにゲージ場が含まれていてもよい。スカラー場とフェルミオンの変換則を次のように仮定する。(ここではフェルミオンの高次の項は不要なので無視する。)

$$\delta\phi = C^a_{iI}(\xi^I\lambda^i) + \overline{C}^{aIi}(\overline{\xi}_I\overline{\lambda}_i), \tag{7.71}$$

$$\delta\lambda^i = -i\overline{D}_a^{Ii}\sigma^\mu\overline{\xi}_I\partial_\mu\phi^a + (F_{\mu\nu}\ \text{terms}), \tag{7.72}$$

$$\delta\overline{\lambda}_i = iD_{aiI}\overline{\sigma}^\mu\xi^I\partial_\mu\phi^a + (F_{\mu\nu}\ \text{terms}). \tag{7.73}$$

ξ^I が $\mathcal{N}$ 個の変換パラメータである。C^a_{iI} と D^a_{iI} はスカラー場の関数であり、$\overline{C}^{aIi}$ と $\overline{D}^{aIi}$ は添え字 i と I に対するエルミート共役である。

ラグランジアンは次のように仮定する。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\lambda + (F_{\mu\nu}\ \text{terms}), \tag{7.74}$$

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^b, \tag{7.75}$$

$$\mathcal{L}_\lambda = i(\lambda^i\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}_i) + if_{ai}{}^j(\partial_\mu\phi^a)(\lambda^i\sigma^\mu\overline{\lambda}_j). \tag{7.76}$$

g_{ab} と $f_{ai}{}^j$ はスカラー場の関数で、g_{ab} は二つの添え字について対称な実行列、$f_{ai}{}^j$ は添え字 i と j について反エルミート行列である。

$\mathcal{L}_\phi$ と $\mathcal{L}_\lambda$ の超対称変換は次のように与えられる。(パラメータ ξ^I を含む部分だけを書いた。実際には $\overline{\xi}_I$ を含む複素共役も存在する。)

$$\delta\mathcal{L}_\phi = g_{ab}C^b_{iI}(\xi^I\lambda^i)(\partial_\mu\partial^\mu\phi^a + \Gamma^a_{cd}\partial_\mu\phi^c\partial^\mu\phi^d), \tag{7.77}$$

$$\delta\mathcal{L}_\lambda = -(\lambda^i\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi^I)[D_{aiI}\partial_\mu\partial_\nu\phi^a + (\partial_\mu D_{aiI} + (\partial_\mu\phi^b)f_{bi}{}^jD_{ajI})(\partial_\nu\phi^a)] + (F_{\mu\nu}\ \text{terms}) \tag{7.78}$$

Γ^a_{cd} は g_{ab} から作ったクリストッフェル記号である。$\partial^2\phi$ を含む項は

$$(\xi^I\lambda^i)(g_{ab}C^b_{iI} - D_{aiI})\partial_\mu\partial^\mu\phi^a \tag{7.79}$$

であるから、これが相殺するためには

$$g_{ab}C^b_{iI} = D_{aiI} \tag{7.80}$$

でなければならない。$(\partial\phi)^2$ を含む項は整理すると

$$-(\lambda^i\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi^I)(\partial_\mu\phi^b)(\partial_bD_{aiI} + f_{bi}{}^jD_{ajI} - \Gamma^c_{ba}D_{ciI})(\partial_\nu\phi^a) \tag{7.81}$$

となるので、次の式が成り立たなければならない。

$$\partial_b D_{aiI} + f_{bi}{}^j D_{ajI} - \Gamma^c_{ba} D_{ciI} = 0 \tag{7.82}$$

これは、モジュライ空間上のテンソル D_{aiI} が接続 f と Γ の下で covariantly constant であることを意味している。モジュライ空間上の多脚場 $e_a{}^\alpha$ とスピン接続 $\omega_{a\alpha}{}^\beta$ を導入すれば、次のようにも書ける。

$$\partial_b \gamma_{\alpha iI} + f_{bi}{}^j \gamma_{\alpha jI} + \omega_{b\alpha}{}^\beta \gamma_{\beta iI} = 0 \tag{7.83}$$

ただし、

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma_{\alpha iI} = e_\alpha{}^a D_{aiI} = e_{\alpha a} C^a_{iI}, \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{\gamma}^{Ii}_\alpha = e_\alpha{}^a \overline{D}^{Ii}_a = e_{\alpha a}\overline{C}^{aIi} \tag{7.84}$$

によって $\gamma_{\alpha iI}$ と $\overline{\gamma}^{Ii}_\alpha$ を導入した。(7.83) は γ が covariantly constant であることを意味している。

f と ω に対応するモジュライ空間上の曲率を

$$\begin{aligned} P_{abi}{}^j &= \partial_a f_{bi}{}^j - \partial_a f_{bi}{}^j + f_{ai}{}^k f_{bk}{}^j - f_{bi}{}^k f_{ak}{}^j, \quad (7.85)\\ R_{ab\alpha}{}^\beta &= \partial_a \omega_{b\alpha}{}^\beta - \partial_a \omega_{b\alpha}{}^\beta + \omega_{a\alpha}{}^\gamma \omega_{b\gamma}{}^\beta - \omega_{b\alpha}{}^\gamma \omega_{a\gamma}{}^\beta \quad (7.86) \end{aligned}$$

によって導入すると、(7.83) の積分可能条件は

$$P_{abi}{}^j \gamma_{\alpha jI} + R_{ab\alpha}{}^\beta \gamma_{\beta iI} = 0 \tag{7.87}$$

となる。

SUSY 代数

$$[\delta_1, \delta_2]\phi^a = \frac{i}{4}(\xi^I_1 \sigma^\mu \overline{\xi}_{2I} - \xi^I_2 \sigma^\mu \overline{\xi}_{1I})\partial_\mu \phi^a \tag{7.88}$$

が成り立つことを要求すると、$\gamma_{\alpha iI}$ に対する条件

$$\overline{\gamma}^{Ii}_\alpha \gamma_{\beta iJ} + \overline{\gamma}^{Ii}_\beta \gamma_{\alpha iJ} = 2\delta_{\alpha\beta}\delta^I_J \tag{7.89}$$

が得られる。

ここで、多重項の個数が一つだけであり、フェルミオンの個数と超対称性の数が等しいことを仮定しよう。これは、$\mathcal{N}=1$ のベクトル多重項、カイラル多重項、$\mathcal{N}=2$ のベクトル多重項、ハイパー多重項、そして $\mathcal{N}=4$ のベクトル多重項に対して成り立つ。ただし、$\mathcal{N}=1$ のベクトル多重項の場合はスカラー場が含まれないので除外しておく。$n_\lambda = \mathcal{N}$ であるから、$\gamma_{\alpha iI}$ の添え字のうち i と I について行列表示したもの γ_α は正方行列である。$\overline{\gamma}_\alpha$ についても同様である。(7.89) で α と β が等しい場合の式は、$\overline{\gamma}_\alpha\gamma_\alpha = \mathbf{1}$ （α についての和は取らない）となり、γ_α と $\overline{\gamma}_\alpha$ が互いに逆行列であることを意味している。従って、順序を入れ替えた

$$\gamma_\alpha\overline{\gamma}_\alpha = \mathbf{1} \tag{7.90}$$

も成り立つ。α と β が異なる場合に (7.89) の左から γ_α、右から $\overline{\gamma}_\alpha$ を掛けると（α についての和はとらない。）

$$0 = \gamma_\alpha(\overline{\gamma}_\alpha\gamma_\beta + \overline{\gamma}_\beta\gamma_\alpha)\overline{\gamma}_\alpha = \gamma_\beta\overline{\gamma}_\alpha + \gamma_\alpha\overline{\gamma}_\beta \tag{7.91}$$

が得られる。(7.90) と (7.91) を組み合わせれば

$$\gamma_\beta\overline{\gamma}_\alpha + \gamma_\alpha\overline{\gamma}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\mathbf{1} \tag{7.92}$$

が得られる。さらに (7.92) を (7.89) と組み合わせれば、エルミート行列

$$\Gamma_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\alpha \\ \overline{\gamma}_\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{7.93}$$

がクリフォード代数

$$\{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}\mathbf{1} \tag{7.94}$$

を満足することが示される。

(7.87) は行列表示すると

$$P_{ab}\gamma_\alpha + R_{ab\alpha\beta}\gamma_\beta = 0 \tag{7.95}$$

となる。ここに右から $\overline{\gamma}_\alpha$ を掛けると

$$R_{ab\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta} = n_\phi P_{ab} \tag{7.96}$$

が得られる。ただし、

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\gamma_\alpha\overline{\gamma}_\beta - \gamma_\beta\overline{\gamma}_\alpha), \quad \overline{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overline{\gamma}_\alpha\gamma_\beta - \overline{\gamma}_\beta\gamma_\alpha) \tag{7.97}$$

を定義した。一方 (7.95) に左から $\overline{\gamma}_\alpha$ を掛けると、次の式を得ることができる。

$$\overline{\gamma}_\alpha P_{ab}\gamma_\alpha + R_{ab\alpha\beta}\overline{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 \tag{7.98}$$

この式から (7.96) を用いて P_{ab} を消去すれば

$$(n_\phi - 2)R_{ab\alpha\beta}\overline{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 \tag{7.99}$$

となる。

それぞれの多重項に対して、この式は以下のような条件をモジュライ空間に課す。

- $\mathcal{N}=1$ のカイラル多重項の場合、$n_\phi = 2$ であるから (7.99) はいかなる条件も与えない。実際、どんな実二次元多様体もケーラー多様体である。
- $\mathcal{N}=2$ のベクトル多重項の場合にも $n_\phi = 2$ であるから (7.99) はいかなる条件も与えない。Special geometry の条件を得るためには、ゲージ場まで含めた解析が必要である。
- $\mathcal{N}=2$ のハイパー多重項の場合、Γ_α は SO(4) の γ 行列であり、(7.99) は $R_{ab\alpha\beta}$ の反自己双対部分が 0 であるということをいっており、モジュライ空間がハイパーケーラーであることが結論される。
- $\mathcal{N}=4$ のベクトル多重項の場合、Γ_α は SO(6) の γ 行列であり、(7.99) は $R_{ab\alpha\beta}$ の全ての成分が 0 であることをいっているので、モジュライ空間は平坦なものだけが許される。(SO(6) は SO(4) $\sim$ SU(2) $\times$ SU(2) と違って単純リー群なので、(7.99) のような式によって $R_{ab\alpha\beta}$ の一部だけが 0 になることはありえない。)

7.3.2 Hyper Kähelr 多様体

ハイパー多重項の場合に、(7.83) が何を意味するかを考えてみよう。ハイパー多重項では γ は SO($4k$) の **4k** 次元ベクトル表現を $\mathrm{Sp}(1)_R \times \mathrm{Sp}(k)$ の表現に分解する定数テンソルである。従って (7.83) が成り立つためにはモジュライ空間のホロノミーが $\mathrm{Sp}(k) \subset \mathrm{SO}(4k)$ であることを意味している。このような多様体は Hyper Kähler 多様体と呼ばれる。

定数行列 γ を以下の性質を満足するものとして定義する。

$\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(k) \subset \mathrm{SO}(4k)$ の変換行列の性質

m が Sp(k) の基本表現の添字、α が Sp(1) の基本表現の添字、$\widehat{I}$ が SO($4k$) のベクトル添字である。

- 完全性

$$(\gamma_{\widehat{I}})^m{}_\alpha(\gamma_{\widehat{J}})^\alpha{}_m = 2\delta_{\widehat{I}\widehat{J}}, \quad (\gamma_{\widehat{I}})^m{}_\alpha(\gamma_{\widehat{I}})^\beta{}_n = 2\delta^m_n\delta^\beta_\alpha. \tag{7.100}$$

- 複素共役

$$((\gamma_{\widehat{I}})^m{}_\alpha)^* = (\gamma_{\widehat{I}})^\alpha{}_m. \tag{7.101}$$

- 反交換関係

$$(\gamma_{\widehat{I}})^\alpha{}_m(\gamma_{\widehat{J}})^m{}_\beta + (\gamma_{\widehat{J}})^\alpha{}_m(\gamma_{\widehat{I}})^m{}_\beta = 2\delta_{\widehat{I}\widehat{J}}\delta^\alpha_\beta. \tag{7.102}$$

- 添え字の上げ下げ

$$J^{mn}\epsilon_{\alpha\beta}(\gamma_{\widehat{I}})^\beta{}_n = (\gamma_{\widehat{I}})^m{}_\beta. \tag{7.103}$$

Hyper Kähler 多様体 $\mathcal{M}_H$ 上のスピン接続 $\omega_{K-\widehat{M}\widehat{N}}$ の反対称な添字 $\widehat{M}$ と $\widehat{N}$ を、不変テンソル σ を用いて $\mathrm{Sp}(1)_R$ と Sp(k) の添え字に書きなおそう。Hyper Kähler 多様体の場合、スピン接続は Sp(k) の回転のみを含むから、Sp(k) に対するスピン接続 $\omega_K{}^m{}_n$ を用いて次のように置くことができる。

$$\omega_{K-\widehat{M}\widehat{N}} = \frac{1}{2}\omega_K{}^m{}_n(\gamma_{\widehat{M}})^\alpha{}_m(\gamma^\dagger_{\widehat{N}})^n{}_\alpha, \quad \frac{1}{2}\omega_{K-\widehat{M}\widehat{N}}(\gamma^\dagger_{\widehat{M}})^m{}_\alpha(\gamma_{\widehat{N}})^\beta{}_n = \omega_{K-}{}^m{}_n\delta^\beta_\alpha. \tag{7.104}$$

曲率テンソルは次のように定義される。

$$R_{MN} = \partial_M\omega_N - \partial_N\omega_M + [\omega_M, \omega_N] \tag{7.105}$$

ここで、スピン接続として $\omega_{M-\widehat{K}\widehat{L}}$ を用いれば通常の SO($4k$) の添え字を持った曲率テンソル $R_{MN-\widehat{K}\widehat{L}}$ が得られ、$\omega_M{}^k{}_l$ を用いれば Sp(k) の添え字を持った曲率テンソル $R_{MN}{}^k{}_l$ が得られる。これらは次のように関係している。

$$\frac{1}{2}R_{MN\widehat{I}\widehat{J}}(\gamma_{\widehat{I}})^m{}_\alpha(\gamma_{\widehat{J}})^\beta{}_n = R_{MN}{}^m{}_n\delta^\beta_\alpha. \tag{7.106}$$

添え字 α と β について単位行列になっているのは、$\mathrm{Sp}(1)_R$ 部分群に対するスピン接続が平坦であるからである。曲率テンソルは前二つの添え字と後ろ二つの添え字の入れ替えに対する対称性を持っている。従って、前二つの添え字についても同様の処理を行うことができるはずであり、次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}R_{MN}{}^m{}_n(\gamma^M)^p{}_\alpha(\gamma^N)^\beta{}_q = R^p{}_q{}^m{}_n\delta^\beta_\alpha. \tag{7.107}$$

さらに、すべての添え字を下付きにした次のテンソルを定義する。

$$R_{mnpq} = J_{mk}J_{pl}R^k{}_n{}^l{}_q. \tag{7.108}$$

Soryushiron Kenkyu

前二つと後ろ二つの入れ替えに対して対称であることや、曲率テンソルに対するビアンキの第一恒等式を用いると、R_{mnpq} がすべての添え字に対して完全対称であることを示すことができる。ビアンキの第二恒等式は次のように書くことができる。

$$(\gamma_{\widehat{I}})^{\alpha}{}_{m}\nabla_{\widehat{I}}R_{npqr} = (\gamma_{\widehat{I}})^{\alpha}{}_{n}\nabla_{\widehat{I}}R_{pmqr} \tag{7.109}$$

これは、テンソル $(\gamma_{\widehat{I}})^{\alpha}{}_{n}\nabla_{\widehat{I}}R_{pmqr}$ の 5 個の $\mathrm{Sp}(k)$ 添え字がすべて完全対称であることを意味している。

モジュライ空間 $\mathcal{M}_H$ は、$\mathcal{N}=1$ の場合のモジュライ空間が満足すべき性質は全て満足していなければばならない。従って、$\mathcal{M}_H$ は Kähler 多様体でなければならない。[15] これは共変的に一定な複素構造 $I^m{}_n$ が存在することを意味している。この複素構造は $\mathrm{SU}(2)_R$ の 3 つの生成子のうちのひとつと同定することができる。従って $\mathcal{N}=2$ の超対称性と矛盾しないためには I のほかに次の関係式を満足するあと二つの共変的に一定な複素構造 J と K が存在しなければならない。

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \quad IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J. \tag{7.110}$$

これら 3 つの共変的に定数であるテンソル場が $\mathcal{M}_H$ 上全体で定義できるとき、多様体 $\mathcal{M}_H$ は hyper Kähler 多様体と呼ばれる。$T\mathcal{M}_H$ の回転群 $\mathrm{SO}(4k)$ の極大部分群 $\mathrm{Sp}(1)_R \times \mathrm{Sp}(k)$ のもとで、I、J、K は $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ 表現として振舞う。従ってこれらが共変的に一定に定義できるためには $\mathcal{M}_H$ のホロノミー群は $\mathrm{Sp}(k)$ か、またはその部分群である必要がある。

7.3.3 変換則とラグランジアン

ハイパーケーラー多様体上の座標を与える実数場を q^m としよう。これは以前に定義した q_I^{α} と次の関係にあるものとする。

$$q_I^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_m)^{\alpha}{}_{I}q^m, \quad q^m = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_m)^{I}{}_{\alpha}q_I^{\alpha} \tag{7.111}$$

f_I^{α} についても、(7.111) と同様に次のように $4k$ 次元ベクトルを定義しておく。

$$f_I^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_m)^{\alpha}{}_{I}f^m, \quad f^m = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_m)^{I}{}_{\alpha}f_I^{\alpha} \tag{7.112}$$

f^m は一般には複素ベクトルであることに注意すること。関係式 (7.54) を f^m に対する式として書き換えると、次のようになる。すると、f^m はスカラー場の関数として次のように与えられる。

$$f^m = -(\widehat{\overline{m}} - i\sqrt{2}\overline{\phi}^a\widehat{T}_a)q^m, \quad \overline{f}^m = -(\widehat{m} - i\sqrt{2}\phi^a\widehat{T}_a)q^m \tag{7.113}$$

ただし、hat のついた行列は、それが作用するものによって適当な表現行列に変換することを意味する。$\mathrm{SO}(4k)$ のベクトル表現と $\mathrm{Sp}(k)$ の基本表現に対する生成子の関係は次のように与えられる。

$$(T_a)^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{4}(T_a)_{mn}(\gamma^{mn})^{\alpha}{}_{\beta}, \quad (T_a)_{\alpha}{}^{\beta} = -\frac{1}{4}(T_a)_{mn}(\gamma^{mn})^{\beta}{}_{\alpha}. \tag{7.114}$$

$(T_a)_{mn}$ は純虚エルミート行列である。

スカラー場とスピノル場よりなる $\mathcal{N}=2$ 多重項はハイパー多重項と呼ばれる。ハイパー多重項は $\mathcal{N}=1$ のカイラル多重項を二つ組み合わせることで得られる。

$$\mathcal{N}=2\ \text{ハイパー多重項}\begin{cases}\mathcal{N}=1\ \text{カイラル多重項}\ Q=(q,\psi,F)\\ \qquad\qquad + \\ \mathcal{N}=1\ \text{カイラル多重項}\ \widetilde{Q}=(\widetilde{q},\widetilde{\psi},\widetilde{F})\end{cases} \tag{7.115}$$

Soryushiron Kenkyu

k 個のハイパー多重項からなる系を考え、$2k$ 個の複素スカラー場によって張られるスカラー多様体を $\mathcal{M}_H$ とする。$\mathcal{N}=1$ の言葉ではこの系は $2k$ 個のカイラル多重項を含む。その成分場を 1 から $2k$ までの値をとる添え字 α を用いて $(dq^\alpha, \psi^\alpha, F^\alpha)$ と表そう。スカラー場を q^α ではなく dq^α と書いているのは添え字 α がスカラー多様体上の局所直交基底のものと解釈できるためである。$\mathcal{N}=2$ 対称性を実現するためには、変換則、ラグランジアンが $\mathcal{N}=1$ 対称性を持つと同時に $\mathrm{SU}(2)_R$ 不変性を持てばよい。ただしこの $\mathrm{SU}(2)_R$ 変換は理論のパラメータを変化させても良いので、正確には理論の対称性ではない。この対称性のもとで、スカラー場および補助場が二重項として変換されるものとし、その添え字を I とする。

$$(dq_I^\alpha, \psi^\alpha, F_I^\alpha) \tag{7.116}$$

ただし、$dq_1^\alpha = dq^\alpha$、$F_2^\alpha = F^\alpha$ としておく。添え字 I の導入で、ボゾンの自由度が 2 倍になった。そこでその自由度の数を元に戻すために、実数条件をおく。そのために次のように §7.3.2 において定義された $\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(k)$ 不変テンソル $(\gamma_{\widehat{m}})^I{}_\alpha$ および $(\gamma^\dagger_{\widehat{m}})^\alpha{}_I$ を用いて q_I^α と F_I^α を $4k$ 個の実の場 q^m と F^m で書き換えておくと便利である。

$$dq_I^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_m)^\alpha{}_I dq^m, \quad dq^m = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^m)^I{}_\alpha dq_I^\alpha. \tag{7.117}$$

$$F_I^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_m)^\alpha{}_I F^m, \quad F^m = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^m)^I{}_\alpha F_I^\alpha. \tag{7.118}$$

q^m が実であるという条件を課しておけば、on-shell での自由度はボゾンとフェルミオンの間で一致する。

これらを用いて、$\mathrm{SU}(2)_R$ 不変かつ $(\xi_1,\xi_2)=(\xi,0)$ の場合に $\mathcal{N}=1$ カイラル多重項の変換則を再現する変換則を書くと次のようになる。

ハイパー多重項の変換則

一般の hyper Kähler 多様体に値を取るハイパー多重項の変換則

$$\delta q^m = \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_I(\gamma^m)^I{}_\alpha\psi^\alpha + \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{\psi}_\alpha(\gamma^m)^\alpha{}_I\overline{\xi}^I, \tag{7.119}$$

$$\delta\psi^\alpha = -\frac{i}{2\sqrt{2}}(\not{D}^{(G)}q^m)(\gamma_m)^\alpha{}_I\overline{\xi}^I + \frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{IJ}\xi_I(\gamma_m)^\alpha{}_J F^m - \delta q^m\widehat{\omega}_m\psi^\alpha. \tag{7.120}$$

$\widehat{\omega}_m$ はモジュライ空間上のスピン接続であり、その右に来る場にあわせて行列表示されたものである。

ハイパー多重項のフレーバー対称性は、三つのケーラー構造を不変に保つアイソメトリーによって表される。アイソメトリーはモジュライ空間上のキリングベクトルを用いて表すことができる。たとえば、複素中心電荷の実部と虚部それぞれによって生成される対称性を表すキリングベクトルは補助場 F^m の実部と虚部である。

ハイパー多重項が幾つかの $U(1)$ ゲージ場と結合している場合には、対応するゲージ対称性もモジュライ空間上のキリングベクトルで表される。それらを t_a^m としよう。a は複数個ある $U(1)$ ゲージ場を区別する添え字である。このときスカラー場 q^m やフェルミオン $\overline{\psi}_\alpha$ の共変微分は次のように与えられる。

$$D_\mu^{(G)}q^m = \partial_\mu q^m - A_\mu^a t_a^m, \quad D_\mu^{(G,\sigma)}\overline{\psi}_\alpha = \partial_\mu\overline{\psi}_\alpha + A_\mu^a\widehat{t}_a\overline{\psi}_\alpha + (\partial_\mu q^m)\widehat{\omega}_m\overline{\psi}_\alpha \tag{7.121}$$

Soryushiron Kenkyu

フェルミオンの変換則中の $\widehat{\omega}_m$ は、モジュライ空間上のスピン接続をそれが作用する ψ^α に対応する表現として表したものである。また、キリングベクトル $\overline{F}^m$ の微分 $\overline{F}_{mn} \equiv D_m\overline{F}_n$ についても同様に $\widehat{F}$ を定義しておく。Sp(k) の $2k$ 表現に対してこれらは次のように与えられる。

$$(\omega_m)^\beta{}_\alpha = \frac{1}{4}\omega_{m-kl}(\gamma^{kl})^\beta{}_\alpha, \quad \overline{F}^\beta{}_\alpha = \frac{1}{4}D_k\overline{F}_l(\gamma^{kl})^\beta{}_\alpha. \tag{7.122}$$

特殊な場合として、モジュライ空間が平坦な場合を考えてみよう。繰り込み可能なラグランジアンの場合にはこの条件を満足する。この場合、回転を与えるキリングベクトルはスカラー場と回転の生成子の積によって与えられる。エルミートな生成子を T_a とすると、キリングベクトルと生成子の関係は

$$t_a^m = i(T_a)^m{}_n q^n, \quad \widehat{t}_a = -i\widehat{T}_a. \tag{7.123}$$

このキリングベクトルを用いれば、(7.121) に与えられた共変微分は次のように通常の共変微分になる。

$$D_\mu q^m = \partial_\mu q^m - iA_\mu^a\widehat{T}_a q^m, \quad D_\mu\overline{\psi}_\alpha = \partial_\mu\overline{\psi}_\alpha - iA_\mu^a\widehat{T}_a\overline{\psi}_\alpha \tag{7.124}$$

ただし、$\widehat{T}_a$ はそれが作用する場が属する表現に対応して適当な行列を採用する。

再び一般のハイパーケーラー多様体の場合に戻ろう。上記の変換則で不変なハイパー多重項のラグランジアンは次のように与えられる。

$U(1)$ ゲージ場に結合したハイパー多重項

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = -\frac{1}{2}h_{mn}(D_\mu^{(G)}q^m)(D^{(G)\mu}q^n) + i\psi^\alpha\sigma^\mu D_\mu^{(G,\sigma)}\overline{\psi}_\alpha, \tag{7.125}$$

$$\mathcal{L}_{\psi{\rm mass}} = \frac{1}{2}(\psi^\alpha J_{\alpha\beta}\widehat{\overline{F}}\psi^\beta) + {\rm c.c.}, \tag{7.126}$$

$$\mathcal{L}_{\rm pot} = -\frac{1}{2}h_{mn}F^m\overline{F}^n, \tag{7.127}$$

$$\mathcal{L}_{\rm yukawa} = t_a^m(\gamma_m)^I{}_\alpha(\psi^\alpha\lambda_I^a) + {\rm h.c.}, \tag{7.128}$$

$$\mathcal{L}_{\rm add} = -\frac{i}{2}D_i^a(\sigma_i)^J{}_I(\mu_a)^I{}_J, \tag{7.129}$$

$$\mathcal{L}_{\rm 4fermi} = \frac{1}{4}R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta). \tag{7.130}$$

上で述べたように、ここでは補助場 F^m を独立な場ではなく、スカラー場 q^m の関数として与える必要がある。上記のラグランジアンを超対称変換のもとで不変にするためには次のように取ればよい。

$$F^m = t_0^m + \sqrt{2}\overline{\phi}^a t_a^m. \tag{7.131}$$

右辺第一項の t_0^m はハイパー多重項に質量を与えるための複素キリングベクトルであり、t_a^m は a 番目のゲージ対称性を与える実キリングベクトルである。

複素キリングベクトル F^m の実部と虚部は中心電荷によって生成される U(1) × U(1) 大域的対称性を表している。従って F^m はモジュライ空間上の複素キリングベクトルであり、次の条件を満足する。

$$D_mF_n + D_nF_m = 0. \tag{7.132}$$

中心電荷は超対称電荷と可換であるから、F^m によるアイソメトリーはハイパーケーラー構造を変化させてはならない。このことから、F^m は３重正則キリングベクトルであり、次の式が成り立つ。

$$\mathcal{L}_F I^{(a)} = \mathcal{L}_{\overline{F}} I^{(a)} = 0, \quad a = 1,2,3. \tag{7.133}$$

F^m およびその複素共役はそれぞれ Z と $\overline{Z}$ に対応しているが、この二つの電荷は可換であるから、F^m と $\overline{F}^m$ による二つのアイソメトリーも可換でなければばならない。このことは、キリングベクトル F^m が次の式を満足することを意味している。

$$\mathcal{L}_F \overline{F}_k = F^m D_m \overline{F}_k + D_k F^m \overline{F}_m = 0. \tag{7.134}$$

モジュライ空間が平坦なときにはこれは質量行列がそのエルミート共役と可換であるという条件に等価である。

三重正則キリングベクトル

ここではハイパーケーラー多様体上のアーベル群には限らない一般の三重正則キリングベクトルの性質について簡単にまとめておこう。三重正則であるというのは、そのキリングベクトルによるハイパーケーラー構造のリー微分が 0 であることを意味している。

$$\mathcal{L}_a \widehat{\gamma}^{(3)} = [\widehat{t}_a, \widehat{\gamma}^{(3)}] = 0. \tag{7.135}$$

(7.135) を用いれば $D_m(\widehat{\gamma}^{(3)} t_a)_n = -(\widehat{\gamma}^{(3)} \widehat{t}_a)_{nm}$ が m と n について対称であることを示すことができる。従って $\widehat{\gamma}^{(3)} t_a$ はあるスカラーの勾配としてあらわすことができる。このスカラーを μ_a として次のようにおく。

$$(\widehat{\gamma}^{(3)} t_a)_k = -D_k \mu_a \tag{7.136}$$

この定義より μ は反エルミート、すなわち $((\mu_a)^I{}_J)^* = -((\mu_a)^J{}_I)$ が成り立つ。この定義式を用いて次の公式が示される。

$$D_k(t_a^m t_b^n \gamma^{(3)}_{mn} + f_{ab}{}^c \mu_c) = 0. \tag{7.137}$$

従って、次の式が成り立つ。

$$t_a^m t_b^n \gamma^{(3)}_{mn} + f_{ab}{}^c \mu_c = \mathrm{const} \tag{7.138}$$

7.3.4 変分計算

実際にモジュライ空間が任意の hyper Kähler であったときに、そのラグランジアンが $\mathcal{N} = 2$ の超対称性変換のもとで不変であることを示そう。まずは $F^m(q) = 0$ の場合を考えよう。これはカイラル多重項の superpotential が 0 の場合に相当し、零質量のハイパー多重項を与える。

この変換則のもとで不変なスカラー場とフェルミオンの作用を決定しよう。まずは以前に与えられた運動項を次のように共変化しておく。

$$\mathcal{L}_q = -\frac{1}{2} h_{mn} \partial_\mu q^m \partial^\mu q^n, \quad \mathcal{L}_\psi = i\psi^\alpha \sigma^\mu D_\mu^{(M)} \overline{\psi}_\alpha. \tag{7.139}$$

$D_\mu^{(M)}$ は $\mathcal{M}_H$ 上のスピン接続 $\omega_{k-}{}^\alpha{}_\beta$ による共変微分である。これは形式的に q^m による $\mathcal{M}_H$ 上の共変微分 D_m を定義し、連鎖則 $D_\mu \psi^\alpha = (\partial_\mu q^m)(D_m \psi^\alpha)$ を用いることで次のように与えられる。

$$D_\mu^{(M)} \psi^\alpha = \partial_\mu \psi^\alpha + (\partial_\mu q^m) \omega_m{}^\alpha{}_\beta \psi^\beta \tag{7.140}$$

まず、スカラー場 ϕ^m の運動項の変分を求めよう。このとき、計量 h_{mn} も変分することを忘れてはならない。計量の変分から $\delta h_{mn} = \delta q^k (h_{ml} \Gamma^l_{kn} + h_{nl} \Gamma^l_{km})$ のようにクリストッフェル記号が

Soryushiron Kenkyu

得られることを用いれば、次のように共変な形にまとめることができる。

$$\delta\mathcal{L}_q = -h_{mn}(D_\mu\delta q^m)\partial^\mu q^n, \quad D_\mu\delta q^m = \partial_\mu\delta q^m + (\partial_\mu q^k)\Gamma^m_{kl}\delta q^l. \tag{7.141}$$

次に、フェルミオンの運動項の変分を考えよう。まずはフェルミオンの 2 次の変分を与える $\delta^{\mathrm{cov}}\psi^\alpha$ と $\delta^{\mathrm{cov}}\overline{\psi}_\alpha$ のみ考慮すると、

$$\begin{aligned}\delta^{\mathrm{cov}}\mathcal{L}_\psi &= i(\delta^{\mathrm{cov}}\psi^\alpha)\sigma^\mu D^{(M)}_\mu\overline{\psi}_\alpha + \mathrm{h.c.} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^\dagger_m)^\alpha{}_I(\overline{\xi}^I\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu D^{(M)}_\mu\overline{\psi}_\alpha)(\partial_\nu q^m) + \mathrm{h.c.} \\ &= D^{(M)}_\mu\delta q_m(\partial_\mu q^m) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big((\gamma^\dagger_m)^\alpha{}_I((D^{(M)}_\mu\overline{\xi}^I)\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\psi}_\alpha)(\partial_\nu q^m) + \mathrm{h.c.}\Big)\end{aligned} \tag{7.142}$$

ここまでは、target 空間の計量や変換パラメータ ξ についていかなる仮定もしていない。この変換の第 1 項は先ほど計算したスカラー場の運動項の変分を打ち消す。一方第 2 項が消えるためには $D^{(M)}_\mu\xi$ が 0 でなければならない。ξ は $\mathrm{Sp}(1)_R$ 添え字を持つ定数スピノルであるが、target 多様体が hyper Kähler であり、スピン接続が $\mathrm{Sp}(1)_R$ 成分を持たないことより $D^{(M)}_\mu\xi$ が 0 であることがいえる。

次に、フェルミオンについて 4 次の変分へ移ろう。超対称変換のうちで、フェルミオンの個数を二つ増やすのは、スカラー場の変分 δq^m と、フェルミオンの超対称変換のうちの $\delta' = \delta - \delta^{\mathrm{cov}}$ の部分である。これは次のように与えられる。

$$\delta'\psi^\alpha = -\delta q^m\omega_m{}^\alpha{}_\beta\psi^\beta \tag{7.143}$$

$\delta'\psi^\alpha$ は、モジュライ空間上の平行移動を表している。フェルミオンについて 4 次の変分を得るには、$\mathcal{L}_\psi$ 中のスピン接続に含まれる q の変分と、ψ の $\delta' = \delta - \delta^{\mathrm{cov}}$ による変分を計算する必要がある。フェルミオンの微分について、この変換を行うと、

$$\begin{aligned}(\delta_q + \delta')(D_\mu\overline{\psi}_\alpha) &= D_\mu\delta'\overline{\psi}_\alpha + \delta_q((\partial_\mu q^m)\omega_{m\alpha}{}^\beta)\overline{\psi}_\beta \\ &= -D_\mu(\delta q^m\omega_{m\alpha}{}^\beta\overline{\psi}_\beta) + (\partial_\mu\delta q^m)\omega_{m\alpha}{}^\beta\overline{\psi}_\beta + (\partial_\mu q^m)\delta q^n(\partial_n\omega_{m\alpha}{}^\beta)\overline{\psi}_\beta\end{aligned} \tag{7.144}$$

ここで、第 1 項の共変微分をライプニッツ則を用いて分解しよう。その際に局所直交系の添え字にのみ作用し、接空間の添え字に作用しない共変微分 D' を用いるのが便利である。上式の第 1 項で微分が作用している量は接空間の添え字は縮約されているから、共変微分 D_μ を D'_μ に置き換えることができる。この置き換えのあとでライプニッツ則を用い、$\partial_m\omega_n - D'_n\omega_m = R_{mn}$ を用いれば次の式を得る。

$$(\delta_q + \delta')(D_\mu\overline{\psi}_\alpha) = -\delta q^m\omega_{m\alpha}{}^\beta D_\mu\overline{\psi}_\beta + \delta q^m(\partial_\mu q^n)R_{mn-\alpha}{}^\beta\overline{\psi}_\beta \tag{7.145}$$

この式は、時空座標での微分とモジュライ空間上の平行移動の順序を交換するとモジュライ空間の曲率テンソルが現れることを示している。この公式を用いれば、ラグランジアン中のフェルミオン運動項の変換は次のように与えられる。

$$(\delta_q + \delta'_\psi)\mathcal{L}_{\mathrm{fermion}} = i\delta q^m(\partial_\mu q^n)(\psi^\alpha\sigma^\mu R_{mn\alpha}{}^\beta\overline{\psi}_\beta). \tag{7.146}$$

R_{mn} は二つの共変微分の交換関係から現れた $\mathcal{M}_H$ の曲率テンソルである。ここで、曲率の前二つの添え字も次のように $\mathrm{Sp}(k)$ の添え字に書き換えよう。

$$R_{mn}{}^\alpha{}_\beta = \frac{1}{2}R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\gamma_m)^I{}_\gamma(\gamma^\dagger_n)^\delta{}_I \tag{7.147}$$

これを用いて上記の変分表すと次のようになる。

$$(\delta_q+\delta'_\psi)\mathcal{L}_{\mathrm{fermion}}=\frac{i}{2}((\gamma_m)^I{}_\gamma\partial_\mu q^m)R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta((\gamma_n^\dagger)^\delta{}_I\delta q^n)(\psi^\beta\sigma^\mu\overline{\psi}_\alpha). \tag{7.148}$$

さらに変換則 δq^m の具体形を代入すると、

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{i}{4\sqrt{2}}(\xi_J(\gamma^m)^J{}_\epsilon\psi^\epsilon)\partial_\mu q^kR^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\gamma_k)^I{}_\gamma(\gamma_m^\dagger)^\delta{}_I(\psi^\beta\sigma^\mu\overline{\psi}_\alpha) \quad +\mathrm{h.c.}\\ &= \frac{i}{2\sqrt{2}}\partial_\mu q^kR^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\gamma_k)^I{}_\gamma(\xi_I\psi^\delta)(\psi^\beta\sigma^\mu\overline{\psi}_\alpha) \quad +\mathrm{h.c.}.\end{aligned} \tag{7.149}$$

曲率テンソルが β と δ の入れ替えで対称であることを用い、フィルツ変換を行うと、

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= -\frac{i}{4}R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta e_k{}^I_\gamma(\partial_\mu q^k)(\xi_I\sigma^\mu\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta) \quad +\mathrm{h.c.}\\ &= -\frac{1}{2}R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\delta^{\mathrm{cov}}\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta) \quad +\mathrm{h.c.}\\ &= \delta^{\mathrm{cov}}\left[-\frac{1}{4}R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta)\right].\end{aligned} \tag{7.150}$$

従って、次の作用を加えればその δ^{cov} による変分によって打ち消すことができる。

$$\mathcal{L}=\frac{1}{4}R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta). \tag{7.151}$$

しかしながら、この新しい項の $\delta_q+\delta'_\psi$ による変分は次の新たな項を与える。

$$\begin{aligned}(\delta_q+\delta'_\psi)\mathcal{L} &= \frac{1}{4}\delta_qR^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta)+\frac{1}{4}R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta\delta'_\psi[(\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta)]\\ &= \frac{1}{4}\delta q^m(D_m+\pi_m)R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta)+\frac{1}{4}R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta\delta q^m\pi_m[(\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta)]\\ &= \frac{1}{4}\delta q^mD_mR^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta)+\frac{1}{4}\delta q^m\pi_m[R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta)]\end{aligned} \tag{7.152}$$

ただし、π_m は平行移動を表す演算子である。

$$\delta q^m\pi_mX=X(q\to q+\delta q)-X(q). \tag{7.153}$$

上の変分の第 2 項はスカラーの平行移動であるから 0 である。従って、この変分は次のようになる。

$$(\delta_q+\delta'_\psi)\mathcal{L}_{4\psi}=\frac{1}{4}\delta q^m(D_mR^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta)(\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta). \tag{7.154}$$

これが 0 になることは $(\gamma^m)^I{}_\alpha D_mR^\delta{}_\beta{}^\epsilon{}_\gamma$ が α、β、γ の 3 つの添字について対称であることを用いれば示すことができる。(この添え字についての対称性は曲率テンソルに対するビアンキ恒等式から導くことができる。)

こうして、次の作用が $\mathcal{N}=2$ の超対称変換の下で不変であることが示された。

ハイパー多重項の運動項

一般のハイパー多重項の運動項

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}h_{mn}\partial_\mu\phi^m\partial^\mu\phi^n+i\psi^\alpha\sigma^\mu D_\mu\overline{\psi}_\alpha+\frac{1}{4}R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta). \tag{7.155}$$

補助場 $F^m(q)$ が 0 ではない場合を考えてみよう。前にも述べたように、補助場 F^m はスカラー場 q の関数として与えられているとする。このとき (7.120) に与えられているようにフェルミオンの変換則に補助場 F^m の寄与が付け加わる。

$$\delta'\psi^\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_I(\gamma_m)^I{}_\beta J^{\beta\alpha}F^m. \tag{7.156}$$

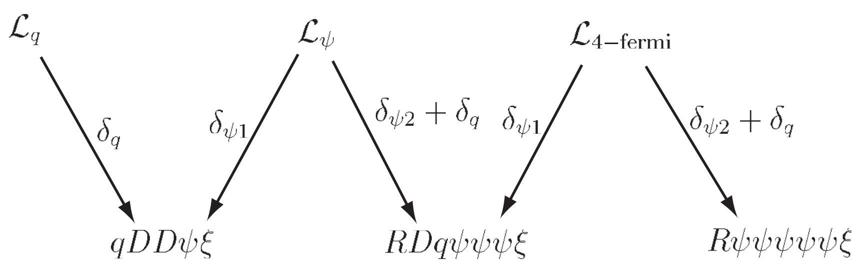

図 7.1: ハイパー多重項の作用の超対称変換による変分の相殺

0 でない補助場 $F^m \neq 0$ の存在は $\mathcal{N}=1$ の場合の superpotential が 0 でない場合に相当する。従ってフェルミオンに質量項が現れ、スカラー場に対してもポテンシャル項が現れる。$\mathcal{N}=1$ の場合との比較によって、それらの項が次のように与えられることは簡単に推測できる。

$$\mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} = \frac{1}{2}\psi^\alpha J_{\alpha\beta}\overline{F}^\beta{}_\gamma\psi^\gamma \quad +\mathrm{h.c.} \tag{7.157}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{pot}} = -\frac{1}{2}F^m\overline{F}_m. \tag{7.158}$$

ただし、質量行列は次のようにキリングベクトルの微分として定義される。

$$\overline{F}^\alpha{}_\beta \equiv \frac{1}{4}(\gamma^{mn})^\alpha{}_\beta D_m\overline{F}_n \tag{7.159}$$

この形は、$\mathcal{N}=1$ のカイラル多重項のフェルミオン質量が superpotential の二階微分で与えられており、それは補助場 F の微分としても書くことができたことに対応している。

フェルミオン変換則に F^m の寄与が加わったことにより、フェルミオン運動項の超対称変換から次の項が現れる。

$$\begin{aligned}\delta'\mathcal{L}_{\psi\mathrm{kin}} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}\psi^\alpha J_{\alpha\beta}(\gamma_m)^\beta{}_I(\not{D}\overline{F}^m)\overline{\xi}^I = -\frac{i}{4\sqrt{2}}\psi^\alpha J_{\alpha\beta}(\gamma^m)^\beta{}_I(\gamma^n)^J{}_\gamma(D_n\overline{F}_m)(\gamma^p)^\gamma{}_J(\not{\partial}q^p)\overline{\xi}^I \\ &= -\frac{1}{4}\psi^\alpha J_{\alpha\beta}(\gamma^{mn})^\beta{}_\gamma(D_m\overline{F}_n)\delta\psi^\gamma.\end{aligned} \tag{7.160}$$

最後の式変形には F^m が三重正則キリングベクトルであることを用いた。この変分は、フェルミオン質量項の変分によって相殺することができる。

フェルミオン質量項 (7.157) をさらに (7.156) で変換してみよう。

$$\delta'\mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\xi_I F^m(\gamma_m)^I{}_\alpha m^\alpha{}_\beta\psi^\beta + \mathrm{h.c.} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(F^m D_k\overline{F}_m)(\xi_I(\gamma^k)^I{}_\alpha\psi^\alpha) + \mathrm{h.c.} \tag{7.161}$$

途中で (7.159) を用いた。さらにこれは次のように書きかえることができる。

$$\delta'\mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} = \frac{1}{2}\delta\phi^k D_k(F^m\overline{F}_m) - \frac{1}{4\sqrt{2}}(\xi_I(\gamma^k)^I{}_\alpha\psi^\alpha - \overline{\psi}_\alpha(\gamma^k)^\alpha{}_I\overline{\xi}^I)\mathcal{L}_F\overline{F}_k \tag{7.162}$$

ここで、F^m と $\overline{F}^m$ によるアイソメトリーが互いに可換であることを用いれば第 2 項が消える。(7.162) の第 1 項はポテンシャル項の変分によって相殺することができる。

フェルミオンについて高次の項 $(\delta_\phi+\delta_\psi^{\mathrm{para}})\mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}}$ を考えよう。ここで、$\delta_\phi m^\alpha{}_\beta = \delta\phi^p D_p m^\alpha{}_\beta + \delta^{\mathrm{para}}m^\alpha{}_\beta$ を用い、ラグランジアン全体はモジュライ空間上のスカラーであって並行移動でその値が変化しないことを考慮すると、次の変分を得る。

$$\begin{aligned}(\delta_\phi+\delta_\psi^{\mathrm{para}})\mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} &= \frac{1}{2}\psi^\alpha J_{\alpha\beta}(\delta\phi^p D_p m^\beta{}_\gamma)\psi^\gamma \quad +\mathrm{h.c.} \\ &= \frac{1}{8}\delta\phi^p\psi^\alpha J_{\alpha\beta}(\gamma^m)^\beta{}_I(\gamma^n)^I{}_\gamma\psi^\gamma D_p D_m\overline{F}_n \quad +\mathrm{h.c.}\end{aligned} \tag{7.163}$$

式 (7.132) および曲率テンソルのビアンキ恒等式を用いれば、二階共変微分を次のように書くことができる。

$$D_p D_m \overline{F}_n = -R_{mnpq}\overline{F}^q. \tag{7.164}$$

これを (7.163) に代入して、曲率テンソルを Sp(k) 表示に直すと、

$$(\delta_\phi + \delta_\psi^{\rm para})\mathcal{L}_{\psi\rm mass} = \frac{1}{4}\delta\phi^m \overline{F}^n (\psi^\alpha \psi^\beta) J_{\gamma\epsilon}(\gamma_n)^\epsilon{}_I (\gamma_m)^I{}_\delta R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} \quad + \text{h.c.} \tag{7.165}$$

ここで $\delta\phi^m$ に実際の変換則を代入しよう。(7.119) に与えられた $\delta\phi^m$ の二つの項のうち $\xi_I(\gamma^m)^I{}_\alpha\psi^\alpha$ を代入すると 3 つの ψ を含む項が得られるが、フィルツ変換を用いればこの項が 0 になることが示される。そこで $\overline{\psi}_\alpha(\gamma^m)^\alpha{}_I\overline{\xi}^I$ を代入すると、

$$\begin{aligned}(\delta_\phi + \delta_\psi^{\rm para})\mathcal{L}_{\psi\rm mass} &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\overline{F}^n J_{\gamma\epsilon}(\gamma_n)^\epsilon{}_I(\overline{\xi}^I\overline{\psi}_\delta)(\psi^\alpha\psi^\beta)R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} \quad + \text{h.c.} \\ &= -\frac{1}{2}(\delta'\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\delta)(\psi^\alpha\psi^\beta)R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} \quad + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{7.166}$$

この変分はもともとあった 4 フェルミ項の δ' による変分で丁度相殺される。

まとめると、次のようになる。

質量項の導入

キリングベクトル F^m を用いて Sp(k) テンソル $\overline{F}^\alpha{}_\beta$ を次のように定義する。

$$\overline{F}^\beta{}_\alpha = \frac{1}{4}(\gamma^{mn})^\beta{}_\alpha D_m \overline{F}_n. \tag{7.167}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}h_{mn}\partial_\mu\phi^m\partial^\mu\phi^n + i\psi^\alpha\sigma^\mu D_\mu\overline{\psi}_\alpha + \frac{1}{4}R^\gamma{}_\delta{}^\alpha{}_\beta(\overline{\psi}_\gamma\overline{\psi}_\alpha)(\psi^\beta\psi^\delta). \tag{7.168}$$

ハイパー多重項の質量項はこれらの量を用いて次のように書くことができる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^m\overline{F}_m + \frac{1}{2}\psi^\alpha J_{\alpha\beta}\overline{F}^\beta{}_\gamma\psi^\gamma - \frac{1}{2}\overline{\psi}_\alpha F^\alpha{}_\beta J^{\beta\gamma}\overline{\psi}_\gamma. \tag{7.169}$$

最後に U(1)^k ベクトル多重項に対して電荷を持ったハイパー多重項を考えよう。ハイパー多重項が電荷を持つということは、ゲージ変換によってスカラー多様体の座標が非自明に変換されることを意味している。このゲージ変換はスカラー多様体のアイソメトリーとしてあらわされる。a 番目の U(1) ゲージ変換に対応したキリングベクトルを t_a^i とし、共変微分を $D_\mu q^m = \partial_\mu q^m - A_\mu^a t_a^m$ のようにとる。このアイソメトリーはハイパーケーラー構造を不変に保たなければならないので、三重正則である必要がある。一般の三重正則キリングベクトルのいくつかの性質については以前に与えた。

ゲージ場との結合によって、ラグランジアン中の微分は全て上記の共変微分に置き換えられる。ゲージ場と結合していなければラグランジアンの超対称変換によって得られる全ての変分が相殺することはすでに示されているので、ゲージ場との結合によってどのような項があらたに現れるかを考えればよい。

とりあえず、フェルミオンについて 2 次の変分について見てみよう。フェルミオンの運動項のフェルミオンの超対称変換は

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_\psi &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma_m)^I{}_\alpha(\psi^\alpha\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\xi_I)(D_\mu^{(G,M)}D_\nu^{(G)}q^m) + \text{h.c.} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma_m)^I{}_\alpha(\psi^\alpha\xi_I)(D_\mu^{(G,M)}D^{(G)\mu}q^m) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma_m)^I{}_\alpha(\psi^\alpha\sigma^{\mu\nu}\xi_I)(D_\mu^{(G,M)}D_\nu^{(G)}q^m)\end{aligned} \tag{7.170}$$

となり、第1項はスカラー場運動項の変分と相殺するが、第2項は微分が共変微分になったことで以前にはなかったゲージ場の強さを含む項を与える。

$$\delta\mathcal{L}_q + \delta\mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2\sqrt{2}} t_a^m (\gamma_m)^I{}_\alpha (\psi^\alpha F_2^a \xi_I) + \mathrm{h.c.} \tag{7.171}$$

さらに、スカラー場の共変微分に含まれるゲージ場の超対称変換も考えなければならない。

$$\delta_v \mathcal{L}_q = \frac{i}{2\sqrt{2}} t_a^m h_{mn} (D_\mu^{(G)} q^n)(\lambda_I^a \sigma^\mu \overline{\xi}^I) \tag{7.172}$$

次に、補助場 F^m が q^m に依存するだけではなく ϕ^a を含むことから新たに現れる変分について見てみよう。ψ の運動項中の ψ に対して補助場 F^m を含む変換をした場合には補助場の微分を含む項が得られる。

$$\delta'_\psi \mathcal{L}_\psi = -\frac{i}{2\sqrt{2}} (\psi^\alpha \sigma^\mu \overline{\xi}^J)(D_\mu^{(G,M)} \overline{F}^m)(\gamma_m)^I{}_\alpha \epsilon_{IJ} + \mathrm{h.c.} \tag{7.173}$$

このうち、微分が ϕ に作用する部分が新たに現れる変分である。

$$\delta'_\psi \mathcal{L}_\psi = -\frac{i}{2} (\psi^\alpha \sigma^\mu \overline{\xi}^J)(D_\mu^{(G,M)} \phi^a) t_a^m (\gamma_m)^I{}_\alpha \epsilon_{IJ} + \mathrm{h.c.} \tag{7.174}$$

ポテンシャル項 $\mathcal{L}_{\mathrm{pot}}$ の F^m に含まれる ϕ^a を超対称変換したものは

$$\delta_\phi \mathcal{L}_F = -\frac{1}{\sqrt{2}} F^n \delta\phi^a t_{a-n} + \mathrm{h.c.} \tag{7.175}$$

これらの変分は全て湯川項 (7.128) を導入することによって相殺することができる。(7.171) は $\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}}$ によって、(7.174) は $\delta_{(0,1/2)}\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}}$ によって、(7.175) は $\delta'_\psi \mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}}$ によって相殺される。湯川項からはさらに次の変分が得られる。

$$\delta'_\psi \mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} = -\frac{1}{2}\overline{\phi}^b (t_a \cdot t_b) \epsilon^{IK} (\xi_K \lambda_I^a) - \frac{1}{2} (\zeta_{ab})^I{}_J \epsilon^{JK} (\xi_K \lambda_I^a) \overline{\phi}^b + \mathrm{h.c.} \tag{7.176}$$

(7.176) の第2項については、アイソメトリーがアーベル群の場合に成り立つ関係式

$$t_a^m t_b^n \gamma_{mn}^{(3)} = \zeta_{ab}^{(3)} \tag{7.177}$$

を用いた。$\zeta_{ab}^{(3)}$ は定数である。ここでは $\zeta_{ab} = 0$ を仮定する。(7.172) は $\delta_\psi \mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}}$ と部分的に相殺する。

$$\begin{aligned} \delta_\psi \mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} t_a^m (\gamma_m)^I{}_\alpha (\gamma_n^\dagger)^\alpha{}_J (D_\mu^{(G)} q^n)(\lambda_I^a \sigma^\mu \overline{\xi}^J) + \mathrm{h.c.} \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} t_a^m h_{mn} (D_\mu^{(G)} q^n)(\lambda_I^a \sigma^\mu \overline{\xi}^I) - \frac{i}{2\sqrt{2}} (D_\mu^{(G)} (\mu_a)^I{}_J)(\lambda_I^a \sigma^\mu \overline{\xi}^J) + \mathrm{h.c.} \end{aligned} \tag{7.178}$$

第2項を得るために公式 (7.136) を用いた。第1項はスカラー場の共変微分に含まれるゲージ場の変分とちょうど相殺する。最終的に残るのは、(7.178) の第2項

$$\delta\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\mu_a)^I{}_J (\sigma_i)^J{}_I \delta D_i^a \tag{7.179}$$

と、$\delta_{\lambda\to D\xi}\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}}$ である。

$$\delta_{\lambda\to D\xi}\mathcal{L}_{\mathrm{yukawa}} = \frac{i}{2} D_i^a (\sigma_i)^J{}_I D_n (\mu_a)^I{}_J \delta q^n \tag{7.180}$$

この二つは次の項を導入することによってちょうど相殺することができる。

$$\mathcal{L}_{\text{add}} = -\frac{i}{2} D_i^a (\sigma_i)^J{}_I (\mu_a)^I{}_J \tag{7.181}$$

フェルミオンの 4 次の項について見てみよう。フェルミオンの共変微分は次のように与えられる。

$$D_\mu^{(G,M)} \overline{\psi}_\alpha = \partial_\mu \overline{\psi}_\alpha + A_\mu^a \widehat{t}_a \overline{\psi}_\alpha + (\partial_\mu q^m) \widehat{\omega}_m \overline{\psi}_\alpha \tag{7.182}$$

この微分の超対称変換を計算してみよう。

$$\begin{aligned} \delta' D_\mu^{(M,G)} \overline{\psi}_\alpha &= -D_\mu^{(M)} (\delta q^m \widehat{\omega}_m \overline{\psi}_\alpha) - A_\mu^a \widehat{t}_a (\delta q^m \widehat{\omega}_m \overline{\psi}_\alpha) \\ &= -(\partial_\mu \delta q^m) \widehat{\omega}_m \overline{\psi}_\alpha - \delta q^m (\partial_\mu q^n)(D_n^{(M)} \widehat{\omega}_m) \overline{\psi}_\alpha - \delta q^m \widehat{\omega}_m D_\mu^{(M)} \overline{\psi}_\alpha - A_\mu^a \widehat{t}_a \delta q^m \widehat{\omega}_m \overline{\psi}_\alpha \qquad (7.183) \\ \delta_q (D_\mu^{(M,G)} \overline{\psi}_\alpha) &= A_\mu^a (\delta_q \widehat{t}_a) \overline{\psi}_\alpha + (\partial_\mu \delta_q q^m) \widehat{\omega}_m \overline{\psi}_\alpha + (\partial_\mu q^n) \delta_q q^m (\partial_m \widehat{\omega}_n) \overline{\psi}_\alpha \qquad (7.184) \end{aligned}$$

これら二つの和をとると、

$$\begin{aligned} (\delta' + \delta_q)(D_\mu^{(M,G)} \overline{\psi}_\alpha) &= -\delta q^m \widehat{\omega}_m (D_\mu^{(M)} + A_\mu^a \widehat{t}_a) \overline{\psi}_\alpha \\ &\quad + \delta q^m (\partial_\mu q^n) \widehat{R}_{mn} \overline{\psi}_\alpha + A_\mu^a \delta q^m (\partial_m \widehat{t}_a + \widehat{\omega}_m \widehat{t}_a - \widehat{t}_a \widehat{\omega}_m) \overline{\psi}_\alpha \qquad (7.185) \end{aligned}$$

さらにキリングベクトルに対する公式 (2.218) を用いれば、中性な場合の式 (7.145) と同様な公式を得る。

$$(\delta' + \delta_q)(D_\mu^{(M,G)} \overline{\psi}_\alpha) = -\delta q^m \widehat{\omega}_m D_\mu^{(M,G)} \overline{\psi}_\alpha + \delta q^m (D_\mu^{(G)} q^n) \widehat{R}_{mn} \overline{\psi}_\alpha \tag{7.186}$$

従って、この変分は中性な場合と同様に ψ^4 項で相殺できる。

ゲージ場の変換からは

$$\begin{aligned} \delta_v (i\psi^\alpha \not{D} \overline{\psi}_\alpha) &= i\psi^\alpha \sigma^\mu \delta A_\mu^a \widehat{t}_a \overline{\psi}_\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}} (\lambda_I^a \sigma_\mu \overline{\xi}^I)(\psi^\alpha \sigma^\mu \widehat{t}_a \overline{\psi}_\alpha) + \text{h.c.} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^\alpha \lambda_I^a)(\overline{\xi}^I \widehat{t}_a \overline{\psi}_\alpha) + \text{h.c.} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} t_{amn} (\gamma^{mn})^\beta{}_\alpha (\psi^\alpha \lambda_I^a)(\overline{\xi}^I \overline{\psi}_\beta) + \text{h.c.} \qquad (7.187) \end{aligned}$$

これは湯川項 (7.128) のスカラー場の変分と部分的に相殺する。

$$\begin{aligned} (\delta_q + \delta'\psi) \mathcal{L}_{\text{yukawa}} &= \delta q^n t_{an}{}^m (\gamma_m)^I{}_\alpha (\psi^\alpha \lambda_I^a) + \text{h.c.} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} ((\gamma^n)^J{}_\beta (\xi_J \psi^\beta) + (\gamma^n)^\beta{}_J (\overline{\xi}^J \overline{\psi}_\beta)) t_{anm} (\gamma^m)^I{}_\alpha (\psi^\alpha \lambda_I^a) + \text{h.c.} \qquad (7.188) \end{aligned}$$

実際この第 2 項は次のように変形できる。

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} (\overline{\xi}^I \overline{\psi}_\beta) t_{anm} (\gamma^{nm})^\beta{}_\alpha (\psi^\alpha \lambda_I^a) + \text{h.c.} \tag{7.189}$$

一方第 1 項は、フィルツ変換によって次の形に変形できる。

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}} t_{anm} (\gamma^m)^I{}_\alpha (\gamma^n)^J{}_\beta (\xi_J \lambda_I^a)(\psi^\alpha \psi^\beta) + \text{h.c.} = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \epsilon^{IJ} (\xi_I \lambda_J^a) t_{amn} J_{\alpha\gamma} (\gamma^{mn})^\gamma{}_\beta (\psi^\alpha \psi^\beta) + \text{h.c.} \tag{7.190}$$

従ってこれは ψ 質量項 (7.157) の変分と相殺する。

$$\delta_\phi \mathcal{L}_{\psi\text{mass}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \delta\phi^a t_{a,mn} J_{\alpha\beta} (\gamma^{mn})^\beta{}_\gamma (\psi^\alpha \psi^\gamma) + \text{h.c.} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \epsilon^{IJ} (\xi_I \lambda_J^a) t_{a,mn} J_{\alpha\beta} (\gamma^{mn})^\beta{}_\gamma (\psi^\alpha \psi^\gamma) + \text{h.c.} \tag{7.191}$$

7.4 ディラックの量子化条件

7.4.1 クーロン力とローレンツ力

ゲージ群が $\mathrm{U}(1)^k$ であり、それらに結合した電荷、磁荷が存在するような理論を考えよう。ゲージ群が $\mathrm{U}(1)^k$ であるので、電場、磁場もそれぞれ k 個ずつ存在する。まずはこれらの場に結合する電荷、磁荷の定義について考えてみよう。電荷と磁荷をどのように区別するかはあとで考えることとし、それら $2k$ 個のチャージをまとめて q_A $(A = 1, \ldots, 2k)$ とする。

チャージ $q_A^{(1)}$ によって発生されるフラックス中を運動するチャージ $q_A^{(2)}$ に働く力が次のように与えられるとしよう。

$$\boldsymbol{f} = \frac{q_A^{(2)} C^{AB} q_B^{(1)}}{4\pi r^2}\boldsymbol{n} + \frac{q_A^{(2)} L^{AB} q_B^{(1)}}{4\pi r^2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \tag{7.192}$$

$\boldsymbol{n}$ はチャージ $q_A^{(1)}$ の位置から $q_A^{(2)}$ の方向を向く単位ベクトルである。第 1 項はクーロン力を、第 2 項はローレンツ力を表している。C^{AB} と L^{AB} は $\mathrm{U}(1)^k$ ゲージ場の性質を決める実 $2k \times 2k$ 行列である。作用反作用の法則より、$q_A^{(1)}$ と $q_A^{(2)}$ を入れ替え、$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{v}$ の符号を逆転させせたときに $\boldsymbol{f}$ の符号は反転するはずである。このことから、C^{AB} は対称 L^{AB} は反対称でなければばならない。

$$C^{AB} = C^{BA}, \quad L^{AB} = -L^{BA}. \tag{7.193}$$

フラックス密度は電荷、磁荷との次の関係によって定義することができる。

$$q_A = \oint_{\mathbf{S}_2} \boldsymbol{D}_A \cdot d\boldsymbol{S} \tag{7.194}$$

チャージ $q_A^{(1)}$ によって発生するフラックスは (7.194) と回転対称性を用いることで次のように決めることができる。

$$\boldsymbol{D}_A = \frac{q_A^{(1)}}{4\pi r^2}\boldsymbol{n} \tag{7.195}$$

このフラックス中を運動するチャージ $q_A^{(2)}$ が受ける力が (7.192) と与えられることより、一般のフラックス中にある粒子に作用する力を与える式を得ることができる。

(7.195) と (7.192) を組み合わせれば、運動する粒子に対するローレンツ力が次のように与えられる。

$$\boldsymbol{f} = q_A L^{AB} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D}_B \tag{7.196}$$

フラックスを $\boldsymbol{D}_A = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}_A$ によってベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}_A$ を用いて表せば、ローレンツ力 (7.196) は荷電粒子の世界線とベクトルポテンシャルの極小結合によって記述される。ストークスの定理を用いることで、この結合は

$$S = \int q_A L^{AB} \boldsymbol{D}_B \cdot d\boldsymbol{S} \tag{7.197}$$

と書くこともできる。ただし、積分は粒子の世界線を境界とする面上で行う。この作用は、面のとり方の任意性に起因する不定性を持つが、この不定な部分が常に 2π の整数倍になり、経路積分に影響を与えないためには次の関係が成り立つ必要がある。

$$L^{AB} q_A^{(1)} q_B^{(2)} \in 2\pi\mathbf{Z} \tag{7.198}$$

これがディラックの量子化条件である。

Soryushiron Kenkyu

ここでは、フラックスおよび電界、磁界の規格化をうまく取ることによって電荷、磁荷 q_A が常に整数になるようにしよう。すると、ディラックの量子化条件は $L^{AB}/(2\pi)$ が反対称整数行列になることを意味している。$\mathrm{SL}(2k,\mathbf{Z})$ 変換を用いて、次の標準形に取ることができる場合を考える。

$$L^{AB}=2\pi J^{AB},\quad J^{AB}=\begin{pmatrix} & \mathbf{1}_k \\ -\mathbf{1}_k & \end{pmatrix} \tag{7.199}$$

このような標準形をとったとき、上 k 成分を電荷、下 k 成分を磁荷と呼ぶのが自然である。この標準形をとった結果、チャージの成分を入れ替える $\mathrm{SL}(k,\mathbf{Z})$ 変換は $\mathrm{Sp}(2k,\mathbf{Z})$ に破れる。これは $\mathrm{U}(1)$ ゲージ群のときの電荷と磁荷の入れ替えの対称性を一般化したものである。

(7.195) と (7.192) を組み合わせれば、フラックスから荷電粒子が受けるクーロン力が次のように与えられることがわかる。

$$\boldsymbol{f}=q_A C^{AB}\boldsymbol{D}_A \tag{7.200}$$

電界または磁界は、粒子が場から受ける力として $\boldsymbol{f}=q_A\boldsymbol{E}^A$ と定義することができる。(7.200) は電磁界の強さと電磁束密度が次のように関係していることを表している。

$$\boldsymbol{E}^A=C^{AB}\boldsymbol{D}_B \tag{7.201}$$

また一方、電界または磁界の強さ $\boldsymbol{E}^A$ とフラックス $\boldsymbol{D}_A$ の関係は、$\mathrm{U}(1)^k$ 電磁場のハミルトニアンを用いて次のように与えられる。

$$\delta H=\int \boldsymbol{E}^A\cdot\delta\boldsymbol{D}_A dV \tag{7.202}$$

行列 C^{AB} の対称性はハミルトニアンの微分の式 (7.202) に (7.201) を代入したものが積分可能であることを保障する。ハミルトニアンは次のように与えられる。

$$H=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}_A C^{AB}\boldsymbol{D}_B \tag{7.203}$$

7.4.2 電荷行列

ここまではローレンツ対称性を用いていない。これまでに得られた関係式をローレンツ共変な形に書くことを考えよう。そのために、3 次元と 4 次元でのテンソルなどについて幾つかの約束をしておく。

$*^3$ および $*^4$ は次のように定義された完全反対称テンソルを用いて定義される Hodge dual である。

$$\epsilon_{123}=\epsilon^{123}=1,\quad \epsilon_{0123}=-\epsilon^{0123}=1. \tag{7.204}$$

このような ϵ テンソルを用いて定義された Hodge dual は次の性質を持つ。

$$*_4(A_1\wedge dt)=*_3A_1,\quad *_4B_2=-*_3B_2\wedge dt. \tag{7.205}$$

また、自己双対テンソル $T^{(+)}$ と反自己双対テンソル $T^{(-)}$ は次の性質を満足する。

$$*_4T^{(\pm)}=\mp iT^{(\pm)} \tag{7.206}$$

静止した電荷に対するクーロン力 (7.200) と運動する電荷に対するローレンツ力 (7.196) とがローレンツ変換を通して関係していることを用いると、4 次元時空上の反対称テンソルを次のように与えることができる。

$$F^A=C^{AB}D_B\wedge dt+2\pi *_3 J^{AB}D_B \tag{7.207}$$

ただし、このようにして得られる $2k$ 個の反対称テンソルのうち、独立なのは k 個だけである。従属関係を扱いやすくするために、テンソルを自己双対部分と反自己双対部分に分けよう。自己双対部分 $F_2^{(+)A}$ を表すのに、次の関係によって複素 3 次元ベクトル $\boldsymbol{F}^{(+)A}$ を用いるのがしばしば便利である。

$$F_2^{(+)A} = \frac{1}{2}F^{(+)A} \wedge dt + \frac{i}{2} *_3 F^{(+)A} \tag{7.208}$$

(7.207) の自己双対部分を与える複素ベクトルは

$$\boldsymbol{F}^{(+)A} = (C^{AB} - 2\pi i J^{AB})\boldsymbol{D}_B \tag{7.209}$$

と与えられる。これは $2k$ 個の自己双対テンソルを与えるが、線形従属関係は自己双対部分、反自己双対部分それぞれで閉じているはずであるので、その中で独立なものは k 個だけである。従って、(7.209) 中のエルミート行列は次のように与えることができる。

$$C^{AB} - 2\pi i J^{AB} = M_i^A g^{i\bar{j}} M_{\bar{j}}^{*B}. \tag{7.210}$$

ただし、$g^{i\bar{j}}$ は $k \times k$ のエルミート行列である。以下では行列 C^{AB} の代わりに行列 M_i^A を用いるのが便利である。

行列 M_i^A は任意の値を取れるわけではなく、(7.210) の反対称部分が J^{AB} になるという条件を満足している必要がある。この条件をより便利な形に書き換えておこう。(7.210) の反対称部分のみを抜き出すと、

$$-4\pi i J^{AB} = M_i^A g^{i\bar{j}} M_{\bar{j}}^{*B} - M_{\bar{i}}^{*A} g^{\bar{i}j} M_j^B = (M_i^A \ M_{\bar{i}}^{*A}) \begin{pmatrix} & g^{i\bar{j}} \\ -g^{\bar{i}j} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_j^B \\ M_{\bar{j}}^{*B} \end{pmatrix} \tag{7.211}$$

この右辺に現れている行列は $2k \times 2k$ の正方行列であり、適当に逆行列を掛けたりすることにより次の式と等価であることが示される。

$$4\pi i \begin{pmatrix} & -g_{i\bar{j}} \\ g_{\bar{i}j} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_i^A \\ M_{\bar{i}}^{*A} \end{pmatrix} J_{AB} (M_i^B \ M_{\bar{i}}^{*B}) \tag{7.212}$$

ただし、J_{AB} は J^{AB} と同じ成分を持つ行列である。関係式 (7.212) より $\vec{M}^i$ の反対称積に対する次の式が得られる。

$$\vec{M}_i \times \vec{M}_{\bar{j}}^* = -4\pi i g_{i\bar{j}}, \tag{7.213}$$

$$\vec{M}_i \times \vec{M}_j = 0. \tag{7.214}$$

ここで、M_i^A の添え字 A を省略し、その代わりにベクトル記号を用いて $\vec{M}_i$ と表した。さらに、次の反対称積を定義した。

$$\vec{X} \times \vec{Y} = X^a Y_a - X_a Y^a. \tag{7.215}$$

行列 M_i^A を用いると、$\mathbf{Z}^{2k}$ 上の格子点を与える電荷ベクトル q_A を $\mathbf{C}^k$ 上の点へとマップすることができる。つまり、M_i^A は電荷、磁荷の量子化の様子を与える行列である。そこで、この行列を電荷行列と呼ぶことにする。

7.4.3 周期行列とゲージ場のラグランジアン

ここまでは、電場と磁場をひとまとめにして扱ってきた。これは電場と磁場の間の対称性を明らかにするためには便利であるが、ラグランジアンを用いた定式化を行うためには、電場と磁場の片

方だけを用いた記述に移る必要がある。そこで $2k$ 成分のベクトルの成分を上半分と下半分に分けて次のように定義する。

$$M_i^A = \begin{pmatrix} M_i^a \\ M_{ia} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}^A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}^a \\ \boldsymbol{H}_a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_a \\ \boldsymbol{B}^a \end{pmatrix}, \quad F^A = \begin{pmatrix} F^a \\ \widetilde{F}_a \end{pmatrix}. \tag{7.216}$$

$k \times 2k$ 行列 ${M_i}^A$ を $2k$ 本の k 次元複素ベクトルとみなしたとき、独立なものは k 本だけである。独立なベクトルとして M_i^a を取ることができると仮定しよう。このとき M_{ia} はそれらの線形結合として次のように与えることができる。

$$M_{ia} = {M_i}^b \tau_{ba}. \tag{7.217}$$

この τ_{ab} は対称行列であることが (7.214) より保障される。

電荷と磁荷の入れ替えは M_i^a と M_{ia} を入れ替えることで実現される。ただし J^{AB} の形が (7.199) の標準形のままであるようにするには $(M_i^a, M_{ia}) \to (M_{ia}, -M_i^a)$ のようにどちらかにマイナスをつけておく必要がある。このとき行列 τ は $-\tau^{-1}$ に置き換えられる。

ここで、添え字 i に作用する $\mathrm{GL}(k, \mathbf{C})$ の変換を用いて、${M_i}^A$ を次のように取ろう。

$$M_i^a = \delta_i^a, \quad M_{ia} = \tau_{ia}. \tag{7.218}$$

このとき、(7.213) より得られる計量は

$$g_{a\bar{b}} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \tau_{ab} = \operatorname{Im} \widetilde{\tau}_{ab}. \tag{7.219}$$

である。この式にあるように、τ_{ab} はしばしば $1/2\pi$ を伴って現れるので、$\widetilde{\tau}_{ab} = \tau_{ab}/2\pi$ を定義しておくと便利である。さらに、(7.210) に代入すると、

$$C^{AB} - 2\pi i J^{AB} = 2\pi \begin{pmatrix} (\operatorname{Im}\tau^{-1})^{ab} & (\operatorname{Im}\tau^{-1})^{ac}\tau_{cb}^* \\ \tau_{ac}(\operatorname{Im}\tau^{-1})^{cb} & \tau_{ac}(\operatorname{Im}\tau^{-1})^{cd}\tau_{db}^* \end{pmatrix} \tag{7.220}$$

従って

$$\boldsymbol{F}^{(+)A} = 2\pi \begin{pmatrix} (\operatorname{Im}\tau^{-1})^{ab} & (\operatorname{Im}\tau^{-1})^{ac}\tau_{cb}^* \\ \tau_{ac}(\operatorname{Im}\tau^{-1})^{cb} & \tau_{ac}(\operatorname{Im}\tau^{-1})^{cd}\tau_{db}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_a \\ \boldsymbol{B}^a \end{pmatrix} \tag{7.221}$$

特にこの上半分の成分は、次の式を与える。

$$\boldsymbol{F}^{(+)a} = 2\pi(\operatorname{Im}\tau^{-1})^{ab}(\boldsymbol{D}_b + \tau_{bc}^*\boldsymbol{B}^c) \tag{7.222}$$

また、$F^{(+)a}$ の実部と虚部はそれぞれ電界と磁束密度を与えるから、次のように書くこともできる。

$$\boldsymbol{F}^{(+)a} = \boldsymbol{E}^a - 2\pi i \boldsymbol{B}^a \tag{7.223}$$

これを用いれば、ゲージ場のハミルトニアン (7.203) は次のように書くこともできる。

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_A M_i^A g^{i\bar{j}} M_{\bar{j}}^{*B} \boldsymbol{D}_B \\ &= \frac{1}{4\pi}(\operatorname{Im}\tau)_{ab}\boldsymbol{F}^{(+)a}\cdot\boldsymbol{F}^{(-)b} \\ &= \frac{1}{4\pi}(\operatorname{Im}\tau)_{ab}(\boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{E}^b + (2\pi)^2\boldsymbol{B}^a\cdot\boldsymbol{B}^b) \end{aligned} \tag{7.224}$$

ローレンツ群のもとで、複素ベクトル $\boldsymbol{F}^{(+)A}$ および $\boldsymbol{F}^{(-)A}$ はそれぞれ $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ および $(\mathbf{1},\mathbf{3})$ として変換されるから、それらの積は $(\mathbf{3},\mathbf{3})$ として変換される。これはちょうどエネルギー運動量テンソルの変換性と同じであり、(7.224) はその一つの成分になっている。

ハミルトニアンに対する変分の式 (7.202) は、$\boldsymbol{D}_a$ と $\boldsymbol{E}^a$ の組に対するルジャンドル変換を行うことで次の式が得られる。

$$\delta L=\int(\boldsymbol{D}_a\cdot\delta\boldsymbol{E}^a-\boldsymbol{H}_a\cdot\delta\boldsymbol{B}^a)dV=-\frac{1}{2\pi}\int\widetilde{F}_a\wedge\delta F^a \tag{7.225}$$

この積分形は $F_{2a}^{(+)}=\tau_{ab}F_2^{(+)a}$ を用いれば直ちに次のように得られる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\frac{1}{8\pi i}(\tau_{ab}\boldsymbol{F}^{(+)a}\cdot\boldsymbol{F}^{(+)b}-\tau_{ab}^*\boldsymbol{F}^{(-)a}\cdot\boldsymbol{F}^{(-)b})\\&=-\frac{1}{4}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})F_{\mu\nu}^aF^{\mu\nu b}-\frac{1}{8}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau}_{ab})\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^aF_{\rho\sigma}^b\\&=\frac{i}{4}\widetilde{\tau}_{ab}F_{\mu\nu}^{+a}F^{+b\mu\nu}-\frac{i}{4}\widetilde{\tau}_{ab}^*F_{\mu\nu}^{-a}F^{-b\mu\nu}\\&=-\frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\widetilde{\tau}_{ab}F_{\mu\nu}^{+a}F_{\rho\sigma}^{+b}-\frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\widetilde{\tau}_{ab}^*F_{\mu\nu}^{-a}F_{\rho\sigma}^{-b}\end{aligned} \tag{7.226}$$

同じ結果はハミルトニアン (7.224) を $\boldsymbol{D}_a$ と $\boldsymbol{B}^a$ の関数だと思って $\boldsymbol{D}_a$ に対するルジャンドル変換を行うことでも得られる。その際には (7.222) の逆変換が

$$\boldsymbol{B}^a=-\frac{1}{4\pi i}(\boldsymbol{F}^{(+)a}-\boldsymbol{F}^{(-)a}),\quad\boldsymbol{D}_a=\frac{1}{4\pi i}(\tau_{ab}\boldsymbol{F}^{(+)b}-\tau_{ab}^*\boldsymbol{F}^{(-)b}) \tag{7.227}$$

と与えられることを用いる。

7.5 ベクトル多重項

7.5.1 変換則

$\mathcal{N}=2$ の U(1) ベクトル多重項を k 個含む理論について考えよう。これら k 個の U(1) をラベルする添え字を a とする。$\mathcal{N}=2$ のベクトル多重項は、$\mathcal{N}=1$ ベクトル多重項 $V^a=(v_\mu^a,\lambda^a,D^a)$ とカイラル多重項 $\Phi^a=(\phi^a,\chi^a,F^a)$ の組み合わせによって表すことができる。

$$\mathcal{N}=2\text{ ベクトル多重項}\begin{cases}\mathcal{N}=1\text{ ベクトル多重項 }V=(v_\mu,\lambda,D)\\ \qquad\qquad+\\ \mathcal{N}=1\text{ カイラル多重項 }\Phi=(\phi,\chi,F)\end{cases} \tag{7.228}$$

補助場 D^a と F^a は $\mathrm{SU}(2)_R$ 三重項をなす。この対称性をあからさまな形で表すには、次のように $\mathrm{SU}(2)_R$ 三重項 D_i^a を導入しておくのがよい。

$$D_3^a=D^a,\quad\frac{1}{\sqrt{2}}(D_2^a+iD_1^a)=F^a. \tag{7.229}$$

また、二つのフェルミオン λ^a と χ^a は次のように $\mathrm{SU}(2)_R$ 二重項を組む。

$$\lambda_I^a=(\lambda_1^a,\lambda_2^a)=(\lambda^a,\chi^a). \tag{7.230}$$

これらの場も含め、それぞれの場が $\mathrm{SU}(2)_R$ のもとでどのような表現に属しているかは表 7.1 に与えられている。

Soryushiron Kenkyu

表 7.1: $\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項

fields	$\mathrm{SU}(2)_R$	
scalar	singlet	ϕ^a
gauge field	singlet	v^a_μ
fermion	doublet	λ^a_I
auxiliary field	triplet	D^a_i

超対称変換は、$\mathcal{N}=1$ のベクトル多重項とカイラル多重項の変換則を $\mathrm{SU}(2)_R$ 不変な形に拡張することで次のように決定される。

ベクトル多重項の変換則

$$\delta\phi^a = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}\xi_I\lambda^a_J \tag{7.231}$$

$$\delta\lambda^a_I = \frac{i}{2}(\not{D}^{(G)}\phi^a)\epsilon_{IJ}\overline{\xi}^J - \frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}^a_2\xi_I + \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi_J(D^a_i\sigma_i)^J{}_I, \tag{7.232}$$

$$\delta v^a_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-i\xi_I\sigma_\mu\overline{\lambda}^{Ia} + i\lambda^a_I\sigma_\mu\overline{\xi}^I) \tag{7.233}$$

$$\delta D^a_i = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sigma_i)^I{}_J(\xi_I\not{D}^{(G)}\overline{\lambda}^{J,a}) + \mathrm{h.c.} \tag{7.234}$$

7.5.2 ラグランジアン

$\mathcal{N}=1$ $\mathrm{U}(1)^k$ ゲージ理論のラグランジアンのもっとも一般的な形は、カイラル多重項に対する Kähler potential part (2.191)、ベクトル多重項に対する 運動項 (2.174)、および superpotential part (2.109) の和として与えられる。これらは 3 つの関数 $K(\phi^a,\overline{\phi}^{\overline{a}})$、$\tau_{ab}(\phi^a)$、$W(\phi^a)$ を与えることによって決定されるが、作用が $\mathcal{N}=2$ の対称性を持つという要請をすると、これらの関数の間に条件が課される。まず、superpotential $W(\phi^a)$ は 0 である必要がある。なぜならこの関数はカイラル多重項中のフェルミオン χ^a は含むが、ベクトル多重項中のフェルミオン λ^a は含まないために、これら二つのフェルミオンの間の対称性である $\mathrm{SU}(2)_R$ 対称性を破ってしまうためである。

ケーラーポテンシャル K と、ゲージ結合関数 τ_{ab} についてはとりあえずもっとも一般的な形を仮定しておくと、(2.191) と (2.174) より、作用は次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta K(\Phi^*,\Phi) + \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int d^2\theta\widetilde{\tau}_{ab}W^aW^b. \tag{7.235}$$

これを成分で書くと、次の幾つかのラグランジアンの和になる。ただしここではシフトされていな

Soryushiron Kenkyu

い補助場 F を用いる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\rm scalar} &= -K_{a\bar{b}}\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\overline{\phi}^{\bar{b}}, && (7.236)\\
\mathcal{L}_{\rm fermion} &= iK_{a\bar{b}}(\chi^a\sigma^\mu D_\mu^{(M)}\overline{\chi}^{\bar{b}}) + \frac{1}{2}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda^a\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}^b) + \frac{1}{2}\widetilde{\tau}^*_{ab}(\partial_\mu\lambda^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^b), && (7.237)\\
\mathcal{L}_{\rm gauge} &= -\frac{1}{4}({\rm Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu} - \frac{1}{8}({\rm Re}\,\widetilde{\tau}_{ab})\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^b_{\rho\sigma} + \left[\frac{i}{2\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab,c}\lambda^a\not{F}^b_2\chi^c \quad + {\rm h.c.}\right], && (7.238)\\
\mathcal{L}_{\rm 4fermi} &= \frac{1}{4}K_{i\bar{j}k\bar{l}}(\chi^i\chi^k)(\overline{\chi}^{\bar{j}}\overline{\chi}^{\bar{l}}) - \frac{1}{8}\left[i\widetilde{\tau}_{ab,ij}(\chi^i\chi^j)(\lambda^a\lambda^b) \quad + {\rm h.c.}\right] && (7.239)\\
\mathcal{L}_{\rm aux} &= K_{i\bar{j}}F^i\overline{F}^{\bar{j}} + \frac{1}{2}({\rm Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})D^aD^b\\
&\quad + \left[-\frac{1}{2}K_{ij\bar{k}}(\chi^i\chi^j)\overline{F}^{\bar{k}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}D^b\widetilde{\tau}_{ab,i}(\lambda^a\chi^i) + \frac{i}{4}F^i\widetilde{\tau}_{ab,i}(\lambda^a\lambda^b) \quad + {\rm h.c.}\right] && (7.240)
\end{aligned}$$

この作用に ${\rm Sp}(1)_R$ 不変性の条件を課すことによって $\mathcal{N}=2$ の対称性を持つラグランジアンを構成しよう。$\lambda^a_I=(\lambda^a,\chi^a)$ は ${\rm SU}(2)_R$ 二重項を成しているからこれら二つのフェルミオンの運動項の係数が同じになっている必要がある。スカラー場の微分を含む項を無視すれば、それぞれの係数は $K_{a\bar{b}}$ と ${\rm Im}\,\widetilde{\tau}_{ab}$ である。従って次の式が成り立たなければならない。

$$K_{a\bar{b}} = {\rm Im}\,\widetilde{\tau}_{ab} \equiv \frac{1}{2\pi}\,{\rm Im}\,\tau_{ab} \tag{7.241}$$

この式が成り立つことを用いれば、(7.237) が次のように ${\rm Sp}(1)_R$ 不変な形に書ける。

$$\mathcal{L}_{\rm fermion} = iK_{a\bar{b}}(\lambda^a_I\sigma^\mu D_\mu^{(M)}\overline{\lambda}^{I\bar{b}}) = \frac{1}{2}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda^a_I\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}^{I\bar{b}}) + \frac{1}{2}\widetilde{\tau}^*_{ab}(\partial_\mu\lambda^a_I\sigma^\mu\overline{\lambda}^{I\bar{b}}) \tag{7.242}$$

ただし、$\lambda^a_I=(\lambda^a_1,\lambda^a_2)=(\lambda^a,\chi^a)$ である。

(7.241) の両辺を ϕ^c で微分してみると、$(1/2)\widetilde{\tau}_{ab,c}=iK_{a\bar{b}c}$ を得る。この式の右辺を見ると、a と c について対称であることがわかる。したがって $\widetilde{\tau}_{ab,c}$ は 3 つの添え字について完全対称である。このため、微分を表すコンマを省略することにする。これは 4 階以上の微分についても同じである。先ほどの関係式は、コンマを省略して次のように表される。

$$\frac{1}{2}\widetilde{\tau}_{abc} = iK_{a\bar{b}c}. \tag{7.243}$$

この式を用いると、$\mathcal{L}_{\rm gauge}$ 中のフェルミオンを含む項が ${\rm Sp}(1)_R$ 不変であることがわかる。

$$\frac{i}{2\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab,c}\lambda^a\not{F}^b_2\chi^c = \frac{i}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{abc}\epsilon^{IJ}\lambda^a_I\not{F}^b_2\lambda^c_J \tag{7.244}$$

4 フェルミオン項について見てみよう。ケーラーポテンシャルが関係 (7.241) を満足するとき $K_{ab\bar{c}\bar{d}}=0$ であるから、χ^4 項は消える。$\chi^2\lambda^2$ 項はフィルツ変換を用いることで次のように ${\rm SU}(2)_R$ 不変になっていることが示される。

$$\mathcal{L}_{\rm 4fermi} = -\frac{i}{8}\widetilde{\tau}_{abcd}(\lambda^a\lambda^b)(\chi^c\chi^d) + {\rm h.c.} = -\frac{i}{24}\widetilde{\tau}_{abcd}\epsilon^{IJ}\epsilon^{KL}(\lambda^a_I\lambda^b_K)(\lambda^c_J\lambda^d_L) + {\rm h.c.} \tag{7.245}$$

ラグランジアン中の補助場を含む項は次のように ${\rm SU}(2)_R$ 不変な形に書くことができる。

$$\mathcal{L}_{\rm aux} = \frac{1}{2}({\rm Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})D^a_iD^b_i + \frac{1}{4\sqrt{2}}D^a_i\left[i(\sigma_i\sigma_y)^{IJ}\widetilde{\tau}_{abc}(\lambda^b_I\lambda^c_J) + {\rm h.c.}\right] \tag{7.246}$$

σ_i はパウリ行列であり、これを用いることで補助場をトレースの無いエルミート行列の形であらわすことができる。

$$(D^a_i\sigma_i)^I{}_J = \begin{pmatrix} D^a & -\sqrt{2}iF^a \\ \sqrt{2}iF^{*a} & -D^a \end{pmatrix} \tag{7.247}$$

最後に、$\mathrm{SU}(2)_R$ 不変性が明らかな形でベクトル多重項のラグランジアンをまとめておく。

ベクトル多重項のラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\text{scalar}} = -K_{a\bar{b}}\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\overline{\phi}^{\bar{b}}, \tag{7.248}$$

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = iK_{a\bar{b}}(\lambda_I^a\sigma^\mu D_\mu^{(M)}\overline{\lambda}^{I\bar{b}}) = \frac{1}{2}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda_I^a\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}^{I\bar{b}}) + \frac{1}{2}\widetilde{\tau}_{ab}^*(\partial_\mu\lambda_I^a\sigma^\mu\overline{\lambda}^{I\bar{b}}) \tag{7.249}$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})F_{\mu\nu}^aF^{b\mu\nu} - \frac{1}{8}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau}_{ab})\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^aF_{\rho\sigma}^b = \frac{i}{4}\widetilde{\tau}_{ab}F_{\mu\nu}^{+a}F^{+b\mu\nu} + \text{c.c.} \tag{7.250}$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{i}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab,c}\epsilon^{IJ}\lambda_I^aF_2^b\lambda_J^c + \text{h.c.}, \tag{7.251}$$

$$\mathcal{L}_{\text{4fermi}} = -\frac{i}{24}\widetilde{\tau}_{abcd}\epsilon^{IJ}\epsilon^{KL}(\lambda_I^a\lambda_K^b)(\lambda_J^c\lambda_L^d) + \text{h.c.} \tag{7.252}$$

$$\mathcal{L}_{\text{aux}} = \frac{1}{2}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})D_i^aD_i^b + \frac{1}{4\sqrt{2}}D_i^a\left[i(\sigma_i\sigma_y)^{IJ}\widetilde{\tau}_{abc}(\lambda_I^b\lambda_J^c) + \text{h.c.}\right] \tag{7.253}$$

7.5.3 プレポテンシャル

多重項にゲージ場が含まれていることはスカラー多様体の構造を決める上で重要な役割を果たしている。このことを見るために、ゲージ場 $F_{\mu\nu}^a$ の双対場 $F_{a\mu\nu}$ を見てみよう。これは次のように与えられる。

$$F_{a\mu\nu}^{(+)} = \tau_{ab}F_{\mu\nu}^a + \cdots \tag{7.254}$$

$\cdots$ の部分は相互作用に依存する部分で、ここでは無視する。超対称性があるということは、$F_{a\mu\nu}^{(+)}$ も超対称多重項をなすことを意味している。対応するフェルミオン λ_{Ia}、スカラー場 ϕ_a は次のようにもとの場と関係している。

$$d\phi_a = \tau_{ab}d\phi^b, \tag{7.255}$$

$$\lambda_{Ia} = \tau_{ab}\lambda_I^b. \tag{7.256}$$

スカラー場に対する双対関係 (7.255) より、

$$\tau_{ab} = \frac{\partial\phi_a}{\partial\phi^b} \tag{7.257}$$

さらに、τ_{ab} は対称行列であることから

$$\tau_{ab}d\phi^a \wedge d\phi^b = d\phi_a \wedge d\phi^a = 0 \tag{7.258}$$

が成り立つ。これは、少なくとも局所的には

$$\phi_a d\phi^a = d\mathcal{F} \tag{7.259}$$

を満足する正則関数 $\mathcal{F}$ が存在することを意味している。つまり、ϕ_a は次のようにある関数 $\mathcal{F}$ の微分として次のように与えられる。

$$\partial\phi_a = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi^a} \tag{7.260}$$

ここで得られた正則関数 $\mathcal{F}$ はプレポテンシャルと呼ばれる。

$K_{a\bar{b}}$ と τ_{ab} が (7.241) を満足することから、スカラー多様体上のケーラー形式 ω_2 は次のように与えられる。

$$\omega_2 = K_{a\bar{b}} d\phi^a \wedge d\phi^{*b} = \frac{1}{4\pi i}(\tau_{ab} - \tau^*_{ab}) d\phi^a \wedge d\phi^{*b} = \frac{1}{4\pi i}(d\phi_a \wedge d\phi^{*b} - d\phi^a \wedge d\phi^*_b) \tag{7.261}$$

従って、ケーラーポテンシャルが次のように得られる。

$$K = \frac{i}{4\pi} J_{AB} \phi^A \phi^{*B} = \frac{i}{4\pi} \vec{\phi} \times \vec{\phi}^* = \frac{i}{4\pi}(\phi^a \phi^*_a - \phi_a \phi^{*a}) = \frac{i}{4\pi}\left(\phi^a \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial \phi^{*a}} - \phi^{*a} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi^a}\right) \tag{7.262}$$

$\mathcal{N} = 1$ の超場形式で表わされたラグランジアンはプレポテンシャルを用いると次のように書く事ができる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Im}\left[\int d^4\theta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi^a} \overline{\phi}^{\overline{a}} + \frac{1}{2} \int d^2\theta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \phi^a \partial \phi^b} W^a W^b\right] \tag{7.263}$$

7.5.4 双対場の多重項

相互作用まで考慮して双対場の多重項を構成しておこう。まず (7.225) を用いてゲージ場の強さ $F^a_{\mu\nu}$ に対してその双対ゲージ場 $\widetilde{F}_{a\mu\nu}$ を定義しよう。ラグランジアン (7.238) を用いれば、次の式を得る。

$$\widetilde{F}_{b\mu\nu} = (\mathrm{Re}\,\tau_{ab}) F^b_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\mathrm{Im}\,\tau_{ab}) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{b\rho\sigma} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \tau_{abc} \epsilon^{IJ} \lambda^b_I \sigma_{\mu\nu} \lambda^c_J + \frac{1}{4\sqrt{2}} \tau^*_{abc} \epsilon_{IJ} \overline{\lambda}^{I\bar{b}} \overline{\sigma}_{\mu\nu} \overline{\chi}^{J\bar{c}} \tag{7.264}$$

この関係式は、両辺の自己双対部分のみを取り出せば少し簡単になる。

$$F^+_{a\mu\nu} = \tau_{ab} F^{+b}_{\mu\nu} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \tau_{abc} \epsilon^{IJ} (\lambda^b_I \sigma_{\mu\nu} \lambda^c_J) \tag{7.265}$$

この $\widetilde{F}_{2a}$ は、v^a についての運動方程式より $d\widetilde{F}_{2a} = 0$ を満足する。これを双対なゲージ場に対するビアンキ恒等式と解釈すると、$\widetilde{F}_{2a} = d\widetilde{v}_a$ によってポテンシャル $\widetilde{v}_a$ を定義することができる。§7.4.2 において述べたように $(F^a_2, \widetilde{F}_{2a})$ は双対性変換 $\mathrm{Sp}(k, \mathbf{Z})$ の **2k** 表現をなす。

関係式 (7.264) の右辺の超対称変換を計算することによってゲージ場 $\widetilde{v}_a$ の超対称変換を決定しよう。この計算の中心的な部分は $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{a\rho\sigma}$ の変分の計算である。ここからは $\xi \sigma_{\mu\nu\rho} \partial^\rho \overline{\lambda} + \mathrm{h.c.}$ のような形を含む項が現れる。この項はそのままでは $\partial_{[\mu} \delta v_{\nu]}$ のような何らかのベクトルの外微分の形にはなっていない。しかしこの項が $\partial_{[\mu} \xi \sigma_{\nu]} \overline{\lambda} + \xi \sigma_{\mu\nu} \not{\partial} \overline{\lambda} + \mathrm{h.c.}$ と変形でき、相互作用を無視すれば第 2 項は運動方程式より 0 である。従って $\delta \widetilde{v}_\mu \sim (\xi \sigma_\mu \overline{\lambda}) + \mathrm{h.c.}$ のような変換則を抜き出すことができる。相互作用項まで正しく考慮して $\widetilde{F}_{a\mu\nu}$ の超対称変換を計算しても状況は変わらず、次の形の変分を得る。

$$\begin{aligned} \delta \widetilde{F}_{a\mu\nu} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \partial_\mu (-i \xi_I \sigma_\nu \overline{\tau}_{ab} \overline{\lambda}^{Ib}) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \partial_\nu (-i \xi_I \sigma_\mu \overline{\tau}_{ab} \overline{\lambda}^{Ib}) \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} \xi_I \sigma_{\mu\nu} \left[(\mathrm{Im}\,\tau_{ab}) \not{\partial} \overline{\lambda}^{Ib} + \frac{i}{2} \not{\partial} \overline{\tau}_{ab} \overline{\lambda}^{Ib} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tau_{abc} \epsilon^{IJ} \not{F}^b_2 \lambda^c_J\right] + \mathrm{h.c.} \end{aligned} \tag{7.266}$$

ここまでの計算には運動方程式は全く用いていない。そしてこの式の二行目の括弧の中はちょうどフェルミオンについての運動方程式

$$(\mathrm{Im}\,\tau_{ab}) \not{\partial} \overline{\lambda}^{Ib} + \frac{i}{2} (\not{\partial} \overline{\tau}_{ab}) \overline{\lambda}^{Ib} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tau_{abc} \epsilon^{IJ} \not{F}^b_2 \lambda^c_J = 0. \tag{7.267}$$

Soryushiron Kenkyu

によって 0 になる。従って、双対ゲージ場 $\widetilde{v}_a$ の超対称変換則は次のように決定される。

$$\delta\widetilde{v}_a = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-i\xi_I\sigma_\mu\overline{\lambda}_a^I + i\overline{\xi}^I\overline{\sigma}_\mu\lambda_{Ia}) \tag{7.268}$$

これは v_μ^a の変換則 (7.233) と全く同じ形をしている。フェルミオン λ_{Ia} の超対称変換則はその定義 (7.256) から直ちに決定することができるが、その結果スカラー場 ϕ_a が $\widetilde{\lambda}_{Ia}$ の超対称パートナーとして振舞うことがわかる。実際、$\widetilde{\lambda}_{Ia}$ や $\widetilde{\phi}_a$ の超対称変換は次のように (7.232) や (7.231) と全く同じ形になっている。

$$\delta\widetilde{\lambda}_{Ia} = \frac{i}{2}\epsilon_{IJ}\partial\!\!\!/\widetilde{\phi}_a\overline{\xi}^J - \frac{1}{2\sqrt{2}}\widetilde{F\!\!\!/}_{2a}\xi_I, \quad \delta\widetilde{\phi}_a = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}\xi_I\widetilde{\lambda}_{Ja}. \tag{7.269}$$

こうして、$(A_{a\mu}, \lambda_{Ia}, \phi_a)$ が $(A_\mu^a, \lambda_I^a, \phi^a)$ と同じ超対称変換則に従う超対称多重項になっていることが示された。

7.5.5 $\mathrm{Sp}(k, \mathbf{Z})$ 対称性

U(1) ベクトル多重項は、一つの複素スカラー場、二つのワイルフェルミオン、一つのベクトル場より成り、次のように多重項を組む。

$$(\phi^a, \lambda_I^a, F^{(+)a}), \quad (\phi_a, \lambda_{Ia}, F_a^{(+)}). \tag{7.270}$$

ゲージ群が $\mathrm{U}(1)^k$ である場合、$a = 1, \ldots, k$ である。上記の二つの組はそれぞれ独立ではなく、前者の線形結合として後者を表すことができる。これまではスカラー場 ϕ^a をモジュライ空間上の座標、ϕ_a をその正則関数として扱ってきた。この特殊な座標系は preferred coordinate frame と呼ばれる。$\mathrm{Sp}(k, \mathbf{Z})$ 変換を考える場合には ϕ^a と ϕ_a を平等に扱うのが望ましい。そこで ϕ^a と ϕ_a をともにその正則関数として与えるようなモジュライ空間上の複素座標 x^i を導入しよう。

$$\phi^A(x^i) \cdots \mathcal{M} \text{ 上の正則関数} \tag{7.271}$$

$d\phi^A$ は $F^{(+)A}$ と同様に $\mathrm{Sp}(k)$ 変換の下で変換される。一方 dx^i はスカラー多様体上の正則座標変換のもとで $\mathrm{GL}(k, \mathbf{C})$ 変換を受ける。電荷行列 M_i^A はこれらの間の関係を与えるものとして解釈できる。すなわち、

$$dx^i M_i^A = d\phi^A \quad \text{あるいは} \quad M_i^A = \frac{\partial\phi^A}{\partial x^i} \tag{7.272}$$

従って、M_i^A もまた $\mathcal{M}$ 上の正則関数である。このようにおいた電荷行列が、ディラックの量子化条件 (7.213) や (7.214) を満足することはすぐに示される。また、τ_{ab} を与える式 (7.257) は電荷行列と τ_{ab} の関係式 (7.217) に他ならない。

フェルミオンについても、$\mathrm{Sp}(k)$ 不変なスカラー場 x^i の超対称パートナー λ_I^i を次のように定義しよう。

$$\lambda_I^i = \frac{\partial x^i}{\partial\phi^a}\lambda_I^a \tag{7.273}$$

この式の右辺の偏微分は独立変数が ϕ^a であるから、$\mathrm{Sp}(k, \mathbf{R})$ 対称性が明らかではないが、$\mathrm{Sp}(k, \mathbf{R})$ 対称性が明らかな次の形にも書き換えることができる。

$$\vec{\lambda}_I = (\partial_i\vec{\phi})\lambda_I^i, \quad \lambda_I^j = \frac{1}{4\pi i}g^{i\overline{j}}(\partial_{\overline{j}}\vec{\phi}) \times \vec{\lambda}_I. \tag{7.274}$$

x^i および λ_I^i を用いて、超対称変換を $\mathrm{Sp}(k, \mathbf{Z})$ 不変な形に書くと次のようになる。

ベクトル多重項

超対称性変換

$$\delta x^i = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}\xi_I\lambda^i_J \tag{7.275}$$

$$\delta\lambda^i_I = \frac{i}{2}\epsilon_{IJ}\not\partial x^i\overline{\xi}^J - \frac{1}{4\sqrt{2}(2\pi)i}g^{i\overline{j}}(\overline{\phi}^a_{,\overline{j}}\not{\widetilde{F}}_{2a} - \overline{\widetilde{\phi}}_{a,\overline{j}}\not{F}^a_2)\xi_I, \tag{7.276}$$

$$\delta v^a_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-i\overline{\phi}^a_{,\overline{i}}\xi_I\sigma_\mu\overline{\lambda}^{I\overline{i}} + i\phi^a_{,i}\lambda^i_I\sigma_\mu\overline{\xi}^I), \tag{7.277}$$

$$\delta\widetilde{v}^a_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-i\overline{\widetilde{\phi}}_{a,\overline{i}}\xi_I\sigma_\mu\overline{\widetilde{\lambda}}^{I\overline{i}} + i\widetilde{\phi}_{a,i}\widetilde{\lambda}^i_I\sigma_\mu\overline{\xi}), \tag{7.278}$$

ラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\mathrm{scalar}} = -K_{i\overline{k}}\partial_\mu x^i\partial^\mu\overline{x}^{\overline{j}}, \tag{7.279}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{fermion}} = ig_{i\overline{j}}(\lambda^i_I\sigma^\mu D^{(M)}_\mu\overline{\lambda}^{I\overline{j}}), \tag{7.280}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{gauge}} &= -\frac{1}{4}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu} - \frac{1}{8}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau}_{ab})\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^b_{\rho\sigma}\\ &\quad+\Big[\frac{i}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ija}\epsilon^{IJ}\lambda^i_I\not{F}^a_2\lambda^j_J \quad + \mathrm{h.c.}\Big],\end{aligned} \tag{7.281}$$

この超対称変換則の組およびラグランジアンは次の $\mathrm{U}(1)_R$ 変換のもとで不変である。

$$\xi_I \to e^{i\alpha}\xi_I, \quad x^i \to x^i, \quad \lambda^i_I \to e^{-i\alpha}\lambda^i_I, \quad (F^a_{\mu\nu}, \widetilde{F}_{a\mu\nu}) \to (F^a_{\mu\nu}, \widetilde{F}_{a\mu\nu}), \quad (\phi^a, \widetilde{\phi}_a) \to e^{2i\alpha}(\phi^a, \widetilde{\phi}_a) \tag{7.282}$$

この対称性は、ベクトル多重項を超重力理論に結合させる際に重要な役割を果たす。

フェルミオンのラグランジアンは (7.215) の反対称積を用いて次のように $\mathrm{Sp}(k, \mathbf{R})$ 不変性が明らかな形に書くこともできる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{fermion}} = -\frac{1}{4\pi}(\vec{\lambda}_I \times \sigma^\mu\partial_\mu\overline{\vec{\lambda}}^I) \tag{7.283}$$

7.6 中心電荷

7.6.1 電荷、磁荷と中心電荷の関係

ハイパー多重項のスカラー場に対して二回超対称変換を行って交換関係を求めると、次の式を得る。

$$\begin{aligned}[\delta_Q(\xi'), \delta_Q(\xi)]q^m &= \frac{i}{4}(\xi'_I\sigma^\mu\overline{\xi}^I)\partial_\mu q^m + \frac{1}{4}\epsilon^{IJ}(\xi'_I\xi_J)F^m + \mathrm{c.c.}\\ &= \epsilon^\mu\partial_\mu q^m + \alpha F^m + \alpha^*\overline{F}^m\end{aligned} \tag{7.284}$$

ϵ^m と α は (7.7) に従って定義されている。すなわち

$$\epsilon^m = \frac{i}{4}(\xi'_I\sigma^m\overline{\xi}^I - \xi_I\sigma^m\overline{\xi}'^I), \quad \alpha = \frac{1}{4}\epsilon^{IJ}(\xi'_I\xi_J), \quad \alpha^* = \frac{1}{4}\epsilon_{IJ}(\overline{\xi}'^I\overline{\xi}^J). \tag{7.285}$$

この式から、ハイパー多重項の中心電荷を読み取ることができる。

$$\delta_Z(\alpha)q^m = \alpha[i\widehat{Z}, q^m] = i\alpha F^m, \quad \delta_{\overline{Z}}(\alpha^*)q^m = \alpha^*[i\overline{\widehat{Z}}, q^m] = -i\alpha^*\overline{F}^m. \tag{7.286}$$

F^m はモジュライ空間上のキリングベクトルであり、(7.131) に与えられている。質量項に由来する部分と U(1) ゲージ場との結合に由来する部分がある。

$$F^m = t_0^m + \sqrt{2}\overline{\phi}^a t_a^m \tag{7.287}$$

t_a^m は U(1) ゲージ変換に対応するキリングベクトルで、次のように U(1) ゲージ変換を与える。

$$\delta_{\mathrm{U}(1)}(\alpha^a)q^m = \alpha^a[i\widehat{Q}_a, q^m] = \alpha^a t_a^m. \tag{7.288}$$

(7.287) は中心電荷と U(1) 電荷の間に次の関係があることを表している。

$$\widehat{Z} = \widehat{Z}_0 + \sqrt{2}i\overline{\phi}^a \widehat{Q}_a \tag{7.289}$$

ただし、$\widehat{Z}_0$ は質量項のために現れる定数部分である。

上記の関係式は、ベクトル多重項の解析からも得ることができる。ベクトル多重項に属するゲージ場の上で交換関係を計算してみると、

$$[\delta', \delta]\vec{v}_\mu = \epsilon^\nu \vec{F}_{\nu\mu} + \sqrt{2}D_\mu(\vec{\overline{\phi}}\alpha) + \sqrt{2}D_\mu(\vec{\phi}\alpha^*) \tag{7.290}$$

この第 2 項、第 3 項はゲージ場に対する U(1) ゲージ変換とみなすことができる。(7.6) と比較すると、第 2 項、第 3 項より

$$\delta_Z(\alpha)\vec{v}_\mu = D_\mu(\sqrt{2}i\alpha\vec{\overline{\phi}}), \quad \delta_{\overline{Z}}(\alpha^*)\vec{v}_\mu = -D_\mu(\sqrt{2}i\alpha^*\vec{\phi}) \tag{7.291}$$

このゲージ変換のもとで、電荷、磁荷が (n_a, n^a) である場 Φ、すなわち、共変微分が $D\Phi = (d - i(n_a A^a + n^a A_a))\Phi$ で与えられる場 Φ は、このゲージ変換のもとで次のように変換される。

$$\delta_Z(\alpha)\Phi = -\sqrt{2}\alpha(n_a\overline{\phi}^a + n^a\overline{\phi}_a)\Phi, \quad \delta_{\overline{Z}}(\alpha^*)\Phi = -\sqrt{2}\alpha^*(n_a\phi^a + n^a\phi_a)\Phi \tag{7.292}$$

7.6.2 6 次元の理論との関係

6 次元のディラック行列 Γ^M はサイズが 8×8 の 6 次元 Γ-行列である。添え字 M は 0 から 5 までの値をとる。x^4 と x^5 方向をコンパクト化することによって 4 次元の理論を構成することにする。上記の代数を 4 次元のものの関係を明らかにするために、6 次元 Γ-行列を 4 次元 γ-行列を用いて次のように表す。

$$\Gamma^\mu = \sigma_z \otimes \gamma^\mu, \quad \Gamma^4 = \sigma_x \otimes \mathbf{1}_4, \quad \Gamma^5 = \sigma_y \otimes \mathbf{1}_4, \quad \Gamma^7 = \sigma_z \otimes \gamma^5. \tag{7.293}$$

Γ^7 は 6 次元のカイラリティである。ディラック共役は 6 次元において次のように定義される。

$$\overline{\psi} = i\psi^\dagger \Gamma^0. \tag{7.294}$$

6 次元の荷電共役行列 C_6 は次の性質を満足するものである。

$$C_6^T = +C_6, \quad (\Gamma^M C_6)^T = -\Gamma^M C_6, \quad (\Gamma^7 C_6)^T = -\Gamma^7 C_6. \tag{7.295}$$

これは 4 次元の場合と符号が異なることに注意しよう。

$$C_4^T = -C_4, \quad (\gamma^\mu C_4)^T = +\gamma^\mu C_4, \quad (\gamma^5 C_4)^T = -\gamma^5 C_4 \tag{7.296}$$

(7.295) を満足する C_6 は C_4 を用いて次のように与えることができる。

$$C_6 = \epsilon \otimes \gamma^5 C_4 \tag{7.297}$$

この荷電共役行列を用いて定義されるマヨラナ共役は

$$\Psi_c = C_6 \overline{\Psi} = -\Gamma^0 C_6 \Psi^* = \sigma_x \otimes (\gamma^5 \gamma^0 C_4) \Psi^* \tag{7.298}$$

4 次元のマヨラナ共役が

$$\psi_c = C_4 \overline{\psi} = -\gamma^0 C_4 \psi^* \tag{7.299}$$

6 次元のスピノルの分解を次のように定義する。

$$\psi^{(6)} = \begin{pmatrix} \psi_1^L \\ \psi_2^R \\ \psi_3^L \\ \psi_4^R \end{pmatrix}, \quad \psi_c^{(6)} = \begin{pmatrix} -\psi_{4c}^L \\ \psi_{3c}^R \\ -\psi_{2c}^L \\ \psi_{1c}^R \end{pmatrix}. \tag{7.300}$$

ここで、$\psi_i^{L/R}$ $(i = 1,2,3,4)$ は 4 次元ディラックスピノルから左巻き、あるいは右巻き成分のみを取り出した二成分スピノルである。$\psi_{ic}^{L/R}$ の上付き添え字は、マヨラナ共役演算を行ったあとのカイラリティを表している。(7.300) には、あるスピノル $\psi^{(6)}$ とともにそのマヨラナ共役の分解も与えておいた。この二つを比べると、6 次元のマヨラナ共役を二回行ったときにもとのスピノルには戻らず、符合が反転することがわかる。したがって、6 次元ではマヨラナスピノルが定義できない。これは、6 次元のスピノル表現が実負であるためである。

しかしもし、スピノルがある内部対称性をあらわす群の下で実負表現に属していたとすると、ローレンツ群と内部対称性の直積群の下で実正表現に属するため、マヨラナ条件を課すことができる。たとえば、あるスピノル $\psi_I^{(6)}$ が内部対称性 Sp(1) の $\mathbf{2}$ 表現に属していたとしよう。$I = 1,2$ は Sp(1) の添え字である。このスピノルのマヨラナ共役の Sp(1) 添え字は上付きになることに注意すると、次のように分解できる。

$$\psi_I^{(6)} = \begin{pmatrix} \psi_{1I} \\ \epsilon_{IJ}\psi_2^J \\ \psi_{3I} \\ \epsilon_{IJ}\psi_4^J \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{IJ}\psi_c^{(6)J} = \begin{pmatrix} \psi_{4cI} \\ \epsilon_{IJ}\psi_{3c}^J \\ \psi_{2cI} \\ \epsilon_{IJ}\psi_{1c}^J \end{pmatrix}. \tag{7.301}$$

ただし、4 次元フェルミオンは全て Sp(1) 添え字が下付きであれば左巻き、Sp(1) 添え字が上付きであれば右巻きとし、カイラリティを表す L/R は省略した。このように、マヨラナ共役変換を行ったあとに Sp(1) 添え字の位置をもとに戻すという操作をあわせて考えると、余分な符号は現れない。そこで次の式によってシンプレクティックマヨラナスピノルを定義することができる。

$$\psi_I^{(6)} = \epsilon_{IJ}\psi_c^{(6)J} \tag{7.302}$$

この式を満足するシンプレクテックマヨラナスピノルの 4 次元スピノルによる分解は次のように与えられる。

$$\psi_I^{(6)} = (\psi_{1I}, \epsilon_{IJ}\psi_2^J, \psi_{2I}, \epsilon_{IJ}\psi_1^J)^T \tag{7.303}$$

ただし、ψ_1 および ψ_2 は 4 次元のマヨラナスピノルであり、ψ_{1I} と ψ_1^I はそれぞれその左巻き成分と右巻き成分である。ここではシンプレクティックマヨラナスピノルの Sp(1) 添え字を下に書い

Soryushiron Kenkyu

たが、場によっては上付き添え字を持つものとして定義したり、別の Sp(k) 内部対称性の添え字を持つ場合もある。

二つのシンプレクティックマヨラナスピノルの内積は次のように与えられる。

$$\overline{\psi}'^{(6)I}\psi_I^{(6)} = \epsilon_{IJ}(\overline{\psi}_1'^I\psi_2^J) + \epsilon^{IJ}(\overline{\psi}_{1I}'\psi_{2J}) - \epsilon^{IJ}(\overline{\psi}_{2I}'\psi_{1J}) - \epsilon_{IJ}(\overline{\psi}_2'^I\psi_1^J) \tag{7.304}$$

6 次元の超対称変換パラメータ ξ_I は正の超対称性変換演算子 $\widehat{Q}^I$ は負のカイラリティを持つシンプレクティックマヨラナスピノルで次のように分解されるとする。

$$\xi_I^{(6)} = (\xi_I, 0, 0, \epsilon_{IJ}\xi^J)^T, \quad Q^{(6)I} = (0, \epsilon^{IJ}Q_J, Q^I, 0)^T. \tag{7.305}$$

これらは次のシンプレクティックマヨラナ条件を満足する。

$$\xi_I^{(6)} = \epsilon_{IJ}\xi_c^{(6)J}, \quad Q^{(6)I} = \epsilon^{IJ}Q_{cJ}^{(6)}. \tag{7.306}$$

パラメータと演算子の積が次のように与えられる。

$$(\overline{\xi}^{(6)} \cdot Q^{(6)}) \equiv \epsilon_{IJ}\overline{\xi}^{(6)J}Q^{(6)I} = \overline{\xi}^I Q_I + \overline{\xi}_I Q^I \tag{7.307}$$

6 次元の超対称代数は

$$[(\overline{\xi}^{(6)} \cdot Q^{(6)}), (\overline{\xi}'^{(6)} \cdot Q^{(6)})] = \frac{i}{4}(\overline{\xi}^{(6)I}\Gamma^M\xi_I'^{(6)})P_M^{(6)} \tag{7.308}$$

ここでは Q や P は常に変換記号ではなく演算子を表すものとして hat は省略する。4 次元のスピノルで分解すると、次のようになる。

$$[\overline{\xi}_I Q^I, \overline{\xi}'^J Q_J] = \frac{i}{4}(\overline{\xi}_I\gamma^\mu\xi'^I)P_\mu^{(6)}, \quad [\overline{\xi}_I Q^I, \overline{\xi}_J' Q^J] = \frac{i}{4}\epsilon^{IJ}(\overline{\xi}_I\xi_J')(P_4^{(6)} + iP_5^{(6)}) \tag{7.309}$$

これらを以前に与えた $\mathcal{N} = 2$ の代数

$$[\overline{\xi}_I Q^I, \overline{\xi}'^J Q_J] = \frac{i}{4}(\overline{\xi}_I\gamma^\mu\xi'^J)P_\mu, \quad [\overline{\xi}_I Q^I, \overline{\xi}_J' Q^J] = \frac{1}{4}\epsilon^{IJ}(\overline{\xi}_I\xi_J')Z \tag{7.310}$$

と比較してみよう。すると、中心電荷が内部空間の運動量として次のように与えられることがわかる。

$$Z = i(P_4 + iP_5) \tag{7.311}$$

6 次元ベクトル多重項中の変換則は次の通りである。

$$\delta A_M^{(6)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{(6)I}\Gamma_M\xi_I^{(6)}), \quad \delta\lambda_I^{(6)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}F_{MN}^{(6)}\Gamma^{MN}\xi_I^{(6)}. \tag{7.312}$$

フェルミオン Λ_I は Γ^7 カイラリティが正のシンプレクティックマヨラナスピノルで与えられるので、次のように分解することができる。

$$\lambda_I^{(6)} = (\lambda_I, 0, 0, \epsilon_{IJ}\lambda^J)^T. \tag{7.313}$$

変換則中のフェルミオン $\lambda_I^{(6)}$ を 4 次元のもので書き換えると、以下のように分解される。

$$\delta A_\mu^{(6)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^I\gamma_\mu\xi_I + \overline{\lambda}_I\gamma_\mu\xi^I), \tag{7.314}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\delta(A_4^{(6)} + iA_5^{(6)}) = \frac{1}{2}\epsilon_{IJ}(\overline{\lambda}^I\xi^J), \tag{7.315}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\delta(A_4^{(6)} - iA_5^{(6)}) = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}(\overline{\lambda}_I\xi_J), \tag{7.316}$$

$$\delta\lambda_I = \frac{1}{4\sqrt{2}}F_{\mu\nu}^{(6)}\gamma^{\mu\nu}\xi_I + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\not{\partial}(A_4^{(6)} - iA_5^{(6)}))\epsilon_{IJ}\xi^J \tag{7.317}$$

これは

$$A_\mu^{(6)} = -A_\mu, \quad A_4^{(6)} = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\phi, \quad A_5^{(6)} = -\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,\phi \tag{7.318}$$

の対応のもと、以前に与えた $\mathcal{N}=2$ のベクトル多重項の変換則と同じものである。

ハイパー多重項の変換則は次のように与えられる。

$$\delta\phi^{(6)m} = \frac{1}{2}(\gamma^m)^I{}_\alpha J^{\alpha\beta}(\overline{\psi}_\beta^{(6)}\xi_I^{(6)}), \quad \delta\psi^{(6)\alpha} = -\frac{1}{4}J^{\alpha\beta}(\gamma_m)^I{}_\beta(\partial\!\!\!/\phi^{(6)m})\xi_I^{(6)} \tag{7.319}$$

ここでは、モジュライ空間は平坦で、ゲージ場とも結合していない場合を考える。$\psi^{(6)\alpha}$ は $\psi^{(6)\alpha} = J^{\alpha\beta}\psi_{c\beta}^{(6)}$ を満足するシンプレクティックマヨラナスピノルであり、次のように 4 次元のスピノルに分解される。

$$\psi^{(6)\alpha} = (0, J^{\alpha\beta}\psi_\beta, \psi^\alpha, 0)^T \tag{7.320}$$

ただし、ψ はマヨラナスピノルであり。ψ^α はその左巻き成分、ψ_α は右巻き成分である。これによって、変換則は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}\delta\phi^{(6)m} &= -\frac{1}{2}(\gamma^m)^I{}_\alpha(\overline{\psi}^\alpha\xi_I) - \frac{1}{2}(\gamma^m)^\alpha{}_I(\overline{\psi}^\alpha\xi^I), & (7.321)\\ \delta\psi^\alpha &= -\frac{1}{4}(\gamma_m)^I{}_\beta(\partial\!\!\!/\phi^{(6)m})\xi^I & (7.322)\end{aligned}$$

これはスカラー場を次のようにとれば、以前に与えた 4 次元のハイパー多重項の変換則に一致する。

$$\phi^{(6)m} = \sqrt{2}q^m \tag{7.323}$$

以前に与えた 4 次元 $\mathcal{N}=2$ ハイパー多重項のフェルミオンの変換則をもう一度書いておこう。

$$\delta\psi^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\partial\!\!\!/q^m)(\gamma_m)^\alpha{}_I\xi^I - \frac{1}{2\sqrt{2}}J^{\alpha\beta}(\gamma_m)^I{}_\beta\xi_I F^m \tag{7.324}$$

ハイパー多重項がゲージ場に結合している場合を考えてみよう。この場合、変換則中の微分が次の共変微分に置き換えられる。

$$D_M\phi^{(6)m} = \partial_\mu\phi^{(6)m} + iA_M^{(6)a}(T_a)^m{}_n\phi^{(6)n} \tag{7.325}$$

ここでは 4 次元での共変微分が標準的な形になるようにゲージ場の項の符号を選んだ。新たに加わったゲージ場を含む項は、フェルミオンの変換則に新たに次の項を追加する。

$$\delta\psi^\alpha = \cdots - \frac{i}{4}J^{\alpha\beta}(\gamma_m)^I{}_\beta\xi_I(A_4^{(6)a} + iA_5^{(6)a})T_a)^m{}_n\phi^{(6)n} \tag{7.326}$$

これは (7.324) の第 2 項に対応するものである。比較すると、F^m が次のように与えられる。

$$F^m = \frac{i}{\sqrt{2}}(A_4^{(6)a} + iA_5^{(6)a})(T_a)^m{}_n\phi^{(6)n} = i\sqrt{2}\phi^{*a}(T_a)^m{}_n q^n = \sqrt{2}\phi^{*a}t_a^m \tag{7.327}$$

これは以前に得られた補助場に一致する。

中心電荷は内部空間の運動量と (7.311) によって関係しているが、背景にゲージ場が存在する場合には

$$P_M = D_M^{(G)} \tag{7.328}$$

のようにゲージ場を含む共変微分で置き換えられる。このことを考慮すると、ハイパー多重項の中心電荷は次のように与えられる。

$$Z = i(A_4^{(6)a} + iA_5^{(6)a})q_a = \sqrt{2}i\phi^{*a}q_a \tag{7.329}$$

これも以前に得られた中心電荷に一致する。

第8章　$\mathcal{N}=2$ 超重力理論

4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論の $\mathcal{N}=1$ 超重力理論との大きな違いは、ゲージ場と重力場、ゲージ場とスカラー場を含む多重項が存在することである。このため、ゲージ場のセクターの性質が理論全体の構造に大きく影響する。特に、U(1) ゲージ場に対する双対変換が重要な役割を果たす。

8.1　重力多重項

8.1.1　単純超重力理論の作用と変換則

$\mathcal{N}=2$ の超重力理論の重力多重項は重力場、二つのグラビティーノ、一つの U(1) ゲージ場を含む。[16] $\mathcal{N}=2$ 超重力理論を与える準備として $\mathcal{N}=1$ 超重力理論のグラビティーノ多重項、すなわちスピンが 3/2 のフェルミオンとベクトル場からなる多重項についてみてみよう。U(1) ゲージ場 B_μ とスピン 3/2 のフェルミオン θ_μ からなる次のラグランジアンによって与えられる系を考える。

$$\mathcal{L}_{3/2,1} = -\frac{e}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + ie\theta_\mu\sigma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega)}\bar{\theta}_\rho. \tag{8.1}$$

G_2 は B_1 の場の強さであり、$G_2 = dB_1$ と定義される。もし背景が平坦であり、変換パラメータ ξ が定数であればこのラグランジアンは次の変換のもとで不変である。

$$\delta\theta_\mu = \frac{1}{4}\not{G}_2\sigma_\mu\bar{\xi}, \quad \delta B_\mu = -\frac{i}{2}(\theta_\mu\xi) + \mathrm{h.c.} \tag{8.2}$$

この $\mathcal{N}=1$ グラビティーノ多重項を $\mathcal{N}=1$ 超重力理論に結合させることを考える。そのためにまず上記のラグランジアンから得られる超対称カレントを計算しよう。背景の平坦性や ξ が定数であることを仮定しなければ、変換パラメータの微分 $D_\mu^{(\omega)}\xi$ を含む次の変分を得る。

$$\delta\mathcal{L}_{3/2,1} = -\frac{ie}{2}\theta_\mu\sigma^{[\mu}\not{G}_2\bar{\sigma}^{\nu]}D_\nu^{(\omega)}\xi + \mathrm{h.c.} \tag{8.3}$$

従って、この変分を相殺して超対称な理論を得るために次のカレントとグラビティーノの結合項を付け加える必要がある。

$$\mathcal{L}_J = \frac{ike}{2}\theta_\mu\sigma^{[\mu}\not{G}_2\bar{\sigma}^{\nu]}\psi_\nu + \mathrm{h.c.} \tag{8.4}$$

このネーター項中のグラビティーノの超対称変換によって得られる変分が (8.3) を相殺する。しかし $\mathcal{L}_J$ に含まれるもう一つのフェルミオン θ_μ の変分からはそれとは別に次の変分が現れる。

$$\delta\mathcal{L}_J = \frac{ike}{16}\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu\not{G}_2\sigma^\nu\not{G}_2\bar{\sigma}^\mu\psi_\nu + \mathrm{h.c.} = -\frac{ike}{4}(\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu\psi_\nu)T^{\mu\nu} + \mathrm{h.c.} \tag{8.5}$$

$T^{\mu\nu}$ はゲージ場 B_μ の運動項を計量で微分することで定義されるエネルギー運動量テンソルである。実はゲージ場の運動項に含まれる多脚場の超対称変換を行うと丁度これと符号が逆の変分が得られ、この項は自動的に相殺される。

こうして多重項 (θ_μ, B_μ) を含む $\mathcal{N}=1$ 超重力理論がラグランジアン $\mathcal{L}_{3/2,1}+\mathcal{L}_J$ によって与えられることが示された。さらにこの理論はグラビティーノ ψ_μ と新たに導入したスピン 3/2 のフェルミオン θ_μ を混ぜるような SU(2) 対称性を持つ。従って、この理論は $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持ち、θ_μ は新たに現れた超対称性に対応するグラビティーノと解釈することができる。

二つのグラビティーノを次のようにまとめて $\psi_{I\mu}$ とあらわそう。

$$\psi_{I\mu}=(\psi_{1\mu},\psi_{2\mu})=(\psi_\mu,\theta_\mu) \tag{8.6}$$

すると、作用および変換側を $\mathrm{SU}(2)_R$ 対称性があらわな形に書く事ができる。$\mathcal{N}=2$ 単純超重力理論のラグランジアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\mathcal{N}=2}=\frac{e}{k^2}R+ie\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}D^{(\omega)}_\nu\overline{\psi}^I_\rho-\frac{e}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}-\left(\frac{ike}{4}\epsilon^{IJ}\psi_{I\mu}\sigma^{[\mu}\mathcal{G}_2\overline{\sigma}^{\nu]}\psi_{J\nu}+\mathrm{h.c.}\right). \tag{8.7}$$

ただし、$\mathrm{SU}(2)_R$ 不変な反対称行列は $\epsilon^{12}=\epsilon_{12}=1$ と定義する。上記ラグランジアンを不変にする超対称変換は (3.2) と (8.2) を組み合わせることで次のように与えられる。便宜上多脚場とグラビティーノの間の変換 $\delta_{(2/3,2)}$ とグラビティーノとグラビフォトンの間の変換 $\delta_{(1,3/2)}$ に分けて書いた。

$$\delta_{(3/2,2)}e^\mu_{\hat{m}}=\frac{k}{4}(-i\psi_{I\hat{m}}\sigma^\mu\overline{\xi}^I+i\overline{\psi}^I_{\hat{m}}\overline{\sigma}^\mu\xi_I),\quad \delta_{(3/2,2)}\psi_{I\mu}=\frac{1}{k}D^{(\omega)}_\mu\xi_I, \tag{8.8}$$

$$\delta_{(1,3/2)}\psi_{I\mu}=-\frac{1}{4}\epsilon_{IJ}\mathcal{G}_2\sigma_\mu\overline{\xi}^J,\quad \delta_{(1,3/2)}B_\mu=\frac{i}{2}\epsilon^{IJ}(\psi_{I\mu}\xi_J)-\frac{i}{2}\epsilon_{IJ}(\overline{\psi}^I_\mu\overline{\xi}^J). \tag{8.9}$$

8.1.2 運動方程式と $\mathrm{U}(1)_R$ 対称性

ラグランジアン (8.7) および超対称変換 (8.8)、(8.9) は大域的な対称性 $\mathrm{SU}(2)_R$ のもとで不変である。実は運動方程式レベルではこれに加えて、両方のグラビティーノを同じ位相で回転させる $\mathrm{U}(1)_R$ 対称性がある。このことを確認しておこう。

ラグランジアン (8.7) よりグラビティーノの運動方程式

$$\sigma^{\mu\nu\rho}\overline{\psi}^I_{\nu\rho}-k\epsilon^{IJ}\sigma^{[\mu}\mathcal{G}_2\overline{\sigma}^{\nu]}\psi_{J\nu}=0 \tag{8.10}$$

が得られる。ただし、グラビティーノの場の強さは

$$\psi_{I\mu\nu}=D^{(\omega)}_\mu\psi_{I\nu}-D^{(\omega)}_\nu\psi_{I\mu} \tag{8.11}$$

と定義される。グラビフォトンのビアンキ恒等式と運動方程式は次のように与えられる。

$$d\widetilde{G}_2=dG_2=0 \tag{8.12}$$

ただし、$\widetilde{G}_2$ は作用を G_2 で変分して得られる双対場であり、次のように与えられる。

$$\widetilde{G}_{\rho\sigma}=-\frac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma\kappa\lambda}\left[G^{\kappa\lambda}+\frac{ik}{4}\epsilon^{IJ}\psi_{I\mu}\sigma^{[\mu}\overline{\sigma}^{\kappa\lambda}\overline{\sigma}^{\nu]}\psi_{J\nu}-\frac{ik}{4}\epsilon_{IJ}\overline{\psi}^I_\mu\overline{\sigma}^{[\mu}\sigma^{\kappa\lambda}\sigma^{\nu]}\overline{\psi}^J_\nu\right] \tag{8.13}$$

超対称変換およびここで与えた運動方程式などが $\mathrm{U}(1)_R$ 対称性を持つことをチェックするために、以下の超共変化された場の強さを定義しておくと便利である。

$$\begin{aligned}
\psi^{\mathrm{cov}}_{I\mu\nu} &= \psi_{I\mu\nu}-\frac{k}{4}\epsilon_{IJ}\mathcal{G}_2(\sigma_\mu\overline{\psi}^J_\nu-\sigma_\nu\overline{\psi}^J_\mu), && (8.14)\\
G^{\mathrm{cov}}_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu}+\frac{ik}{2}\epsilon^{IJ}\psi_{I\mu}\psi_{J\nu}-\frac{ik}{2}\epsilon_{IJ}\overline{\psi}^I_\mu\overline{\psi}^J_\nu, && (8.15)\\
\widetilde{G}^{\mathrm{cov}}_{\mu\nu} &= \widetilde{G}_{\mu\nu}-\frac{k}{2}\epsilon^{IJ}\psi_{I\rho}\psi_{J\rho}-\frac{k}{2}\epsilon_{IJ}\overline{\psi}^I_\rho\overline{\psi}^J_\sigma && (8.16)
\end{aligned}$$

$G^{\rm cov}_{\mu\nu}$ は超共変化された場の強さであるから、その超対称変換は変換パラメータの微分を含まない。

$$\delta G^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} = -\frac{i}{2}\epsilon^{IJ}(\xi_I\psi^{\rm cov}_{J\widehat{m}\widehat{n}}) + \frac{i}{2}\epsilon_{IJ}(\overline{\xi}^I\overline{\psi}^{{\rm cov}J}_{\widehat{m}\widehat{n}}) \tag{8.17}$$

グラビティーノの運動方程式 (8.10) は次のように書き換えることができる。

$$\sigma^\nu\psi^{\rm cov}_{I\mu\nu} = 0. \tag{8.18}$$

運動方程式 (8.18) は、$\psi^{\rm cov}_{I\mu\nu}$ をスピンの規約表現に分解して得られる $(\mathbf{2},\mathbf{3})$、$(\mathbf{2},\mathbf{1})$、$(\mathbf{4},\mathbf{1})$ のうち、$(\mathbf{4},\mathbf{1})$ 以外が 0 であることを意味している。このことから、$\psi^{\rm cov}_{I\mu\nu}$ が二つのテンソル添え字について、自己双対であることがわかる。

グラビフォトンについて $G^{\rm cov}_2$ と $\widetilde{G}^{\rm cov}_2$ の関係 (8.13) は次のように書き換えられる。

$$\widetilde{G}^{\rm cov}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}G^{\rm cov}_{\rho\sigma} \tag{8.19}$$

さらに (8.12) のビアンキ恒等式と運動方程式は次のようになる。

$$\left(D_{\widehat{k}}G^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{ik}{2}\epsilon^{IJ}\psi_{I\widehat{k}}\psi^{\rm cov}_{J\widehat{m}\widehat{n}} - \frac{ik}{2}\epsilon_{IJ}\overline{\psi}^I_{\widehat{k}}\overline{\psi}^{{\rm cov}J}_{\widehat{m}\widehat{n}}\right)\Big|_{[\widehat{k}\widehat{m}\widehat{n}]} = 0 \tag{8.20}$$

$$\left(D_{\widehat{k}}\widetilde{G}^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} - \frac{k}{2}\epsilon^{IJ}\psi_{I\widehat{k}}\psi^{\rm cov}_{J\widehat{m}\widehat{n}} - \frac{k}{2}\epsilon_{IJ}\overline{\psi}_{I\widehat{k}}\overline{\psi}^{{\rm cov}J}_{\widehat{m}\widehat{n}}\right)\Big|_{[\widehat{k}\widehat{m}\widehat{n}]} = 0 \tag{8.21}$$

$G^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ の自己双対部分を

$$G^{{\rm cov}(+)}_{\widehat{m}\widehat{n}} = \frac{1}{2}(G^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} - i\widetilde{G}^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}}) \tag{8.22}$$

とすると、その超対称変換と運動方程式は次のようになる。

$$\delta G^{{\rm cov}(+)}_{\widehat{m}\widehat{n}} = -\frac{i}{2}\epsilon^{IJ}(\xi_I\psi^{\rm cov}_{J\widehat{m}\widehat{n}}) \tag{8.23}$$

$$\left(D_{\widehat{k}}G^{{\rm cov}(+)}_{\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{ik}{2}\epsilon^{IJ}\psi_{I\widehat{k}}\psi^{\rm cov}_{J\widehat{m}\widehat{n}}\right)\Big|_{[\widehat{k}\widehat{m}\widehat{n}]} = 0 \tag{8.24}$$

これらはどちらも次の変換の下で不変である。

$$\xi_I \to e^{i\alpha}\xi_I, \quad \psi_{I\mu} \to e^{i\alpha}\psi_{I\mu}, \quad G^{{\rm cov}(+)}_2 \to e^{2i\alpha}G^{{\rm cov}(+)}_2. \tag{8.25}$$

8.1.3 中心電荷

重力多重項に含まれるグラビフォトンが結合する電荷、磁荷は中心電荷である。このことを、超対称変換の交換関係を計算することで確認しておこう。

双対場 $\widetilde{B}_\mu$ の超対称変換は

$$\delta\widetilde{B}_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{IJ}(\psi_{I\mu}\xi_J) - \frac{1}{2}\epsilon_{IJ}(\overline{\psi}^I_\mu\overline{\xi}^J). \tag{8.26}$$

と与えられる。

グラビフォトン B_μ とその双対場 $\widetilde{B}_\mu$ の上で超対称性変換を二回行い、交換関係を計算すると、

$$[\delta'_Q, \delta_Q]B_\mu = \frac{2i}{k}D_\mu(\alpha - \alpha^*) + \epsilon^\lambda G_{\lambda\mu}, \tag{8.27}$$

$$[\delta'_Q, \delta_Q]\widetilde{B}_\mu = -\frac{2}{k}D_\mu(\alpha + \alpha^*) + \epsilon^\lambda\widetilde{G}_{\lambda\mu} \tag{8.28}$$

従って

$$(-i\delta_Z + i\delta_{Z^*})B_\mu = \frac{2i}{k}D_\mu(\alpha - \alpha^*), \quad (-i\delta_Z + i\delta_{Z^*})\widetilde{B}_\mu = -\frac{2}{k}D_\mu(\alpha + \alpha^*) \tag{8.29}$$

$\mathrm{Re}\,\alpha$ と $\mathrm{Im}\,\alpha$ の係数を抜き出せば次の式を得る。

$$\delta_{Z_I}B_\mu = 0, \quad \delta_{Z_R}B_\mu = -\frac{2}{k}D_\mu\lambda, \quad \delta_{Z_I}\widetilde{B}_\mu = -\frac{2}{k}D_\mu\lambda, \quad \delta_{Z_R}\widetilde{B}_\mu = 0. \tag{8.30}$$

ただし、この式において変換パラメータ λ は実数であり、$Z = Z_R + iZ_I$ のようにエルミート演算子 Z_R と Z_I を定義した。これらの式は、グラビフォトンに結合する電荷 Q と $\widetilde{Q}$ と中心電荷の関係が次のように与えられることを意味している。

$$Z_R = -\frac{2}{k}Q, \quad Z_I = -\frac{2}{k}\widetilde{Q}. \tag{8.31}$$

このように、グラビフォトンが中心電荷に結合するということは、質量のあるハイパー多重項などがグラビフォトンに対してグラビフォトンに対する電荷、磁荷を持つ。そのような場合、B_μ および $\widetilde{B}_\mu$ の線形結合によって素電荷、素磁荷に係数 1 で結合するゲージ場 A_μ および $\widetilde{A}_\mu$ を定義するのが便利である。$(F_2, \widetilde{F}_2)$ を次のように定義する。

$$\vec{F}^{(+)} = \vec{q}G^{(+)}. \tag{8.32}$$

ただし、次のように、電気的成分と磁気的成分をまとめてベクトルとして表した。

$$\vec{F}_2^{(+)} = (F_2^{(+)}, \widetilde{F}_2^{(+)}), \quad \vec{q} = (q_e, q_m) = M_1^A. \tag{8.33}$$

ただし、M_i^A は以前に定義した電荷行列である。これらのベクトルは、電荷と磁荷を混ぜるような電磁双対変換 $\mathrm{Sp}(1,\mathbf{Z}) = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ のもとで 2 表現として変換される。$\vec{X} \times \vec{Y}$ は $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 不変な反対称積であり、次のように定義される。

$$\vec{X} \times \vec{Y} = X_1Y_2 - X_2Y_1. \tag{8.34}$$

(q_e, q_m) は素電荷、素磁荷を表す複素数で、次のディラックの量子化条件を満足するものとする。

$$\mathrm{Im}(q_e^* q_m) = \frac{1}{2i}(q_e^* q_m - q_m^* q_e) = \frac{1}{2i}\vec{q}^* \times \vec{q} = 2\pi g_{1\bar{1}} = 2\pi \tag{8.35}$$

τ は次のように定義する。

$$\tau \equiv \frac{q_m}{q_e} = 2\pi\widetilde{\tau} \tag{8.36}$$

(8.32) の逆変換は次のようになる。

$$G^{(+)} = \frac{1}{4\pi i}\vec{q}^* \times \vec{F}^{(+)}. \tag{8.37}$$

このように定義されたゲージ場 $\vec{F}$ は $\mathrm{U}(1)_R$ 変換のもとで不変であるとする。その代わり電荷、磁荷 (q_e, q_m) が次のように変換される。

$$\xi_I \to e^{i\alpha}\xi_I, \quad \psi_{I\mu} \to e^{i\alpha}\psi_{I\mu}, \quad (q_e, q_m) \to e^{-2i\alpha}(q_e, q_m). \tag{8.38}$$

これ以外のグラビフォトンや多脚場はこの変換のもとで不変であるとする。$\vec{q}$ は理論のパラメータであるから、これが $\mathrm{U}(1)_R$ で変換されるということは $\mathrm{U}(1)_R$ が電荷、磁荷の存在によって破れているということを意味している。

ラグランジアンを書く際には F と $\widetilde{F}$ についての対称性を保つことはできないので、F だけを使って G を書き表す。しかし超対称変換については、$\mathrm{Sp}(1,\mathbf{Z})$ 共変な形に書くことができる。

$\mathcal{N}=2$ 単純超重力理論

ラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{N}=2} &= \frac{e}{k^2}R + ie\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega)}\overline{\psi}_\rho^I \\ &\quad + \left(\frac{ie}{4}\widetilde{\tau}F_{\mu\nu}^+F^{+\mu\nu} - \frac{ike}{4q_e^*}\epsilon^{IJ}\psi_{I\mu}\sigma^{[\mu}\not{F}_2^-\overline{\sigma}^{\nu]}\psi_{J\nu} + \text{c.c.}\right).\end{aligned} \tag{8.39}$$

そして変換則は

$$\delta_{(3/2,2)}e_{\widehat{m}}^\mu = \frac{k}{4}(-i\psi_{I\widehat{m}}\sigma^\mu\overline{\xi}^I + i\overline{\psi}_{\widehat{m}}^I\overline{\sigma}^\mu\xi_I), \quad \delta_{(3/2,2)}\psi_{I\mu} = \frac{1}{k}D_\mu^{(\omega)}\xi_I, \tag{8.40}$$

$$\delta_{(1,3/2)}\psi_{I\mu} = -\frac{1}{4q_e}\epsilon_{IJ}\not{F}_2^+\sigma_\mu\overline{\xi}^J, \quad \delta_{(1,3/2)}\vec{A}_\mu = \frac{i}{2}\epsilon^{IJ}(\psi_{I\mu}\xi_J)\vec{q} - \frac{i}{2}\epsilon_{IJ}(\overline{\psi}_\mu^I\overline{\xi}^J)\vec{q}^*. \tag{8.41}$$

これが先ほどのラグランジアンと変換則で与えられる系と同じであることは、q_e が実の場合には $A_\mu = q_eB_\mu$ という変数変換によってこの式が得られることと、上記のラグランジアン、変換則が $\mathrm{U}(1)_R$ 対称性を持っていることを用いればよい。

$\widetilde{F}_{\mu\nu}$ はラグランジアン (8.39) を用いて $F_{\mu\nu}$ の共役量として定義されるものである。従って、$\widetilde{A}_\mu$ の変換則は A_μ（とグラビティーノ）の変換則から導かれる。このことをチェックしておこう。

グラビフォトン F_2 の双対ゲージ場 $\widetilde{F}_2$ を定義すると次のようになる。

$$\widetilde{F}_{\mu\nu}^+ = \tau F_{\mu\nu}^+ + \frac{2\pi k}{4q_e^*}\epsilon_{IJ}\overline{\psi}_\kappa^I\overline{\sigma}^{[\kappa}\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\lambda]}\overline{\psi}_\lambda^J \tag{8.42}$$

グラビティーノも双対場に寄与することに注意すること。この複素共役と足せば、

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = (\mathrm{Re}\,\tau)F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\mathrm{Im}\,\tau)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + \left(\frac{2\pi k}{4q_e^*}\epsilon^{IJ}\psi_{I\kappa}\sigma^{[\kappa}\overline{\sigma}_{\mu\nu}\overline{\sigma}^{\lambda]}\psi_{J\lambda} + \text{h.c.}\right) \tag{8.43}$$

ここで、超共変化された場の強さを次のように定義するのが便利である。

$$F_{\mu\nu}^{\text{cov}} = F_{\mu\nu} + \frac{ik}{2}q_e\epsilon^{IJ}(\psi_{I\mu}\psi_{J\nu}) - \frac{ik}{2}q_e^*\epsilon_{IJ}(\overline{\psi}_\mu^I\overline{\psi}_\nu^J), \tag{8.44}$$

$$\widetilde{F}_{\mu\nu}^{\text{cov}} = \widetilde{F}_{\mu\nu} + \frac{ik}{2}q_m\epsilon^{IJ}(\psi_{I\mu}\psi_{J\nu}) - \frac{ik}{2}q_m^*\epsilon_{IJ}(\overline{\psi}_\mu^I\overline{\psi}_\nu^J) \tag{8.45}$$

すると、(8.43) は次のように簡単な形に書くことができる。

$$q_e\widetilde{F}_{\mu\nu}^{\text{cov}(+)} = q_mF_{\mu\nu}^{\text{cov}(+)} \quad q_e^*\widetilde{F}_{\mu\nu}^{\text{cov}(-)} = q_m^*F_{\mu\nu}^{\text{cov}(-)} \tag{8.46}$$

双対場に対する超対称変換則を決定するにはグラビティーノの運動方程式を用いる必要がある。そこでまず先にグラビティーノの運動方程式を与えておこう。

$$\overline{\sigma}^\nu\psi_{I\mu\nu}^{\text{cov}} = 0. \tag{8.47}$$

ただし $\psi_{I\mu\nu}^{\text{cov}}$ は次のように定義することができる。

$$q_e\psi_{I\mu\nu}^{\text{cov}} = q_e\psi_{I\mu\nu} - \frac{k}{2}\epsilon_{IJ}\not{F}_2\sigma_{[\mu}\overline{\psi}_{\nu]}^J, \tag{8.48}$$

$$q_m\psi_{I\mu\nu}^{\text{cov}} = q_m\psi_{I\mu\nu} - \frac{k}{2}\epsilon_{IJ}\widetilde{\not{F}}_2\sigma_{[\mu}\overline{\psi}_{\nu]}^J. \tag{8.49}$$

(8.46) を用いればこれら二つの定義が等価であることがわかる。運動方程式 (8.47) は $\psi^{\rm cov}_{I\mu\nu}$ のテンソル添え字について、自己双対であることを意味している。ゲージ場の強さの超対称変換は

$$\delta F^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} = -\frac{i}{2}q_e\epsilon^{IJ}(\xi_I\psi^{\rm cov}_{J\mu\nu}) + \frac{i}{2}q_e^*\epsilon_{IJ}(\overline{\xi}^I\overline{\psi}^{{\rm cov}J}_{\mu\nu}), \tag{8.50}$$

と与えられる。ここで $\psi^{\rm cov}_{I\mu\nu}$ が運動方程式より自己双対であることを用いれば、双対場の変換則が次のように与えられることがわかる。

$$\delta \widetilde{F}^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} = -\frac{i}{2}q_m\epsilon^{IJ}(\xi_I\psi^{\rm cov}_{J\mu\nu}) + \frac{i}{2}q_m^*\epsilon_{IJ}(\overline{\xi}^I\overline{\psi}^{{\rm cov}J}_{\mu\nu}). \tag{8.51}$$

これより、双対ゲージ場の変換則が (8.41) のように与えられることがわかる。

ゲージ場 $\vec{A}_\mu$ を用いて中心電荷の式をもう一度導出しておこう。重力多重項に対する変換則 (8.40) と (8.41) を用いて多脚場に対して二回超対称変換を施すと、次の交換関係が得られる。

$$[\delta',\delta]e_\mu^{\widehat{m}} = D_\mu^{(\omega)}\epsilon^{\widehat{m}} + \left(\frac{k}{2(2\pi)}(\vec{q}^* \times \vec{F}_\mu^{+\widehat{m}})\alpha^* + {\rm c.c.}\right) \tag{8.52}$$

(7.6) と比較すると、この右辺第 1 項は変換パラメータが ϵ^m である一般座標変換に対応することがわかる。第 2 項は局所ローレンツ変換と解釈できるが、$F_{\mu\nu}=0$ であるような平坦な背景上では 0 になる。グラビフォトンに対して超対称変換を二回施して交換関係を求めれば次の式が得られる。

$$[\delta',\delta]\vec{A}_\mu = \epsilon^\kappa\vec{F}_{\kappa\mu} + \frac{2i}{k}D_\mu\alpha\vec{q} - \frac{2i}{k}D_\mu\alpha^*\vec{q}^* \tag{8.53}$$

ただし、途中で $\vec{q}(\vec{q}^*\times F^+_{\mu\nu}) = 4\pi i\vec{F}^+_{\mu\nu}$ を用いた。(7.6) と比較すると、第 1 項は一般座標変換に対応している。第 2 項および第 3 項はグラビフォトンのゲージ変換を表している。(7.6) と比較すると次の変換則を得る。

$$\delta_Z(\alpha)\vec{A}_\mu = -\frac{2}{k}D_\mu\alpha\vec{q}, \quad \delta_{\overline{Z}}(\alpha^*)\vec{A}_\mu = -\frac{2}{k}D_\mu\alpha^*\vec{q}^* \tag{8.54}$$

実部と虚部に分けると、

$$\delta_{Z_R}\vec{A}_\mu = -\frac{2}{k}D_\mu\lambda\,{\rm Re}\,\vec{q}, \quad \delta_{Z_I}\vec{A}_\mu = -\frac{2}{k}D_\mu\lambda\,{\rm Im}\,\vec{q}. \tag{8.55}$$

これより

$$\widehat{Z} = -\frac{2}{k}(q_eQ + q_m\widetilde{Q}) \tag{8.56}$$

ただし、Q と $\widetilde{Q}$ は A_μ と $\widetilde{A}_\mu$ に結合した電荷、磁荷である。

8.2 ベクトル多重項と重力の結合

8.2.1 ケーラー変換の共変化

k 個の U(1) ベクトル多重項を超重力理論と結合させることを考えてみよう。重力多重項には一つのベクトル場（グラビフォトン）が含まれているから、ここで考える理論は全体として $k+1$ 個の U(1) ゲージ場（そして同じ数の双対ゲージ場）を含む。この系のラグランジアンを書くにはこれら $k+1$ 個のゲージ場に対する電荷行列をうまく与える必要があるが、まずは変換則、ラグランジアンのうちベクトル場を含まない部分についての構造を調べ、そのあとで電荷行列を決定することにする。

まず、重力とグラビティーノのラグランジアンは (8.39) と同様に次のように取っておく。

$$\mathcal{L}_{s=2} = \frac{e}{k^2}R, \quad \mathcal{L}_{s=3/2} = ie\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}D^{(\omega)}_{\nu}\overline{\psi}^{I}_{\rho}. \tag{8.57}$$

これは次の変換のもとで不変である。

$$\delta_{(3/2,2)}e^{\mu}_{\widehat{m}} = \frac{k}{4}(-i\psi_{I\widehat{m}}\sigma^{\mu}\overline{\xi}^{I} + i\overline{\psi}^{I}_{\widehat{m}}\overline{\sigma}^{\mu}\xi_{I}), \quad \delta_{(3/2,2)}\psi_{I\mu} = \frac{1}{k}D^{(\omega)}_{\mu}\xi_{I}. \tag{8.58}$$

次に、スピンが 0 と 1/2 のセクターを見てみよう。作用、変換則は超対称性が大域的であった場合の (7.279) と (7.280) を一般座標変換のもとで共変になるようにした次のものから出発しよう。

$$\mathcal{L}_{s=0} = -eK_{i\overline{j}}\partial_{\mu}x^{i}\partial^{\mu}\overline{x}^{\overline{j}}, \quad \mathcal{L}_{s=1/2} = ieK_{i\overline{j}}(\lambda^{i}_{I}\not{D}^{(M,\omega)}_{\mu}\overline{\lambda}^{I\overline{j}}). \tag{8.59}$$

スピン 0 と 1/2 を混ぜるような変換則は (7.275) と (7.276) をふまえて次のようにとっておく。

$$\delta_{(0,1/2)}x^{i} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}\xi_{I}\lambda^{i}_{J}, \quad \delta_{(0,1/2)}\lambda^{i}_{I} = \frac{i}{2}\epsilon_{IJ}(\not{\partial}x^{i})\overline{\xi}^{J} + \text{h.c.} \tag{8.60}$$

実際に (8.59) のラグランジアンに対してこの変換を行ってみると、次のものが相殺されずに残る。

$$\delta_{(0,1/2)}\left(\mathcal{L}_{(0)} + \mathcal{L}_{(1/2)}\right) = \frac{e}{2}K_{i\overline{j}}\epsilon^{IJ}\lambda^{i}_{I}\sigma^{\mu}(\not{\partial}\overline{x}^{\overline{j}})D^{(\omega)}_{\mu}\xi_{J} \quad + \text{h.c.} \tag{8.61}$$

$\xi_2 = 0$ の場合にはこれはちょうど $\mathcal{N} = 1$ の場合の (3.55) と一致する。この変分を相殺するためには次のネーター結合項を導入すればよい。

$$\mathcal{L}_{J(0,1/2)} = -\frac{ke}{2}K_{i\overline{j}}\epsilon^{IJ}(\lambda^{i}_{I}\sigma^{\mu}(\not{\partial}\overline{x}^{\overline{j}})\psi_{J\mu}) \quad + \text{h.c.} \tag{8.62}$$

この項に含まれるグラビティーノの (8.58) による変換によって上記の変分を相殺する項が得られる。これとは別に、(8.62) の λ の (8.60) による変分から次の新たな変分がえられる。

$$\begin{aligned}\delta_{(0,1/2)}\mathcal{L}_{J} &= -\frac{ike}{4}K_{i\overline{j}}(\overline{\xi}^{I}(\not{\partial}x^{i})\sigma^{\mu}(\not{\partial}\overline{x}^{\overline{j}})\psi_{I\mu}) \quad + \text{h.c.} \\ &= eT^{\widehat{m}}_{\nu}[\text{scalar}]\delta e^{\nu}_{\widehat{m}} + \frac{e}{2k}S_{\mu\nu}(\overline{\xi}^{I}\overline{\sigma}^{\mu\lambda\nu}\psi_{I\mu} + \xi_{I}\sigma^{\mu\lambda\nu}\overline{\psi}^{I}_{\mu})\end{aligned} \tag{8.63}$$

ただし $S_{\mu\nu}$ は $\mathcal{N} = 1$ の場合と全く同様に定義される。

$$S_{\mu\nu} = -\frac{ik^2}{4}K_{i\overline{j}}[\partial_{\mu}x^{i}\partial_{\nu}\overline{x}^{\overline{j}} - \partial_{\nu}x^{i}\partial_{\mu}\overline{x}^{\overline{j}}] = \partial_{\mu}S_{\nu} - \partial_{\nu}S_{\mu}. \tag{8.64}$$

S_{μ} はケーラー変換の複合ゲージ場である。

$$S_{\mu} = \frac{ik^2}{8}(K_{i}\partial_{\mu}x^{i} - K_{\overline{i}}\partial_{\mu}\overline{x}^{\overline{i}}) \tag{8.65}$$

(8.63) の第 2 項を相殺するためには $\mathcal{N} = 1$ の超重力理論と同様にゲージ場 S_{μ} に対応したケーラー変換についての共変化を行う必要がある。そして、ケーラー多様体上に次の交換関係を与えるようなゲージ場が存在しているとする。

$$[D^{(S,M)}_{i}, D^{(S)}_{\overline{j}}] = -\frac{rk^2}{4}K_{i\overline{j}}, \quad [D^{(S,M)}_{i}, D^{(S)}_{j}] = [D^{(S,M)}_{\overline{i}}, D^{(S)}_{\overline{j}}] = 0. \tag{8.66}$$

ただし、r は R-電荷を表す。

このことを踏まえて、これまでに与えたラグランジアン、変換則を次のようにケーラー変換のもとで共変化しておく。

Soryushiron Kenkyu

重力に結合したベクトル多重項（ベクトル場を含まない部分）

$\mathcal{N}=2$ の重力多重項とベクトル多重項が結合した系のラグランジアンのうち、ベクトル場を含まない部分は次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{s=2}=\frac{e}{k^2}R,\quad \mathcal{L}_{s=3/2}=ie\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(S,\omega)}\overline{\psi}_\rho^I. \tag{8.67}$$

$$\mathcal{L}_{s=0}=-eK_{i\bar{j}}\partial_\mu x^i\partial^\mu\overline{x}^{\bar{j}},\quad \mathcal{L}_{s=1/2}=ieK_{i\bar{j}}(\lambda_I^i \not{D}_\mu^{(S,M,\omega)}\overline{\lambda}^{I\bar{j}}). \tag{8.68}$$

$$\mathcal{L}_{J(0,1/2)}=-\frac{ke}{2}K_{i\bar{j}}\epsilon^{IJ}(\lambda_I^i\sigma^\mu(\not{\partial}\overline{x}^{\bar{j}})\psi_{J\mu})\quad +\mathrm{h.c.} \tag{8.69}$$

これらのラグランジアンの和はフェルミオンの高次の項を除き、以下の超対称変換のもとで不変である。

$$\delta_{(3/2,2)}e_{\widehat{m}}^\mu=\frac{k}{4}(-i\psi_{I\widehat{m}}\sigma^\mu\overline{\xi}^I+i\overline{\psi}_{\widehat{m}}^I\overline{\sigma}^\mu\xi_I),\quad \delta_{(3/2,2)}\psi_{I\mu}=\frac{1}{k}D_\mu^{(S,\omega)}\xi_I. \tag{8.70}$$

$$\delta_{(0,1/2)}x^i=\frac{1}{2}\epsilon^{IJ}\xi_I\lambda_J^i,\quad \delta_{(0,1/2)}\lambda_I^i=\frac{i}{2}\epsilon_{IJ}(\not{\partial}x^i)\overline{\xi}^J. \tag{8.71}$$

これまでの計算は基本的に $\mathcal{N}=1$ のカイラル多重項と重力との結合と同じであり、モジュライ空間についてはケーラー多様体であることと、モジュライ空間上のゲージ場 $(S_i,S_{\bar{i}})$ が (8.66) のような性質を持っていることしか用いていない。

8.2.2 プレポテンシャル

k 個のベクトル多重項を含む超重力理論には、グラビフォトンまで含めると、$k+1$ 個のゲージ場が存在する。これに対応して、スカラー多様体上の関数 ϕ^A も $2(k+1)$ 個用意する。前節で見たように、ベクトル多重項を重力と結合させるためには、スカラー多様体上のケーラー変換と $\mathrm{U}(1)_R$ 変換をリンクさせて共変化する必要がある。このとき、ϕ^A は $\mathcal{N}=1$ 超重力理論における超ポテンシャルと同様に R 電荷 2 を持つ $\mathcal{M}$ 上の正則関数であるから、ケーラー変換のもとで次のように変換される。

$$K\to K'=K-4f-4f^*,\quad \xi\to\xi'=e^{k^2(f-f^*)/2}\xi,\quad \phi^A\to\phi'^A=e^{2k^2f}\phi^A. \tag{8.72}$$

このように、ϕ^A をリスケールする自由度があるために、関数 ϕ^A は $\mathbf{CP}^{2k-1}$ 上の斉次座標とみなすことができる。

ケーラーポテンシャル K が大域的な場合と同様に、ϕ を用いて書かれているとすれば、変換性 (8.72) および $\mathrm{Sp}(k+1,\mathbf{Z})$ 対称性より、$e^{-k^2K/2}\propto\vec{\phi}\times\vec{\phi}^*$ となっているはずである。比例係数は K の定数部分の選び方に依存するが、ここでは次のようにとることにする。

$$e^{-k^2K/2}=\frac{k^2}{8\pi i}\vec{\phi}\times\vec{\phi}^* \tag{8.73}$$

実際、k が小さい極限をとって右辺を展開すれば、

$$1-\frac{k^2}{2}K+\mathcal{O}(k^4)=\frac{k^2}{8\pi i}\vec{\phi}\times\vec{\phi}^* \tag{8.74}$$

となる。左辺の 1 は超重力理論において付け加えられた ϕ の $k+1$ 個目の成分の寄与であるとみなせば、残りの部分は k が小さいとき k^2 の項が大域的超対称理論のケーラーポテンシャルの式 (7.262) に一致する。

Soryushiron Kenkyu

上記の変換で共変な共変微分は次のように与えられる。共変微分 $D^{(s)}$ は次のように定義される。ただし w と r はワイルウェイトと R-電荷である。

$$D_i^{(s)} = \partial_i + k^2\frac{w+r}{8}K_i, \quad D_{\bar{i}}^{(s)} = \partial_{\bar{i}} + k^2\frac{w-r}{8}K_{\bar{i}}. \tag{8.75}$$

特に、関数 ϕ^A に対しては

$$D_i\phi^A = \partial_i\phi^A - \frac{\partial_i\vec{\phi}\times\vec{\phi}^*}{\vec{\phi}\times\vec{\phi}^*}\phi^A, \tag{8.76}$$

$$D_{\bar{i}}\phi = \partial_{\bar{i}}\phi = 0. \tag{8.77}$$

一つ目の式ではケーラーポテンシャルの具体形 (8.73) を用いた。この式より、$d\phi^A \propto \phi^A$ の時には $D\phi^A = 0$ となることがわかる。すなわち、$D\phi^A$ は $d\phi^A$ からリスケールの自由度の方向を取り除いたものになっている。

$\vec{\phi} = (\phi^a, \phi_a)$ は $2n+2$ 個の成分を含むが、そのうち独立なのは ϕ^a だけであり、残りの ϕ_a は ϕ^a の正則関数として与えられる。また、ϕ^a と ϕ_a はどちらも同じワイルウェイトと R-電荷を持つから、ϕ_a は ϕ^a の 1 次の斉次関数である。すなわち、次の式が成り立つ。

$$\frac{\partial\phi_a}{\partial\phi^b}\phi^b = \phi_a. \tag{8.78}$$

これは次のように書くこともできる。

$$\vec{\phi}\times d\vec{\phi} = J_{AB}\phi^A d\phi^B = 0 \tag{8.79}$$

special geometry の条件 (7.258) は微分を共変微分に置き換えて

$$J_{AB}D^{(S)}\phi^A \wedge D^{(S)}\phi^B = 0 \tag{8.80}$$

とすべきであるが、実は (8.76) と (8.79) を用いることで、

$$J_{AB}D\phi^A \wedge D\phi^B = J_{AB}d\phi^A \wedge d\phi^B \tag{8.81}$$

を示すことができる。したがって超重力理論においてもやはり次の式が成り立つ。

$$J_{AB}d\phi^A \wedge d\phi^B = d\phi^a \wedge d\phi_a - d\phi_a \wedge d\phi^a = 0 \tag{8.82}$$

(8.82) が成り立つということは、少なくとも局所的には次の式を満足する正則関数 $\mathcal{F}$ が存在することを意味している。

$$\phi_a = \frac{\partial}{\partial\phi^a}\mathcal{F}(\phi^a) \tag{8.83}$$

この関数 $\mathcal{F}$ はプレポテンシャルと呼ばれる。

(8.79) は ϕ_a が ϕ^a の 1 次の斉次式であることを意味しているが、(8.83) によって与えられる ϕ_a がこの条件を満足するためには $\mathcal{F}$ が ϕ^a の 2 次の斉次式であればよい。

ケーラーポテンシャルはプレポテンシャルを用いて次のように与えられる。

$$\frac{8\pi i}{k^2}e^{-k^2K/2} = (\vec{\phi}\times\vec{\phi}^*) = \phi^a(\mathcal{F}_{ab}^* - \mathcal{F}_{ab})\phi^{b*} \tag{8.84}$$

また、共変微分 $D^{(S)}$ 中に現れるケーラーポテンシャルの微分は (8.84) を微分することにより次のように与えられる。

$$2\pi K_i = \frac{i}{2}e^{k^2K/2}(\partial_i\vec{\phi}\times\vec{\phi}^*) = \frac{i}{2}e^{k^2K/2}\partial_i\phi^a(\mathcal{F}_{ab}^* - \mathcal{F}_{ab})\phi^{b*}, \tag{8.85}$$

$$2\pi K_{\bar{i}} = \frac{i}{2}e^{k^2K/2}(\vec{\phi}\times\partial_{\bar{i}}\vec{\phi}^*) = \frac{i}{2}e^{k^2K/2}\phi^a(\mathcal{F}_{ab}^* - \mathcal{F}_{ab})\partial_{\bar{i}}\phi^{b*}. \tag{8.86}$$

最後の表式を得るのに、$\mathcal{F}_{ab}$ が ϕ^c の 0 次の同次式であることから従う式 $\mathcal{F}_{abc}\phi^c = 0$ を用いた。これらを用いれば、変換パラメータ ξ や斉次座標 $\vec{\phi}$ の共変微分を次のように書くことができる。

$$D_\mu^{(s,\omega)}\xi_I = D_\mu^{(\omega)}\xi - iS_\mu\xi_I, \tag{8.87}$$

$$e^{K/4}D^{(s)}\vec{\phi} = \partial(e^{K/4}\vec{\phi}) - 2iS_\mu e^{K/4}\vec{\phi}. \tag{8.88}$$

ただし次の 1-形式を定義した。

$$S_\mu = -\frac{k^2 e^{k^2K/2}}{16(2\pi)}(\mathcal{F}^*_{ab} - \mathcal{F}_{ab})(\partial_\mu\phi^a\phi^{b*} - \phi^a\partial_\mu\phi^{b*}) \tag{8.89}$$

最後に、ケーラー形式のいくつかの表式を与えておこう。

$$\begin{aligned}\omega_2 &= g_{i\bar{j}}dx^i \wedge dx^{*\bar{j}} = \frac{ie^{k^2K/2}}{4\pi}J_{AB}D\phi^A \wedge D\phi^{*B} \\ &= -\frac{2}{k^2}\frac{J_{AB}D\phi^A \wedge D\vec{\phi}^{*B}}{\vec{\phi}\times\vec{\phi}^*} \\ &= -\frac{2}{k^2}\left(\frac{J_{AB}d\phi^A \wedge d\phi^{*B}}{\vec{\phi}\times\vec{\phi}^*} - \frac{d\vec{\phi}\times\vec{\phi}^*}{\vec{\phi}\times\vec{\phi}^*} \wedge \frac{\vec{\phi}\times d\vec{\phi}^*}{\vec{\phi}\times\vec{\phi}^*}\right)\end{aligned} \tag{8.90}$$

8.2.3 電荷行列

ラグランジアンおよび変換則中のベクトル場に関する項を与えるためには電荷行列を与える必要がある。

電荷行列 M_i^a および M_{ia} は $(k+1)\times(k+1)$ の行列である。添え字 a は 1 から $k+1$ の値をとり $k+1$ 個のベクトル場に対応している。添え字 i は 0 から k までの値をとる。このうち $i=0$ はグラビフォトンに対応する。$i=1\sim k$ は k 個の複素スカラー場に対応する。一般に電荷行列は $i=0$ の成分とそれ以外の成分を混ぜるので、添え字 a を持つゲージ場、すなわち電荷、磁荷が整数であるように規格化されたゲージ場については、グラビフォトンとそれ以外に分けることはできず、$k+1$ 個のベクトル場は全て対等である。計量の成分のうち、グラビティーノに対応する部分は $g_{0\bar{0}} = 1$ と取っておくことにする。

この電荷行列は一般には定数である必要はない。$\mathcal{N}=2$ のベクトル多重項の場合にはスカラー場 ϕ^a が存在するので、その関数であってもよい。ただし電荷行列は量子化条件を満足する必要がある。量子化条件 (7.213) と (7.214) をさらに添え字 i と j が 0 かそれ以外かについて場合わけすると、以下の 5 つの独立な式を得ることができる。

$$\vec{M}_i\times\vec{M}^*_{\bar{j}} = -4\pi i g_{i\bar{j}},\quad \vec{M}_0\times\vec{M}^*_{\bar{0}} = -4\pi i,\quad \vec{M}_i\times\vec{M}^*_{\bar{0}} = \vec{M}_i\times\vec{M}_j = \vec{M}_i\times\vec{M}_0 = 0. \tag{8.91}$$

ただし、この式中の i と j は 0 でない値をとるとする。これらの条件を満足するようにスカラー場の関数として電荷行列を与える必要がある。

電荷行列の成分は大域的な場合と同じく関数 $\vec{\phi} = (\phi^a, \phi_a)$ を用いて表されるであろうと予想される。

大域的な場合の電荷行列は、正則関数 $\vec{\phi}$ の微分として与えられた。そこでここでも電荷行列のグラビフォトン以外の場に関する $i=1,\ldots,k$ の部分は大域的な場合のものをケーラー変換のもとで共変化することで次のように与えることができる。

$$\vec{M}_i = e^{k^2K/4}D_i^{(S)}\vec{\phi},\quad (i=1,\ldots,k) \tag{8.92}$$

ディラックの量子化条件を満足するためにはケーラー変換でその絶対値が変化してはならないから、ワイルウェイトが 0 になるように $e^{k^2K/4}$ という因子を導入した。電荷行列のグラビフォトンに対応する成分 $\vec{M}_0$ は、(8.56) と (7.292) を比較することにより、次のように置けば良いと推測できる。

$$\vec{M}_0 = -\frac{ike^{k^2K/4}}{\sqrt{2}}\vec{\overline{\phi}}. \tag{8.93}$$

電荷行列をこのように取ると、ディラックの量子化条件 (8.91) は自動的に成り立つ。実際 $\vec{M}_i \times \vec{M}^*_{\bar{j}} = -4\pi i g_{i\bar{j}}$ と $\vec{M}_0 \times \vec{M}^*_{\bar{0}} = -4\pi i$ はそれぞれ (8.90) と (8.73) に他ならない。また、(8.73) を微分することで $\vec{M}_i \times \vec{M}^*_{\bar{0}} = 0$ も得られる。さらに、$\vec{M}_i \times \vec{M}_j = 0$ および $\vec{M}_i \times \vec{M}_0 = 0$ は (8.79) が成り立つことを要求する。

$k+1$ 個のゲージ場に対する周期行列 τ_{ab} は大域的な場合と同様に (7.217) によって定義される。成分に分ければ次の二つの式が得られる。

$$D_i\phi_a = \tau_{ab}D_i\phi^b, \quad \overline{\phi}_a = \tau_{ab}\overline{\phi}^b. \tag{8.94}$$

このように、τ_{ab} の定義には ϕ と $\overline{\phi}$ の両方を含むから、超対称性が大域的な場合と異なり τ_{ab} は正則関数ではない。

8.2.4 公式

ここでは、次にベクトル場まで含めたラグランジアンの超対称変換の下での不変性を示すのに必要な公式をまとめておく。

電荷行列 $\vec{M}_i$ および $\vec{M}_0$ はどちらも $2k+2$ 次元のシンプレクティックベクトル束 $\mathcal{V}$ 上に値を取る。$\vec{M}_i$ と $\vec{M}_0$ によって張られる $\mathcal{V}$ の $k+1$ 次元部分ベクトル束を $\widetilde{\mathcal{V}}$ と表そう。さらに $\vec{M}_i$ のみによって張られる k 次元部分ベクトル束を $\widetilde{\mathcal{V}}_\lambda$、$\vec{M}_0$ のみによって張られる 1 次元部分ベクトル束を $\widetilde{\mathcal{V}}_\psi$ と表すことにする。

電荷行列の定義、および量子化条件から従ういくつかの公式を与えておこう。まず、$\vec{\phi}$ は正則関数である。これらは共変的な意味でも正則である。すなわち次の式が成り立つ。

$$D^{(S)}_{\bar{i}}\vec{\phi} = 0. \tag{8.95}$$

この式と交換関係 (8.66) を組み合わせれば、次の公式が得られる。

$$D^{(S,M)}_i D^{(S)}_{\bar{j}}\vec{\phi}^* = \frac{k^2}{2}K_{i\bar{j}}\vec{\phi}^*. \tag{8.96}$$

上記の定義より、電荷行列に対して次の式が成り立つ。

$$D_i\vec{M}_0 = 0, \quad D_{\bar{i}}\vec{M}_0 = -\frac{ik}{\sqrt{2}}\vec{M}^*_{\bar{i}}, \quad D_i\vec{M}_j = D_j\vec{M}_i, \quad D_{\bar{i}}\vec{M}_j = -\frac{ik}{\sqrt{2}}K_{\bar{i}j}\vec{M}^*_{\bar{0}}. \tag{8.97}$$

この式とディラック条件を用いると、次の平坦性条件が示される。

$$\vec{M}_0 \times D_k\vec{M}^*_{\bar{0}} = \vec{M}_0 \times D_{\bar{k}}\vec{M}^*_{\bar{0}} = \vec{M}_i \times D_k\vec{M}^*_{\bar{j}} = \vec{M}_i \times D_{\bar{k}}\vec{M}^*_{\bar{j}} = 0. \tag{8.98}$$

さらに、$k+1$ 次元ベクトル束 $\widetilde{\mathcal{V}}$ を k 次元の「ゲージーノ成分」$\widetilde{\mathcal{V}}_\lambda$ と 1 次元の「グラビティーノ成分」$\widetilde{\mathcal{V}}_\psi$ とに分ける射影演算子を定義し、それぞれ $\mathcal{P}_\lambda$ および $\mathcal{P}_\psi$ とおこう。これらは次のように定義される。

$$\mathcal{P}_\lambda\vec{X} = \frac{1}{4\pi i}\vec{M}_i g^{i\bar{j}}(\vec{M}^*_{\bar{j}} \times \vec{X}), \quad \mathcal{P}_\psi\vec{X} = \frac{1}{4\pi i}\vec{M}_0(\vec{M}^*_{\bar{0}} \times \vec{X}). \tag{8.99}$$

これらは射影演算子の条件 $\mathcal{P}_{\lambda/\psi}^2 = \mathcal{P}_{\lambda/\psi}$ や $\mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_\psi = \mathcal{P}_\psi\mathcal{P}_\lambda = 0$ を満足する。また、$\mathcal{P}_\lambda$ と $\mathcal{P}_\psi$ の組は完全である。すなわち $\mathcal{P}_\lambda + \mathcal{P}_\psi = 1$ が成り立つ。

$\widetilde{\mathcal{V}}$ 上で次の式が成り立つことを示そう。

$$\partial\mathcal{P}_\lambda = \partial\mathcal{P}_\psi = 0. \tag{8.100}$$

ただし、∂ はスカラー多様体の正則座標または反正則座標による微分であるとする。$\vec{M}_0$ と $\vec{M}_i$ が $\widetilde{\mathcal{V}}$ の完全系を成すことから、この式を示すには $\mathcal{P}$ を $\mathcal{P}_\lambda$ および $\mathcal{P}_\psi$ を表すものとして $(\partial\mathcal{P})\vec{M}_0 = (\partial\mathcal{P})\vec{M}_i = 0$ を示せばよい。さらに、$\mathcal{P}_\lambda + \mathcal{P}_\psi = 1$ の微分は 0 であるから、$(\partial\mathcal{P}_\lambda)\vec{M}_0 = 0$ と $(\partial\mathcal{P}_\psi)\vec{M}_i = 0$ を示せば十分である。まず $(\partial\mathcal{P}_\lambda)\vec{M}_0$ について見てみよう。これは定義より次のようになる。

$$(\partial\mathcal{P}_\lambda)\vec{M}_0 = \frac{1}{4\pi i}(D\vec{M}_i)g^{i\bar{j}}M^*_{\bar{j}} \times \vec{M}_0 + \frac{1}{4\pi i}\vec{M}_i g^{i\bar{j}}(DM^*_{\bar{j}}) \times \vec{M}_0 \tag{8.101}$$

この第 1 項は電荷行列の直交関係 (8.91) を用いれば 0 である。第 2 項も $(DM^*_{\bar{j}})\times\vec{M}_0 = -M^*_{\bar{j}}\times D\vec{M}_0$ と変形すれば (8.97) と (8.91) を用いることで 0 であることが示される。もう一つの関係式も同様に示される。まず $\mathcal{P}_\psi$ の定義式を用いて

$$(\partial\mathcal{P}_\lambda)\vec{M}_i = \frac{1}{4\pi i}(D\vec{M}_0)M^*_{\bar{0}} \times \vec{M}_i + \frac{1}{4\pi i}\vec{M}_0(DM^*_{\bar{0}}) \times \vec{M}_i \tag{8.102}$$

右辺第 1 項は (8.91) により 0、第 2 項も (8.97) を用いてから (8.91) を用いることで 0 であることが示される。

$\vec{X}$ と $\vec{Y}$ を $\widetilde{\mathcal{V}}$ に値を取る量であるとしよう。このとき $\vec{X} \times \vec{Y} = 0$ である。さらに、$\vec{X}$ と $\vec{Y}$ のうち片方を微分したものについては

$$\vec{X} \times (D\vec{Y}) = -(D\vec{X}) \times \vec{Y} = X^a(D\tau_{ab})Y^b \tag{8.103}$$

が成り立つ。この式と (8.97) を組み合わせると、

$$\frac{ik}{\sqrt{2}}M^*_{\bar{i}} \times \vec{X} = (D_{\bar{i}}\tau_{ab})M_0^a X^b, \quad \frac{ik}{\sqrt{2}}K_{\bar{i}j}M^*_{\bar{0}} \times \vec{X} = (D_{\bar{i}}\tau_{ab})M_j^a X^b. \tag{8.104}$$

積 $(\vec{M}^*_{\bar{i}} \times \vec{X})(\vec{M}^*_{\bar{0}} \times \vec{Y})$ の二つの因子のうちの片方に対して公式 (8.104) を用いてみると、どちらの因子を変形するかで二通りの表し方ができ、次の式が成り立つ。

$$\frac{k}{2\pi}(\vec{M}^*_{\bar{i}} \times \vec{X})(\vec{M}^*_{\bar{0}} \times \vec{Y}) = 2\sqrt{2}(D_{\bar{i}}\tau_{ab})X^b(\mathcal{P}_\psi\vec{Y})^a = 2\sqrt{2}(D_{\bar{i}}\tau_{ab})Y^a(\mathcal{P}_\lambda\vec{X})^b. \tag{8.105}$$

特に $\vec{X} = \vec{Y}$ の場合には、$\mathcal{P}_\psi + \mathcal{P}_\lambda = 1$ を用いることで

$$\frac{k}{2\pi}(\vec{M}^*_{\bar{i}} \times \vec{X})(\vec{M}^*_{\bar{0}} \times \vec{X}) = \sqrt{2}(D_{\bar{i}}\tau_{ab})X^aX^b. \tag{8.106}$$

が得られる。

8.2.5 ベクトル場の導入

以上のことを踏まえて、ラグランジアンおよび変換則のベクトル場を含む部分を決定しよう。まず、周期行列 τ_{ab} が与えられたときに、ベクトル場のラグランジアンの運動項は次のようになる。

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{e}{4}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu} - \frac{e}{8}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau}_{ab})\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^b_{\rho\sigma} = \frac{ie}{4}\widetilde{\tau}_{ab}F^{+a}_{\mu\nu}F^{+b\mu\nu} + \mathrm{c.c.} \tag{8.107}$$

Soryushiron Kenkyu

ベクトル場 A^a_μ をその双対ベクトル場 $A_{a\mu}$ とひとまとめにして $\vec{A}_\mu = (A^a_\mu, A_{a\mu})$ と書けば、これはシンプレクティック束 $\mathcal{V}$ 上に値を取る。また、ゲージ場の強さ $\vec{F}_{\mu\nu}$ も同様に $\mathcal{V}$ 上に値を取るが、その自己双対部分 $\vec{F}^+_{\mu\nu}$ は（以下の計算には影響しないフェルミオンの二次の項を無視すれば）さらに拘束条件 $F^+_{a\mu\nu} = \tau_{ab} F^{+b}_{\mu\nu}$ を満足する。すなわち $\widetilde{\mathcal{V}}$ に値を取る。反自己双対部分 $\vec{F}^-_{\mu\nu}$ はその複素共役 $\widetilde{\mathcal{V}}^*$ に値を取る。ゲージ場とフェルミオンの間の超対称変換を扱うためにはフェルミオンも同様の性質を持つ変数で表すのが便利である。たとえば、ゲージーノに対しては $\widetilde{\mathcal{V}}_\lambda$ に値を取る量として $\vec{\lambda}_I$ を次のように定義する。

$$\vec{\lambda}_I = \vec{M}_i \lambda^i_I. \tag{8.108}$$

逆変換は電荷行列の直交関係を用いて次のように得られる。

$$\lambda^i_I = \frac{1}{4\pi i} g^{i\bar{j}} \vec{M}^*_{\bar{i}} \times \vec{\lambda}_I, \tag{8.109}$$

このような変数を用いることにより、(8.68) に与えられたフェルミオンのラグランジアンは次のように書き換えることができる。

$$\mathcal{L}_{1/2} = -\frac{e}{4\pi} \vec{\lambda}_I \times \not{D} \overline{\vec{\lambda}}^I. \tag{8.110}$$

実際にこれが以前に与えたラグランジアンに一致することは、このラグランジアンに $\vec{\lambda}_I$ の定義式 (8.108) を代入してみればよい。微分が $\vec{M}_{\bar{j}}$ に作用する項が余計に現れるが、平坦性の式 (8.98) のおかげでそれらの項は 0 になる。

フェルミオンをゲージ場と同様 $\mathcal{V}$ に値を取る場として表したおかげで、ゲージ場とゲージーノの間の変換は次のように簡単に書くことができる。

$$\delta_{(1/2,1)} \vec{\lambda}_I = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \mathcal{P}_\lambda \vec{\not{F}} \xi_I, \quad \delta_{(1/2,1)} \vec{A}_\mu = \frac{i}{2\sqrt{2}} (\vec{\lambda}_I \sigma_\mu \overline{\xi}^I) + \text{c.c.} \tag{8.111}$$

$\vec{\lambda}_I$ の変換則に $\mathcal{P}_\lambda$ が挿入されているのは、超対称変換が拘束条件 $\mathcal{P}_\psi \vec{\lambda}_I = 0$ を破らないようにするためである。

ラグランジアン $\mathcal{L}_{1/2} + \mathcal{L}_1$ を超対称変換 $\delta_{(1/2,1)}$ によって変換し、ほぼ不変になることを示そう。ほぼ、というのは、超重力理論に特有な超対称カレントを含む項や、τ_{ab} がスカラー場の関数であることに起因する項を除いて、という意味である。（フェルミオンの 4 次以上の項についてもここでは無視する。）

フェルミオンの運動項を変換すると、次の変分を得る。

$$\delta\mathcal{L}_{1/2} = \frac{e}{4\sqrt{2}(2\pi)} (\vec{\lambda}_I \times \not{\partial} (\mathcal{P}^*_\lambda \vec{\not{F}} \overline{\xi}^I)) + \text{c.c.} = \frac{e}{4\sqrt{2}(2\pi)} (\vec{\lambda}_I \times \not{\partial} \vec{\not{F}} \overline{\xi}^I) + \text{c.c.} \tag{8.112}$$

最後の表式に移るのに (8.100) を用いた。さらに $\lambda_{Ia} = \tau_{ab} \lambda^b_I$ によって磁気的な成分 λ_{Ia} も電気的な成分 λ^a_I で書き直せば、

$$\delta\mathcal{L}_{1/2} = \frac{e}{4\sqrt{2}} (\overline{\lambda}^{Ia} \not{\partial} (\widetilde{\tau}_{ab} \not{F}^b_2 \xi_I)) - \frac{e}{4\sqrt{2}} (\widetilde{\tau}_{ab} \lambda^a_I \not{\partial} (\not{F}^b \overline{\xi}^I)) + \text{c.c.} \tag{8.113}$$

その中で、微分が変換パラメータに作用するものを別にしておこう。

$$\frac{\delta\mathcal{L}^{(1)}_{1/2}}{2\pi} = -\frac{ie}{2\sqrt{2}} (\operatorname{Im} \widetilde{\tau}_{ab}) (\lambda^a_I \sigma^\mu \not{F}^b_2 D_\mu \overline{\xi}^I) + \text{c.c.} \tag{8.114}$$

これは次のネーター項によって相殺できる。

$$\mathcal{L}_{J(1/2,1)} = \frac{ike}{2\sqrt{2}} (\operatorname{Im} \widetilde{\tau}_{ab}) (\lambda^a_I \sigma^\mu \not{F}^b_2 \overline{\psi}^I_\mu) + \text{c.c.} \tag{8.115}$$

それ以外の項については、ゲージ場の運動項とうまく相殺させるように変形したいわけであるが、(8.107) の最後の表式を見てみると、その超対称変換は τ_{ab} を含む項は $F^{+}_{\mu\nu}$ を、$\overline{\tau}_{ab}$ を含む項は $F^{-}_{\mu\nu}$ を含む。そこで上記の変分もそれにあわせて変形することにする。第 1 項はすでにそのようになっているが、上の式の第 2 項は F^{-} と τ_{ab} を含んでいる。そこで、ビアンキ恒等式を用いて $\not\partial \not F^{b}$ を $-D_\mu \not F^{b}\sigma^\mu$ に置き換える。こうすることによって次のように τ_{ab} と F^{+} を含む項とその複素共役だけが残る。

$$\delta\mathcal{L}^{(2)}_{1/2} = \frac{e}{4\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ia}\not\partial(\widetilde{\tau}_{ab}\not F^{+b}_{2})\xi_I) + \frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}(\lambda^a_I\partial_\mu(\not F^{+b})\sigma^\mu\overline{\xi}^I) + \mathrm{c.c.} \tag{8.116}$$

部分積分を行い、微分が λ_I に作用する項と τ_{ab} に作用する項で表すと、

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}^{(2)}_{1/2} \quad = \quad & -\frac{e}{8\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}F^{+b}_{\kappa\lambda}\partial_\mu(\overline{\lambda}^{Ia}\overline{\sigma}^\mu\sigma^{\kappa\lambda}\xi_I) - \frac{e}{8\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab}F^{+b}_{\kappa\lambda}\partial_\mu(\lambda^a_I\sigma^{\kappa\lambda}\sigma^\mu\overline{\xi}^I) \\ & -\frac{e}{4\sqrt{2}}(\partial_\mu\widetilde{\tau}_{ab})(\lambda^a_I\not F^{b}\sigma^\mu\overline{\xi}^I) + \mathrm{c.c.}\end{aligned} \tag{8.117}$$

ここで、$\overline{\sigma}^{\mu\nu}F^{+}_{\mu\nu} = 0$ を用いれば $\overline{\sigma}^\mu\not F^{+} = 2\overline{\sigma}_\nu F^{+\mu\nu}$ および $\not F^{+}\sigma^\mu = -2\sigma_\nu F^{+\mu\nu}$ が成り立つことがわかる。これらを用いると上の変分は次のように書き換えられる。

$$\delta\mathcal{L}^{(2)}_{1/2} = -ie\widetilde{\tau}_{ab}F^{+b\mu\nu}\partial_\mu\delta A^a_\nu - \frac{e}{4\sqrt{2}}(\partial_\mu\widetilde{\tau}_{ab})(\lambda^a_I\not F^{b}\sigma^\mu\overline{\xi}^I) + \mathrm{c.c.} \tag{8.118}$$

この第 1 項はゲージ場運動項の超対称変換と相殺する。

(8.118) の第 2 項を相殺することを考える前に次の変分について見てみよう。ネーター項 (8.69) を (8.125) で変換すると、

$$\delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{J(0,1/2)} = \frac{ike}{8(2\pi)}K_{i\bar{j}}(\lambda^i_I M^*_0 \times \vec{\not F}_2(\not\partial\overline{x}^{\bar{j}})\overline{\xi}^I) \quad + \mathrm{h.c.} \tag{8.119}$$

ここで (8.104) を用いればこれは次のように書き換えられる。

$$\delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{J(0,1/2)} = \frac{e}{4\sqrt{2}}(D_{\bar{j}}\widetilde{\tau}_{ab})(\lambda^a_I\not F^{+b}_2(\not\partial\overline{x}^{\bar{j}})\overline{\xi}^I) \quad + \mathrm{h.c.} \tag{8.120}$$

これは (8.118) の第 2 項と部分的に相殺して、結局次のものが残る。

$$-\frac{e}{4\sqrt{2}}\widetilde{\tau}_{ab,i}(\lambda^a_I\not F^{b}(\not\partial x^i)\overline{\xi}^I) + \mathrm{c.c.} \tag{8.121}$$

これは $\delta_{(0,1/2)}\lambda^i_I$ に比例する部分を含んでおり、次の相互作用項の導入によって相殺できる。

$$\frac{\mathcal{L}_3}{2\pi} = \frac{ie}{4\sqrt{2}}(\widetilde{\tau}_{ab,i})\epsilon^{IJ}(\lambda^a_I\not F^{b}_2\lambda^i_J) + \mathrm{h.c.} \tag{8.122}$$

ここで、$\lambda^a_I = M_i{}^a\lambda^i_I$ および $M_j{}^a(\tau_{ab,i}) = D_i(M_{jb}) - (D_iM_j{}^a)\tau_{ab}$ を用いればこの項の二つのゲージーノが対称に現れていることがわかる。

次に、グラビティーノとゲージ場の間の超対称変換について見てみよう。今度もゲージーノと同様に $\widetilde{\mathcal{V}}_\psi$ 上に値を取る量として次のように $\vec{\psi}_{I\mu}$ を定義する。

$$\vec{\psi}_{I\mu} = \vec{M}_0\psi_{I\mu}, \quad \psi_{I\mu} = \frac{1}{4\pi i}\vec{M}^*_0 \times \vec{\psi}_{I\mu}. \tag{8.123}$$

これを用いれば、ラグランジアンは次のように書くことができる。

$$\mathcal{L}_{3/2} = -\frac{e}{4\pi}\vec{\psi}_{I\mu} \times \sigma^{\mu\nu\rho}D_\nu\vec{\overline{\lambda}}^I_\rho. \tag{8.124}$$

これが実際に以前に与えたラグランジアンと等しいことを見るには $\vec{\psi}_{I\mu}$ の定義式 (8.123) を代入し、平坦性の式 (8.98) を用いればよい。変数 $\vec{\psi}_{I\mu}$ を用いればゲージ場とグラビティーノの間の変換は次のように簡単な形で表される。

$$\delta_{(1,3/2)}\vec{\psi}_{I\mu} = -\frac{1}{4}\epsilon_{IJ}\mathcal{P}_\psi \vec{\not F}_2 \sigma_\mu \overline{\xi}^J, \quad \delta_{(1,3/2)}\vec{A}_\mu = -\frac{i}{2}\epsilon^{IJ}\xi_I \vec{\psi}_{J\mu} + \text{h.c.}. \tag{8.125}$$

超対称変換が拘束条件 $\mathcal{P}_\lambda \vec{\psi}_{I\mu} = 0$ を破らないようにするためにグラビティーノの変換則に射影演算子 $\mathcal{P}_\psi$ を挿入した。$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{3/2}$ はこの超対称変換のもとでほぼ不変である。ほぼ不変、というのは、変換パラメータ ξ や周期行列 τ_{ab} の微分を含む項を除き、全ての変分が相殺することを意味する。(ここではフェルミオンの 4 次以上の項は無視する。)

$\mathcal{L}_{3/2}$ を上記の変換則で変換してみよう。$\sigma^{\mu\nu\rho} = (1/2)(\sigma^\rho\overline{\sigma}^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}\sigma^\rho)$ であり、4 次元では $\sigma^\rho \not F \sigma_\rho = 0$ であることを用いれば、次のように書くことができる。

$$\delta\mathcal{L}_{3/2} = \frac{e}{16(2\pi)}\epsilon^{IJ}(\vec{\psi}_{I\mu} \times \sigma^\rho\overline{\sigma}^{\mu\nu}D_\nu(\vec{\not F}_2\overline{\sigma}_\rho\xi_J)) + \text{c.c.} \tag{8.126}$$

$\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{1/2}$ の計算の時と同様に、(8.100) を用いて上の変分から $\mathcal{P}_\psi^*$ を消した。ここで、上記の変分 (8.126) を、微分が変換パラメータに作用する部分 $\delta\mathcal{L}_{3/2}^{(1)}$ とそれ以外 $\delta\mathcal{L}_{3/2}^{(2)}$ に分けておこう。まず、$\delta\mathcal{L}_{3/2}^{(1)}$ についてであるが、$\overline{\sigma}^{\mu\nu} = \overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu - g^{\mu\nu}$ と書き換え、再び $\sigma^\rho\not F\overline{\sigma}_\rho = 0$ であることを用いれば、次のように書き換えられる。

$$\delta\mathcal{L}_{3/2}^{(1)} = \frac{e}{16(2\pi)}\epsilon^{IJ}(\vec{\psi}_{I\mu} \times \sigma^\rho\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\vec{\not F}_2^-\overline{\sigma}_\rho D_\nu\xi_J) + \text{c.c.} \tag{8.127}$$

ここで、$\overline{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu}$ の反自己双対部分のみを含むから $F_{\mu\nu}^-$ と書いておいた。$\sigma^\nu\vec{\not F}_2^- = 2\vec{F}^{-\nu\kappa}\sigma_\kappa$ を用いると、これはさらに次のように変形できる。

$$\delta\mathcal{L}_{3/2}^{(1)} = \frac{e}{8(2\pi)}\epsilon^{IJ}(\vec{\psi}_{I\mu}\sigma^\rho\overline{\sigma}^\mu\sigma_\kappa\overline{\sigma}_\rho D_\nu\xi_J) \times \vec{F}^{-\nu\kappa} + \text{c.c.} \tag{8.128}$$

$\overline{\sigma}^\mu\sigma_\kappa = \delta_\kappa^\mu + \overline{\sigma}^\mu{}_\kappa$ のうち、ρ の縮約で残るのは δ_κ^μ だけであり、最終的に次のカレント項が得られる。

$$\delta\mathcal{L}_{3/2}^{(1)} = \frac{e}{4\pi}\epsilon^{IJ}(\vec{\psi}_{I\mu}D_\nu\xi_J) \times \vec{F}^{-\nu\mu} + \text{c.c.} = ie(\text{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\epsilon^{IJ}(\psi_{I\mu}^a D_\nu\xi_J)F^{-b\mu\nu} + \text{c.c.} \tag{8.129}$$

この項は、次のネーター項の導入によって相殺する。

$$\mathcal{L}_{J(1,3/2)} = -\frac{ike}{2}(\text{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\epsilon^{IJ}(\psi_{I\mu}^a\psi_{J\nu})F^{-b\mu\nu} + \text{c.c.} \tag{8.130}$$

$\psi_{I\mu}^a = M_0{}^a\psi_{I\mu}$ を用いればこれは明らかに二つのグラビティーノについて対称である。

次に、$\delta\mathcal{L}_{3/2}^{(2)}$、すなわち (8.126) で微分が ξ 以外に作用する部分は、まず $\overline{\sigma}^{\mu\nu}$ を $\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu - g^{\mu\nu}$ と書き換えれば、$g^{\mu\nu}$ のほうは ρ の縮約で消えるので、無視することができる。そして、第 2 項の $\not D\not F$ をビアンキ恒等式を用いて $-D_\nu\not F\sigma^\nu$ に書き直せば、次の式を得る。

$$\delta\mathcal{L}_{3/2}^{(2)} = \frac{e}{16}\epsilon_{IJ}(\overline{\psi}_\mu^{Ia}\overline{\sigma}^\rho\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu D_\nu(\widetilde{\tau}_{ab}\not F_2^{+b})\sigma_\rho\overline{\xi}^J) + \frac{e}{16}\epsilon^{IJ}(\widetilde{\tau}_{ab}\psi_{I\mu}^a\sigma^\rho\overline{\sigma}^\mu(D_\nu\not F_2^{+b})\sigma^\nu\overline{\sigma}_\rho\xi_J) + \text{c.c.} \tag{8.131}$$

ここで、$\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ が $F_{\mu\nu}$ の自己双対部分のみを含むので $+$ をつけておいた。自己双対テンソルが満足する式 $\sigma^\mu\not F^+ = 2F^{+\mu\nu}\sigma_\nu$ などにより

$$\delta\mathcal{L}_{3/2}^{(2)} = \frac{e}{2}\epsilon_{IJ}(\overline{\psi}_\mu^{Ia}\overline{\xi}^J)D_\nu(\widetilde{\tau}_{ab}F_2^{+b\nu\mu}) + \frac{e}{2}\epsilon^{IJ}(\widetilde{\tau}_{ab}\psi_{I\mu}^a\xi_J)(D_\nu F_2^{+b\mu\nu}) + \text{c.c.} \tag{8.132}$$

Soryushiron Kenkyu

部分積分をすれば

$$\delta\mathcal{L}^{(2)}_{3/2} = \frac{e}{2}\widetilde{\tau}_{ab}D_\mu(\epsilon^{IJ}\psi^a_{I\nu}\xi_J - \epsilon_{IJ}\overline{\psi}^{Ia}_\nu\overline{\xi}^J)(F_2^{+b\mu\nu}) - \frac{e}{2}(D_\nu\widetilde{\tau}_{ab})\epsilon^{IJ}(\psi^a_{I\mu}\xi_J)(F_2^{+b\mu\nu}) + \text{c.c.} \quad (8.133)$$

この第 1 項は丁度 $\mathcal{L}_1$ のゲージ場の変分と相殺する。第 2 項と相殺する項は、次のネーター項の変分より得られる。

$$\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{J(0,1/2)} = \frac{ike}{4\sqrt{2}(2\pi)}(\vec{M}^*_{\bar{i}} \times \vec{F}^{+\mu\nu})\epsilon^{IJ}(\xi_I\sigma_\mu(\partial\!\!\!/\overline{x}^{\bar{i}})\psi_{J\nu}) \quad + \text{h.c.}, \quad (8.134)$$

$$\delta_{(0,1/2)}\mathcal{L}_{J(1/2,1)} = \frac{ike}{4\sqrt{2}(2\pi)}(\vec{M}^*_{\bar{i}} \times \vec{F}_2^{+\mu\nu})\epsilon^{IJ}(\xi_I(\partial\!\!\!/\overline{x}^{\bar{i}})\overline{\sigma}_\mu\psi_{J\nu}) + \text{h.c.} \quad (8.135)$$

これらの和をとり (8.104) を用いれば

$$\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{J(0,1/2)} + \delta_{(0,1/2)}\mathcal{L}_{J(1/2,1)} = \frac{e}{2}(\partial_\nu\widetilde{\tau}_{ab})\epsilon^{IJ}(\psi^a_{I\mu}\xi_J)F^{+b\mu\nu} \quad + \text{h.c.}, \quad (8.136)$$

となり、(8.133) の第 2 項を相殺する。

残されたのは F について二次の項である。まず $F^2\lambda\xi$ を含む項について見てみよう。

(8.115) より、次の変分が得られる。

$$\begin{aligned}
\delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{J(1/2,1)} &= \frac{ike}{32\sqrt{2}(2\pi)^2}\epsilon^{IJ}(\lambda^i_I\sigma^\mu(M_i \times F\!\!\!/_2)(\vec{M}_0 \times F\!\!\!/)\overline{\sigma}_\mu\xi_J) + \text{c.c.} \\
&= -\frac{ike}{4\sqrt{2}(2\pi)^2}\delta\overline{x}^{\bar{i}}(\vec{M}^*_{\bar{i}} \times \vec{F}^{+\mu\nu})(\vec{M}^*_{\bar{0}} \times \vec{F}^+_{\mu\nu}) + \text{c.c.} \\
&= -\frac{ie}{4}\delta\overline{x}^{I\bar{i}}(D_{\bar{i}}\widetilde{\tau}_{ab})F^{+a\mu\nu}F^{+b}_{\mu\nu} + \text{c.c.}
\end{aligned} \quad (8.137)$$

最後の式変形で (8.106) を用いた。一方

$$\begin{aligned}
\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_3 &= -\frac{ie}{8}(\widetilde{\tau}_{ab,i})\epsilon^{IJ}(\lambda^i_I F\!\!\!/^b_2(\mathcal{P}_\lambda\vec{F\!\!\!/})^a\xi_J) + \text{h.c.} \\
&= -\frac{ie}{8}(\widetilde{\tau}_{ab,i})\epsilon^{IJ}(\lambda^i_I F\!\!\!/^b_2 F\!\!\!/^a\xi_J) + \frac{ie}{8}(\widetilde{\tau}_{ab,i})\epsilon^{IJ}(\lambda^i_I F\!\!\!/^b_2(\mathcal{P}_\psi\vec{F\!\!\!/})^a\xi_J) + \text{h.c.}
\end{aligned} \quad (8.138)$$

ここで、この式の第 2 項は $\tau_{ab,i}(\mathcal{P}_\psi\vec{F\!\!\!/})^a$ を含むが、これは 0 である。なぜなら、$\mathcal{P}_\psi$ の定義よりこの式は $\tau_{ab,i}M_0{}^a$ を含むが、これは $D_iM_{0b} - \tau_{ab}(D_iM_0{}^a)$ と書くことが出来、このそれぞれの項が 0 であるからである。従って、

$$\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_3 = -\frac{ie}{4}(\widetilde{\tau}_{ab,i})\delta x^i F^{+a}_{\mu\nu}F^{+b\mu\nu} + \text{h.c.} \quad (8.139)$$

(8.137) と (8.139) は丁度ゲージ場運動項のスカラー場の変換で相殺される。

最後に、$F^2\psi\xi$ を含む項について見てみよう。(8.115) の超対称変換より、

$$\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{J(1/2,1)} = -\frac{ke}{4(2\pi)}(\xi_I\sigma^\kappa\overline{\psi}^I_\mu)(\mathcal{P}_\lambda\vec{F}^{+\kappa\nu}) \times \vec{F}^{-\mu\nu} + \text{c.c.} \quad (8.140)$$

一方 (8.130) の超対称変換より

$$\delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{J(1,3/2)} = -\frac{ke}{4(2\pi)}(\xi_I\sigma^\kappa\overline{\psi}^I_\mu)(\mathcal{P}_\psi\vec{F}^{+\mu\nu}) \times \vec{F}^-_{\nu\kappa} + \text{c.c.} \quad (8.141)$$

従って二つの寄与を加えると、

$$\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{J(1/2,1)} + \delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{J(1,3/2)} = -\frac{ke}{4(2\pi)}(\xi_I\sigma^\kappa\overline{\psi}^I_\mu)\vec{F}^{+\mu\nu} \times \vec{F}^-_{\nu\kappa} + \text{c.c.} \quad (8.142)$$

これは丁度ゲージ場運動項の多脚場の変分と相殺する。

以上でフェルミオンの二次までの項について全ての変分が相殺することが示された。

重力に結合したベクトル多重項（ベクトル場を含む部分）

ベクトル場の運動項は次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{e}{4}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu} - \frac{e}{8}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau}_{ab})\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^b_{\rho\sigma} = \frac{ie}{4}\widetilde{\tau}_{ab}F^{+a}_{\mu\nu}F^{+b\mu\nu} + \mathrm{c.c.} \tag{8.143}$$

これと同時に次の相互作用項も存在する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= \frac{ie}{4\sqrt{2}}(\widetilde{\tau}_{ab,i})\epsilon^{IJ}(\lambda^a_I \not{F}^b_2 \lambda^i_J) + \mathrm{c.c.}, & (8.144)\\ \mathcal{L}_{J(1/2,1)} &= \frac{ike}{2\sqrt{2}}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})(\lambda^a_I\sigma^\mu \not{F}^b_2\overline{\psi}^I_\mu) + \mathrm{c.c.}, & (8.145)\\ \mathcal{L}_{J(1,3/2)} &= -\frac{ike}{2}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau}_{ab})\epsilon^{IJ}(\psi^a_{I\mu}\psi_{J\nu})F^{-b\mu\nu} + \mathrm{c.c.} & (8.146) \end{aligned}$$

さらに次の超対称変換を導入する。

$$\delta_{(1/2,1)}\vec{\lambda}_I = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{P}_\lambda \vec{\not{F}}_2\xi_I, \quad \delta_{(1/2,1)}\vec{A}_\mu = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\vec{\lambda}_I\sigma_\mu\overline{\xi}^I) + \mathrm{c.c.} \tag{8.147}$$

$$\delta_{(1,3/2)}\vec{\psi}_{I\mu} = -\frac{1}{4}\epsilon_{IJ}\mathcal{P}_\psi \vec{\not{F}}_2\sigma_\mu\overline{\xi}^J, \quad \delta_{(1,3/2)}\vec{A}_\mu = -\frac{i}{2}\epsilon^{IJ}\xi_I\vec{\psi}_{J\mu} + \mathrm{c.c.}. \tag{8.148}$$

8.2.6 中心電荷

重力が結合された場合について中心電荷の式がどうなるか確認しておこう。$\vec{A}_\mu$ と結合した粒子に対する中心電荷の情報は、極小超重力理論で行ったように、$\vec{A}_\mu$ を二回超対称変換し、変換パラメータの微分を含む項から抜き出すことができる。その部分に注目して変換してみると、次の結果を得る。

$$[\delta', \delta]\vec{A}_\mu = -\frac{i}{2k}D_\mu(\vec{M}_0\epsilon^{IJ}\xi_I\xi'_J) + \mathrm{c.c.} + \cdots = \frac{2i}{k}D_\mu(\vec{M}_0\alpha) + \mathrm{c.c.} + \cdots \tag{8.149}$$

$\cdots$ は変換パラメータの微分を含まない項を表す。従って、荷電粒子の中心電荷は次のように与えられる。

$$\widehat{Z} = -\frac{2}{k}(M^a_0 Q_a + M_{0a}\widetilde{Q}^a) = \sqrt{2}ie^{k^2K/4}(Q_a\phi^{*a} + \widetilde{Q}^a\phi^*_a) \tag{8.150}$$

ただし、Q_a は A^a_μ に結合した電荷、ただし、$\widetilde{Q}^a$ は $\widetilde{A}_{a\mu}$ に結合した磁荷を表す。(8.150) は超対称性が大域的な場合と因子 $e^{k^2K/4}$ だけが異なる。

8.2.7 大域的極限

k 個のベクトル多重項を含む理論において大域的極限は次の方法によりとることができる。

まず、モジュライ空間 $\mathcal{M}$ 上の $k+1$ 個の正則関数 ϕ^a（$a = 0, \ldots, k$）のうちの一つ（ここでは ϕ^0）を選び、次のように φ^i（$i = 1, \ldots, k$）を定義する。

$$\varphi^i = \frac{\phi^i}{\phi^0} \tag{8.151}$$

そして、プレポテンシャルを次のようにおく。

$$\mathcal{F}(\phi^a) = (\phi^0)^2 \left(-\frac{4\pi i}{k^2} + f(\varphi^i) \right) \tag{8.152}$$

$f(\varphi^i)$ は k 個の変数 φ^i の任意の正則関数であり、これが大域的極限におけるプレポテンシャルになる。$\mathcal{F}$ の ϕ^a による微分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &= \phi^0 \left(-\frac{4\pi i}{k^2} + 2f - f_i\varphi^i \right), & (8.153)\\
\mathcal{F}_i &= \phi^0 f_i, & (8.154)\\
\mathcal{F}_{00} &= -\frac{4\pi i}{k^2} + 2f - 2f_i\varphi^i + f_{ij}\varphi^i\varphi^j, & (8.155)\\
\mathcal{F}_{0i} &= f_i - f_{ij}\varphi^j, & (8.156)\\
\mathcal{F}_{ij} &= f_{ij}. & (8.157)
\end{aligned}$$

これらを用いると、ケーラーポテンシャルを計算することができる。

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{k^2}{2}K} &= \frac{k^2}{8\pi i}\phi^a(\mathcal{F}^*_{ab} - \mathcal{F}_{ab})\phi^{*b} \\
&= |\phi^0|^2 + \frac{k^2}{8\pi i}|\phi^0|^2 \left(\varphi^i f^*_i - \varphi^{*i} f_i - 2f + f_i\varphi^i + 2f^* - f^*_i\varphi^{i*} \right) \qquad (8.158)
\end{aligned}$$

従って、ケーラー変換を用いて ϕ^0 を $\phi^0 = 1 + k^2 a(\varphi^i)$ のように固定すると、$k \to 0$ の極限において

$$K = \frac{i}{4\pi}\left(\varphi^i f^*_i - \varphi^{*i} f_i - 2f + f_i\varphi^i + 2f^* - f^*_i\varphi^{i*} \right) - 2a - 2a^* \tag{8.159}$$

を得る。任意関数 $a(\varphi^i)$ は大域的極限におけるケーラー変換の自由度を表しており、適当に再定義を行うことにより標準的な形

$$K = \frac{i}{4\pi}\left(\varphi^i f^*_i - \varphi^{*i} f_i \right) - 2a - 2a^* \tag{8.160}$$

にすることができる。

8.3　5 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論の $\mathbf{S}^1$ コンパクト化

8.3.1　スピノルの関係

5 次元のベクトル多重項のラグランジアンもプレポテンシャルを用いて表すことができる。しかもプレポテンシャルは実数場の 3 次式であり、この 3 次項の係数を与える定数 C_{abc} を与えれば完全に決まってしまう。この超重力理論を $\mathbf{S}^1$ コンパクト化すると、4 次元の $\mathcal{N}=2$ 超重力理論が得られるが、そのときどのようなプレポテンシャルを持つ理論になるかを調べてみよう。

まず、4 次元と 5 次元のスピノルについてまとめておく。5 次元のディラック行列と 4 次元のディラック行列は同じものを用いることができる。それらのうち、コンパクト化される方向のディラック行列が 4 次元のカイラリティ行列になる。習慣に従い、この方向を x^5 とする。（つまり、5 つの座標を $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5)$ とする。）5 次元の荷電共役行列の性質は

$$C_5^T = -C_5, \quad (\gamma^M C_5)^T = -\gamma^M C_5. \tag{8.161}$$

Soryushiron Kenkyu

である。一方 4 次元の荷電共役行列の性質は

$$C_4^T = -C_4, \quad (\gamma^\mu C_4)^T = +\gamma^\mu C_4, \quad (\gamma^5 C_4)^T = -\gamma^5 C_4. \tag{8.162}$$

である。これら二つの荷電共役行列の関係は次のように取ることができる。

$$C_5 = -\gamma^5 C_4 \tag{8.163}$$

符号はあとで都合がいいように取った。このように、5 次元と 4 次元では荷電共役行列が異なるので、それぞれの次元でのマヨラナ共役を区別する必要がある。それぞれの次元でのマヨラナ共役を $\psi_{c5/c4}$ のように表すことにする。これらは次のように定義される。

$$\psi_{c5} = C_5\overline{\psi}, \quad \psi_{c4} = C_4\overline{\psi}. \tag{8.164}$$

これらは次のように γ^5 だけ異なる。

$$\psi_{c5} = -\gamma^5\psi_{c4} \tag{8.165}$$

5 次元のディラックスピノルを

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{8.166}$$

のように 4 次元のカイラリティで分解しよう。このマヨラナ共役は次のように与えられる。

$$\psi_{c5} = \begin{pmatrix} -\psi_{2c} \\ \psi_{1c} \end{pmatrix} \tag{8.167}$$

4 次元のマヨラナ共役を添え字 c で表した。これを見ると、二回 5 次元のマヨラナ共役演算を行うと符号が反転することがわかる。従って 5 次元では 4 次元と違いマヨラナスピノルを定義することはできない。しかし、内部対称性の実負表現に属している場合には、シンプレクティックマヨラナスピノルを定義することができる。Sp(1) 添え字 I を持つスピノル ψ_I とそのマヨラナ共役は次のように与えられる。

$$\psi_I = \begin{pmatrix} \psi_{1I} \\ \epsilon_{IJ}\psi_2^J \end{pmatrix}\epsilon_{IJ} \quad \psi_{c5}^J = \begin{pmatrix} \psi_{2cI} \\ \epsilon_{IJ}\psi_{1c}^J \end{pmatrix} \tag{8.168}$$

マヨラナ共役を取ると添え字の位置が変わるので、元に戻す操作を行った。これを見ると、次のようにシンプレクティックマヨラナスピノルを定義することができる。

$$\psi_I = \epsilon_{IJ}\psi_{c5}^J. \tag{8.169}$$

これは、4 次元の意味で ψ_{1I} と ψ_2^I がマヨラナ共役になっていることを表す。ψ_I と ψ^I をそれぞれ 4 次元のあるマヨラナスピノルの左巻き成分および右巻き成分とすると、5 次元のシンプレクティックマヨラナスピノルを次のように分解することができる。

$$\psi_I^{(5)} = \begin{pmatrix} \psi_I \\ \epsilon_{IJ}\psi^J \end{pmatrix} \tag{8.170}$$

Soryushiron Kenkyu

8.3.2 大域的な場合

まず、大域的な超対称性の場合に 4 次元と 5 次元の対応を見ておこう。5 次元ベクトル多重項の変換則は

$$\begin{aligned}\delta a^{(5)a} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{(5)Ia}\xi_I^{(5)}), &(8.171)\\ \delta\lambda_I^{(5)a} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}(\not{\partial}a^{(5)a})\xi_I^{(5)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}_2^{(5)a}\xi_I^{(5)}, &(8.172)\\ \delta A_M^{(5)a} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{\lambda}^{(5)Ia}\gamma_M\xi_I^{(5)} &(8.173)\end{aligned}$$

(5 次元の章で与えられているものとは異なる。あとで都合のいいようにゲージーノ λ の符号を反転させた。）5 次元のスピノルが次のように 4 次元のスピノルと対応しているとしよう。

$$\xi_I^{(5)} = \begin{pmatrix}\xi_I\\ \epsilon_{IJ}\xi^J\end{pmatrix},\quad \lambda_I^{(5)a} = \begin{pmatrix}\lambda_I^a\\ \epsilon_{IJ}\lambda^{Ja}\end{pmatrix} \tag{8.174}$$

これを 5 次元の超対称変換則に代入すると、次のように分解される。

$$\begin{aligned}\delta\lambda_I^a &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}(\not{\partial}a^{(5)a})\epsilon_{IJ}\xi^J + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\not{\partial}A_5^{(5)a})\epsilon_{IJ}\xi^J - \frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}^{(5)a}\xi_I, &(8.175)\\ \delta A_\mu^{(5)a} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ia}\gamma_\mu\xi_I + \overline{\lambda}_I^a\gamma_\mu\xi^I), &(8.176)\\ \delta A_5^{(5)a} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\epsilon_{IJ}\overline{\lambda}^{Ia}\xi^I + \epsilon^{IJ}\overline{\lambda}_I^a\xi_I), &(8.177)\\ \delta a^{(5)a} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}(\epsilon_{IJ}\overline{\lambda}^{Ia}\xi^J - \epsilon_{IJ}\overline{\lambda}^{Ia}\xi_I) &(8.178)\end{aligned}$$

これは次の同一視により 4 次元 $\mathcal{N}=2$ のベクトル多重項の変換則に一致する。

$$\phi^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_5^{(5)a} - ia^{(5)a}),\quad A_\mu^a = A_\mu^{(5)a} \tag{8.179}$$

次に、ラグランジアンを見てみよう。5 次元 $\mathcal{N}=1$ 理論の $\mathrm{U}(1)^n$ 理論のラグランジアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = f_{ab}\left(-\frac{1}{2}\partial_\mu a^a\partial^\mu a^b - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF^{b\mu\nu}\right) + \frac{i}{24}f_{abc}\gamma^{\lambda\mu\nu\rho\sigma}A_\lambda^aF_{\mu\nu}^bF_{\rho\sigma}^c \tag{8.180}$$

ただし、f_{ab} および f_{abc} はスカラー場の実関数として与えられるプレポテンシャル f の微分として次のように与えられる。

$$f_{ab} = \partial_a\partial_bf,\quad f_{abc} = \partial_a\partial_b\partial_cf. \tag{8.181}$$

f は高々 3 次の多項式でなければばならない。従って f_{abc} はスカラー場に依存しない定数である。

この理論を半径 R の $\mathbf{S}^1$ でコンパクト化してみよう。特にゲージ場の運動項に注目すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(2\pi R)f_{abc}a^cF_{\mu\nu}^aF^{b\mu\nu} + \frac{1}{8}(2\pi R)f_{abc}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_5^aF_{\mu\nu}^bF_{\rho\sigma}^c\\ &= \frac{i}{4}(2\pi R)f_{abc}(ia^c - A_5^c)F_{\mu\nu}^{a(+)}F^{b(+)\mu\nu} + \mathrm{c.c.} &(8.182)\end{aligned}$$

これは τ_{ab} が次のように与えられることを意味する。

$$\tau_{ab} = -(2\pi)^2Rf_{abc}(A_5^{(5)c} - ia^{(5)c}) = -\sqrt{2}(2\pi)^2Rf_{abc}\phi^c \tag{8.183}$$

Soryushiron Kenkyu

従って、プレポテンシャルは次のように決まる。

$$\mathcal{F} = -\frac{\sqrt{2}}{6}(2\pi)^2 R f_{abc}\phi^a\phi^b\phi^c \tag{8.184}$$

プレポテンシャルがこのような特殊な形になることは、ラグランジアンを直接コンパクト化しなくても、以下のような考察をすることによっても導かれる。まず、4 次元の複素スカラー場 ϕ^a が (8.179) のように 5 次元のゲージポテンシャルを含むことに注目しよう。ここではこのゲージ場に結合する荷電粒子は考えていないので、このポテンシャルを定数だけずらしても理論は変化しない。したがって、コンパクト化の結果得られる 4 次元の理論のラグランジアンは $\phi^a \to \phi^a + c^a$, $c^a \in \mathbf{R}$ のようなシフトで不変であるはずである。4 次元の理論のラグランジアンにはプレポテンシャルの二階以上の微分だけが現れており、しかも二階微分の実部は位相項の係数であるから定数だけ変化しても物理的には等価である。したがって次の式が成り立てばよい。

$$\mathcal{F}_{ab}(\phi^a + c^a) = \mathcal{F}_{ab}(\phi^a) + \text{real number} \tag{8.185}$$

このような関数は次のように展開することができる。

$$\mathcal{F}_{ab} = \frac{1}{6}a_{abc}\phi^a\phi^b\phi^c + \frac{1}{2}b_{ab}\phi^a\phi^b + c_a\phi^a + d, \quad a_{abc} \in \mathbf{R}. \tag{8.186}$$

c_a および d はラグランジアンにはまったく現れず、b_{ab} は c_{abc} が 0 でなければ適当に場をシフトすることで 0 にとることができる。こうしてプレポテンシャルが (8.184) のように与えられることが結論された。

8.3.3 超重力理論の場合

5 次元の超重力理論をコンパクト化したときに得られる 4 次元の超重力理論のプレポテンシャルがどのような形になるかを考えてみよう。大域的な場合と異なるのは次の二点である。

1. 計量の非対角成分 $g_{\mu 5}$ から新たなベクトル場が現れる。これは 4 次元のベクトル多重項に属する。

2. 4 次元のプレポテンシャルは、 2 次の斉次式でなければならない。

これら二つのことを考慮すると、プレポテンシャルは大域的な場合のものから次のように変更されると期待される。

$$\mathcal{F} \sim f_{abc}\phi^a\phi^b\phi^c \to \frac{C_{abc}\phi^a\phi^b\phi^c}{(\phi^0)^2} \tag{8.187}$$

ただし、C_{abc} は定数テンソルで大域的な場合の f_{abc} に対応するものであり、ϕ^0 は 5 次元の重力多重項からコンパクト化によって現れるベクトル多重項のスカラー成分である。以下では実際にこのようなプレポテンシャルが得られることを確認する。

$a = 1, 2, \ldots$ によってラベルされる $\mathrm{U}(1)$ ゲージ場を含む 5 次元の超重力理論の作用は次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{e}{\kappa^2}R - \frac{e}{4}f_{ab}F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu} - \frac{e}{2}g_{ij}\partial_\mu x^i\partial^\mu x^j + \frac{ie}{24}C_{abc}\gamma^{\kappa\mu\nu\rho\sigma}A^a_\kappa F^b_{\mu\nu}F^c_{\rho\sigma} \tag{8.188}$$

ここではフェルミオンを含む項は省略した。4 次元の場合と同様に、ベクトル場のうちの一つの線形結合はグラビフォトンであり、ベクトル場の個数はベクトル多重項の個数よりも一つ少ない。

Soryushiron Kenkyu

Chern-Simons 項の係数 C_{abc} は定数であり、添え字について完全対称である。4 次元の場合の電荷行列に相当する行列 M^a および M_i^a を定義することができる。添え字 a はゲージ場の運動項の係数 f_{ab} によって自由に上げ下げできるとする。これらは次の条件を満足する。

$$C_{abc}M'^aM'^bM'^c=-\frac{6}{\kappa^2} \tag{8.189}$$

$$M'_a=-\frac{1}{2}C_{abc}M'^bM'^c,\quad M_i^a=\partial_iM'^a,\quad M_{ia}=C_{abc}M'^bM_i^c \tag{8.190}$$

$$g_{ij}=C_{abc}M'^aM_i^bM_j^c,\quad f_{ab}=\kappa^2M'_aM'_b+C_{abc}M'^c,\quad a_{ijk}=-\frac{1}{2}C_{abc}M_i^aM_j^bM_k^c \tag{8.191}$$

添え字 a は f_{ab} およびその逆行列を持ちいて上げ下げする。5 次元の多脚場及びゲージ場の変換則は

$$\delta_5e_M^{(5)\widehat{N}}=\frac{\kappa}{4}\overline{\xi}^{(5)I}\gamma^{\widehat{N}}\psi_{IM}^{(5)},\quad \delta_5A_M^a=\frac{\kappa i}{4}M'^a\overline{\psi}_M^I\xi_I-\frac{1}{2\sqrt{2}}M_i^a(\overline{\lambda}^{Ii}\gamma_M\xi_I) \tag{8.192}$$

今度もやはり 5 次元の章のものからゲージーノ λ の符号を反転した。

この理論を $\mathbf{S}^1$ コンパクト化して 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論を得ることを考える。

5 次元の重力多重項は重力場 $g_{\mu\nu}$、グラビティーノ $\psi_{I\mu}$、グラビフォトン A_μ を含む。これらは $\mathbf{S}^1$ コンパクト化によって重力場、グラビティーノ、グラビフォトンよりなる 4 次元の重力多重項と、ゲージ場、ゲージーノ、複素スカラー場よりなる一つの U(1) ベクトル多重項に分かれる。ベクトル多重項に含まれる複素スカラー場は 5 次元の計量の g_{55} 成分とグラビフォトンの A_5 成分の組み合わせである。5 次元のベクトル多重項は 4 次元でもそのままベクトル多重項であるが、5 次元のベクトル多重項に含まれていた実スカラー場はベクトル場の A_5^a 成分と共に 4 次元では複素スカラー場となる。

まず、重力部分の対応を見ておこう。x^5 座標の周期を $2\pi R$ にとることでコンパクト化を行うことにする。このとき局所ローレンツ対称性を用いて次のゲージを取るのが便利である。

$$e_5^{(5)\widehat{m}}=0 \tag{8.193}$$

4 次元の超対称性変換は、5 次元の超対称変換と局所ローレンツ変換を合成したものである。局所ローレンツ変換が必要な理由は二つある。まず、ゲージ固定条件 (8.193) が 5 次元の超対称変換のもとで次のように不変ではない。

$$\delta_5e_5^{(5)\widehat{m}}=\frac{\kappa}{4}\overline{\xi}^I\gamma^{\widehat{m}}\psi_{I5} \tag{8.194}$$

これは次の局所ローレンツ変換によって打ち消すことができる。

$$\delta_{M1}e_5^{(5)\widehat{m}}=\Lambda^{\widehat{m}}{}_{\widehat{5}}e_5^{\widehat{5}},\quad \Lambda_{\widehat{m}\widehat{5}}=-\Lambda_{\widehat{5}\widehat{m}}=-\frac{\kappa}{4}\overline{\xi}^I\gamma_{\widehat{m}}\psi_{I\widehat{5}} \tag{8.195}$$

まだ $\Lambda_{\widehat{m}\widehat{n}}$ を用いた局所ローレンツ変換を行う自由度は残されている。これは 4 次元での多脚場の変換の形が望ましくなるように選ぶ。x^5 方向の周期を $2\pi R$ とするコンパクト化を行ったとき、アインシュタイン作用の部分は次のようになる。

$$S=\frac{1}{\kappa^2}\int d^5xe^{(5)}R^{(5)}=\frac{2\pi R}{\kappa^2}\int d^4xe_5^{(5)\widehat{5}}\det e_\mu^{(5)\widehat{m}}R[e_\mu^{(5)\widehat{m}}]+\cdots \tag{8.196}$$

4 次元でアインシュタイン計量になるためには、次のように 4 次元と 5 次元の計量が関係している必要がある。

$$e_\mu^{(4)m}=(e_5^{(5)\widehat{5}})^{1/2}e_\mu^{(5)\widehat{m}} \tag{8.197}$$

Soryushiron Kenkyu

また、プランク長の間の関係は次のように与えられる。

$$k^2 = \frac{\kappa^2}{2\pi R} \tag{8.198}$$

この多脚場を $\delta_5 + \delta_{M1}$ で変換すると、

$$\begin{aligned}(\delta_5+\delta_{M1})e_\mu^{(4)\widehat{m}} &= \frac{\kappa}{4}(e_5^{(5)\widehat{5}})^{1/2}(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma^{\widehat{m}}\overline{\psi}^{(5)}_{I\mu}) + \frac{\kappa}{8}(e_5^{(5)\widehat{5}})^{1/2}(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma^{\widehat{5}}\psi^{(5)}_{I\widehat{5}})e_\mu^{(5)\widehat{m}} - \frac{\kappa}{4}(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma_{\widehat{m}}\psi^{(5)}_{I\widehat{5}})(e_5^{(5)\widehat{5}})^{1/2}e_\mu^{(5)\widehat{5}} \\ &= \frac{\kappa}{4}(e_5^{(5)\widehat{5}})^{1/2}e_\mu^{(5)\widehat{n}}\left[(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma^{\widehat{m}}\overline{\psi}^{(5)}_{I\widehat{n}}) + \frac{1}{2}\delta_{\widehat{n}}^{\widehat{m}}(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma^{\widehat{5}}\psi^{(5)}_{I\widehat{5}})\right] \\ &= \frac{\kappa}{4}(e_5^{(5)\widehat{5}})^{1/2}e_\mu^{(5)\widehat{n}}\left[(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma^{\widehat{m}}\overline{\psi}^{(5)}_{I\widehat{n}}) + \frac{1}{2}(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma^{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}}\gamma^{\widehat{5}}\psi^{(5)}_{I\widehat{5}}) - \frac{1}{2}(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}\gamma^{\widehat{5}}\psi^{(5)}_{I\widehat{5}})\right]\end{aligned} \tag{8.199}$$

となるが、4 次元の超対称変換と比較すると最後の項が余計である。そこで次の局所ローレンツ変換でこの項を相殺する。

$$\delta_{M2}e_\mu^{(5)\widehat{m}} = \Lambda^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}e_\mu^{(5)\widehat{n}}, \quad \Lambda_{\widehat{m}\widehat{n}} = \frac{\kappa}{8}(e_5^{(5)\widehat{5}})^{1/2}(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\gamma^{\widehat{5}}\psi^{(5)}_{I\widehat{5}}) \tag{8.200}$$

したがって、4 次元の超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta_4 = \delta_5 + \delta_{M1} + \delta_{M2} \tag{8.201}$$

この変換のもとでの 4 次元の多脚場の変分は

$$\begin{aligned}\delta_4 e_\mu^{(4)\widehat{m}} &= \frac{\kappa}{4}(e_5^{(5)\widehat{5}})^{1/2}e_\mu^{(5)\widehat{n}}\left[(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma^{\widehat{m}}\psi^{(5)}_{I\widehat{n}}) + \frac{1}{2}(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma^{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}}\gamma^{\widehat{5}}\psi^{(5)}_{I\widehat{5}})\right] \\ &= \frac{k}{4}(\overline{\xi}^{(4)I}\gamma^{\widehat{m}}\psi^{(4)}_{I\widehat{n}})\end{aligned} \tag{8.202}$$

となる。ただし 4 次元の変換パラメータとグラビティーノを次のようにおいた。

$$\psi^{(4)}_{I\widehat{n}} = (2\pi R)^{1/2}(e_5^{(5)\widehat{5}})^{-1/4}\left(\psi^{(5)}_{I\widehat{n}} + \frac{1}{2}\gamma_{\widehat{n}}\gamma^{\widehat{5}}\psi^{(5)}_{I\widehat{5}}\right), \quad \xi_I^{(4)} = (2\pi R)^{1/2}(e_5^{(5)\widehat{5}})^{1/4}\xi_I^{(5)}. \tag{8.203}$$

また、グラビティーノのこのような関係は、4 次元のグラビティーノ作用の係数を正しく与える。

計量の非対角成分から、ゲージ場が現れる。4 次元のゲージ場は、次のように定義する。

$$A_\mu^{(4)0} = (e_5^{(5)\widehat{5}})^{-1}e_\mu^{(5)\widehat{5}}, \quad A_\mu^{(4)a} = e_\mu^{(5)\widehat{m}}A_{\widehat{m}}^{(5)a} = A_\mu^{(5)a} - A_5^{(5)a}A_\mu^0 \tag{8.204}$$

これらのゲージ場の変換は

$$\delta_4 A_\mu^{(4)0} = \frac{\kappa}{4}(e_5^{(5)\widehat{5}})^{-1}e_\mu^{(5)\widehat{m}}\left[(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma^{\widehat{5}}\psi^{(5)}_{I\widehat{m}}) + \frac{1}{2}(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma_{\widehat{m}}\psi^{(5)}_{I\widehat{5}})\right], \tag{8.205}$$

$$\begin{aligned}\delta_4 A_\mu^{(4)a} &= e_\mu^{\widehat{m}}\left(\frac{\kappa i}{4}M'^a\overline{\psi}^I_{\widehat{m}}\xi_I - \frac{1}{2\sqrt{2}}M_i^a(\overline{\lambda}^{Ii}\gamma_{\widehat{m}}\xi_I)\right) \\ &\quad -\frac{\kappa}{4}e_\mu^{(5)\widehat{m}}\left((\overline{\xi}^{(5)I}\gamma^{\widehat{5}}\psi^{(5)}_{I\widehat{m}}) + \frac{1}{2}(\overline{\xi}^{(5)I}\gamma_{\widehat{m}}\psi^{(5)}_{I\widehat{5}})\right)A_{\widehat{5}}^{(5)a}\end{aligned} \tag{8.206}$$

と与えられる。4 次元の変数を用いて書き換えると、グラビティーノを含む部分は次のようになる。

$$\delta_4 A_\mu^{(4)0} = \;=\; -\frac{k}{4}(e_5^{(5)\widehat{5}})^{-3/2}e_\mu^{(4)\widehat{m}}\epsilon^{IJ}(\overline{\xi}_I^{(4)}\psi^{(4)}_{J\widehat{m}}) + \cdots + \text{c.c.}, \tag{8.207}$$

$$\delta_4 A_\mu^{(4)a} = k(e_5^{(5)\widehat{5}})^{-1/2}e_\mu^{(4)\widehat{m}}\epsilon^{IJ}(\overline{\xi}_I^{(4)}\psi^{(4)}_{J\widehat{m}})\left(\frac{i}{4}M'^{(5)a} + \frac{1}{4}A_{\widehat{5}}^{(5)a}\right) + \cdots + \text{c.c.} \tag{8.208}$$

これは 4 次元の次の変換則と比較されるべきものである。

$$\delta A_\mu^{(4)a} = \frac{i}{2}\epsilon^{IJ}\xi_I^{(4)}\psi_{J\mu}^{(4)}M_0^{(4)a} + \text{c.c.} \quad \text{(Dirac rep.)} \tag{8.209}$$

これらを比較することで 4 次元の電荷行列を読み取ることができる。

$$M_0^{(4)0} = \frac{ik}{2}(e_5^{(5)\hat{5}})^{-3/2}, \quad M_0^{(4)a} = k(e_5^{(5)\hat{5}})^{-1/2}\left(\frac{1}{2}M'^{(5)a} - \frac{i}{2}A_{\hat{5}}^{(5)a}\right) \tag{8.210}$$

次に、ゲージ場の運動項を見てみよう。5 次元の理論には（グラビフォトンも含め）n 個の U(1) ゲージ場 A_μ^a（$a=1,2,\ldots,n$）が存在する。ゲージ場は電荷、磁荷の量子化によって規格化が決められているのでリスケールされず、これらがそのまま 4 次元のゲージ場と同定される。さらに 5 次元理論の計量の成分の一部からもう一つ 4 次元の U(1) ゲージ場が現れる。これを A_μ^0 としよう。A_μ^a と A_μ^0 をまとめて $A_\mu^{a'}$（$a'=0,1,\ldots,n$）と表すことにする。5 次元のゲージ場運動項およびアインシュタイン作用を $\mathbf{S}^1$ コンパクト化することによって 4 次元のゲージ場の運動項は次のように得られる。

$$\mathcal{L} = -\frac{2\pi R}{4}\tilde{e}e^\rho f_{ab}F_{\mu\nu}^aF^{b\mu\nu} + \frac{2\pi R}{8}C_{abc}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_5^aF_{\mu\nu}^bF_{\rho\sigma}^c - \frac{1}{4k^2}\tilde{e}e^{3\rho}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \tag{8.211}$$

このラグランジアンの係数を 4 次元の $\mathcal{N}=2$ 超重力理論のそれと見比べると、4 次元の周期行列は次のように与えられることがわかる。

$$\tau_{ab} = (2\pi)^2R(ie^\rho f_{ab} - A_5^cC_{cab}), \quad \tau_{00} = \frac{2\pi i}{k^2}e^{3\rho}. \tag{8.212}$$

これらの結果から 4 次元のプレポテンシャルを読み取ることができる。まず、$M_{0a}^{(4)}$ を次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} M_{0a}^{(4)} &= \tau_{ab}M_0^{(4)a} \\ &= \frac{ik}{2}(2\pi)^2Re^{\rho/2}f_{ab}M'^{(5)a} \\ &= \frac{ik}{2}(2\pi)^2Re^{\rho/2}M_a'^{(5)} \\ &= -\frac{ik}{4}(2\pi)^2Re^{\rho/2}C_{abc}M'^{(5)b}M'^{(5)c} \\ &= \frac{(2\pi)^2R}{2}\frac{C_{abc}M_0^{(4)b}M_0^{(4)c}}{M_0^{(4)0}} \end{aligned} \tag{8.213}$$

ただしここでは計算を簡単にするためにゲージ場の x^5 成分は 0 であるとした。同様に、$M_{00}^{(4)}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} M_{00}^{(4)} &= \tau_{00}M_0^{(4)0} \\ &= -\frac{2\pi}{2k}e^{3\rho/2} \\ &= \frac{2\pi\kappa^2}{12k}e^{3\rho/2}C_{abc}M'^{(5)a}M'^{(5)b}M'^{(5)c} \\ &= -\frac{(2\pi)^2R}{6}\frac{C_{abc}M_0^{(4)a}M_0^{(4)b}M_0^{(4)c}}{(M_0^{(4)0})^2} \end{aligned} \tag{8.214}$$

さらにこれらの関係式を

$$\vec{M}_0^{(4)} = -\frac{ik}{\sqrt{2}}e^{k^2K/4}\vec{\phi}^* \tag{8.215}$$

Soryushiron Kenkyu

によって ϕ の関係式に書き換えると、

$$\phi_0 = -\frac{(2\pi)^2 R}{6}\frac{C_{abc}\phi^a\phi^b\phi^c}{(\phi^0)^2}, \quad \phi_a = \frac{(2\pi)^2 R}{2}\frac{C_{abc}\phi^b\phi^c}{\phi^0}. \tag{8.216}$$

すなわち、プレポテンシャルが次のように与えられる。

$$\phi_{a'} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi^{a'}}, \quad (a' = 0,\ldots,n), \quad \mathcal{F} = (2\pi)^2 R\frac{C_{abc}\phi^a\phi^b\phi^c}{6\phi^0}, \quad (a,b,c = 1,\ldots,n). \tag{8.217}$$

関係式 (8.217) は $\mathcal{F}$ が 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論のプレポテンシャルであることを表している。

ϕ^0 は 5 次元の場を用いて

$$\phi^0 = -\frac{i\sqrt{2}}{k}e^{-k^2K/4}(M_0^{(4)0})^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2K/4}e^{-3\rho/2} \tag{8.218}$$

のように与えられ、大域的極限 $k,\rho\to 0$ では $\phi^0 = -1/\sqrt{2}$ となる。このときプレポテンシャル (8.217) は大域的な場合にコンパクト化で得られたもの (8.184) に一致する。

8.4 ブラックホール解

U(1) ベクトル多重項を n 個含む $\mathcal{N}=2$ 超重力理論を考えよう。グラビフォトンも含めた、$n+1$ 個のゲージ場を A_μ^a ($a = 1,2,\ldots,n+1$)、その双対ゲージ場を $A_{a\mu}$ とする。ここではこれらのゲージ場に対して電荷、磁荷を持つ 1/2 BPS ブラックホール解を構成する。[17, 18]。レビュー [19] も参照のこと。

ここでは $\oint F_2$ は $\oint *F_2\cdot dS$ と同じになるように規格化されており、$\epsilon_{r\theta_1\theta_2} = +1$ であるとしている。時空の向き付けや自己双対テンソルについては次のように約束している。

$$\epsilon_{\widehat{t}\widehat{r}\widehat{\theta}_1\widehat{\theta}_2} = +1, \quad *F_2^\pm = \mp iF_2^\pm, \quad F_{\widehat{t}\widehat{r}}^\pm = \pm iF_{\widehat{\theta}_1\widehat{\theta}_2}^\pm. \tag{8.219}$$

ブラックホールの持つ電荷、磁荷とゲージ場の間の関係は (7.207) および (7.194) を用いれば、

$$\boldsymbol{F}^{(+)A} = M_{i'}^A g^{i'\overline{j}'} M_{\overline{j}'}^{*B}\boldsymbol{D}_B = M_{i'}^A g^{i'\overline{j}'} M_{\overline{j}'}^{*B}\frac{q_B}{4\pi r^2}\boldsymbol{n} \tag{8.220}$$

と与えられる。ここで、i' と j' は 0 から k までの $k+1$ 個の値をとるとする。

BPS 解を探すためにフェルミオンの超対称変換が適当な変換パラメータに対して 0 になるという条件を用いる。ここでは問題を簡単にするためにスカラー場が場所に寄らず一定の場合について考えてみよう。そのような背景上のゲージーノ $\vec{\lambda}_I$ の超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta\vec{\lambda}_I = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{P}_\lambda\vec{F}_2^+\xi_I \tag{8.221}$$

従って、0 でない ξ_I に対して $\delta\vec{\lambda}_I = 0$ であるためには、$\mathcal{P}_\lambda\vec{F}_2^+ = 0$ が成り立つ必要がある。この式は、ゲージ場のうちグラビフォトン成分だけが値を持つことを意味している。

(8.220) に対して射影演算子 $\mathcal{P}_\lambda$ を作用させたものは 0 から k までの値をとる添え字 i' と j' を 1 から k までの値をとる添え字 i と j に置き換えることで得られる。

$$0 = \mathcal{P}_\lambda\boldsymbol{F}^{(+)A} = M_i^A g^{i\overline{j}} M_{\overline{j}}^{*B}\frac{q_B}{4\pi r^2}\boldsymbol{n} \tag{8.222}$$

この式は、次の関係式が成り立つことを意味している。

$$M_{\overline{j}}^{*B} q_B = 0. \tag{8.223}$$

従って q_A は $J_{AB}M_0^B$ と $J_{AB}M_0^{*B}$、あるいは $J_{AB}\phi^{*B}$ と $J_{AB}\phi^B$ の線形結合で与えられる。q_A は実数であるから次のように書ける。

$$q_A = J_{AB}\,\mathrm{Im}(\phi^{*B}C) \tag{8.224}$$

この式の両辺に ϕ^A を掛けて C を次のように決定することができる。

$$C = \frac{k^2 e^{k^2K/2}}{4\pi}\phi^C q_C \tag{8.225}$$

(8.150) を用いれば、C は中心電荷と次のように関係していることがわかる。

$$C = \frac{ik^2 e^{k^2K/4}}{4\pi\sqrt{2}}Z^* \tag{8.226}$$

関係式 (8.224) は、ブラックホールが重力多重項とのみ結合し、ベクトル多重項とは結合しないことを意味している。この条件によりブラックホールの電荷、磁荷とスカラー場 ϕ^A の期待値の関係が定まる。より正確には、スカラー場の無限遠方での値が関係式 (8.225) を満足するときにだけスカラー場の値が変化しないような 1/2 BPS 解が存在する。もし遠方での値が (8.225) を満足しない場合には、スカラー場の値は定数とはならず、ブラックホール地平面に近づくにつれて (8.225) を満足する値に漸近する。このため、関係式 (8.225) はアトラクター方程式と呼ばれる。

関係式 (8.225) が満足されている場合、$\mathcal{P}_\lambda F^A = 0$ であり、ゲージ場で値を持つのは、グラビフォトン成分 $\mathcal{P}_\psi$ だけである。従って、古典解の形は単純超重力理論のブラックホールと全く同じになる。

グラビフォトンの自己双対部分を複素ベクトルとして表せば

$$\boldsymbol{G}^+ = \frac{1}{4\pi i}\vec{M}_0^* \times \vec{M}_0 M_0^{*A} q_A \frac{1}{4\pi r^2}\boldsymbol{n} = M_0^{*A} q_A \frac{1}{4\pi r^2}\boldsymbol{n} = -\frac{kZ^*}{8\pi r^2}\boldsymbol{n} \tag{8.227}$$

このベクトルを用いて、2-形式場およびその γ 行列との縮約は次のように与えられる。

$$G_2^+ = \frac{1}{2}G^+ \wedge dt + \frac{i}{2} *_3 G^*, \quad \not{G}_2^+ = \frac{kZ^*}{8\pi r^2}\frac{1+\gamma^5}{2}\gamma^{\hat{t}\hat{r}} \tag{8.228}$$

次に、計量を決定しよう。計量はグラビティーノの超対称変換が 0 でない ξ_I で 0 になるということを要請することで決定することができる。グラビティーノ変換則は次のように与えられる。

$$\delta\psi_{I\mu} = \frac{1}{k}D_\mu^{(s,\omega)}\xi_I - \frac{1}{4}\epsilon_{IJ}\not{G}_2^+\sigma_\mu\overline{\xi}^J. \tag{8.229}$$

ただし、$\not{G}_2$ は $n+1$ 個のベクトル場の線形結合として表されるグラビフォトンである。

もし古典解が半径 r_0 の $AdS_2 \times S^2$ になることを仮定すれば、この式の第 1 項は $\xi/(kr_0)$ 程度、第 2 項は $|G_2|\xi \sim \xi k|Z|/r_0^2$ 程度の大きさであるから、$r_0 \sim k^2|Z|$ になるはずである。このことを以下でより詳しく見てみよう。

解の回転対称性と時間並進対称性を仮定して、計量を次のように置く。

$$ds^2 = -a^2(r)dt^2 + b^2(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2). \tag{8.230}$$

$a(r)$ と $b(r)$ は動径座標 r にのみ依存する実関数である。この時空の上で破れていない超対称性のパラメータを

$$\xi = s(r)\xi_0. \tag{8.231}$$

とおく。$s(r)$ は局所的 R-対称性を用いて正の実数に取ることにする。背景時空 (8.230) 上でのスピン接続を計算すれば、変換パラメータの共変微分が次のように与えられることがわかる。

$$D_t^{(\omega)}\xi = \frac{a'}{2b}\gamma_{\hat{t}\hat{r}}\xi, \quad D_r^{(\omega)}\xi = \frac{s'}{s}\xi, \quad D_a^{(\omega)}\xi = \frac{rb'}{2b}\gamma_{\hat{a}\hat{r}}\xi. \tag{8.232}$$

これらをグラビティーノの変換則 (8.229) に代入すると、次の 3 つの独立な条件が得られる。

$$kb\delta\psi_{I\hat{t}} = \gamma_{\hat{t}\hat{r}}\left(\frac{a'}{2a}\xi_I - \frac{kb}{4}\epsilon_{IJ}\not{G}_2^+\sigma_{\hat{r}}\overline{\xi}^J\right), \tag{8.233}$$

$$kb\delta\psi_{I\hat{r}} = \frac{s'}{s}\xi_I + A_r\xi_I - \frac{kb}{4}\epsilon_{IJ}\not{G}_2^+\sigma_{\hat{r}}\overline{\xi}^J, \tag{8.234}$$

$$kb\delta\psi_{I\hat{a}} = \gamma_{\hat{a}\hat{r}}\left(\frac{b'}{2b}\xi_I + \frac{kb}{4}\epsilon_{IJ}\not{G}_2^+\sigma_{\hat{r}}\overline{\xi}^J\right), \tag{8.235}$$

これらの式を得るために、回転対称性から G_2 の成分のうち G_{tr} と $G_{\theta_1\theta_2}$ のみが 0 でないことから従う次の関係式を用いた。

$$\gamma_{\hat{r}}\not{G}\gamma_{\hat{t}} = -\gamma_{\hat{t}}\not{G}\gamma_{\hat{r}}, \quad \gamma_{\hat{r}}\not{G}\gamma_{\hat{a}} = \gamma_{\hat{a}}\not{G}\gamma_{\hat{r}} \tag{8.236}$$

上記の変換が 0 になるべしという条件から次の関係式が得られる。

$$a = \frac{1}{b}, \quad s = \frac{1}{b^{1/2}}, \quad A_r = 0. \tag{8.237}$$

$A_r = 0$ になるのは s が実になるような $\mathrm{U}(1)_R$ 変換のゲージを取っているからである。

(8.228) に与えられているグラビフォトンの場の強さは、(ここでは r の代わりに br とする必要がある。)

$$k\not{G}_2^+ = \frac{k^2 Z^*}{8\pi(br)^2}\gamma^{\hat{t}\hat{r}} \tag{8.238}$$

従ってグラビティーノの変換が 0 という式は次のように書き換えられる。

$$-4\pi r^2 b' = \frac{\omega k^2}{4i}Z^*. \tag{8.239}$$

ただし、ω は絶対値が 1 の複素数で、変換パラメータが次の式を満足すると仮定した。

$$i\epsilon_{IJ}\gamma^{\hat{t}}\overline{\xi}^J = \omega\xi_I \tag{8.240}$$

$\mathrm{U}(1)_R$ 変換のゲージ固定条件 $A_r = 0$ によって固定されていない大域的 $\mathrm{U}(1)_R$ 変換を用いれば、ω の位相は自由に取ることができる。

(8.239) の左辺が実であるから右辺もそうでなければならないことから、(8.239) の解は Z または C を用いて次のように書ける。

$$b = 1 + \frac{r_0}{r}, \quad r_0 = \frac{k^2|Z|}{16\pi} \tag{8.241}$$

これを (8.230) に代入すれば、Reissner-Nordstrom 計量が得られる。

$$ds^2 = -\frac{1}{b^2(r)}dt^2 + b^2(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2). \tag{8.242}$$

地平面近傍ではこの時空は $\mathbf{AdS}_2 \times \mathbf{S}^2$ であり、$\mathbf{S}^2$ の面積、すなわち地平面の面積は次のように与えられる。

$$A_{\mathrm{hor}} = 4\pi r_0^2 = \frac{k^4|Z|^2}{64\pi} \tag{8.243}$$

8.5 ハイパー多重項と重力の結合

ハイパー多重項のモジュライ空間は超対称性が大域的である場合にはハイパーケーラー多様体である必要があった。超重力理論においてこの性質がどのように変更されるかを見てみよう。ポテンシャル項はあとで考えることにし、大域的な場合のものを一般座標変換のもとで共変化した次のラグランジアンから出発しよう。

$$\mathcal{L}_q = -\frac{e}{2}h_{mn}(\partial_\mu q^m)(\partial^\mu q^n), \quad \mathcal{L}_\chi = ie\chi^\alpha\sigma^\mu D_\mu^{(M,\omega)}\overline{\chi}_\alpha. \tag{8.244}$$

変換則は次のものから出発する。

$$\delta q^m = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^m)^I{}_\alpha(\xi_I\chi^\alpha) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^{\dagger m})^\alpha{}_I(\overline{\xi}^I\overline{\chi}_\alpha), \quad \delta\chi^\alpha = -\frac{i}{2\sqrt{2}}(\gamma_m^\dagger)^\alpha{}_I\sigma^\mu\overline{\xi}^I(\partial_\mu q^m). \tag{8.245}$$

ここで、$(\gamma_m)^\alpha{}_I$ などの行列を用いているが、これらがうまく定義できるためには多様体のホロノミー群が $\mathrm{SO}(4k)$ の部分群の $\mathrm{Sp}(k)\times\mathrm{Sp}(1)$ に含まれている必要がある。これは多様体が四元数多様体でなければならないことを意味している。ハイパーケーラー多様体はこの特殊な場合であり、ホロノミーが $\mathrm{Sp}(k)$ 部分群に含まれている場合である。ここではモジュライ空間が四元数多様体であることのみを仮定しておく。

ラグランジアン (8.244) を変換則 (8.245) によって変分計算すると、まず次の変分が得られる。

$$\begin{aligned}\delta_\chi\mathcal{L}_\chi + \delta_q\mathcal{L}_q &= -\frac{e}{2\sqrt{2}}(\gamma_m)^I{}_\alpha(\chi^\alpha\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu D_\mu^{(\omega)}\xi_I)(\partial_\nu q^m)\\ &\quad -\frac{e}{2\sqrt{2}}(\gamma_m)^I{}_\alpha(\chi^\alpha\sigma^{\mu\nu}\xi_I)(D_\mu^{(\omega,M)}\partial_\nu q^m) + \mathrm{h.c.}\end{aligned} \tag{8.246}$$

ここまでは微分の順序を変更していない。第 2 項の二つの微分は可換であるから、添え字の反対称性によって 0 になり、第 1 項の $D_\mu\xi^a$ に比例する項だけが残る。この変分を相殺するためには次のネーター結合を導入すればよい。

$$\mathcal{L}_J = \frac{ke}{2\sqrt{2}}(\gamma_m^\dagger)^\alpha{}_I(\overline{\psi}_\mu^I\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\chi}_\alpha)(\partial_\nu q^m) + \mathrm{h.c.} \tag{8.247}$$

この項のグラビティーノの変分で $D_\mu\xi$ を含む項は先ほどの変分を相殺する。しかしネーター結合項からはこれ以外の変分も得られる。まず、グラビティーノの変分は上記の変分を相殺するほかにグラビフォトンを含む次の変分を与える。

$$\delta_{\psi 2}\mathcal{L} = -\frac{ike}{2q_e}J_{\alpha\beta}(\delta\chi^\alpha \not{F}_2\chi^\beta) + \mathrm{h.c} \tag{8.248}$$

この項は次のようにフェルミオンの 2 次の項を導入すれば相殺できる。

$$\mathcal{L}_{\chi G\chi} = \frac{ike}{4q_e}J_{\alpha\beta}(\chi^\alpha \not{F}_2\chi^\beta) + \mathrm{h.c} \tag{8.249}$$

スカラー多様体の構造を決める上で重要なのは、$\mathcal{L}_J$ に含まれるフェルミオン χ の変分である。これは次のように与えられる。

$$\delta_\chi\mathcal{L}_J = \frac{ike}{8}(\gamma_n)^J{}_\alpha(\gamma_m^\dagger)^\alpha{}_I(\overline{\psi}_\mu^I\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\sigma}^\rho\xi_J)(\partial_\nu q^m)(\partial_\rho q^n) + \mathrm{h.c.} \tag{8.250}$$

この変分に含まれる 3 つの σ 行列の積を次のように二つの部分に分けることができる。まず、σ が一つだけ残る部分は

$$\delta_\chi\mathcal{L}_J = \frac{ike}{8}h_{mn}(\partial_\nu q^m)(\partial_\rho q^n)(\overline{\psi}_\mu^I\langle\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\sigma}^\rho\rangle_1\xi_I) + \mathrm{h.c.} \tag{8.251}$$

Soryushiron Kenkyu

となるが、これはスカラー場のエネルギー運動量テンソルに比例しておりスカラー場の作用の多脚場の変分で相殺される。一方、σ の三次の項は

$$\delta_\chi \mathcal{L}_J = \frac{ike}{2}\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu q^m)(\partial_\nu q^n)(\gamma_{mn})^I{}_J\right](\psi_{I\rho}\sigma^{\rho\mu\nu}\overline{\xi}^J) + \text{h.c.} \tag{8.252}$$

となる。この項を相殺するために、重力部分の変分計算において (3.25) と同様に次の変分があったことを思い出そう。

$$\delta\mathcal{L}_{3/2} = \frac{ie}{2k}\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}[D_\nu^{(\omega)}, D_\rho^{(\omega)}]\overline{\xi}^I \quad + \text{h.c.} \tag{8.253}$$

そこで、共変微分の交換関係が次の式を満足するようにスカラー多様体の構造を変更すればよい。

$$[D_\mu^{(\omega,\sigma)}, D_\nu^{(\omega,\sigma)}]\overline{\xi}^I = \frac{1}{4}R_{\mu\nu-\rho\sigma}\overline{\sigma}^{\rho\sigma}\overline{\xi}^I - \frac{k^2}{4}(\partial_\mu q^m)(\partial_\nu q^n)(\gamma_{mn})^I{}_J\overline{\xi}^J \tag{8.254}$$

右辺第 1 項は時空の曲率の項、右辺第 2 項はスカラー多様体の曲率の Sp(1) 部分を表す項であり、スカラー多様体がハイパーケーラーである場合には存在しない。このような項を得るためにはスカラー多様体の曲率テンソルの Sp(1) 部分が次のように与えられていればよい。

スカラー多様体の曲率テンソル

$$R_{mn}{}^I{}_J = -\frac{k^2}{4}(\gamma_{mn})^I{}_J \tag{8.255}$$

すなわち、スカラー多様体は大域的な場合にハイパーケーラーであったのとは異なり、曲率の Sp(1) 部分が (8.255) で与えられる四元数多様体でなければならない。[5]

次に、大域的な場合と同様な手順で質量項の導入を行おう。そのためには大域的な場合と同様にスカラー多様体上の複素キリングベクトル F^m が必要である。以前に述べたように、この複素キリングベクトルは中心電荷によって生成される $\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)$ 対称性に対応している。超重力理論においてはこの対称性はゲージ化され、グラビフォトンと結合するようになる。グラビフォトンとの結合が

$$D_\mu q^m = \partial_\mu q^m - kA_\mu r^m - k\widetilde{A}_\mu s^m \tag{8.256}$$

によって与えられているとする。ここでは r^m の次元が 2 になるようにプランク長 k を挿入しておいた。f^m は (**??**) にあるようにスカラー場 q^m の中心電荷による変換として現れる。対応するグラビフォトン $\vec{A}_\mu$ の変換は (8.53) から読み取ることができる。q^m と $\vec{A}_\mu$ に対するゲージ変換と上記の共変微分が矛盾しないためにはキリングベクトルが $f^m = 2i(q_e r^m + q_m s^m)$ と与えられていなければならない。磁荷を持った場が存在するとラグランジアンを用いた記述が不可能であるので、ここでは $s^m = 0$ であることを仮定しておく。このとき共変微分および f^m は次のように与えられる。

$$f^m = 2iq_e r^m, \quad D_\mu^{(B)}q^m = \partial_\mu q^m - kA_\mu r^m. \tag{8.257}$$

共変微分の肩の (B) はグラビフォトンのゲージ変換に対する共変微分であることを表している。

モジュライ空間は四元数多様対であるから、その構造と矛盾しないために r^m は三重正則複素キリングベクトルであると仮定する。その場合 $r_{mn} = D_m r_n$ は $\mathrm{Sp}(k)\times\mathrm{Sp}(1)$ のリー代数に値をとるはずである。大域的な場合とは異なり、Sp(1) 成分は 0 ではない。それは一般にキリングベクトルについて公式 $r^m\widehat{R}_{mn} = D_n\widehat{r}$ が成り立つために、Sp(1) 部分の曲率が 0 でない限り $\widehat{r}$ の Sp(1) 部分は 0 にできないのである。簡単に r_{mn} についての公式をまとめておく。

r_{mn} の性質

四元数多様体上のキリングベクトル r^m が三重正則であるということは、実反対称行列 r_{mn} が $Sp(k)\times\mathrm{Sp}(1)$ のリー代数に値をとることを意味している。このことから次のように置くことができる。

$$\frac{1}{2}r_{mn}(\gamma^m)^I{}_\alpha(\gamma^n)^\beta{}_J=\delta^\alpha_\beta r^I{}_J-r^\beta{}_\alpha\delta^I_J. \tag{8.258}$$

$r^I{}_J$ は Sp(1) の、$r^\alpha{}_\beta$ は Sp(k) の生成子である。これらについて上式を解けば、r_{mn} を用いて次のように書くことができる。

$$r^I{}_J=\frac{1}{4k}r_{mn}(\gamma^{mn})^I{}_J,\quad r^\beta{}_\alpha=\frac{1}{4}r_{mn}(\gamma^{mn})^\beta{}_\alpha. \tag{8.259}$$

（式中の k はプランク長ではなく、群のサイズである。）r_{mn}、$r^I{}_J$、$r^\alpha{}_\beta$ はすべて反エルミートであり、次の複素共役関係を満足する。

$$(r_{mn})^*=r_{mn},\quad (r^\beta{}_\alpha)^*=-r^{\alpha\beta},\quad (r^I{}_J)^*=-r^I{}_J. \tag{8.260}$$

r_{mn} は $r^I{}_J$ と $r^\alpha{}_\beta$ を用いて次のように書くことができる。

$$r_{mn}=r^{\mathrm{Sp}(k)}_{mn}+r^{\mathrm{Sp}(1)}_{mn},\quad r^{\mathrm{Sp}(1)}_{mn}=-\frac{1}{2}(\gamma^{mn})^J{}_Ir^I{}_J,\quad r^{\mathrm{Sp}(k)}_{mn}=-\frac{1}{2}(\gamma^{mn})^\alpha{}_\beta r^\beta{}_\alpha. \tag{8.261}$$

まず出発点として、大域的な場合のラグランジアンと変換則をグラビフォトンのゲージ変換と一般座標変換のもとで共変化したものをとる。つまり、スカラー場とフェルミオンの運動項は

$$\mathcal{L}_q=-\frac{e}{2}h_{mn}(D^{(B)}_\mu q^m)(D^{(B)\mu}q^n),\quad \mathcal{L}_\chi=ie\chi^\alpha\sigma^\mu D^{(M,\omega,B)}_\mu\overline{\chi}_\alpha. \tag{8.262}$$

フェルミオンの質量項とポテンシャル項は

$$\mathcal{L}_{\chi\mathrm{mass}}=\frac{e}{2}\chi^\alpha J_{\alpha\beta}m^\beta{}_\gamma\chi^\gamma+\mathrm{h.c.},\quad \mathcal{L}_{\mathrm{pot}}=-2e|q_e|^2r^mr_m. \tag{8.263}$$

そして変換則は次のものから出発する。

$$\delta q^m=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^m)^I{}_\alpha(\xi_I\chi^\alpha)+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^{\dagger m})^\alpha{}_I(\overline{\xi}^I\overline{\chi}_\alpha) \tag{8.264}$$

$$\delta\chi^\alpha=-\frac{i}{2\sqrt{2}}(\gamma^\dagger_m)^\alpha{}_I\sigma^\mu\overline{\xi}^I(\partial_\mu q^m),\quad \delta'\chi^\alpha=\frac{i}{\sqrt{2}}q_e\xi_I(\gamma_m)^I{}_\beta J^{\beta\alpha}r^m. \tag{8.265}$$

ただし、モジュライ空間の計量 h_{mn} は曲率テンソルの Sp(1) 成分が (8.255) を満足するような四元数多様体を表すものであると仮定する。さらに、大域的な場合と同様にフェルミオンの質量行列は次のように与えられるとしておく。

$$m^\beta{}_\alpha=-\frac{i}{2}q^*_e(\gamma^{mn})^\beta{}_\alpha r_{mn}=-2iq^*_er^\beta{}_\alpha \tag{8.266}$$

これはスカラー場 q^m に依存する質量次元 1 の量である。

まず、アイソメトリーをゲージ化したために新たにどのような変分が得られるかを考えてみよう。これは共変微分が二つあるときにその交換関係から現れる。まずグラビティーノの超対称変換で現れる変換パラメータの二回微分の交換関係 (8.254) が次のように変更される。

$$[D^{(\omega,M)}_\mu,D^{(\omega,M)}_\nu]\overline{\xi}^I=\frac{1}{4}R_{\mu\nu-\rho\sigma}\overline{\sigma}^{\rho\sigma}\overline{\xi}^I-\frac{k^2}{4}(D^{(B)}_\mu q^m)(D^{(B)}_\nu q^n)(\gamma_{mn})^I{}_J\overline{\xi}^J+kF_{\mu\nu}r^I{}_J\overline{\xi}^J \tag{8.267}$$

Soryushiron Kenkyu

この結果、新たに次の変分が発生する。

$$\delta\mathcal{L} = \frac{ie}{2}\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}r^I{}_J\overline{\xi}^J \quad + \text{h.c.} \tag{8.268}$$

さらに、(8.246) の第 2 項の微分が対応する共変微分に置き換わると、その交換関係

$$[D_\mu^{(\omega,\sigma,B)}, D_\nu^{(B)}]q^m = -kF_{\mu\nu}r^m \tag{8.269}$$

からグラビフォトンの場の強さが現れ、次の変分を与える。

$$\begin{aligned}\delta_\chi\mathcal{L}_\chi + \delta_q\mathcal{L}_q \quad &= \quad -\frac{e}{2\sqrt{2}}(\gamma_m)^I{}_\alpha(\chi^\alpha\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu D_\mu^{(\omega)}\xi_I)(\partial_\nu q^m)\\ &\quad +\frac{ke}{2\sqrt{2}}r^m(\gamma_m)^I{}_\alpha(\chi^\alpha \not{F}\xi_I) + \text{c.c.}\end{aligned} \tag{8.270}$$

次に、r_{mn} が大域的な場合とは異なり 0 でない Sp(1) 成分を持つこと、また $D_\mu\xi_I$ が 0 ではないことから現れる変分を見てみよう。

$$\begin{aligned}\delta'\mathcal{L}_\chi \quad &= \quad -\frac{e}{\sqrt{2}}q_e^*(\chi^\alpha\sigma^\mu D_\mu^{(\sigma,\omega)}\overline{\xi}^I)J_{\alpha\beta}(\gamma_m)^\beta{}_I r^m - \frac{e}{\sqrt{2}}q_e^*(\chi^\alpha\sigma^\mu\overline{\xi}^I)J_{\alpha\beta}(\gamma_m)^\beta{}_J r^J{}_I(D_\mu^{(B)}q^m)\\ &\quad +\frac{e}{\sqrt{2}}q_e^*(\chi^\alpha\sigma^\mu\overline{\xi}^I)J_{\alpha\beta}r^\beta{}_\gamma(\gamma_m)^\gamma{}_I(D_\mu^{(B)}q^m) + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{8.271}$$

このうち第 3 項は (8.266) を仮定すれば $\delta\mathcal{L}_{\chi\text{mass}}$ によって相殺される。

質量項の δ' の変分からは、

$$\delta'\mathcal{L}_{\chi\text{mass}} = \sqrt{2}e|q_e|^2(\xi_I(\gamma^n)^I{}_\alpha\chi^\alpha)r_{nm}^{\text{Sp}(k)}r^m + \text{h.c.} = 4e|q_e|^2\delta q^n r_{nm}^{\text{Sp}(k)}r^m \tag{8.272}$$

が得られるが、これはポテンシャル項の変分 $\delta_q\mathcal{L}_{\text{pot}} = -4e\delta q^n r_{nm}r^m$ と部分的に相殺し、次のものが残る。

$$\delta'\mathcal{L}_{\chi\text{mass}} + \delta_q\mathcal{L}_{\text{pot}} = -4e|q_e|^2\delta q^n r_{nm}^{\text{Sp}(1)}r^m \tag{8.273}$$

これらの変分のうち、$D_\mu\xi_I$ を含む項を相殺するためにネーター項を導入しよう。まず (8.270) の第 1 項を相殺するためにネーター項

$$\mathcal{L}_J = \frac{ke}{2\sqrt{2}}(\gamma_m^\dagger)^\alpha{}_I(\overline{\psi}_\mu^I\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\chi}_\alpha)(D_\nu^{(B)}q^m) + \text{h.c.} \tag{8.274}$$

を導入する。モジュライ空間が適当な四元数多様体であると仮定しておけば、この項の χ の δ による変分がスカラー場運動項の多脚場の変分と、グラビティーノの運動項の変分によって相殺されること、$\psi_{I\mu}$ の $F_{\mu\nu}$ を含む変分はフェルミオンとグラビフォトンとの三点結合項

$$\mathcal{L}_{\chi F\chi} = \frac{ike}{4q_e}J_{\alpha\beta}(\chi^\alpha \not{F}_2\chi^\beta) + \text{h.c} \tag{8.275}$$

を導入すれば相殺できることは質量のない場合と同じである。$\delta'\mathcal{L}_{\chi F\chi}$ はちょうど (8.270) の第 2 項を相殺する。

(8.271) の第 1 項を相殺するためにはさらに次のネーター項を導入する。

$$\mathcal{L}_{J\text{mass}} = \frac{ke}{\sqrt{2}}q_e^*(\chi^\alpha\sigma^\mu\overline{\psi}_\mu^I)J_{\alpha\beta}(\gamma_m)^\beta{}_I r^m + \text{h.c.} \tag{8.276}$$

この項の δ' による変分

$$\delta'\mathcal{L}_{J\text{mass}} = -\frac{ike}{2}|q_e|^2r^m r_m(\xi_I\sigma^\mu\overline{\psi}_\mu^I) + \text{h.c.} = 2|q_e|^2\delta e r^m r_m. \tag{8.277}$$

はちょうどポテンシャル項 $\mathcal{L}_{\rm pot}$ の (8.40) による変分 $\delta_e\mathcal{L}_{\rm pot}$ によって相殺される。
最後に次の変分が残っている。

$$\begin{aligned}\delta_\chi\mathcal{L}_{J\rm mass}+\delta'_\chi\mathcal{L}_J &= -\frac{ike}{2}q_e^*r_m(D^{(B)\mu}q^m)\epsilon_{IJ}(\overline{\xi}^I\overline{\psi}^J_\mu)\\ &\quad -\frac{ike}{2}q_e^*r^m(D^{(B)}_\nu q^n)\epsilon_{IK}(\gamma_{mn})^K{}_J(\overline{\xi}^I\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}^J_\mu)+\text{h.c.}\end{aligned} \tag{8.278}$$

この第 1 項は $\mathcal{L}_q$ の共変微分に含まれるグラビフォトンの変分と相殺する。あとは (8.278) の右辺第 2 項のみである。(8.255) を用いて、γ_{mn} をモジュライ空間の曲率テンソルで書き換え、一般のキリングベクトルが満足する性質 $r^n\widehat{R}_{nm}=D_m\widehat{r}$ を用いると、

$$\delta\mathcal{L}=\frac{2i}{k}eq_e^*\epsilon_{IK}(D^{(B)}_\nu q^n)(D_nr^K{}_J)(\overline{\xi}^I\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}^J_\mu)+\text{h.c.}=\frac{2i}{k}eq_e^*\epsilon_{IK}(D^{(B)}_\nu r^K{}_J)(\overline{\xi}^I\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}^J_\mu)+\text{h.c.} \tag{8.279}$$

さらに部分積分すると、

$$\delta\mathcal{L}=-\frac{2i}{k}eq_e^*\epsilon_{IK}r^K{}_J(D^{(B)}_\nu\overline{\xi}^I\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}^J_\mu)-\frac{2i}{k}eq_e^*\epsilon_{IK}r^K{}_J(\overline{\xi}^I\overline{\sigma}^{\mu\nu}D^{(B)}_\nu\overline{\psi}^J_\mu)+\text{h.c.} \tag{8.280}$$

この第 1 項は次の質量項の導入で相殺する

$$\mathcal{L}_{\psi\rm mass}=-ieq_e\epsilon^{IK}r^J{}_K(\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu}\psi_{J\nu})+\text{h.c.} \tag{8.281}$$

(8.280) の第 2 項は運動方程式の主要部に比例しているから、変換則に次の項を追加することで相殺する。

$$\delta'\psi_{I\mu}=-\frac{q_e^*}{k}\epsilon_{IK}r^K{}_J\sigma_\mu\overline{\xi}^J \tag{8.282}$$

この変換則の変更によってグラビティーノを含む項からいくつかの変分が新たに現れる。まず、ネーター項 $\mathcal{L}_J$ の変分

$$\delta'_\psi\mathcal{L}_J=\frac{e}{\sqrt{2}}q_e^*(\chi^\alpha\sigma^\nu\overline{\xi}^J)\epsilon_{JK}r^K{}_I(\gamma_m^\dagger)^I{}_\alpha(D^{(B)}_\nu q^m)+\text{h.c.} \tag{8.283}$$

は (8.271) の第 2 項と相殺する。もうひとつのネーター項 $\mathcal{L}_{J\rm mass}$ からは

$$\delta'_\psi\mathcal{L}_{J\rm mass}=-8e|q_e|^2\delta q^nr^{\rm Sp(1)}_{nm}r^m \tag{8.284}$$

が得られる。これは (8.273) と同じ形をしており、これら二つの和は次のように変形することができる。

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= -12e|q_e|^2\delta q^nr^{\rm Sp(1)}_{nm}r^m=6e|q_e|^2\delta q^n(\gamma_{nm})^I{}_Jr^J{}_Ir^m=-\frac{24}{k^2}e|q_e|^2\delta q^n(R_{nm})^I{}_Jr^J{}_Ir^m\\ &= \frac{24}{k^2}e|q_e|^2\delta q^n(D_nr^I{}_J)r^J{}_I=\frac{12}{k^2}e|q_e|^2\delta q^nD_n(r^I{}_Jr^J{}_I)\end{aligned} \tag{8.285}$$

これは次のポテンシャル項を導入すればそのスカラー場の変分で相殺できる。

$$\mathcal{L}_D=-\frac{12}{k^2}e|q_e|^2r^I{}_Jr^J{}_I \tag{8.286}$$

また、このポテンシャル項の多脚場の変分は

$$\delta'_\psi\mathcal{L}_{\psi\rm mass}=\frac{3i}{k}e|q_e|^2r^I{}_Jr^J{}_I(\psi_{K\mu}\sigma^\mu\overline{\xi}^K)+\text{h.c.}=\frac{12}{k^2}|q_e|^2\delta er^I{}_Jr^J{}_I \tag{8.287}$$

を相殺する。さらに、重力部分に含まれる三点結合項の変換

$$\delta'_\psi\mathcal{L}_{\psi F\psi}=-\frac{ie}{2}r^I{}_J(\psi_{I\mu}\sigma^\mu\not{F}_2\overline{\xi}^J)+\text{h.c.}, \tag{8.288}$$

およびグラビティーノの質量項のグラビティーノを F を含む項で変分すれば現れる余分な項

$$\delta_{\psi 2}\mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} = -\frac{ie}{2}r^I{}_J(\psi_{I\mu}\not{F}_2\sigma^\mu\bar{\xi}^J) + \mathrm{h.c.} \tag{8.289}$$

との和はちょうど (8.268) と相殺する。

こうしてフェルミオンの二次までのについて、ラグランジアンの超対称変換のすべての項が相殺されることが示された。最後にラグランジアンと変換則をまとめておこう。

質量をもったハイパー多重項

運動項

$$\mathcal{L}_q = -\frac{e}{2}h_{mn}(D^{(B)}_\mu q^m)(D^{(B)\mu}q^n), \quad \mathcal{L}_\chi = ie\chi^\alpha\sigma^\mu D^{(M,\omega,B)}_\mu\bar{\chi}_\alpha. \tag{8.290}$$

フェルミオンの質量項

$$\mathcal{L}_{\chi\mathrm{mass}} = -ieq_e^*\chi^\alpha J_{\alpha\beta}r^\beta{}_\gamma\chi^\gamma + \mathrm{h.c.}, \quad \mathcal{L}_{\psi\mathrm{mass}} = -ieq_e\epsilon^{IK}r^J{}_K(\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu}\psi_{J\nu}) + \mathrm{h.c.} \tag{8.291}$$

ポテンシャル項

$$\mathcal{L}_{\mathrm{pot}} = -2|q_e|^2 er^m r_m, \quad \mathcal{L}_D = -\frac{12}{k^2}|q_e|^2 er^I{}_J r^J{}_I. \tag{8.292}$$

ネーター項

$$\mathcal{L}_J = \frac{ke}{2\sqrt{2}}(\gamma_m)^I{}_\alpha(\psi_{I\mu}\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\chi^\alpha)(D^{(B)}_\nu q^m) + \mathrm{h.c.} \tag{8.293}$$

$$\mathcal{L}_{J\mathrm{mass}} = \frac{ke}{\sqrt{2}}q_e^*(\chi^\alpha\sigma^\mu\bar{\psi}^I_\mu)J_{\alpha\beta}(\gamma_m)^\beta{}_I r^m + \mathrm{h.c.} \tag{8.294}$$

三点結合項

$$\mathcal{L}_{\chi G\chi} = \frac{ike}{4q_e}J_{\alpha\beta}(\chi^\alpha\not{F}_2\chi^\beta) + \mathrm{h.c} \tag{8.295}$$

変換則

$$\delta q^m = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^m)^I{}_\alpha(\xi_I\chi^\alpha) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma^{\dagger m})^\alpha{}_I(\bar{\xi}^I\bar{\chi}_\alpha). \tag{8.296}$$

$$\delta\chi^\alpha = -\frac{i}{2\sqrt{2}}(\gamma^\dagger_m)^\alpha{}_I\sigma^\mu\bar{\xi}^I(D^{(B)}_\mu q^m), \quad \delta'\chi^\alpha = \frac{i}{\sqrt{2}}q_e\xi_I(\gamma_m)^I{}_\beta J^{\beta\alpha}r^m. \tag{8.297}$$

グラビティーノ変換則に次の項を追加する。

$$\delta'\psi_{I\mu} = -\frac{q_e^*}{k}\epsilon_{IK}r^K{}_J\sigma_\mu\bar{\xi}^J \tag{8.298}$$

モジュライ空間の計量 h_{mn} は曲率テンソルの Sp(1) 成分が (8.255) を満足するような四元数多様体を表すものであると仮定する。

このラグランジアンと変換則は以下の $\mathrm{U}(1)_R$ 変換のもとで共変である。

$$\xi_I \to e^{i\alpha}\xi_I, \quad q_e \to e^{-2i\alpha}q_e, \quad \psi_{I\mu} \to e^{i\alpha}\psi_{I\mu}, \quad \chi^\alpha \to e^{-i\alpha}\chi^\alpha. \tag{8.299}$$

上のラグランジアン中のポテンシャル項を見てみると、大域的な場合にはなかった $\mathcal{L}_D$ という項が現れている。これはグラビフォトンとの結合から現れる D-term と解釈することができる。実際、$r^I{}_J$ は一般のキリングベクトルについて成り立つ関係式 $r^n\widehat{R}_{nm} = D_m\widehat{r}$ の Sp(1) 部分から決定されるが、これは通常の momentum map の定義式に対応するものである。ポテンシャル項のうち大域的な場合にも存在する $|q_e|^2 r^m r_m$ は、スカラー場の質量のスケールを m、スカラー場 q^m の値のスケールを ϕ とおけば $m^2\phi^2$ 程度である。すなわちキリングベクトルは大雑把にいっ

Soryushiron Kenkyu

て $q_e r^m \sim m\phi$ 程度である。曲率テンソル $\widehat{R}_{mn}$ はオーダー k^2 の量であるから、momentum map $r^I{}_J$ はおおよそ $q_e r^I{}_J \sim k^2 m\phi^2$ となる。これをポテンシャルの $\mathcal{L}_D$ に代入すれば

$$\mathcal{L}_D \sim -k^2 m^2 \phi^4 \tag{8.300}$$

となる。通常の D-term に現れるゲージ結合定数の代わりにプランク質量 $1/k$ が現れている。

第 9 章　大域的 $\mathcal{N}=4$ 超対称性

9.1　$\mathcal{N}=4$ 超共形代数

$\mathcal{N}=4$ の超対称性を持つ理論には次元を持つパラメータがなく、理論に共形対称性が存在する。この代数は次のように与えられる。

$\mathcal{N}=4$ 超共形代数

$$
\begin{aligned}
[M_{MN}, M_{PQ}] &= M_{MQ}\eta_{NP} - M_{MP}\eta_{NQ} - M_{NQ}\eta_{MP} + M_{NP}\eta_{MQ}, && (9.1)\\
[M_{MN}, \mathcal{Q}_{IA}] &= \frac{1}{2}(\Gamma_{MN})_A{}^B \mathcal{Q}_{IB}, && (9.2)\\
[M_{MN}, \overline{\mathcal{Q}}{}^I_A] &= \frac{1}{2}\overline{\mathcal{Q}}{}^I_B (\Gamma_{MN})^B{}_A, && (9.3)\\
\{\mathcal{Q}_{IA}, \mathcal{Q}^J_B\} &= \frac{1}{8}\delta^J_I (\Gamma^{MN})_{AB} M_{MN} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{AB} G^{ab}(T_a)^J{}_I R_b, && (9.4)\\
[R_a, \mathcal{Q}_{IA}] &= \mathcal{Q}_{JA}(T_a)^J{}_I, && (9.5)\\
[R_a, \overline{\mathcal{Q}}{}^I_A] &= -(T_a)^I{}_J \overline{\mathcal{Q}}{}^J_A. && (9.6)
\end{aligned}
$$

ただし、$M, N = 0, 1, 2, 3, +, -$ であり、P_m、K_m、D は M_{MN} の中に次のように埋め込まれている。

$$
M_{m+} = P_m, \quad M_{m-} = K_m, \quad M_{+-} = -2D. \tag{9.7}
$$

また、Q と S をまとめて次の大きなスピノルを定義した。

$$
\mathcal{Q}_{IA} = \begin{pmatrix} Q_{I\overline{\alpha}} \\ S_{I\underline{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathcal{Q}}{}^I_A = \begin{pmatrix} S^I_{\overline{\alpha}} \\ Q^I_{\underline{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{9.8}
$$

拡張した座標に対する計量は次のように定義される。

$$
\eta_{MN} = \left(\begin{array}{c|cc} \eta_{mn} & & \\ \hline & & -2 \\ & -2 & \end{array}\right) \tag{9.9}
$$

大きなスピノルに作用する Γ 行列は次のように定義される。

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma_{mn})_A{}^B = \begin{pmatrix} (\gamma_{mn})_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} & \\ & (\gamma_{mn})_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} \end{pmatrix}, \quad (\Gamma_{+-})_A{}^B = \begin{pmatrix} 2\mathbf{1}_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} & \\ & -2\mathbf{1}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} \end{pmatrix},\\
&(\Gamma_{m-})_A{}^B = \begin{pmatrix} & 2(\gamma_m)_{\overline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad (\Gamma_{m+})_A{}^B = \begin{pmatrix} & 0 \\ 2(\gamma_m)_{\underline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}} & \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{9.10}
$$

$(T_a)^I{}_J$ は変換 R_a に対応した反エルミートな $\mathrm{SU}(4)_R$ 生成子行列である。ただし、以前にも注意したように変換記号と生成子は符号が逆になることに注意すること。

$$
\delta_{\mathrm{SU}(4)} = \epsilon^a R_a = -\epsilon^a T_a \tag{9.11}
$$

G_{ab} は次のように定義されたリー代数の計量であり、G^{ab} はその逆行列である。

$$G_{ab} = \langle T_a, T_b \rangle = -(T_a)^I{}_J (T_b)^J{}_I \tag{9.12}$$

以上の $\mathcal{N}=4$ 超共形代数は、以前に与えた $\mathcal{N}=1$ 超共形代数を部分代数として含む。たとえば、4 つある超電荷のうち $I=4$ のものだけに注目して

$$\mathcal{Q}_A = \mathcal{Q}_{4A}, \quad \overline{\mathcal{Q}}_A = \overline{\mathcal{Q}}^4_A. \tag{9.13}$$

のようにおき、$\mathrm{SU}(4)_R$ の生成子のうち

$$(T_A)^I{}_J = \begin{pmatrix} \frac{i}{3}\mathbf{1}_3 & \\ & -i \end{pmatrix} \tag{9.14}$$

(この生成子に対応するリー代数の計量の成分は $G_{AA}=4/3$ である。)に対応する変換を A とおけば、§5.4.2 で与えた $\mathcal{N}=1$ の超共形代数が得られる。

9.2 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論

$\mathcal{N}=4$ ベクトル多重項は $\mathcal{N}=1$ のベクトル多重項 V と 3 つのカイラルの運動項 Φ^i $(i=1,2,3)$ を組み合わせることによって得ることができる。$\mathcal{N}=4$ の超対称変換のもとで不変なラグランジアンを得るには、これらの場に対するゲージ不変な運動項の他に次の超ポテンシャルを導入する。

$$W = \frac{i\sqrt{2}}{3}\epsilon_{ijk}\,\mathrm{tr}(\phi^i\phi^j\phi^k). \tag{9.15}$$

ここでは、エルミートな生成子を用いて $D = D^a T_a$ のように表すことにする。ラグランジアンは次の 3 つの部分より成る。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{vector}} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(W_{\overline{\alpha}}W^{\overline{\alpha}})]_F = \mathrm{tr}\left[D^2 - \frac{1}{2}\lambda\gamma^\mu D_\mu\lambda - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right], && (9.16)\\
\mathcal{L}_{\mathrm{chiral}} &= \frac{1}{2}[\mathrm{tr}(\Phi_i^* e^{-2V_{\mathrm{adj}}}\Phi^i)]_D \\
&= \mathrm{tr}\Big[-D_\mu\phi^i D^\mu\phi_i^\dagger - (\chi^i_{\underline{\alpha}}\gamma^\mu D_\mu\chi_i^{\underline{\alpha}}) + F^i F_i^\dagger \\
&\quad -D[\phi^i,\phi_i^\dagger] + \sqrt{2}i([\phi_i^\dagger,\lambda_{\overline{\alpha}}]\chi^{\overline{\alpha}i}) - \sqrt{2}i(\chi_{i\underline{\alpha}}[\lambda^{\underline{\alpha}},\phi^i])\Big], && (9.17)\\
\mathcal{L}_{\mathrm{pot}} &= -[W(\Phi)]_F + \mathrm{c.c.} = -W_iF^i - \frac{1}{2}W_{ij}(\chi^i_{\underline{\alpha}}\chi^{j\overline{\alpha}}) + \mathrm{c.c.} \\
&= -i\sqrt{2}\epsilon_{ijk}\,\mathrm{tr}(F^i\phi^j\phi^k) - i\sqrt{2}\,\mathrm{tr}(\epsilon_{ijk}\phi^i\chi^j_{\underline{\alpha}}\chi^{k\overline{\alpha}}) + \mathrm{c.c.} && (9.18)
\end{aligned}$$

全体に $1/g^2$ を掛けることでゲージ結合定数を導入することができるが、ここでは省略した。

これらはその構成法より明らかに $\mathcal{N}=1$ の超対称性の下で不変である。$\mathcal{N}=4$ 超対称性の下で不変であることを示すためには、R-対称性 SU(4) のもとで不変であることを示せば十分である。SU(4) 構造を明らかにするために、まず Yukawa 項に注目しよう。Yukawa 項は次のように $\mathrm{SU}(4)_R$ 対称性が明らかな形に書くことができる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y &= \sqrt{2}i\,\mathrm{tr}\left[\phi_i^\dagger\lambda_{\overline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}i} - \phi_i^\dagger\chi^i_{\underline{\alpha}}\lambda^{\overline{\alpha}} - \epsilon_{ijk}\phi^i\chi^j_{\underline{\alpha}}\chi^{\overline{\alpha}k}\right] + \mathrm{c.c.} \\
&= -\sqrt{2}i\,\mathrm{tr}(\phi_{IJ}\psi^I_{\underline{\alpha}}\psi^{\overline{\alpha}J}) + \mathrm{c.c.} && (9.19)
\end{aligned}$$

Soryushiron Kenkyu

ただし、フェルミオンは

$$\psi^i = \chi^i, \quad \psi^4 = \lambda \tag{9.20}$$

のように 4 重項を組み、スカラー場は

$$\phi_i^\dagger = \phi_{i4} = -\phi_{4i}, \quad \epsilon_{ijk}\phi^i = \phi_{jk} \tag{9.21}$$

のように 6 重項を組むものとする。(9.21) の複素共役は

$$\phi^i = \phi^{i4} = -\phi^{4i}, \quad \epsilon^{ijk}\phi_i^\dagger = \phi^{jk} \tag{9.22}$$

となり、(9.21) と (9.22) を組み合わせれば、次の自己双対条件を得ることができる。

$$\frac{1}{2}\epsilon_{IJKL}\phi^{KL} = \phi_{IJ}, \quad (\phi^{IJ})^\dagger = \phi_{IJ}. \tag{9.23}$$

まず運動方程式を解くと、補助場が次のように決まる。

$$D = [\phi^i, \phi_i^\dagger], \quad F^i = i\sqrt{2}\epsilon^{ijk}\phi_j^\dagger\phi_k^\dagger, \quad F_i^\dagger = i\sqrt{2}\epsilon_{ijk}\phi^j\phi^k. \tag{9.24}$$

F^i と $F_i^\dagger$ の右辺の符号に注意。エルミート共役を取る際に ϕ^j と ϕ^k の位置が入れ替わることによる符号が一つ余分に出るので、どちらも係数は $i\sqrt{2}$ で正しい。これをラグランジアンに代入すると、ポテンシャル項は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{pot}} &= -\operatorname{tr}\left(F_i^\dagger F^i + \frac{1}{2}D^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{tr}([\phi^i,\phi^j][\phi_i,\phi_j]) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}([\phi^i,\phi_j][\phi_i,\phi^j]) \\ &= \frac{1}{16}\operatorname{tr}([\phi^{IJ},\phi^{KL}][\phi_{IJ},\phi_{KL}]) \end{aligned} \tag{9.25}$$

途中で恒等式

$$\operatorname{tr}([\phi^i,\phi_j][\phi_i,\phi^j]) = \operatorname{tr}([\phi^i,\phi^j][\phi_i,\phi_j]) - \operatorname{tr}([\phi^i,\phi_i][\phi^j,\phi_j]) \tag{9.26}$$

を用いた。

ϕ^{IJ} をエルミートスカラー場 ϕ_m（$m=1,\ldots,6$）を用いて

$$\phi^{IJ} = C_m^{IJ}\phi_m \tag{9.27}$$

と与えることができる。ただし、C_m^{IJ} はこのセクションの最後で定義される SU(4) 不変テンソルである。このスカラー場を用いてポテンシャルを書き換えれば、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{4}\operatorname{tr}([\phi_m,\phi_n][\phi_m,\phi_n]) \tag{9.28}$$

となる。

スカラー場の運動項もエルミートスカラー場 ϕ_m を用いて書いておくと、次のようになる。

$$-D_\mu\phi^i D^\mu\phi_i^\dagger = -\frac{1}{4}D_\mu\phi^{IJ}D^\mu\phi_{IJ} = -\frac{1}{2}D_\mu\phi_m D^\mu\phi_m \tag{9.29}$$

ここでは $\mathcal{N}=1$ 超対称理論の特殊な場合として $\mathcal{N}=4$ の理論を構成したが、10 次元の超対称 Yang-Mills 理論のラグランジアンから $\mathbf{T}^6$ コンパクト化を行うことにより得ることもできる。10

次元の座標を $X^M=(x^\mu,y^m)$ としよう。ただし $\mu=0,1,2,3$, $m=4,5,6,7,8,9$ とする。10 次元の Yang-Mills 理論のラグランジアンは次のように与えられる。

$$S_{10}=-\frac{1}{4}\operatorname{tr}(F_{MN}F^{MN}),\quad F_{MN}=\partial_M A_N-\partial_N A_M-i[A_M,A_N]. \tag{9.30}$$

場 A_M が y^m に依存しないとし、ゲージ場の y^m 方向の成分を ϕ_m とすれば、次の式が成り立つ。

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-i[A_\mu,A_\nu],\quad F_{\mu m}=\mathcal{D}_\mu\phi_m,\quad F_{mn}=-i[\phi_m,\phi_n]. \tag{9.31}$$

従って、座標 y^i によって表される 6 次元部分を体積 1 の $\mathbf{T}^6$ でコンパクト化すると、前述のラグランジアンを得る。

次に、$\mathcal{N}=1$ の超対称変換を $\mathrm{SU}(4)_R$ 不変な形に書くことで $\mathcal{N}=4$ 超対称変換則を決定しよう。補助場に対して (9.24) を代入することにより、フェルミオンの超対称変換則が

$$\begin{aligned}\delta_Q\lambda^{\overline{\alpha}} &= \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi^{\overline{\alpha}}D-\frac{1}{4\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\xi^{\overline{\alpha}}F_{\mu\nu}\\ &= \frac{i}{2\sqrt{2}}\xi^{\overline{\alpha}}[\phi^{i4},\phi_{i4}]-\frac{1}{4\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\xi^{\overline{\alpha}}F_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{9.32}$$

$$\begin{aligned}\delta_Q\chi^{i\overline{\alpha}} &= \frac{1}{2}\xi^{\overline{\alpha}}F^i-\frac{1}{2}\gamma^\mu\xi^{\underline{\alpha}}D_\mu\phi^I\\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}\xi^{\overline{\alpha}}[\phi^{ij},\phi_{j4}]-\frac{1}{2}\gamma^\mu\xi^{\underline{\alpha}}D_\mu\phi^{i4}\end{aligned} \tag{9.33}$$

となる。$\mathcal{N}=1$ 超対称変換のパラメータを次のように $\mathcal{N}=4$ 超対称変換のパラメータと対応させよう。

$$\xi^{4\overline{\alpha}}=\xi^{\overline{\alpha}},\quad \zeta_4^{\overline{\alpha}}=\zeta^{\overline{\alpha}}. \tag{9.34}$$

すると、フェルミオンの Q 変換は次のように SU(4) 共変な形にまとめることができる。

$$\delta_Q^{\mathcal{N}=4}\psi^{I\overline{\alpha}}=-\frac{i}{2\sqrt{2}}[\phi^{IJ},\phi_{JK}]\xi^{K\overline{\alpha}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\xi^{I\overline{\alpha}}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\gamma^\mu(D_\mu\phi^{IJ})\xi_J^{\underline{\alpha}} \tag{9.35}$$

スカラー場の $\mathcal{N}=1$ 変換則は

$$\delta_Q\phi^i=-\frac{1}{2}\xi_{\overline{\alpha}}\chi^{i\overline{\alpha}},\quad \delta_Q\phi_i^\dagger=-\frac{1}{2}\xi_{\underline{\alpha}}\chi_i^{\underline{\alpha}}. \tag{9.36}$$

あるいは

$$\delta_Q\phi^{i4}=-\frac{1}{2}\xi_{\overline{\alpha}}^4\chi^{I\overline{\alpha}},\quad \delta_Q\phi^{ij}=-\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\xi_{4\underline{\alpha}}\chi_k^{\underline{\alpha}}. \tag{9.37}$$

である。これを SU(4) 共変化することによって次の変換則を得る。

$$\delta_Q^{\mathcal{N}=4}\phi^{IJ}=\frac{1}{2}(\xi_{\overline{\alpha}}^I\psi^{J\overline{\alpha}})-\frac{1}{2}(\xi_{\overline{\alpha}}^J\psi^{I\overline{\alpha}})+\frac{1}{2}\epsilon^{IJKL}\xi_{K\underline{\alpha}}\psi_L^{\underline{\alpha}}. \tag{9.38}$$

ゲージ場の変換則

$$\delta_Q v_\mu=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi_{\underline{\alpha}}\gamma_\mu\lambda^{\overline{\alpha}})+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi_{\overline{\alpha}}\gamma_\mu\lambda^{\underline{\alpha}}) \tag{9.39}$$

は直ちに共変化できる。

$$\delta_Q^{\mathcal{N}=4}v_\mu=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi_{I\underline{\alpha}}\gamma_\mu\psi^{I\overline{\alpha}})+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi_{\overline{\alpha}}^I\gamma_\mu\psi_I^{\underline{\alpha}}) \tag{9.40}$$

あるいは、フィルツ変換を行って次のように書いておくと便利である。

$$\delta_Q^{\mathcal{N}=4}v_\mu(\gamma^\mu)^{\overline{\alpha}\underline{\beta}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_I^{\underline{\beta}}\psi^{I\overline{\alpha}})+\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^{I\overline{\alpha}}\psi_I^{\underline{\beta}}) \tag{9.41}$$

$\mathcal{N}=1$ の S 変換は、フェルミオンに対しては次のように与えられる。

$$\delta_S\lambda^{\overline{\alpha}}=\delta_{Q[-\not{x}\zeta]}\lambda^{\overline{\alpha}},\quad \delta_S\chi^{i\overline{\alpha}}=\delta_{Q[-\not{x}\zeta]}\chi^{i\overline{\alpha}}+\zeta^{\overline{\alpha}}\phi^i \tag{9.42}$$

これも、$SU(4)$ 共変にすれば、次のようにまとまる。

$$\delta_S^{\mathcal{N}=4}\psi^{I\overline{\alpha}}=\delta_{Q[-\not{x}\zeta]}^{\mathcal{N}=4}\psi^{I\overline{\alpha}}+\phi^{IJ}\zeta_J^{\overline{\alpha}} \tag{9.43}$$

スカラー場およびゲージ場に対しては、S 変換は単に Q 変換のパラメータを $\xi^{I\overline{\alpha}}=-\not{x}\zeta^{I\underline{\alpha}}$ のように置き換えたものである。

まとめておこう。

$$\begin{aligned}
\delta_Q^{\mathcal{N}=4}\psi^{I\overline{\alpha}} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}[\phi^{IJ},\phi_{JK}]\xi^{K\overline{\alpha}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\xi^{I\overline{\alpha}}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\gamma^\mu(D_\mu\phi^{IJ})\xi_J^{\underline{\alpha}}, && (9.44)\\
\delta_Q^{\mathcal{N}=4}\phi^{IJ} &= \frac{1}{2}(\xi^I_{\overline{\alpha}}\psi^{J\overline{\alpha}})-\frac{1}{2}(\xi^J_{\overline{\alpha}}\psi^{I\overline{\alpha}})+\frac{1}{2}\epsilon^{IJKL}(\xi_{K\underline{\alpha}}\psi_L^{\underline{\alpha}}), && (9.45)\\
\delta_Q^{\mathcal{N}=4}v^{\overline{\alpha}\underline{\beta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_I^{\underline{\beta}}\psi^{I\overline{\alpha}})+\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^{I\overline{\alpha}}\psi_I^{\underline{\beta}}), && (9.46)\\
\delta_S^{\mathcal{N}=4}\psi^{I\overline{\alpha}} &= \delta_{Q[-\not{x}\zeta]}^{\mathcal{N}=4}\psi^{I\overline{\alpha}}+\phi^{IJ}\zeta_J^{\overline{\alpha}}, && (9.47)\\
\delta_S^{\mathcal{N}=4}\phi^{IJ} &= \delta_{Q[-\not{x}\zeta]}^{\mathcal{N}=4}\phi^{IJ}, && (9.48)\\
\delta_S^{\mathcal{N}=4}v_\mu &= \delta_{Q[-\not{x}\zeta]}^{\mathcal{N}=4}v_\mu. && (9.49)
\end{aligned}$$

Soryushiron Kenkyu

SU(4) 不変テンソル

SU(4) の **4** 表現二つの反対称積から **6** 表現を抜き出すような不変テンソルを C_M^{IJ} とする。一方、二つの **4** 表現から **6** 表現を抜き出す不変テンソルを C_{IJ}^M とすれば、これは C_M^{IJ} の複素共役とすることができる。

$$C_{IJ}^M = (C_M^{IJ})^* \tag{9.50}$$

これら不変テンソルの規格化を次の式で決めることにする。

$$C_M^{IJ} C_{IJ}^N = 2\delta_M^N. \tag{9.51}$$

ベクトル表現は実表現であるから、添え字を上げ下げすることができるが、その際に用いる計量テンソルを g_{MN} とする。二つの添え字 M と N の入れ替えについて対称である。適当な線形変換によって g_{MN} は単位行列に取ることもできる。g^{MN} は g_{MN} の逆行列であると同時に複素共役でもあるとする。これは g_{MN} がユニタリー行列であることを意味している。4 つの **4** 表現から一重項を取り出す完全反対称テンソルを ϵ^{IJKL}、その複素共役を ϵ_{IJKL}、とする。

$$\epsilon^{IJKL}\epsilon_{IJKL} = 24 \tag{9.52}$$

が成り立つように規格化されているとする。4 つの **4** 表現のテンソル積は一重項をひとつだけ含むから、まず二つずつを **6** 表現に組んで、そのあと一重項を組んでも、ϵ^{IJKL} を用いて組んだものと規格化因子を除いて同じものであるはずである。規格化因子はそれぞれの不変テンソルの規格化条件を用いることで決めることができ、

$$g^{MN} C_M^{IJ} C_N^{KL} = \epsilon^{IJKL} \tag{9.53}$$

が得られる。または、C の規格化の式を用いて

$$g_{MN} = \frac{1}{4} C_M^{IJ} C_N^{KL} \epsilon_{IJKL} \tag{9.54}$$

が得られる。規格化定数の位相は決まらないので、便利なようにとった。C_{IJ}^m は 6 次元 γ 行列のカイラル成分に比例しており、次の関係式を満足する。

$$C_{IJ}^m C_n^{JK} + C_{IJ}^n C_m^{JK} = -\delta_{mn}\delta_I^K \tag{9.55}$$

第10章　$\mathcal{N}=4$ 超重力理論

10.1　重力多重項

10.1.1　ラグランジアンの構成

4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超重力理論の重力多重項は $\mathrm{SU}(4)_R=\mathrm{SO}(6)_R$ の R-対称性を持ち、一つの重力場 $g_{\mu\nu}$、$\mathbf{4}$ 表現に属するグラビティーノ $\psi_{I\mu}$、$\mathbf{6}$ 表現に属するゲージ場 B^a_μ、$\overline{\mathbf{4}}$ 表現に属するフェルミオン λ^I、一重項に属する複素スカラー場よりなる。(表 10.1) すなわち、$\mathrm{U}(1)_R$ を表す複素線束

表 10.1: $\mathcal{N}=4$ 超重力理論の重力多重項

	$e^{\widehat{m}}_\mu$	$\psi_{I\mu}$	B^a_μ	λ^I	$\widehat{z}$
$\mathrm{SU}(4)_R$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{6}$	$\overline{\mathbf{4}}$	$\mathbf{1}$
$\mathrm{U}(1)_R$	0	1	2	3	4

を $\mathcal{S}$、$\mathrm{SU}(4)_R$ の表現 R で変換されるベクトル束を $\mathcal{V}_R$ とすると、それぞれの場は次のベクトル束に値をとる。

$$\xi_I\in\mathcal{V}_{\mathbf{4}}\otimes\mathcal{S},\quad e^{\widehat{m}}_\mu\in 1,\quad \psi_{I\mu}\in\mathcal{V}_{\mathbf{4}}\otimes\mathcal{S},\quad G^{+m}_{\mu\nu}\in\mathcal{V}_{\mathbf{6}}\otimes\mathcal{S}^2,\quad \lambda^I\in\mathcal{V}_{\overline{\mathbf{4}}}\otimes\mathcal{S}^3,\quad d\widehat{z}\in\mathcal{S}^4. \tag{10.1}$$

ただしここでは時空のスピンを表す添え字は無視した。ここで、$d\widehat{z}$ が $\mathcal{S}^4$ で変換されるということは、$\mathcal{S}^4$ がモジュライ空間の枠束になっていることを表している。すなわち、モジュライ空間上の多脚場は次のベクトル束に値を取る。

$$e^{\widehat{z}}_m\in T^*\mathcal{M}\otimes\mathcal{S}^4 \tag{10.2}$$

ベクトル場 $G^{+m}_{\mu\nu}$ は局所化される $\mathcal{S}^2$ に値を取るが、これはゲージ変換と相性が悪いので、$\mathcal{S}^{-2}\otimes\mathcal{V}_{\mathrm{Sp}(1,\mathbf{R})}$ によって変換される電荷行列

$$\vec{q}=\begin{pmatrix} q_e \\ q_m \end{pmatrix}\in\mathcal{S}^{-2}\otimes\mathcal{V}_{\mathrm{Sp}(1)} \tag{10.3}$$

を導入し、

$$\vec{\lambda}^I=\vec{q}\lambda^I,\quad \vec{F}^{+m}_{\mu\nu}=\vec{q}G^{+m}_{\mu\nu},\quad \vec{\psi}_{I\mu}=\vec{q}\psi_{I\mu}. \tag{10.4}$$

を定義しておく。これらは次のベクトル束に値をとる。

$$\vec{\psi}_{I\mu}\in\mathcal{V}_{\mathbf{4}}\otimes\mathcal{V}_{\mathrm{Sp}(1,\mathbf{R})}\otimes\mathcal{S}^{-1},\quad \vec{F}^m_{\mu\nu}\in\mathcal{V}_{\mathbf{6}}\otimes\mathcal{V}_{\mathrm{Sp}(1,\mathbf{R})},\quad \vec{\lambda}^I\in\mathcal{V}_{\overline{\mathbf{4}}}\otimes\mathcal{V}_{\mathrm{Sp}(1,\mathbf{R})}\otimes\mathcal{S}. \tag{10.5}$$

ベクトル場は 6 個あるので、一般の電荷行列は 6×6 の行列として与えられるのであるが、ここではそれらが対角的である、つまり $M^a_i=\delta^a_i q_e$ および $M_{ia}=\delta_{ia}q_m$ のように与えられると仮定しておく。

Soryushiron Kenkyu

ここでは ϕ をモジュライ空間上の複素座標であるとする。ラグランジアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_0 = -eg_{\phi\phi^*}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^*. \tag{10.6}$$

z は $\mathrm{U}(1)_R$ 電荷 4 を持っていた。従って $\mathrm{U}(1)_R$ 回転とモジュライ空間上の局所座標変換を同一視することができる。

フェルミオン λ^I は、$\mathrm{U}(1)_R$ 電荷 3 を持っていた。これはモジュライ空間上でのスピンが 3/4 であることを表している。この電荷に対して共変化された微分を $D^{(\sigma)}$ のように書くと、フェルミオンのラグランジアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{1/2} = ie\lambda^I \not{D}^{(\sigma)}\overline{\lambda}_I \tag{10.7}$$

超対称変換のうち ϕ と λ^I の間の変換を表す部分を $\delta_{(0,1/2)}$ と書けば、これは次のように与えられる。

$$\delta_{(0,1/2)}\phi = \frac{1}{2}e^{\phi}_{\hat{z}}\lambda^I\xi_I, \quad \delta_{(0,1/2)}\lambda^I = -\frac{i}{2}e^{\hat{z}}_{\phi}(\not{\partial}\phi)\overline{\xi}^I. \tag{10.8}$$

この変換則によって $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{1/2}$ を変換すれば、次の変分を得る。

$$\delta_{(0,1/2)}(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{1/2}) = -\frac{e}{2}\overline{e}^{\hat{z}}_{\phi}(\lambda^I\sigma^\mu(\not{\partial}\overline{\phi})D^{(\sigma,\omega)}_\mu\xi_I) \tag{10.9}$$

これは次のネーター結合項の導入によって相殺することができる。

$$\mathcal{L}_{J(0,1/2)} = \frac{ke}{2}\overline{e}^{\hat{z}}_{\phi}(\lambda^I\sigma^\mu(\not{\partial}\overline{\phi})\psi_{I\mu}) \tag{10.10}$$

この項の $\psi_{I\mu}$ の超対称変換のうち $D\xi$ に比例する項によって上記の変分が相殺される。この項からはそれ以外の変分も得られるが、そのうち λ^I の $\delta_{(0,1/2)}$ による変分を見てみよう。

$$\begin{aligned}\delta_{(0,1/2)}\mathcal{L}_{J(0,1/2)} &= -\frac{ike}{4}g_{\phi\overline{\phi}}(\overline{\xi}^I(\not{\partial}\phi)\sigma^\mu(\not{\partial}\overline{\phi})\psi_{I\mu}) \\ &= -\frac{ike}{4}g_{\phi\overline{\phi}}(\overline{\xi}^I\langle(\not{\partial}\phi)\sigma^\mu(\not{\partial}\overline{\phi})\rangle_1\psi_{I\mu}) - \frac{ike}{4}g_{\phi\overline{\phi}}(\overline{\xi}^I\sigma^{\kappa\mu\lambda}\psi_{I\mu})(\partial_\kappa\phi)(\partial_\lambda\overline{\phi})\end{aligned} \tag{10.11}$$

(10.11) 中の最後の表式の第 1 項はスカラー場の運動項に含まれる多脚場の変分とちょうど相殺する。

次に、グラビティーノと重力の間の超対称変換についてみてみよう。グラビティーノ運動項は次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{3/2} = ie\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}D^{(\sigma,\omega)}_\nu\overline{\psi}^I_\rho. \tag{10.12}$$

ただし、共変微分 $D^{(\sigma,\omega)}$ はグラビティーノがモジュライ空間上でスピンを持っていることも考慮する。重力については通常のアインシュタインヒルベルトラグランジアンを用いる。

$$\mathcal{L}_2 = \frac{e}{k^2}R \tag{10.13}$$

超対称変換のうちこれらの場の間の変換を与える部分を $\delta_{(3/2,2)}$ と書けば、グラビティーノと重力の間の変換則は次のように与えられる。

$$\delta_{(3/2,2)}\psi_{I\mu} = \frac{1}{k}D^{(\sigma,\omega)}_\mu\xi_I, \quad \delta_{(3/2,2)}e^{\hat{m}}_\mu = \frac{ik}{4}\psi_{I\mu}\sigma^{\hat{m}}\overline{\xi}^I + \text{h.c.} \tag{10.14}$$

グラビティーノについての変分を行った際に次のように微分の二次の項が現れる。

$$\delta\mathcal{L} = \frac{ie}{k}(\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}D^{(\sigma,\omega)}_\nu D^{(\sigma,\omega)}_\rho\overline{\xi}^I). \tag{10.15}$$

これらの微分は二つの添え字について反対称であるため交換関係の部分から曲率テンソルを含む項が現れ、それがアインシュタイン作用の変分をちょうど相殺する。しかし $\overline{\xi}^I$ がモジュライ空間上のスピン $-1/4$ を持っているために新たに次の変分が現れ、相殺されずに残る。

$$\delta_{(3/2,2)}(\mathcal{L}_{3/2}+\mathcal{L}_2) = -\frac{ie}{4k}(\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}\overline{\xi}^I)(\partial_\nu\phi)(\partial_\rho\phi^*)R_{\phi\phi^*}{}^{\widehat{z}}{}_{\widehat{z}} \tag{10.16}$$

ただし $R_{\phi\phi^*}{}^{\widehat{z}}{}_{\widehat{z}}$ はモジュライ空間上の曲率テンソルである。この項は (10.11) の第 2 項とよく似た形をしており、この二つの項は相殺する必要がある。そのためには、モジュライ空間上の曲率が次のように与えられる必要がある。

$$R_{\phi\phi^*}{}^{\widehat{z}}{}_{\widehat{z}} = -k^2 g_{\phi\phi^*} \tag{10.17}$$

次に、ゲージ場とフェルミオンの間の超対称変換を考えよう。ゲージ場は次のラグランジアンによって与えられる。

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau})F^n_{\mu\nu}F^{n\mu\nu} - \frac{1}{8}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau})\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^n_{\mu\nu}F^n_{\rho\sigma} \tag{10.18}$$

ただし

$$\tau = 2\pi\widetilde{\tau} = \frac{q_e}{q_m} \tag{10.19}$$

である。フェルミオンとゲージ場の間の超対称変換を記述するためには、フェルミオンを次のように表すのが便利である。

$$\vec{\lambda}^I = \vec{q}\lambda^I. \tag{10.20}$$

これを用いると、ゲージ場とフェルミオンの間の変換則が次のようにきれいな形に書ける。

$$\delta_{(1,1/2)}\vec{A}^m_\mu = \frac{i}{2\sqrt{2}}C^m_{IJ}\vec{\lambda}^I\sigma_\mu\overline{\xi}^J + \mathrm{h.c.},\quad \delta_{(1,1/2)}\vec{\lambda}^I = -\frac{1}{2\sqrt{2}}C^{IJ}_m\vec{\not{F}}^m_2\xi_J \tag{10.21}$$

この変数を用いて、ゲージーノの運動項が自由場のような形に現されると仮定しよう。

$$\mathcal{L}_{1/2} = -\frac{e}{4\pi}(\vec{\lambda}^I\times\not{D}^{(\omega)}\vec{\overline{\lambda}}_I) \tag{10.22}$$

これが以前に与えた $\mathcal{L}_{1/2}$ と一致するためには、電荷行列が次の条件を満足する必要がある。

$$\vec{q}\times D_\mu\vec{q}^* = 0. \tag{10.23}$$

ここではこの条件が満足されているものと仮定して計算を進める。ゲージ場とゲージーノの運動項を $\delta_{(1,1/2)}$ によって変換しよう。その結果が次のように与えられることはすぐにわかる。

$$\delta_{(1/2,1)}(\mathcal{L}_{1/2}+\mathcal{L}_1) = -\frac{ie}{2\sqrt{2}}C^m_{IJ}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau})q_e(\lambda^I\sigma^\mu\not{F}^m D_\mu\overline{\xi}^J) - \frac{e}{4\sqrt{2}}C^m_{IJ}(D_\mu\widetilde{\tau})q_e(\lambda^I\not{F}^m\sigma^\mu\overline{\xi}^J) \tag{10.24}$$

この第 1 項を相殺するためには次のネーター項を導入する必要がある。

$$\mathcal{L}_{J(1/2,1)} = \frac{ike}{2\sqrt{2}}C^m_{IJ}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau})q_e(\lambda^I\sigma^\mu\not{F}^m\overline{\psi}^J_\mu) \tag{10.25}$$

次に、グラビティーノの運動項の $\delta_{(1,3/2)}$ による超対称変換をみてみよう。グラビティーノとゲージ場の変換側について記述するには、次の変数を導入するのが便利である。

$$\vec{\psi}_{I\mu} = \vec{q}\psi_{I\mu}. \tag{10.26}$$

ゲージ場とグラビティーノの間の変換則は次のように書くことができる。

$$\delta_{(1,3/2)}\vec{A}^m_\mu = -\frac{i}{2}C^{IJ}_n(\vec{\psi}_{I,\mu}\xi_J) + \mathrm{h.c.},\quad \delta_{(1,3/2)}\vec{\psi}_{I\mu} = \frac{1}{4}C^m_{IJ}\vec{\not{F}}^m_2\sigma_\mu\overline{\xi}^J, \tag{10.27}$$

この変数を用いれば、ラグランジアンを次のように書くことができる。

$$\mathcal{L}_{3/2} = -\frac{e}{4\pi}(\vec{\psi}_{I\mu} \times \sigma^{\mu\nu\rho} D_\nu \overline{\vec{\psi}}^I_\rho). \tag{10.28}$$

電荷行列が (10.23) を満足するという仮定を用いれば、これが (10.12) のラグランジアンに等しいことが示される。ラグランジアンを変換してみると、次のものが残る。

$$\delta_{(1,3/2)}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{3/2}) = -\frac{e}{4}C^{IJ}_m(D_\nu\widetilde{\tau})q_e(\psi_{I\mu}\langle\sigma^{\mu\nu}\not{F}^m\rangle_{0,4}\xi_J) - \frac{ie}{2}C^{IJ}_m(\operatorname{Im}\widetilde{\tau})q_e\psi_{I\mu}\langle\overline{\sigma}^\mu\not{F}^m\sigma^\nu\rangle_{0,4}D_\nu\xi_J \tag{10.29}$$

第 2 項を相殺するためには次のネーター項が必要である。

$$\mathcal{L}_{J(1,3/2)} = \frac{ike}{4}C^{IJ}_m(\operatorname{Im}\widetilde{\tau})q_e\psi_{I\mu}\langle\overline{\sigma}^\mu\not{F}^m\sigma^\nu\rangle_{0,4}\psi_{J\nu} \tag{10.30}$$

ネーター項の超対称変換のうち次の二つは $(\not\partial\overline{\phi})\overline{\sigma}^\mu\not{F}^m_2 - \not{F}^m_2\sigma^\mu(\not\partial\overline{\phi}) = 2\langle(\not\partial\overline{\phi})\overline{\sigma}^\mu\not{F}^m_2\rangle_{0,4}$ を用いれば次のようにまとまる。

$$\delta_{(0,1/2)}\mathcal{L}_{J(1/2,1)} + \delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{J(0,1/2)} = \frac{ke}{2\sqrt{2}}C^{IJ}_m\frac{\overline{e}^z_\phi}{q_e}(\partial_\nu\overline{\phi})(\psi_{I\mu}\langle\sigma^{\mu\nu}\not{F}^m_2\rangle_{0,4}\xi_J) \tag{10.31}$$

これは (10.29) の第 1 項の同類項であり、これらが相殺するためには次の条件が満足される必要がある。

$$\widetilde{\tau}_\phi = 0, \quad \widetilde{\tau}_{\phi^*} = \sqrt{2}k\frac{\overline{e}^z_\phi}{q_e^2} \tag{10.32}$$

また、

$$\delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{J(0,1/2)} = \frac{ke}{4}\frac{\overline{e}^{\hat{z}}_\phi}{q_e}C^m_{IJ}(\lambda^I\not{F}^m_2(\not\partial\overline{\phi})\overline{\xi}^J), \tag{10.33}$$

は (10.24) の第 2 項の同類項であり、(10.32) が成り立っていれば相殺することが確認される。

次の変分は、ゲージ場運動項の多脚場の変換と相殺する。

$$\delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{J(1,3/2)} + \delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{J(1/2,1)} = \frac{ike}{4}C^m_{IJ}C^{IK}_n(\operatorname{Im}\widetilde{\tau})\xi_K\langle\not{F}^n_2\sigma^\mu\not{F}^m_2\rangle_1\overline{\psi}^J_\mu. \tag{10.34}$$

次の変換について見てみよう。

$$\delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{J(1/2,1)} = \frac{ike}{8\sqrt{2}}C^m_{IJ}C^{JK}_n(\operatorname{Im}\widetilde{\tau})\frac{q_e}{q_e^*}(\lambda^I\sigma^\mu\not{F}^m\not{F}^n_2\sigma_\mu\xi_K) \tag{10.35}$$

ここで、(10.32) および (9.55) を用いると次のように変形できる。

$$\delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{J(1/2,1)} = \frac{e}{4}\delta(\operatorname{Im}\widetilde{\tau})F^m_{\mu\nu}F^{m\mu\nu} + \frac{e}{8}\delta(\operatorname{Re}\widetilde{\tau})\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F^m_{\mu\nu}F^m_{\kappa\lambda} + \text{c.c.} \tag{10.36}$$

従って、ゲージ場運動項のスカラー場の変分と相殺する。

以上で、フェルミオンの 4 次以上の項を除けば、ラグランジアンの超対称変換がすべて相殺することが示された。

まとめておこう。

$\mathcal{N}=4$ 超重力理論のラグランジアンと変換則

ラグランジアンは以下の 8 つのものの和で与えられる。

$$\mathcal{L}_0 = -eg_{\phi\phi^*}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^*. \tag{10.37}$$

$$\mathcal{L}_{1/2} = ie\lambda^I \not{D}^{(\sigma)}\overline{\lambda}_I = -\frac{e}{4\pi}(\vec{\lambda}^I \times \not{D}^{(\omega)}\vec{\overline{\lambda}}_I) \tag{10.38}$$

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau})F^n_{\mu\nu}F^{n\mu\nu} - \frac{1}{8}(\mathrm{Re}\,\widetilde{\tau})\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^n_{\mu\nu}F^n_{\rho\sigma} \tag{10.39}$$

$$\mathcal{L}_{3/2} = ie\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}D^{(\sigma,\omega)}_\nu\overline{\psi}^I_\rho = -\frac{e}{4\pi}(\vec{\psi}_{I\mu} \times \sigma^{\mu\nu\rho}D_\nu\vec{\overline{\psi}}^I_\rho). \tag{10.40}$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{e}{k^2}R \tag{10.41}$$

$$\mathcal{L}_{J(0,1/2)} = \frac{ke}{2}\overline{e}^{\widehat{z}}_\phi(\lambda^I\sigma^\mu(\not{\partial}\overline{\phi})\psi_{I\mu}) \tag{10.42}$$

$$\mathcal{L}_{J(1/2,1)} = \frac{ike}{2\sqrt{2}}C^m_{IJ}(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau})q_e(\lambda^I\sigma^\mu\not{F}^m\overline{\psi}^J_\mu) \tag{10.43}$$

$$\mathcal{L}_{J(1,3/2)} = \frac{ike}{4}C^{IJ}_m(\mathrm{Im}\,\widetilde{\tau})q_e\psi_{I\mu}\langle\overline{\sigma}^\mu\not{F}^m\sigma^\nu\rangle_{0,4}\psi_{J\nu} \tag{10.44}$$

それぞれのスピンの間の超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta_{(0,1/2)}\phi = \frac{1}{2}e^\phi_{\widehat{z}}\lambda^I\xi_I, \quad \delta_{(0,1/2)}\lambda^I = -\frac{i}{2}e^{\widehat{z}}_\phi(\not{\partial}\phi)\overline{\xi}^I. \tag{10.45}$$

$$\delta_{(1,1/2)}\vec{A}^m_\mu = \frac{i}{2\sqrt{2}}C^m_{IJ}\vec{\lambda}^I\sigma_\mu\overline{\xi}^J + \mathrm{h.c.}, \quad \delta_{(1,1/2)}\vec{\lambda}^I = -\frac{1}{2\sqrt{2}}C^{IJ}_m\vec{\not{F}}^m_2\xi_J \tag{10.46}$$

$$\delta_{(1,3/2)}\vec{A}^m_\mu = -\frac{i}{2}C^{IJ}_n(\vec{\psi}_{I,\mu}\xi_J) + \mathrm{h.c.}, \quad \delta_{(1,3/2)}\vec{\psi}_{I\mu} = \frac{1}{4}C^m_{IJ}\vec{\not{F}}^m_2\sigma_\mu\overline{\xi}^J, \tag{10.47}$$

$$\delta_{(3/2,2)}\psi_{I\mu} = \frac{1}{k}D^{(\sigma,\omega)}_\mu\xi_I, \quad \delta_{(3/2,2)}e^{\widehat{m}}_\mu = \frac{ik}{4}\psi_{I\mu}\sigma^{\widehat{m}}\overline{\xi}^I + \mathrm{h.c.} \tag{10.48}$$

10.1.2 モジュライ空間の構造

ラグランジアンの超対称変換が相殺するために幾つかの条件が必要であった。それらの条件により、モジュライ空間の構造や電荷関数が決まることを見てみよう。まず、モジュライ空間は負の定曲率の空間であり次の条件を満足しなければならない。

$$R_{\phi\phi^*}{}^{\widehat{z}}{}_{\widehat{z}} = -k^2 g_{\phi\phi^*} \tag{10.49}$$

この条件により、モジュライ空間は一意的に定まり、$\mathcal{M} = \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/\,\mathrm{U}(1)$ である。

また、電荷ベクトル $\vec{q}$ は R-電荷 -2 を持ち、ディラック条件

$$\mathrm{Im}(q_m q^*_e) = 2\pi, \quad \vec{q} \times \vec{q}^* = -4\pi i. \tag{10.50}$$

を満足することに加えて (10.23) および (10.32) より、$\vec{q}$ とその微分の間には次の関係が成り立つ。

$$\vec{q} \times D_\phi\vec{q}^* = \vec{q} \times D_{\phi^*}\vec{q}^* = \vec{q} \times D_\phi\vec{q} = 0, \quad \vec{q} \times D_{\phi^*}\vec{q} = \sqrt{2}(2\pi)k\overline{e}^z_\phi \tag{10.51}$$

Soryushiron Kenkyu

(10.51) より $D_\phi \vec{q}$ は $\vec{q}$ と $\vec{q}^*$ の両方に平行である。一方 (10.50) は二つのベクトル $\vec{q}$ と $\vec{q}^*$ が比例していないことを保障している。従って上記の条件を満足するためには

$$D_\phi \vec{q} = 0 \tag{10.52}$$

でなければならない。また、(10.51) の最初の条件より $D_{\phi^*}\vec{q}$ が $\vec{q}^*$ に比例することがわかるが、これを (10.51) の最後の条件に代入すれば規格化因子を決定することができて、

$$D_{\phi^*}\vec{q} = \frac{ik}{\sqrt{2}}\bar{e}^z_\phi \vec{q}^* \tag{10.53}$$

となる。(10.52) と (10.53) を用いれば、$\mathcal{M}$ 上の一点で $\vec{q}$ を与えれば、$\mathcal{M}$ の任意の点での $\vec{q}$ を一意的に決めることができる。また、$\vec{q}$ がモジュライ空間上でスピン $-1/2$ を持っていることを用いれば、(10.52) と (10.53) から (10.49) が導かれることに注意しよう。

このような電荷ベクトル $\vec{q}$ は、次の節での $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/\,\mathrm{U}(1)$ の構成に現れる $\vec{x}$ を用いて次のように取ればよい。

$$\vec{q} = \sqrt{2\pi}\vec{x}^* \tag{10.54}$$

10.1.3 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/\,\mathrm{U}(1)$

$\mathcal{M} = \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/\,\mathrm{U}(1)$ の性質について簡単にまとめておく。以下では $G = \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ であり、H はそのコンパクト部分群 $\mathrm{U}(1)$ を表すものとする。

$G = \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ の生成子を $T_1 = -\sigma_x/2$, $T_2 = \sigma_z/2$, $T_3 = i\sigma_y/2$ としよう。これらは次の代数を満足する。

$$[T_1, T_2] = T_3, \quad [T_2, T_3] = -T_1, \quad [T_3, T_1] = -T_2. \tag{10.55}$$

さらに、次の生成子も定義しておく。

$$T_\pm = \frac{1}{2}(T_1 \pm iT_2), \quad [T_3, T_\pm] = \pm iT_\pm, \quad [T_+, T_-] = -\frac{i}{2}T_3. \tag{10.56}$$

コンパクト部分群 H は T_3 によって生成される。$\mathcal{M} = G/H$ は同値類 gH の族として定義される。$\mathcal{M}$ 上の一点 gH における接空間を定義するために、代表元 $gh \in gH (h \in H)$ を選び、その近傍を複素変数 z を用いて $gh(1 + z^*T_+ + zT_-)H$ のようにパラメトライズする。z を与えると近傍の点が一つ同値類として与えられるから、従って z を接空間上の座標とみなすことができる。接空間上の計量は

$$ds^2 = \rho^2 dz dz^* \tag{10.57}$$

で与えるのが自然であろう。この座標の取り方は h の選択に依存する。たとえば新たな代表元 $gh' = ghk$ $(k \in H)$ を用いて定義した座標を z' とすれば、これは先ほどの座標 z と次の関係にある。

$$gh(1 + z^*T_+ + zT_-)H = gh'(1 + z'^*T_+ + z'T_-)H \tag{10.58}$$

$k = e^{\theta T_3}$ の場合には次の関係を得る。

$$z' = e^{i\theta} z \tag{10.59}$$

つまり、代表元の取替え $gh \to gh' = ghe^{\theta T_3}$ は局所直交座標系の角度 θ の回転を表しており、それぞれの同値類から代表元を選ぶことは $\mathcal{M}$ 上のそれぞれの点において局所直交座標系を設定することに対応している。

同値類から代表元を一つ選ぶ断面を $\sigma : \mathcal{M} \to G$ としよう。上で述べたことから、σ を一つ決めることは $\mathcal{M}$ 上で局所直交系をひとつ設定することに等しい。$\mathcal{M}$ 上に任意の曲線座標系を設定し q とする。G のきわめて近い二つの元を q と $q+dq$ としよう。対応する G の元 $\sigma(q)$ と $\sigma(q+dq)$ の関係を次のように置くことができる。

$$\sigma(q+dq) = \sigma(q)(1 + e^* T_+ + eT_- + \omega T_3) \tag{10.60}$$

q に依存する局所座標回転 $e^{\theta(q)T_3}$ を行うと、

$$\sigma(q+dq)e^{\theta(q+dq)T_3} = \sigma(q)e^{\theta(q)T_3}(1 + e'^* T_+ + e' T_- + \omega' T_3) \tag{10.61}$$

二つの式を比べることで、係数の間の関係が次のように得られる。

$$e' = e^{\theta} e, \quad e'^* = e^{-\theta} e^*, \quad \omega' = \omega + d\theta. \tag{10.62}$$

これらの変換則は、これらを多脚場およびスピン接続と解釈できることを示唆している。すなわち、添え字まであらわに書けば、次のように置くことができる。

$$e^{\hat{z}} = e, \quad \omega_{\hat{z}}{}^{\hat{z}} = \omega. \tag{10.63}$$

二つの点の間の距離は、全体のサイズをあらわすパラメータを ρ として

$$ds^2 = \rho^2 ee^* \tag{10.64}$$

によって定義する。

これらの量を具体的に書き表すために、$\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ の元を次のようにおこう。

$$g = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad p, q, r, s \in \mathbf{R}, \quad ps - qr = 1. \tag{10.65}$$

さらに、次の複素変数を定義しておくと便利である。

$$x = p + iq, \quad y = r + is. \tag{10.66}$$

部分群 H はこれらの複素変数に対する同位相の位相回転として作用する。

$$H = \mathrm{U}(1) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} x \\ e^{i\theta/2} y \end{pmatrix} \tag{10.67}$$

回転角が $\theta/2$ であるが、これは x と y は $\mathcal{M}$ 上でスピノル的に振舞うことを意味している。$ps - qr = 1$ という条件は複素変数を用いれば

$$\mathrm{Im}(x^* y) = 1, \quad \vec{x}^* \times \vec{x} = x^* y - y^* x = 2i. \tag{10.68}$$

と書くことができる。$\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ 上の Maurer-Cartan 形式を上記の生成子で展開した係数を次のように置く。

$$g^{-1} dg = e^* T_+ + eT_- + \omega T_3. \tag{10.69}$$

これらの係数は、複素変数 x と y を用いて次のように表すことができる。

$$e = ydx - xdy, \quad \omega = \mathrm{Re}(y^* dx - x^* dy) = y^* dx - x^* dy = ydx^* - xdy^*. \tag{10.70}$$

Soryushiron Kenkyu

ここで与えた ω に対する 3 つの表式は等しいことが (10.68) を用いて示される。

曲率は、

$$R_{\hat{z}}{}^{\hat{z}} = d\omega_{\hat{z}}{}^{\hat{z}} = -dx \wedge dy^* - dx^* \wedge dy \tag{10.71}$$

一方 (10.68) を用いれば次の式が成り立つことが示される。

$$e^{\hat{z}} \wedge e^{\hat{z}^*} = -2i(dx \wedge dy^* + dx^* \wedge dy) = 2iR_{\hat{z}}{}^{\hat{z}}. \tag{10.72}$$

これは $\mathcal{M}$ が定曲率空間であることを表している。

x がスピン 1/2 を持っていることから、その共変微分は $Dx = dx - (i/2)\omega x$ と定義される。y についても同様である。(10.68) および (10.70) を用いれば次の関係式が成り立つことが示される。

$$Dx = -\frac{i}{2}x^* e, \quad Dy = -\frac{i}{2}y^* e, \tag{10.73}$$

$$\vec{x} \times D\vec{x} = -e, \quad \vec{x}^* \times D\vec{x} = 0. \tag{10.74}$$

ここで、$\mathcal{M}$ 上の座標系が複素であるとし、正則座標を u としよう。この場合、

$$D_u\vec{x} = -\frac{i}{2}\vec{x}^* e_u^{\hat{z}}, \quad D_{u^*}\vec{x} = 0. \tag{10.75}$$

である。

第11章　$\mathcal{N}=8$ 超重力理論

$\mathcal{N}=8$ 超重力理論 [20, 21, 22] は 4 次元でもっとも大きな超対称性を持つ理論である。この理論はただ一つの重力多重項を含み、表 11.1 の場よりなる。この理論の R-対称性は $\mathrm{SU}(8)_R$ である。

表 11.1: $\mathcal{N}=8$ 超重力理論に含まれる場。下付き添え字 I, J, K, L は SU(8) の基本表現を表しており、添え字を複数持つ場はどれも添え字の入れ替えに対して反対称である。

fields	$e_\mu^{\widehat{m}}$	$\psi_{I\mu}$	$B_{IJ\mu}$	λ_{IJK}	ϕ_{IJKL}
spin	2	3/2	1	1/2	0
$\mathrm{SU}(8)_R$	**1**	**8**	**28**	**56**	$\mathbf{70_R}$

ゲージ場がその複素表現 **28** に属しているので、ゲージ場をその双対場と混ぜるような変換が含まれている。従ってラグランジアンのレベルではこの対称性が明らかな形には書くことができない。ラグランジアンレベルでは SU(8) の実部分群 SO(8) だけが明らかな対称性として現れる。この理論は 70 個の実スカラー場を含む。$\mathcal{N}=4$ の重力多重項もスカラー場を含んでいたがその場合と異なるのはこれらのスカラー場が属する **70** 表現は $\mathrm{SU}(8)_R$ の実表現であり、しかもボゾンとフェルミオンの数を合わせるためにはスカラー場に対して実数条件を課さなくてはならない。従って、この空間上には $\mathrm{SU}(8)_R$ 対称性を保ったままで複素座標を導入することは不可能である。これは $\mathcal{N}=4$ の超重力理論の場合とは異なり、全ての超対称電荷を同位相で回転させる $\mathrm{U}(1)_R$ 変換が定義できないことを意味している。

まず、この理論においてスカラー多様体 $\mathcal{M}$ 上にどのようなベクトル束が現れるかを見てみよう。

局所回転群は SO(70) であり、モジュライ空間上のホロノミーはその部分群である。$\mathrm{SU}(8)_R$ はスカラー場に非自明に作用するので、この $\mathrm{SU}(8)_R$ を SO(70) の部分群とみなすことができるが、$\mathrm{SU}(8)_R$ 対称性が定義できるためにはホロノミーのもとでこの $\mathrm{SU}(8)_R$ が不変でなければならない。この様な条件を満足するのはホロノミーが極大部分群

$$\mathrm{SU}(8)_R\times G\subset \mathrm{SO}(70) \tag{11.1}$$

の部分群である場合である。ここで、G は自明な群であることが次のようにしてわかる。

SO(70) の任意の表現は 70 次元ベクトル表現のテンソル積によって構成することができるから、G がもし非自明な元を持てば SO(70) の 70 次元ベクトル表現に対して非自明に作用するはずである。そのような表現行列を A としよう。

A はその定義により $\mathrm{SU}(8)_R$ の表現行列 ρ_{70} と可換であるが、SO(70) の 70 次元ベクトル表現は $\mathrm{SU}(8)_R$ の表現としても既約表現である。従ってシューアのレンマにより A は単位行列に比例する。SO(70) の表現行列でそのようなものは $\pm\mathbf{1}_{70}$ だけであり、ホロノミーとして現れるのは連結な群だけであるから G は単位元のみからなる自明な群である。

従って、スカラー多様体のホロノミーは $\mathrm{SU}(8)_R$ の部分群であり、スカラー多様体の曲率テンソルについても $\mathrm{SU}(8)_R$ 部分のみが値を持つ。この曲率テンソルは $(0,1/2)$ セクターの超対称変換の

ものでの不変性を課すことで一意的に決まってしまう。まずは実際にこの方法でスカラー多様体の構造を決定しよう。

以下では $\mathrm{SU}(8)_R$ の反対称添え字を持った場が多く登場するので、それらを含む式を簡潔に表すために以下のような略記法を定義しておく。まず、反対称添え字の幾つかの組を $A^{[I^n]}=A^{I_1\cdots I_n}$ のように括弧でくくって表す。この、反対称添え字の間の縮約では $1/n!$ という因子を省略する。

$$A^{[I^n]}B_{[I^n]}=\frac{1}{n!}A^{I_1I_2\cdots I_n}B_{I_1I_2\cdots I_n} \tag{11.2}$$

反対称添え字の一部分をまとめて表す場合もある。この場合も縮約する場合には添え字の個数に対応する階乗因子を省略する。

$$A^{[I^mJ^n]}B_{[I^m]}C_{[J^n]}=\frac{1}{m!n!}A^{I_1I_2\cdots I_mJ_1J_2\cdots J_n}B_{I_1I_2\cdots I_m}C_{J_1J_2\cdots J_n} \tag{11.3}$$

次のように縮約される添え字の組を二つのグループに分けた場合には、規格化因子が異なることに注意すること。

$$A^{[I^mJ^n]}B_{[I^mJ^n]}=\frac{1}{m!n!}A^{I_1I_2\cdots I_mJ_1J_2\cdots J_n}B_{I_1I_2\cdots I_mJ_1J_2\cdots J_n}={}_{m+n}C_mA^{[I^{m+n}]}B_{[I^{m+n}]} \tag{11.4}$$

トレースなしの反エルミート行列 T_a を SU(8) の生成子とし、無限小 SU(8) 変換は次のように表されるとしよう。

$$\delta v^I=\epsilon^a(T_a)^I{}_Jv^J,\quad \delta v_I=-v_J\epsilon^a(T_a)^I{}_J, \tag{11.5}$$

生成子の規格化を次の式によって定める。

$$(T_a)^I{}_J(T_b)^J{}_I=-\delta_{ab} \tag{11.6}$$

この式から次の式を得ることができる。

$$(T_a)^I{}_J(T_a)^K{}_L=-\delta^I_L\delta^K_J+\frac{1}{8}\delta^I_J\delta^I_L \tag{11.7}$$

右辺第 2 項はトレース部分を除去するための項である。

変換 (11.5) のもとでの 4 階反対称テンソルの変換は次のように与えられる。

$$\delta v^{[I^4]}=\epsilon^a\delta^{[I^4]}_{[K^3L]}(T_a)^L{}_Mv^{[K^3M]} \tag{11.8}$$

従って、対応する生成子は次のように与えられる。

$$(T_a)^{[I^4]}{}_{[J^4]}=(T_a)^L{}_M\delta^{[I^4]}_{[K^3L]}\delta^{[K^3M]}_{[J^4]} \tag{11.9}$$

この式に $(T_a)^P{}_Q$ をかけて a について和を取り、(11.7) を用いれば、次の式を得ることができる。

$$\delta^{[I^4]}_{[K^3Q]}\delta^{[K^3P]}_{[J^4]}=\frac{1}{2}\delta^P{}_Q\delta^{[I^4]}_{[J^4]}-(T_a)^P{}_Q(T_a)^{[I^4]}{}_{[J^4]}. \tag{11.10}$$

以上の約束を踏まえて計算を開始しよう。まず、$(3/2,2)$ セクターのラグランジアンはこれまで同様に次のように与えられる。

$$\mathcal{L}=\frac{e}{k^2}R+ie\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\nu\rho}D^{(\omega)}_\nu\overline{\psi}^I_\rho \tag{11.11}$$

そしてこれを不変にする変換則は

$$\delta_{(3/2,2)}e^{\widehat{m}}_\mu=\frac{k}{4}(i\psi_{I\mu}\sigma^{\widehat{m}}\overline{\xi}^I-i\overline{\psi}^I_\mu\overline{\sigma}^{\widehat{m}}\xi_I),\quad \delta_{(3/2,2)}\psi_{I\mu}=\frac{1}{k}D^{(\omega)}_\mu\xi_I, \tag{11.12}$$

この変換則からは次の交換関係が得られる。

$$(\delta'\delta - \delta\delta')e_\mu^{\widehat{m}} = D_\mu \epsilon^{\widehat{m}}, \quad \epsilon^{\widehat{m}} = \frac{1}{4}(i\xi'_I \sigma^{\widehat{m}} \bar{\xi}^I - i\xi_I \sigma^{\widehat{m}} \bar{\xi}'^I). \tag{11.13}$$

これは $\epsilon^{\widehat{m}}$ を変換パラメータとする一般座標変換である。他の場に対する超対称変換もこの交換関係と矛盾しないように変換則の規格化を決定する必要がある。

スカラー場とフェルミオン場の運動項は、次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{1/2} = ie\chi_{[I^3]} \not{D} \bar{\chi}^{[I^3]}, \quad \mathcal{L}_0 = -\frac{e}{2} g_{mn} \partial_\mu \phi^m \partial^\mu \phi^n \tag{11.14}$$

ここで、ϕ^m は実数場であり、その添え字 m は 1 から 70 を走る。モジュライ空間上で局所直交系を導入すれば、局所直交座標は $\mathrm{SU}(8)_R$ の $\mathbf{70_R}$ 表現として変換されるから、4 つの反対称な $\mathrm{SU}(8)_R$ 添え字によって表すことができる。モジュライ空間上の多脚場は次の実数条件を満足するとする。

$$(e_m^{[I^4]})^* = e_{m[I^4]} = \epsilon_{[I^4 J^4]} e_m^{[J^4]} \tag{11.15}$$

上記のラグランジアンをほぼ不変にする $(0, 1/2)$ セクターの変換則は次のように与えられる。

$$\delta\phi^m = \frac{1}{2} e^{m[I^3 J]}(\chi_{[I^3]}\xi_J) + \text{c.c.}, \quad \delta\chi_{[I^3]} = -\frac{i}{2} e_{m[I^3 J]}(\not{\partial}\phi^m)\bar{\xi}^J. \tag{11.16}$$

「ほぼ」不変にするというのは、これらの間で相殺すべき $\partial\phi\chi\xi$ の形の項がきちんと相殺するということである。(11.13) と矛盾していないことを確かめるためにスカラー場の上で交換関係を計算してみると次のようになる。

$$(\delta'\delta - \delta\delta')\phi^m = -\frac{i}{4}(e^{m[I^3 J]} e_{n[I^3 K]} + e^m_{[I^3 K]} e_n^{[I^3 J]})(\xi_J \sigma^\mu \bar{\xi}'^K)(\partial_\mu \phi^n) + \text{c.c.} = \epsilon^\mu (\partial_\mu \phi^m) \tag{11.17}$$

この式の最後の変形に (11.10) を用いた。確かに ϵ^μ を変換パラメータとする一般座標変換を表している。

$\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{1/2}$ を $\delta_{(0,1/2)}$ で変換してみると、上で述べたように $\partial\phi\chi\xi$ 項は相殺するが、次の超対称カレントと変換パラメータの微分の積を含む項が残る。

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{e}{2} e_M^{[I^3 J]}(\chi_{[I^3]}\sigma^\mu (\not{\partial}\phi^M) D_\mu \xi_J) + \text{c.c.} \tag{11.18}$$

これを相殺するためには次のネーター結合項を導入する。

$$\mathcal{L}_{J(0,1/2)} = \frac{ke}{2} e_M^{[I^3 J]}(\chi_{[I^3]}\sigma^\mu (\not{\partial}\phi^M)\psi_{J\mu}) + \text{c.c.} \tag{11.19}$$

この項のフェルミオン $\chi_{[I^3]}$ を変換し、(11.10) を用いれば次の変分が得られる。

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_J &= -\frac{ike}{4} e_m^{[I^3 J]} e_{n[I^3 K]}(\bar{\xi}^K (\not{\partial}\phi^n)\sigma^\mu (\not{\partial}\phi^m)\psi_{J\mu}) + \text{c.c.} \\ &= -\frac{ike}{8} g_{mn}(\bar{\xi}^I (\not{\partial}\phi^n)\sigma^\mu (\not{\partial}\phi^m)\psi_{I\mu}) + \frac{ike}{4}(T_a)^I{}_J (T_a)_{mn}(\partial_\kappa \phi^m)(\partial_\lambda \phi^n)(\psi_{I\mu}\sigma^{\mu\kappa\lambda}\bar{\xi}^J) + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{11.20}$$

この第 1 項はスカラー場の運動項の多脚場の変換と相殺する。第 2 項が相殺されるためには、モジュライ空間上の $\mathrm{SU}(8)_R$ 曲率が

$$R_{mn}{}^I{}_J = -\frac{k^2}{2}(T_a)_{mn}(T_a)^I{}_J \tag{11.21}$$

に一致していることが必要である。そうすればグラビティーノ運動項のグラビティーノの超対称変換から上記の変分を相殺する項が得られる。

さて、ここでモジュライ空間上の曲率が完全に決定されたわけであるが、この曲率からモジュライ空間の構造が（局所的には）完全に決定される。実はこの空間は $H = \mathrm{SU}(8)_R$、G は H を部分群として持つようなある群として、$\mathcal{M} = G/H$ と与えられる。この群は以下のようにして決めることができる。

G の次元は $\dim G = \dim \mathcal{M} + \dim H = 133$ である。このような次元をもつ群としては例外リー群 E_7 があるが、実際にそう取ると良いことが以下のようにしてわかる。G の構造定数を $f^A{}_{BC}$ としよう。群 G を決めることはこの構造定数を決めることに他ならない。A, B, C は 1 から 133 までの値を走る。このうち 1 から 63 までを H の随伴表現をあらわすとし、添え字 a, b, c を用いて表そう。それ以外の 70 個を走る添え字を i, j, k とする。G の構造定数はこの添え字の分解によって $f^a{}_{bc}$、$f^a{}_{bi}$、$f^a{}_{ij}$、$f^i{}_{bc}$、$f^i{}_{aj}$、$f^i{}_{jk}$ に分かれる。これらのうち、$f^a{}_{bc}$ は $H = \mathrm{SU}(8)$ の構造定数、$f^i{}_{aj}$ は H の **70** 表現の生成子である。また、SU(8) の随伴表現と **70** 表現を混ぜるような変換は SU(8) に含まれないことから $f^i{}_{ab} = f^a{}_{bi} = 0$ である。残るは $f^i{}_{jk}$ と $f^a{}_{ij}$ であるが、§A.10.2 で示すように $\mathcal{M}$ のホロノミーが H であるためには $f^i{}_{jk} = 0$ であればよい。そして $\mathcal{M}$ 上の曲率が与えられると、$f^a{}_{ij}$ を次の関係式によって決めることができる。

$$R_{ij}{}^k{}_l = -f^a{}_{ij} f^k{}_{al}. \tag{11.22}$$

$\mathcal{M}$ 上の曲率テンソルはすでに (11.21) で与えられている。二つの式を比較することで、次の関係式が得られる。

$$f_{a-ij} = \frac{1}{2} f_{i-aj} \tag{11.23}$$

これで全ての構造定数が決定された。f_{a-ij} と f_{i-aj} はそれぞれ構造定数 $f^a{}_{ij}$ および $f^i{}_{aj}$ の上付き添え字を H 不変計量 $(\delta_{ab}, \delta_{ij})$ を用いておろしたものである。(11.23) の関係式は構造定数 f_{A-BC} が完全対称でないことを表しているが、これは H 不変ではあるが G 不変ではない計量を用いたことによる。完全反対称な構造定数を得るには、計量として $(\delta_{ab}, -(1/2)\delta_{ij})$ に比例するものを用いなければならない。これは 63 個の対角成分が正、70 個の対角成分が負の行列であり、このことを考慮すると、得られる群は $E_{7,7}$ として知られる非コンパクト例外型リー群であることが結論される。

第 III 部

高次元の超重力理論

第12章　超重力理論に現れる場について

12.1　スピノルと γ 行列

12.1.1　共役表現

ある既約表現 $G \ni g \to \rho(g)$ が与えられたとき、その共役表現 ρ^f を次のように定義する。

$$\rho^f(g) = f(\rho(g)). \tag{12.1}$$

ただし、f は $f^2 = 1$ を満足する $\mathrm{GL}(\dim\rho)$ の自己同型であるとする。表現 ρ とその共役表現 ρ^f が等価である場合、このとき表現は自己共役であるということにしよう。表現が自己共役であるとき任意の $U \in \rho(G)$ に対して次の式を満足する正則行列 A が存在する。

$$U = Af(U)A^{-1}. \tag{12.2}$$

この条件を満足する行列 A を自己同型 f に対する共役行列と呼ぶことにする。

ρ が自己共役な既約表現であるとしよう。f に対する共役行列が複数あると仮定し、そのうちの二つを A_1、A_2 とすると、$A_1A_2^{-1}$ は任意の U と可換であることが (12.2) を用いて示される。表現 ρ は既約表現であるから、シューアのレンマより $A_1A_2^{-1}$ は単位行列に比例する。従って (12.2) を満足する行列 A は定数因子を除いて一意的に定まる。さらに、積 $Af(A)$ は任意の $U \in \rho(G)$ と可換であることが (12.2) より示される。したがって、シューアのレンマより $Af(A)$ は単位行列に比例する。この比例定数を σ_A としよう。すなわち次の式が成り立つ。

$$Af(A) = \sigma_A. \tag{12.3}$$

f によっては、この値が重要な意味を持つ。

表現が自己共役でない場合にも、直和表現 $\rho + \rho^f$ を考えることで行列 A を定義することができる。まず既約表現 $U \in \rho(G)$ とその共役表現 $V \in \rho^f(G)$ に対して次の条件を満足する a を定義する。

$$U = af(V)a^{-1}. \tag{12.4}$$

この式を満足する a が規格化定数を除き一意的に定まることは自己共役な場合と同様に証明できる。直和表現 $\rho + \rho^f$ は自己共役であり、次のように定義された行列 A は、自己共役表現に対する (12.2) と全く同じ関係式を満足する。

$$A = \begin{pmatrix} & \alpha a \\ \beta f(a^{-1}) & \end{pmatrix}. \tag{12.5}$$

すなわち、次の式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} U & \\ & V \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} f(U) & \\ & f(V) \end{pmatrix} \tag{12.6}$$

α と β は任意の複素数である。

さらに、一般の自己共役な重複のない可約表現 ρ に対しても、(12.2) を満足するように A を定義することができる。ただし、重複のない可約表現とは、その既約分解

$$\rho = \oplus_{i=1}^{n} \rho_i, \tag{12.7}$$

が同じ既約表現を二つ以上含まないことを意味する。表現 ρ が自己共役であるということは、(12.7) のそれぞれの既約表現が、自己共役であるか、そうでない場合にはその共役表現が (12.7) に含まれることを意味している。既約分解 (12.7) に対応した行列 A の部分行列への分解を a_{ij} としよう。もし表現 ρ_i が自己共役である場合には、a_{ii} を ρ_i についての共役行列に比例するようにとる。比例定数は 0 でない限り自由に取る事ができる。一方 ρ_i が非自己共役であり、ρ_j がその共役表現である場合には、(12.4) のように定義されたそれらの間をつなぐ行列 a を用いて $a_{ij} \propto a$、$a_{ji} \propto f(a^{-1})$ とおく。これら以外の部分行列は $a_{ij} = 0$ とする。今度も、a_{ij} と a_{ji} にそれぞれについて規格化係数は 0 でない限り自由に取る事ができる。このように定義された行列 $A = \{a_{ij}\}$ は任意の $U \in \rho(G)$ に対して関係式 (12.2) を満足する。ここで定義された A は含まれる既約表現の数と同じ n 個の 0 でないブロックを持つ。それらのブロックそれぞれについて規格化因子の不定性がある。この規格化因子は自由に取る事ができる。ここではそれらの 0 でないブロックに対して

$$|\det a_{ij}| = 1. \tag{12.8}$$

という規格化条件を課しておくことにしよう。この結果、残された不定性は n 個の位相因子だけになる。

以下に、いくつかの共役表現の例をあげておこう。

- 複素共役表現

  自己同型として複素共役 $f(U) = U^*$ を取ろう。このとき ρ^f を ρ^* と書き、ρ の複素共役表現と呼ぶことにする。$\rho \to \rho^*$ に対して自己共役な表現を実表現、そうでない場合を複素表現と呼ぶ。複素共役に対する共役行列 A を M と書き、複素共役行列と呼ぶことにする。既約な実表現に対して (12.3) で定義された数を σ_M と置く。定義より、σ_M は実数である。また、規格化条件 (12.8) より、$\sigma_M = \pm 1$ が結論される。$\sigma_M = 1$ の場合、表現は実正であると呼ばれ、$\sigma_M = -1$ の場合、表現は実負であると呼ばれる。

- 反傾表現

  自己同型として $f(U) = U^{-1T}$ を取ったとき、$\rho^f = \widetilde{\rho}$ と書き、$\widetilde{\rho}$ を表現 ρ の反傾表現と呼ぶ。上記の f に対する共役行列を C と書き、荷電共役行列と呼ぶことにしよう。(12.3) によって定義される量をこの場合には σ_C と書く。f の定義と規格化条件 (12.8) により、$\sigma_C = \pm 1$ が簡単に結論される。これは、C が対称行列か反対称行列であることを示している。

- 複素共役反傾表現

  自己同型として $f(U) = U^{-1\dagger}$ を取ったときには $\rho^f = \widetilde{\rho}^*$ と書き、ρ の複素共役反傾表現、あるいはディラック共役表現と呼ぶ。この f に対応する共役行列を D と書き、ディラック共役行列と呼ぶ。

  次分自身のディラック共役である既約表現に対して (12.3) で定義される量を ω_D と書こう。この量は $|\omega_D| = 1$ を満足するが、必ずしも実数ではなく、 また、σ_M や σ_C とは異なり不定な位相因子の取り方に依存する。(12.3) の式は D の固有値の位相が符号の違いを除いて

そろっていることを表している。特に全ての固有値の位相が符号まで含めてそろっている場合には、適当な線形変換を行うことによって $D=1$ に取る事ができ、このとき表現はユニタリーになる。

これらの共役表現の関係を表すのに、ベクトルの添え字のつけ方を次のように決めておくのが便利である。まず、表現 ρ によって変換されるベクトル $\mathbf{v}$ の成分を v^α のように上付きスピノルで表す。反傾表現 $\tilde{\rho}$ で変換されるベクトル $\mathbf{w}$ は、ρ によって変換されるベクトル $\mathbf{v}$ との内積が不変量であるという性質を持つ。このことを表すために w_α のような下つき添え字を用いるのがよい。このとき不変量は上付き添え字と下つき添え字の縮約として表すことができる。さらに、複素共役表現によって変換されるベクトル $\mathbf{v}^*$ の添え字を上付き点つきスピノルで $(v^*)^{\dot{\alpha}}$ のように、複素共役反傾表現によって変換されるベクトルを下つき点つきスピノルで $(w^*)_{\dot{\alpha}}$ のように表すのが良い。以上のように添え字のつけ方を定義しておくと、3 つの行列 M、C、D は次のような添え字をもつ不変テンソルとみなすことができる。

$$M^\alpha{}_{\dot{\beta}}, \quad C^{\alpha\beta}, \quad D^{\alpha\dot{\beta}}. \tag{12.9}$$

これらのうちのどれかが単位行列である場合には、その行列によって移り合う二つの種類の添え字は区別する必要がない。たとえば、ユニタリー表現に対しては D が単位行列になるので、上付き点無しスピノルと下つき点つきスピノル、下つき点なしスピノルと上付き点つきスピノルは区別する必要は無い。また、$U\in\rho(G)$ の成分が全て実数である場合には M が単位行列になり、点つき添え字と点無し添え字を区別する必要は無い。

12.1.2 $\mathrm{SO}(d_+,d_-)$ のスピノル表現

一般の次元でのスピノルや γ-行列の性質について調べよう。そのためには共役行列 C、M、D の性質を調べることが重要であるが、それらの行列はブロックごとの位相因子の不定性を除き一意的であるので、具体的にそれらの行列を構成して、その性質を調べれば十分である。まずは γ 行列を具体的に構成することから始めよう。d 次元ユークリッド空間の γ 行列は次の性質を満足する行列として定義される。

$$\{\gamma^i_{(d)},\gamma^j_{(d)}\}=2\delta^{ij}, \quad i,j=1,2,\ldots,d. \tag{12.10}$$

このような行列は、低い次元のものから再帰的に構成していくことができる。まず、3 次元の γ-行列としては Pauli 行列を用いることができる。

$$\gamma^1_{(3)}=\sigma_x, \quad \gamma^2_{(3)}=\sigma_y, \quad \gamma^3_{(3)}=\sigma_z. \tag{12.11}$$

Pauli 行列は次のように定義される。

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{12.12}$$

$d=2n+1$ が奇数であるとする。もし d 次元の γ-行列が定義されれば、$d+2$ 次元の γ-行列は次のように定義することができる。

$$\gamma^i_{(d+2)}=\gamma^i_{(d,0)}\otimes\sigma_x \text{ for } i=1,\ldots,d, \quad \gamma^{d+1}_{(d+2)}=\mathbf{1}\otimes\sigma_y, \quad \gamma^{d+2}_{(d+2)}=\mathbf{1}\otimes\sigma_z. \tag{12.13}$$

このようにして定義された γ-行列は全てエルミートな $2^n \times 2^n$ 行列で、それらのうち γ^{2k+1} $(k = 0, 1, \ldots, n)$ は全て対称行列、それ以外の γ^{2k} $(n = 1, 2, \ldots, n)$ は全て反対称行列である。

ユークリッド計量に対する γ 行列をこのように定義すれば、一般の計量の γ 行列は上のように定義された γ-行列のうちのいくつかに虚数単位 $\pm i$ を掛けることによって作ることができる。計量の符号が $+$ および $-$ である方向の数をそれぞれ d_+ および d_- としよう。ここでは $d_- \leq n+1$ とし、$n+1$ 個の対称な γ 行列のうちの d_- 個に $\pm i$ をつけることにしよう。この結果、γ 行列は次の 3 つに分類される。

$$\begin{cases} \text{実対称 } n - d_- + 1 \text{ 個} \\ \text{純虚対称 } d_- \text{ 個} \\ \text{純虚反対称 } n \text{ 個} \end{cases} \tag{12.14}$$

偶数次元の γ 行列は、計量が正符号の方向の数を一つ増やした $d+1$ 次元について γ 行列を構成し、一つ増やした方向に対応する γ 行列をカイラリティ行列とみなし、それ以外の方向に対する γ 行列を d 次元の γ 行列とみなせばよい。

群 $\mathrm{SO}(d_+, d_-)$ の生成子は γ^{ij} である。共役行列の定義式 (12.2) を生成子 γ^{ij} を用いて書きかえれば、C、D、M の定義は次のようになる。

$$\gamma^{ij} = -C(\gamma^{ij})^T C^{-1}, \tag{12.15}$$
$$\gamma^{ij} = M(\gamma^{ij})^* M^{-1}, \tag{12.16}$$
$$\gamma^{ij} = -D(\gamma^{ij})^\dagger D^{-1}. \tag{12.17}$$

この定義よりも、次の定義を用いるほうが便利である。

$$\gamma^{i} = \pm C(\gamma^{i})^T C^{-1}, \tag{12.18}$$
$$\gamma^{i} = \pm M(\gamma^{i})^* M^{-1}, \tag{12.19}$$
$$\gamma^{i} = \pm D(\gamma^{i})^\dagger D^{-1}. \tag{12.20}$$

ただし、それぞれの式の右辺の複合は γ 行列の添え字 i には依存しないものとする。これらの関係を満足すれば、上の式も成り立つことが示される。奇数次元においては、これらの条件を満足する C、M、D は次のように構成することができる。

$$C = (\text{phase factor}) \times (n+1 \text{ 個の対称 } \gamma \text{ 行列の積}), \tag{12.21}$$
$$D = (\text{phase factor}) \times (d_- \text{ 個の純虚対称 } \gamma \text{ 行列の積}), \tag{12.22}$$
$$M = (\text{phase factor}) \times (n - d_- + 1 \text{ 個の実対称 } \gamma \text{ 行列の積}). \tag{12.23}$$

奇数次元ではスピノル表現は既約表現で一つしかないため、3 つ全ての共役関係に対して自己共役である。したがって、C、D、M はそれぞれについてただ一つの位相因子を除き一意的に決まる。

σ_C と σ_M は、これらの具体的な表式を用いれば簡単に次のように得られる。

$$\sigma_C = (-)^{\pi(n+1)}, \tag{12.24}$$
$$\sigma_M = (-)^{\pi(n-d_-+1)}. \tag{12.25}$$

ただし、$\pi(m)$ は m 個のものの順序を反転するのに必要な置換の数であり、$\pi(m) = m(m-1)/2$ と与えられる。奇数次元において、スピノル表現は常に実であるが、(12.25) より $n - d_- = 0, 3 \bmod 4$ の場合、いいかえると $d_+ - d_- = 1, 7 \bmod 8$ の場合には表現は実正であり、$n - d_- = 1, 2 \bmod 4$ の場合、あるいは $d_+ - d_- = 3, 5 \bmod 8$ の場合には表現は実負である。

次に、偶数次元の場合について考えよう。この場合はカイラリティ行列 γ_{d+1} によって区別される二つのスピノル表現が存在する。それぞれのスピノル表現はワイルスピノルと呼ばれ、γ_{d+1} の固有値 $+1$ に対応するほうを左巻き、-1 に対応するほうを右巻きと呼んで区別することにしよう。右巻きスピノルと左巻きスピノルの直和表現はディラックスピノルと呼ばれる。

まずスピノル表現が実であるか、複素であるかを見る必要がある。この場合、ディラックスピノル表現に対して複素共役行列 M を構成し、そのワイルスピノルによる部分行列への分解が、ブロック対角になっているか、歪対角になっているかを見てみればよい。M としては、$d+1$ 次元の複素共役行列 M_{d+1} をそのまま用いることができる。M_{d+1} は $n-d_-+1$ 個のディラック行列よりなるが、そのうちの一つは γ_{d+1} である。それ以外の $n-d_-$ 個の γ 行列がブロック歪対角であることから、$n-d_-$ が偶数の場合、いいかえると $d_+-d_-=0,4 \bmod 8$ の場合には M_{d+1} がブロック対角であり、ワイルスピノル表現は実、$n-d_-$ が奇数の場合、つまり $d_+-d_-=2,6 \bmod 8$ の場合には M_{d+1} がブロック歪対角であり、ワイルスピノル表現は複素であると結論される。

実表現である場合にそれが実正であるか実負であるかは、σ_M の定義より $d+1$ 次元の性質をそのまま引き継ぐことがわかるから、$d_+-d_-=0$ の場合には実正であり $d_+-d_-=4$ の場合には実負である。

以上をまとめると表 12.1 のようになる。

表 12.1: $\mathrm{SO}(d_+,d_-)$ のスピノル表現の複素共役に対する性質。

$d_+-d_- \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
表現	実正	実正	複素	実負	実負	実負	複素	実正

あるスピノル ψ の荷電共役スピノル（あるいはマヨラナ共役スピノルともいう） ψ_C を次の式によって定義する。

$$\psi_C = M\psi^*. \tag{12.26}$$

M の定義より、この定義は $\mathrm{SO}(d_+,d_-)$ 変換と矛盾しない。この演算を 2 階行うと、

$$\psi_{CC} = MM^*\psi, \tag{12.27}$$

が得られる。この表現の右辺が ψ になる場合には自分自身の荷電共役であるような 0 でないスピノルを定義することができる。そのようなスピノルをマヨラナスピノルと呼ぶ。

スピノル表現が実正である場合、すなわち $d_+-d_-=0,1,7 \bmod 8$ である場合には $\sigma_M=+1$ であるから、この条件を満足している。$d_+-d_-=0 \bmod 8$ の場合にはワイルスピノルでありかつマヨラナスピノルであるようなものを考えることができる。これをマヨラナワイルスピノルと呼ぶ。

表現が複素である $d_+-d_-=2,6 \bmod 8$ の場合には、マヨラナスピノルの定義は行列 M の二つのブロックに対する位相因子をどのように定義するかに依存する。通常は、マヨラナスピノルが (12.26) のもとで不変なスピノルとして定義できるように、すなわち $MM^*=1$ になるように位相因子をとるのが便利である。これは $d_+-d_-=6 \bmod 8$ の場合には $C=C_{d+1}$ を、$d_+-d_-=2 \bmod 8$ の場合には $C=\gamma_{d+1}C_{d+1}$ を取ることに対応している。

表現が実負である場合、すなわち $d_+-d_-=3,4,5 \bmod 7$ の場合には、荷電共役演算を 2 回繰り返すと符号が逆転するのでマヨラナスピノルを定義することができない。しかし、スピノル ψ が $G=\mathrm{SO}(d_+,d_-)$ とは独立な別の対称性 G' に対しても、実負表現 ρ' に属している場合には、テンソル積 $\rho\otimes\rho'$ が実正であるために、マヨラナスピノルを定義することができる。すなわち G

の表現 ρ に対する複素共役行列を M、G' の表現 ρ' に対する複素共役表現を M' とするとき、$(M\otimes M')(M\otimes M')^* = 1\otimes 1$ であるから、次の条件を満足する 0 でないスピノルが存在する。

$$\psi = (M\otimes M')\psi^*. \tag{12.28}$$

このように定義されたスピノルをシンプレクティックマヨラナスピノルと呼ぶ。$d_+ - d_- = 4 \bmod 8$ の場合には、ワイルスピノルであると同時にシンプレクティックマヨラナスピノルであるものが存在するが、それはシンプレクティックマヨラナワイルスピノルと呼ばれる。

12.1.3 スピノルの２次形式

奇数次元のスピノル表現、あるいは偶数次元のディラックスピノル表現を ρ とする。ψ が ρ によって変換されるスピノルであったとき、その成分を ψ^α のように上付き添え字を用いて表そう。

反傾表現 $\widetilde{\rho}$ によって変換されるスピノル $\widetilde{\psi}$ は反傾表現の定義より $\widetilde{\psi}\cdot\psi$ が $\mathrm{SO}(d_+,d_-)$ の不変量であるから、その成分は下付き添え字を用いて $\widetilde{\psi}_\alpha$ のように表そう。こうしておくことにより、$\mathrm{SO}(d_+,d_-)$ 不変な内積を上付き添え字と下付き添え字の縮約という形で表すことができる。

さらに、複素共役表現 ρ^* によって変換されるスピノルを上付きの点付き添え字で $(\psi^*)^{\dot\alpha}$ のように表すことにしよう。

上付きの点なし添え字を持った二つのスピノル ψ_1^α と ψ_2^α が与えられたとき、次のような２次形式を作ることができる。

$$\psi_1^\alpha (C^{-1T})_{\alpha\beta}\psi_2^\beta, \quad \overline{\psi}_{1\alpha}\psi_2^\alpha. \tag{12.29}$$

ただし、$\overline{\psi}_\alpha$ はスピノル ψ^α のディラック共役と呼ばれるもので、次のように定義される。

$$\overline{\psi}_\alpha = (\psi^*)^{\dot\beta}(D^{-1})_{\dot\beta\alpha}. \tag{12.30}$$

ここで、D、C、M の間の関係を次のように決めておこう。

$$M = CD^{-1T}. \tag{12.31}$$

それぞれの行列の位相因子の関係を適当に取ることで必ずこの関係を成り立たせることができる。このように取っておくと、ψ_1 がマヨラナスピノルであるときに (12.29) にある二つの２次形式が等しくなるので便利である。また、荷電共役演算スピノル (12.26) は次のように書くこともできる。

$$\psi_C = C\overline{\psi}^T. \tag{12.32}$$

偶数次元においては、 3 つの共役行列はどれも二つのブロックの位相の不定性があった。そのために奇数次元よりも多くの不定性があり、しかもその位相因子の取り方によって以下で与えるような公式が変化してしまう。そこで、ここでは奇数次元についてだけ議論する。偶数次元での公式は、共役行列に対する位相因子の取り方を指定すれば奇数次元の公式から簡単に得られるので、ここでは奇数次元に対する公式だけをまとめておく。

- 転置公式

  (12.29) の前者 $\psi_1 C^{-1}\psi_2$ の ψ_1 と ψ_2 を入れ替えることを考えよう。この場合、スピノル場がフェルミオンを表しており、二つのスピノルを入れ替えたときに負号が一つ出るとすれば、C の転置に対する性質は (12.24) によって与えられるから、次の式が得られる。

$$\psi_1 C^{-1}\psi_2 = -\sigma_C \psi_2 C^{-1}\psi_1 = -(-)^{\pi(n+1)}\psi_2 C^{-1}\psi_1 \tag{12.33}$$

スピノルに γ 行列が挟まれた 2 次形式に対する転置公式を求める前に (12.18) の右辺の符号を決定しておこう。具体的な定義を用いれば、次の式が簡単に示される。

$$C(\gamma^i)^T C^{-1} = (-)^n \gamma^i \tag{12.34}$$

この式を用いれば、γ 行列を一つ挟んだスピノルの 2 次形式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\psi_1 C^{-1}\gamma^i\psi_2 &= -\psi_2(\gamma^i)^T(C^{-1})^T\psi_1 \\ &= -\sigma_C\psi_2 C^{-1}C(\gamma^i)^T C^{-1}\psi_1 \\ &= -\sigma_C(-)^n\psi_2 C^{-1}\gamma^i\psi_1.\end{aligned} \tag{12.35}$$

先ほどの公式と比較すれば、$(-)^n$ という因子が新たに現れていることがわかる。γ 行列を複数個含む場合には、それぞれの γ 行列から因子 $(-)^n$ が現れる。

$$\psi_1 C^{-1}\gamma^{i_1}\gamma^{i_2}\cdots\gamma^{i_k}\psi_2 = -\sigma_C(-)^{nk}\psi_2 C^{-1}\gamma^{i_k}\cdots\gamma^{i_2}\gamma^{i_1}\psi_1. \tag{12.36}$$

- エルミート共役公式

(12.29) の後者の複素共役を考えよう。ここではグラスマン数の積の複素共役を次のように定義する。

$$(ab)^* = b^*a^* = -a^*b^*. \tag{12.37}$$

符号が逆になるような定義も用いられるので注意が必要である。D に対するエルミート共役は次のように与えられる。

$$D = \omega_D D^\dagger, \quad |\omega_D| = 1. \tag{12.38}$$

ω_D は行列 D の位相因子に依存する。原理的には ω_D は絶対値が 1 のどのような複素数でもありえるが、実際に用いられるのは $\omega_D = 1$ か $\omega_D = -1$ かのどちらかである。この関係式を用いれば、2 次形式の複素共役は次のようになる。

$$(\overline{\psi}_1\psi_2)^* = (\psi_1^\dagger D^{-1}\psi_2)^* = \psi_2^\dagger(D^{-1})^\dagger\psi_1 = \omega_D\psi_2^\dagger D^{-1}\psi_1 = \omega_D\overline{\psi}_2\psi_1 \tag{12.39}$$

γ^i を挟んだ 2 次形式について考える前に、(12.20) の符号を決定しておこう。具体的な定義を用いれば、次のように与えられる。

$$D(\gamma^i)^\dagger D^{-1} = (-)^{d_-}\gamma^i. \tag{12.40}$$

この式を用いれば、

$$(\overline{\psi}_1\gamma^i\psi_2)^* = (\psi_1^\dagger D^{-1}\gamma^i\psi_2)^* = \omega_D\psi_2^\dagger D^{-1}D(\gamma^i)^\dagger D^{-1}\psi_1 = \omega_D(-)^{d_-}\psi_2^\dagger D^{-1}\gamma^i\psi_1 \tag{12.41}$$

上の式と比べると、$(-)^{d_-}$ という因子が余分に現れている。γ 行列を複数挟んだ 2 次形式に対しては、それぞれの γ 行列からこの因子が現れる。

$$\overline{\psi}_1\gamma^{i_1}\gamma^{i_2}\cdots\gamma^{i_k}\psi_2 = \omega_D(-)^{d_-k}\overline{\psi}_2\gamma^{i_k}\cdots\gamma^{i_2}\gamma^{i_1}\psi_1. \tag{12.42}$$

12.1.4 フェルミオン作用の運動項

ここでは背景の時空を $d_- = 1, d_+ = d-1$ のミンコフスキー空間に限り、負計量の方向を x^0 とし、x^1 から x^{d-1} までが正計量であるとする。このとき、行列 D を次のように取ることにする。

$$D = -i\gamma_0 = i\gamma^0, \tag{12.43}$$

このときディラック共役は次のように与えられる。

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger D^{-1} = i\psi^\dagger\gamma^0 = -i\psi^\dagger\gamma_0 \tag{12.44}$$

§1.2.2 で述べたように、フェルミオンのフォック空間に負計量が現れないためには、ラグランジアン中の運動項の符号を適切に選ぶ必要がある。つまり、ラグランジアン中の時間微分を含む項が (1.77) にあるように、$L = i\theta^\dagger\dot{\theta}$ のような係数を持つ必要がある。このような条件から、ローレンツ不変なラグランジアン密度は係数を正の実数倍だけずらす自由度を除き、常に次のようにとる必要がある。

$$\mathcal{L} = -(\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi) = i(\psi^\dagger\partial_0\psi) - i(\psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi). \tag{12.45}$$

このラグランジアンを用いて、物理的な自由度の個数を決定しよう。ここでは ψ はディラックスピノルであるとする。平面波解を求めるために座標依存性を $\psi = ue^{ikx}$ と仮定しよう。$\overline{\psi}$ で変分すれば、運動方程式 $\not{k}u = 0$ を得る。さらに $\not{k}$ を掛けると $k^2u = 0$ が得られるから、0 でない解が存在するためには $k^2 = 0$ でなければならない。座標を取りなおすことで常に $k^0 = k^1 = k$ と取ることができる。この場合、運動方程式は $(\gamma^0 - \gamma^1) = 0$ である。さらに γ^0 を掛ければ、

$$(1 - \gamma^0\gamma^1)u = 0 \tag{12.46}$$

を得る。$\gamma^0\gamma^1$ は固有値 $+1$ と -1 を同じ個数持つエルミート行列である。したがって、u の独立成分 $2^{[d/2]}$ のうちの半分の複素数成分がこの式を満足することができる。したがって、独立なフェルミオンの自由度は実数で数えると次のように与えられる。

$$\text{d.o.f.} = 2^{[d/2]}. \tag{12.47}$$

これはディラックスピノルに対してのものであるから、マヨラナ条件、ワイル条件が課された場合には自由度が半分になる。

12.1.5 反対称テンソルと γ 行列について

A_n は n-フォーム場を表す。階数を表す添え字がほかの添え字と紛らわしい場合には $A_{[n]}$ のようにも書く。

$$A_n = A_{[n]} = \frac{1}{n!}A_{\mu_1\cdots\mu_n}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n}. \tag{12.48}$$

テンソル添え字の一部分のみをフォームとして扱う場合もある。

$$A_{[2]\mu} = \frac{1}{2}A_{\alpha\beta\mu}dx^\alpha\wedge dx^\beta. \tag{12.49}$$

しばしば γ-行列についても同様の扱いをする。

$$\psi\gamma_3\xi = \frac{1}{3!}(\psi\gamma_{\mu\nu\rho}\xi)dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge dx^\rho. \tag{12.50}$$

$\gamma^{\mu\nu\rho}$ のように複数の添え字を持つ γ 行列は、重みが 1 になるように規格化された γ 行列の反対称積である。すなわち、添え字が 3 つの場合には次のように定義される。

$$\gamma^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{6}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu) \tag{12.51}$$

$\langle\cdots\rangle_r$ は γ 行列の積を反対称積で分解して特定のランク r の部分を取り出したものを表す。たとえば、

$$\langle\gamma^\lambda\gamma^{\mu\nu}\rangle_3 = \gamma^{\lambda\mu\nu}, \quad \langle\gamma^\lambda\gamma^{\mu\nu}\rangle_1 = g^{\lambda\mu}\gamma^\nu - g^{\lambda\nu}\gamma^\mu. \tag{12.52}$$

である。また、添え字が複数ある場合には二つ以上のランクの部分を取り出すことを意味する。すなわち、

$$\langle\cdots\rangle_{r_1,\ldots,r_n} = \langle\cdots\rangle_{r_1} + \cdots + \langle\cdots\rangle_{r_n}. \tag{12.53}$$

である。

$\not{A}_n$ は n 階反対称テンソル場の添え字を γ 行列と縮約したものである。規格化はそれぞれの独立成分の重みが 1 になるように行う。すなわち、

$$\not{A}_n = \frac{1}{n!}A_{\mu_1\cdots\mu_n}\gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}. \tag{12.54}$$

まず、反対称テンソルと γ の積を次のように表す。

$$\not{A}_n = \frac{1}{n!}A_{\mu_1\cdots\mu_n}\gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}. \tag{12.55}$$

後で行う計算にはいくつかのこのような行列の積がしばしば現れる。その際に、二つの γ 行列の積を γ 行列の反対称積の和に分解するのが良い。例えば、$\not{A}_2$ と $\not{B}_3$ の積であれば

$$\begin{aligned}\gamma^{pqr}\gamma^{st} \quad = \quad & \gamma^{pqrst} + \gamma^{pqt}g^{rs} - \gamma^{prt}g^{qs} + \gamma^{qrt}g^{ps} - \gamma^{pqs}g^{rt} + \gamma^{prs}g^{qt} - \gamma^{qrs}g^{pt} \\ & + \gamma^p(g^{qt}g^{rs} - g^{qs}g^{rt}) - \gamma^q(g^{pt}g^{rs} - g^{ps}g^{rt}) + \gamma^r(g^{pt}g^{qs} - g^{ps}g^{qt})\end{aligned} \tag{12.56}$$

という公式を用いれば計算することができる。これはコンピュータを用いた自動計算の場合には便利であるが、手計算の場合には項の数が多くなってしまうのでこの公式を安易に用いてはならない。このような式を扱うのに、ある γ 行列の中から指定した階数 k の γ 行列の反対称積で表される部分のみを取り出す記号 $\langle\cdots\rangle_k$ を導入するのが便利である。例えば、上の公式から γ 行列の 3 階反対称積を取り出してみると、次のように書くことができる。

$$\langle\gamma^{pqr}\gamma^{st}\rangle_3 = \gamma^{pqt}g^{rs} - \gamma^{prt}g^{qs} + \gamma^{qrt}g^{ps} - \gamma^{pqs}g^{rt} + \gamma^{prs}g^{qt} - \gamma^{qrs}g^{pt} \tag{12.57}$$

このように、記号 $\langle\cdots\rangle_k$ を用いることにより、指定した階数ごとに分割して計算を行うことができるので便利である。そして、この記号の利点はそれだけではない。例えば、$\not{A}_p\not{B}_q$ という行列が与えられたとき、階数 k 部分に限定すると、適用な符号因子を付加することで二つの行列の順序を次のように入れ替えることができる。

$$\langle\not{A}_p\not{B}_q\rangle_k = (-)^{pq+k}\langle\not{A}_p\not{B}_q\rangle_{p+q-2k}. \tag{12.58}$$

この公式は、$\not{A}_p$ と $\not{B}_q$ に含まれる γ 行列のうち k 個が共通であり、残りが全て異なることを用いれば簡単に示すことができる。また、$\not{A}_p\not{B}_q$ の両側が同じ添え字を持つ γ 行列で挟まれた場合には次のように縮約を実行することができる。

$$\langle\gamma^\mu\not{A}_p\not{B}_q\gamma_\mu\rangle_k = (-)^k(D-2k)\langle\not{A}_p\not{B}_q\rangle_k \tag{12.59}$$

これらを用いると、例えば 10 次元で

$$X = 2\slashed{A}_3\slashed{B}_3 - \gamma^\mu \slashed{B}_3\slashed{A}_3\gamma_\mu \tag{12.60}$$

という行列が与えられたとき、次の式を簡単に示すことができる。

$$\langle X\rangle_6 = \langle X\rangle_4 = 0, \quad \langle X\rangle_2 = 8\langle\slashed{A}_3\slashed{B}_3\rangle_2, \quad \langle X\rangle_0 = -8\langle\slashed{A}_3\slashed{B}_3\rangle_0. \tag{12.61}$$

したがって、次の式が得られる。

$$X = 8\langle\slashed{A}_3\slashed{B}_3\rangle_2 - 8\langle\slashed{A}_3\slashed{B}_3\rangle_0. \tag{12.62}$$

ここまで計算した後で、必要があれば γ 行列の積の公式を用いればよい。さらに、3 個以上の積についても、順序を完全に逆転させる次の公式が存在する。

$$\langle\slashed{A}^{(1)}_{p_1}\slashed{A}^{(2)}_{p_2}\cdots\slashed{A}^{(n)}_{p_n}\rangle_{p-2k} = (-)^{s+k}\langle\slashed{A}^{(n)}_{p_n}\cdots\slashed{A}^{(2)}_{p_2}\slashed{A}^{(1)}_{p_1}\rangle_{p-2k}, \quad p = \sum_i p_i, \quad s = \sum_{i<j} p_i p_j. \tag{12.63}$$

二つの n 階反対称テンソル A_n と B_n に対して次の式が成り立つ。

$$\langle\slashed{A}_n\gamma_\mu\slashed{B}_n\rangle_1 = (-)^{\pi(n-1)}T_{\mu\nu}\gamma^\nu. \tag{12.64}$$

ただし、$T_{\mu\nu}$ は次のように定義されたテンソルである。

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{(n-1)!}(A_{\mu\alpha_2\cdots\alpha_n}B_\nu{}^{\alpha_2\cdots\alpha_n} + A_{\nu\alpha_2\cdots\alpha_n}B_\mu{}^{\alpha_2\cdots\alpha_n}) - \frac{1}{n!}g_{\mu\nu}A_{\alpha_1\cdots\alpha_n}B^{\alpha_1\cdots\alpha_n}. \tag{12.65}$$

これは、次のように表すこともできる。

$$eT_{\mu\widehat{m}} = -\frac{\delta S}{\delta e^{\mu\widehat{m}}}, \quad S = -\int\frac{e}{n!}A_{\alpha_1\cdots\alpha_n}B^{\alpha_1\cdots\alpha_n}d^Dx \tag{12.66}$$

すなわち、$T_{\mu\nu}$ は上記の作用 S に対して定義されるエネルギー運動量テンソルであるとみなすことができる。

記号 $\langle\cdots\rangle$ を用いたときに Hodge 双対を用いる場合注意が必要である。奇数次元で考える。そこで、α を位相因子として次の関係が成り立つものとする。

$$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d} = \alpha\gamma^{\mu_1\cdots\mu_d} \tag{12.67}$$

この公式を用いれば、γ-行列の Hodge 双対は次のように与えられることがわかる。

$$\frac{1}{n!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}\nu_1\cdots\nu_n}\gamma_{\nu_1\cdots\nu_n} = \frac{1}{n!}\alpha\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}\nu_1\cdots\nu_n}\gamma_{\nu_1\cdots\nu_n} = (-)^{\pi(n)}\alpha\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}} \tag{12.68}$$

この変形は $\langle\cdots\rangle_m$ の中で行ってはならない。$\langle\cdots\rangle_m$ の定義より、その中で行うことができる操作は線形演算と γ-行列の反交換関係を用いたものだけである。従って、公式 (12.68) を用いたいのであれば、$\langle\cdots\rangle_m$ を用いない形に書き換えておく必要がある。たとえば、$\langle\gamma_{\nu_1\cdots\nu_n}\slashed{A}_1\rangle_{n+1}$ の Hodge dual を取ることを考えてみよう。そのためには $\langle\cdots\rangle_{n+1}$ を交換関係、あるいは反交換関係を用いて次のように書き換える。

$$\langle\gamma_{\nu_1\cdots\nu_n}\slashed{A}_1\rangle_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\{\gamma_{\nu_1\cdots\nu_n}, \slashed{A}_1\} & \text{for even } n \\ \frac{1}{2}[\gamma_{\nu_1\cdots\nu_n}, \slashed{A}_1] & \text{for odd } n \end{cases} \tag{12.69}$$

Soryushiron Kenkyu

このように変形したあとで (12.68) を用いて Hodge 双対を取れば、

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}\nu_1\cdots\nu_n}\langle\gamma_{\nu_1\cdots\nu_n}\not{A}_1\rangle_{n+1} &= \begin{cases} \frac{(-)^{\pi(n)}\alpha}{2}\{\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}},\not{A}_1\} & \text{for even } n \\ \frac{(-)^{\pi(n)}\alpha}{2}[\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}},\not{A}_1] & \text{for odd } n \end{cases} \\ &= (-)^{\pi(n)}\alpha\langle\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}}\not{A}_1\rangle_{d-(n+1)} \end{aligned} \tag{12.70}$$

つまり、$\langle\cdots\rangle_m$ の添え字が $n+1$ から $d-(n+1)$ に変化する。これはさらに一般化することができて、次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{n!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}\nu_1\cdots\nu_n}\langle\cdots\gamma_{\nu_1\cdots\nu_n}\cdots\rangle_m = (-)^{\pi(n)}\alpha\langle\cdots\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}}\cdots\rangle_{d-m} \tag{12.71}$$

偶数次元の場合には、完全反対称テンソルと γ 行列の関係が

$$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d} = \alpha\gamma^5\gamma^{\mu_1\cdots\mu_d} \tag{12.72}$$

と変更されるために、γ 行列の Hodge 双対の式が次のように変更される。

$$\frac{1}{n!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}\nu_1\cdots\nu_n}\gamma_{\nu_1\cdots\nu_n} = (-)^{\pi(n)}\alpha\gamma^5\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}} \tag{12.73}$$

これを用いれば、次の公式が証明される。

$$\frac{1}{n!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}\nu_1\cdots\nu_n}\langle\cdots\gamma_{\nu_1\cdots\nu_n}\cdots\rangle_m = (-)^{\pi(n)}\alpha\langle\cdots\gamma^5\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{d-n}}\cdots\rangle_{d-m} \tag{12.74}$$

ただし、この公式の右辺の $\langle\cdots\rangle_{d-n}$ は γ^5 を含まない γ-行列の個数が $d-n$ 個の部分を取り出すことを表している。

12.2 単純超重力理論

12.2.1 グラビティーノ

グラビティーノはベクトルの添え字とスピノルの添え字を持つ場である。ラリタ・シュウィンガー場とも呼ばれる。[23] グラビティーノの運動項は微分を一つ含むから、ベクトル添え字を 3 つ持ち、スピノルに作用する行列 $M^{\mu\nu\rho}$ を用いて次のように書けるはずである。

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}_\mu M^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\psi_\rho. \tag{12.75}$$

ただしここではディラック共役に対して $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ という定義を採用する。グラビティーノは局所超対称性に伴うゲージ場であるから、その作用は次のゲージ変換のもとで不変でなければならない。

$$\delta\psi_\mu = \partial_\mu\xi. \tag{12.76}$$

この変換に対する不変性は、$M^{\mu\nu\rho}$ が 3 つのベクトル添え字について完全反対称であることを意味している。この条件を満足する行列 $M^{\mu\nu\rho}$ は奇数次元では定数係数を除き $\gamma^{\mu\nu\rho}$ だけである。偶数次元においてはさらにカイラリティ行列 γ_{d+1} を掛けたものも許されるが、こうすると状態が正ノルムであることを保証できない。従って、グラビティーノの作用は任意の次元で次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = -(\overline{\psi}_\mu\gamma^{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha\psi_\nu). \tag{12.77}$$

Soryushiron Kenkyu

ただし、ディラック共役の定義として $\overline{\psi} = i\psi^\dagger\gamma^0$ を採用した。

まず、(12.77) が正しい運動項の符号を与えていることを確認しておこう。このことを見るために、ゲージ変換 (12.76) を利用して

$$\gamma^\mu\psi_\mu = 0 \tag{12.78}$$

を満足するゲージを取るのが便利である。このゲージでは、ラグランジアン (12.77) は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -(\overline{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\psi_\rho) = -\frac{1}{2}(\overline{\psi}_\mu\{\gamma^{\mu\nu},\gamma^\rho\}\partial_\nu\psi_\rho) = \frac{1}{2}(\overline{\psi}_\mu[\gamma^{\mu\nu},\gamma^\rho]\partial_\nu\psi_\rho)\\ &= (\overline{\psi}_\mu(\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\mu\rho})\partial_\nu\psi_\rho) = -(\overline{\psi}_\mu\gamma^\nu\partial_\nu\psi^\mu)\end{aligned} \tag{12.79}$$

従って、物理的なモードを含む ψ_i に対してはベクトル添え字を持たない通常の運動項と同じになっており、符号が正しいことがわかる。

$\psi_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu$ を定義すると、運動方程式は $\gamma^{\mu\nu\rho}\psi_{\mu\nu} = 0$ である。これはより簡単な形に書きかえることができる。運動方程式に γ_μ を掛けると、$\gamma^{\nu\rho}\psi_{\nu\rho} = 0$ となる。これを用いれば、運動方程式を次のように書きかえることができる。

$$0 = \gamma^{\mu\nu\rho}\psi_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^{\nu\rho}\}\psi_{\nu\rho} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^{\nu\rho}]\psi_{\nu\rho} = 2\gamma_\nu\psi^{\mu\nu} \tag{12.80}$$

得られた運動方程式を用いて平面波解を求めよう。光錐座標 $x^\pm = x^0 \pm x^1$ を定義し、それ以外の空間座標を x^i としよう。運動量の向きを $p^i = 0$ となるようにとる。

まず $p^2 \neq 0$ と仮定してみよう。運動方程式の中の μ を i にとると、$\not{p}\psi_i = 0$ を得る。$p^2 \neq 0$ の場合には $\not{p}$ は逆を持つから、これは $\psi_i = 0$ を意味する。さらに $\mu = \pm$ ととれば、$p_+\psi_- - p_-\psi_+ = 0$ を得る。したがって ψ_μ と p_μ はベクトルとして同じ向きを向いており、$\psi_\mu = p_\mu\epsilon$ と書くことができる。これはゲージ自由度に相当する。したがって、$p^2 \neq 0$ のモードは物理的自由度を持たない。

$p^2 = 0$ の場合を考えよう。$p^- = p_+ = 0$ とする。これは x^1 方向へ進む平面波を与える。運動方程式 $\gamma^\nu\psi_{\mu\nu} = 0$ において $\mu = i$ ととると $p_-\gamma^-\psi_i = 0$ を得る。すなわち

$$\gamma^-\psi_i = 0 \tag{12.81}$$

である。運動方程式で $\mu = -$ ととると、$p_-(\gamma^i\psi_i + \gamma^+\psi_+) = 0$ を得るが、γ^- を左から掛ければ、

$$\gamma^+\psi_+ = 0 \tag{12.82}$$

を得る。したがって

$$\gamma^i\psi_i = 0 \tag{12.83}$$

も成り立つ。最後に $\mu = +$ ととると

$$p_-\gamma^-\psi_+ = 0 \tag{12.84}$$

が得られる。(12.82) と (12.84) は $\psi_+ = 0$ を意味する。ψ_- についてはいかなる条件も得ることができないが、それは ψ_- がゲージ自由度であるからである。したがって、物理的なモードは ψ_i のうち次の条件を満足する部分である。

$$\gamma^-\psi_i = \gamma^i\psi_i = 0. \tag{12.85}$$

時空の次元が D の場合、ディラックスピノルの成分数は複素で数えて $2^{[D/2]}$ であり、ψ_i は全部で $(D-2)2^{[D/2]}$ 個の成分をもつ。さらに、条件 (12.85) のうちの二番目はディラックスピノル一

つ分の自由度を減らし、一つ目の条件は自由度を半分にする。従ってこれらの条件を満足する独立な成分数は、実数で数えて次のように与えられる。

$$\text{d.o.f. of } \psi_\mu = (D-3)2^{[D/2]} \tag{12.86}$$

$[D/2]$ の括弧はガウスの記号であり、$D/2$ を超えない最大の整数を表す。ψ_μ に対してマヨラナ条件やワイル条件が課されている場合にはその分だけ自由度が減る。

12.2.2 単純超重力理論

超重力理論は、少なくとも重力場とそれに結合したグラビティーノを含む。これらの自由度を次元ごとにまとめたものが表 12.2 である。この表を見てみると、グラビトンとグラビティーノの個

表 12.2: それぞれの次元でのグラビトンとグラビティーノの力学的自由度。グラビティーノについてはそれがディラックスピノルである場合の自由度と、それがマヨラナ条件、ワイル条件でどこまで少なくできるかを書いた。例えば 10 次元の 224/4 は、ディラックスピノルの場合の自由度が 224 であり、マヨラナワイル条件によってその個数が 1/4 にできることを表している。

次元	3	4	5	6	7	8	9	10	11
グラビトン	0	2	5	9	14	20	27	35	44
グラビティーノ	0/2	4/2	8	24/2	32	80/2	96/2	224/4	256/2

数が一致するのは 4 次元のときのみであることがわかる。(3 次元の場合はどちらも力学的な自由度を持たないので考えないことにする。) そこで、グラビトンとグラビティーノとからなる系の作用が実際に局所的な超対称性を持つことをチェックしておこう。

平坦な時空上でのグラビティーノの作用は (12.77) のように与えられるが、超重力理論の作用を作るには、これを一般の曲がった背景上の作用に拡張しなければならない。この方法は一意ではなく、いくつかの任意性がある。例えば、平坦な時空上の作用の中には

$$\partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu, \tag{12.87}$$

という部分が含まれている。この微分を共変微分に直すと、

$$\nabla_\mu\psi_\nu - \nabla_\nu\psi_\mu = D_\mu\psi_\nu - D_\nu\psi_\mu + T^\lambda_{\mu\nu}\psi_\lambda, \tag{12.88}$$

となる。ただし、微分 D_μ はスピンの添え字にのみ作用し、クリストッフェル記号を含まない共変微分で次のように定義される。

$$D_\mu\psi_\nu = \partial_\mu\psi_\nu + \frac{1}{4}\omega_{\mu-ij}\gamma^{ij}\psi_\nu, \tag{12.89}$$

(12.88) の中で右辺最後の捩れ率を含む項はそれ自身で共変的だから、作用にこの項を含めるかどうかは自由である。含めるとしても、捩れ率は幾何学的には多脚場から決まる量ではなく、多脚場と対等な基本量である。従って、捩れ率を作用に含める場合には、物理的な要請を満たすように多脚場やグラビティーノの関数として手で与える必要がある。

作用が超対称性を持つべしという物理的な要請を満足させるためには次のようにすれば良いということが知られている。まず $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ や $T^\lambda_{\mu\nu}$ を用いずに、$e_{\mu i}$ と $\omega_{\mu-ij}$、そして ψ_μ のみで作用を

Soryushiron Kenkyu

書く。これは共変微分として D_μ を採用することを意味する。$\omega_{\mu-ij}$ は力学的な自由度ではないので、$e_{\mu i}$ などを用いて書かなければならないがこの関係を $\omega_{\mu-ij}$ の運動方程式を用いて決定する。この結果、$\omega_{\mu-ij}$ を多脚場とグラビティーノの関数として表す式が得られるが、これはちょうど (1.110) の形をしている。得られた運動方程式と (1.110) との比較により、捩れ率がグラビティーノの 2 次形式として与えられる。この運動方程式をもとの作用に代入したものは多脚場とグラビティーノのみで書けている。

以下では、作用の中の ψ^4 の項は無視しよう。この場合捩れ率の寄与は無視していいので計算が非常に楽になる。じつはフェルミオンの 4 次以上の項を無視した以下の計算はまったく次元に依存していないことがわかる。そのため、あとで 11 次元の超重力理論の超対称変換のもとでの不変性をチェックする際にも、ここでの計算を利用することができる。

グラビトンとグラビティーノのみからなる単純超重力理論の作用は、ψ_μ の 2 次以下の項だけに注目すれば次の二つの作用の和として与えられる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= eR, \qquad (12.90)\\
\mathcal{L}_{3/2} &= -\frac{e}{2}(\overline{\psi}_\mu \gamma^{\mu\alpha\nu} D_\alpha \psi_\nu). \qquad (12.91)
\end{aligned}
$$

ただしグラビティーノがマヨラナであり、$e > 0$ と仮定して係数を決めた。局所的超対称変換は次のように与えられる。

$$
\delta\psi_\mu = D_\mu \xi, \quad \delta e^{\mu\widehat{i}} = \frac{1}{4}(\overline{\psi}^{\widehat{i}} \gamma^\mu \xi). \qquad (12.92)
$$

この変換の下でのグラビティーノ作用の変分を見てみよう。

$$
\delta\mathcal{L}_{3/2} = -e(\psi_\mu \gamma^{\mu\alpha\nu} \nabla_\alpha D_\nu \xi) \qquad (12.93)
$$

この変形を行うとき、部分積分を行った。もし ψ^4 まで含めて計算を行う場合には安易に全微分項を落としてはならない。公式 (1.113) にあるように、捩れ率がある場合には全微分は表面項のほかに捩れ率を含む項を与える。ここでは ψ^4 項を無視しているので、気にする必要はない。

共変微分の交換関係については、次の式が成り立つ。

$$
(\nabla_\mu D_\nu - \nabla_\nu D_\mu)\xi = \frac{1}{4} R_{\mu\nu mn} \gamma^{mn} \xi \qquad (12.94)
$$

ただし、捩れ率を無視した。これを用いれば、

$$
\delta\mathcal{L}_{3/2} = -\frac{e}{8} R_{\alpha\nu\widehat{m}\widehat{n}} (\psi_\mu \gamma^{\mu\alpha\nu} \gamma^{\widehat{m}\widehat{n}} \xi) \qquad (12.95)
$$

さらに整理すれば、

$$
\delta\mathcal{L}_{3/2} = -\frac{1}{2} e \left(R_{\mu i} - \frac{1}{2} e_{\mu\widehat{i}} R \right) (\psi^{\widehat{i}} \gamma^\mu \xi) \qquad (12.96)
$$

アインシュタイン作用の変分は次のように行う。アインシュタイン作用は $e^{\mu\widehat{i}}$ と $\omega_{\mu-\widehat{i}\widehat{j}}$ を含むが、$\omega_{\mu-\widehat{i}\widehat{j}}$ は変分する必要がない。従って、$e^{\mu\widehat{i}}$ の変分のみを考えれば良いが、それは簡単に求まって次のようになる。

$$
\delta\mathcal{L}_2 = 2e \left(R_{\mu\widehat{i}} - \frac{1}{2} e_{\mu\widehat{i}} R \right) \delta e^{\mu\widehat{i}} \qquad (12.97)
$$

$e^{\mu\widehat{i}}$ の変換則が (12.92) であることを用いれば、(12.96) と (12.97) が相殺することが示される。

12.3 ゲージ場

12.3.1 反対称テンソル場

高次元の超重力理論にはしばしば反対称テンソル場が現れる。$A_{\mu_1\cdots\mu_n}$ を n 階の反対称テンソル場とし、それを外微分形式によって n 形式として表したものを A_n とする。

$$A_n = \frac{1}{n!} A_{\mu_1\cdots\mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n}. \tag{12.98}$$

反対称テンソル場の場の強さは

$$F_{n+1} = dA_n \tag{12.99}$$

と与えられる。（一般には相互作用のために場の強さに非線形項が現れる場合があるが、ここでは自由場の場合のみを考えることにする。）この場の強さは任意の $n-1$ 形式場 Λ_{n-1} をパラメータとする次のゲージ変換のもとで不変である。

$$\delta A_n = d\Lambda_{n-1}. \tag{12.100}$$

ゲージ不変な作用は次のように与えられる。

$$S_{\mathrm{kin}} = -\frac{1}{2\cdot(n+1)!}\int d^D x F_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}} F^{\mu_1\cdots\mu_{n+1}} = \frac{1}{2}\int *F_{n+1}\wedge F_{n+1} \tag{12.101}$$

外微分形式で表す場合には、(12.101) のように $*$ の付いたほうを前に置くことにすると $(-)^*$ のような因子が現れない。この作用をポテンシャル A_n で変分することで運動方程式が次のように与えられる。

$$\partial^\lambda F_{\lambda\mu_1\cdots\mu_n} = 0. \tag{12.102}$$

この運動方程式を満足する平面波解を求め、物理的な自由度の個数を数えてみよう。背景を D 次元の平坦なミンコフスキー時空と仮定し、光錐座標 $x^\pm = x^0 \pm x^1$ を導入しよう。運動量を p^μ とし、その p^+ 成分のみが値を取るような座標系を取ろう。このとき運動方程式より、ポテンシャル $A_{\mu_1\cdots\mu_n}$ の成分のうち添え字に $+$ を含むものは 0 になる。また、添え字に $-$ を含む成分は全てゲージ自由度である。したがって、物理的成分は添え字が全て $+$ でも $-$ でもないものであり、その個数は次のように与えられる。

$$\text{d.o.f of } A_n = {}_{D-2}C_n. \tag{12.103}$$

12.3.2 ゲージ場とブレーンの結合

ゲージ場 A_{p+1} に結合したカレントについて考えよう。U(1) ゲージ場との類推から、次のようにゲージ場 A_{p+1} に結合する。カレント $J^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}$ を定義しよう。

$$S_{\mathrm{cur}} = -\frac{1}{(p+1)!}\int d^D x A_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} J^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = \int *J_{p+1}\wedge A_{p+1} \tag{12.104}$$

ゲージ場 A_{p+1} が完全反対称テンソルであることに対応して、カレント $J^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}$ も全ての添え字について完全反対称である。J_{p+1} はその反対称テンソルの添え字を全て計量で下げて $p+1$ 形式として表したものである。

この作用がゲージ場 A_{p+1} のゲージ変換 $\delta A_{p+1} = d\Lambda_p$ のもとで不変であることを要求すれば、カレント $J^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}$ に対する次の保存則が得られる。

$$\partial_\lambda J^{\lambda\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = 0 \quad \text{or} \quad d * J_{p+1} = 0. \tag{12.105}$$

同じ結論は、ゲージ場に対する運動方程式からも得ることができる。(12.101) と (12.104) をあわせた作用 $S_{\rm kin}+S_{\rm cur}$ から運動方程式を導くと、

$$\partial_\lambda F^{\lambda\mu_1\cdots\mu_{p+1}}=J^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}\quad\text{or}\quad(-)^{D-p}d*F_{p+2}=*J_{p+1}\tag{12.106}$$

この両辺を微分すると、(12.105) が成り立つことがわかる。

保存則 (12.105) が意味することを明らかにするために、時空のある領域内でカレントの成分のうち $J^{01\cdots p}$ だけが値を持ち、それ以外の成分は 0 である場合を考えてみよう。このとき (12.105) は次の $p+1$ 個の式を与える。

$$\partial_0J^{01\cdots p}=\partial_1J^{01\cdots p}=\cdots=\partial_pJ^{01\cdots p}=0.\tag{12.107}$$

つまり、カレントの値は $01\cdots p$ 方向の座標に依存しない。このことから、カレント $J^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}$ を持つ物体は時空の中で $p+1$ 個の方向に広がっていなければならないことがわかる。通常これらの方向のうちの一つは時間方向、のこる p 個を空間方向にとる。そのような広がりを持つオブジェクトは p-ブレーンと呼ばれる。$01\cdots p$ 方向に広がる厚さのない p-ブレーンの場合にはカレントは次のように与えられる。

$$J^{01\cdots p}=q\delta(x^{p+1}-x_0^{p+1})\cdots\delta(x^{D-1}-x_0^{D-1})\tag{12.108}$$

x_0^i はブレーンに直交する空間上でのブレーンの位置である。これを (12.104) に代入すれば、p-ブレーンと A_{p+1} の結合を表す次の作用が得られる。

$$S_{\rm cur}=-q\int*J_{p+1}\wedge A_{p+1}=-q\int_{\mathcal M}A_{p+1}\tag{12.109}$$

ここで $\mathcal M$ は p-brane の worldvolume であり、カレント (12.108) については $01\cdots p$ 方向に広がった平坦な空間である。一般の形状のブレーンに対してもゲージ場との相互作用は (12.109) を用いて表すことができる。その場合のカレントは (12.104) に代入したときに (12.109) を与えるものとして定義することができる。作用 (12.109) のゲージ変換は、ストークスの定理を用いることでブレーン境界上の積分として表すことができる。

$$\delta S=-q\int_{\mathcal M}d\Lambda_p=-q\int_{\partial\mathcal M}\Lambda_p\tag{12.110}$$

従って、作用のゲージ不変性より p-ブレーンは境界を持つことができない。

U(1) ゲージ場と結合したカレント $J^\mu_{\rm U(1)}$ の場合には、その時間成分 $J^0_{\rm U(1)}$ を空間全体で積分することで次のように保存電荷 $\widehat{Q}_{\rm U(1)}$ を定義することができた。

$$\widehat{Q}_{\rm U(1)}=\int d^{D-1}xJ^0_{\rm U(1)}\tag{12.111}$$

さらにこの電荷は、U(1) 対称性の生成子の役割を果たし、無限小変換を次のように与えることができる。

$$\delta_{\rm U(1)}(\alpha)\phi=[i\alpha\widehat{Q}_{\rm U(1)},\phi]\tag{12.112}$$

これと同様のことをカレント $J^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}$ に対して行おう。つまり、$J^0_{\rm U(1)}$ に相当するものとして $J^{0\mu_1\cdots\mu_p}$ をとり、その積分として電荷を定義することを考えてみよう。このときいくつかの問題点が現れる。まず、保存則 (12.105) より、もし時空の位相が自明であれば、

$$J^{0i_1\cdots i_p}=\partial_jX^{ji_1\cdots i_p}\tag{12.113}$$

を満足する完全反対称テンソル $X^{ji_1\cdots i_p}$ が存在する。たとえばある時刻での p-brane の worldvolume を境界とする $p+1$ 次元の $X^{i_1\cdots i_{p+1}}$ を定義すれば (12.113) を満足する。従って p ブレーンが空間的に有限の領域 D に納まっていれば、その領域全体で $J^{0i_1\cdots i_p}$ を積分したものは次のように 0 になる。

$$\int_D dV J^{0i_1\cdots i_p} = \int_{\partial D} dS_j X^{ji_1\cdots i_p} = 0. \tag{12.114}$$

領域 D の境界上で 0 になるようなテンソル X を選ぶことができるということを用いた。従って、$J^{0i_1\cdots i_p}$ の積分として非自明な電荷を定義することができない。もう一つの問題は、ブレーンのような広がりを持つオブジェクトに対して (12.112) のような式を書くことができないという点である。U(1) ゲージ理論の場合には (12.112) によって非自明に変換される ϕ は荷電粒子を第二量子化して得られる場であるが、一般のブレーンに対してそのような量子化を行う方法は今のところ知られていない。

これらの問題を回避するため、ここでは空間方向のうちのいくつかがトーラスコンパクト化されている場合を考える。時空の座標のうち、コンパクト化されていない方向を x^μ で表し、コンパクト化されている方向を x^i で表すことにする。x^i 方向のサイクルの長さを L_i とする。ブレーンの world volume の空間方向全てがコンパクト化された方向に伸びていれば、カレントの積分は 0 にならず、次のように巻きつき数に比例した値を得る。

$$\widehat{Z}^{i_1\cdots i_p} = \int dV J^{0i_1\cdots i_p} = qN_{i_1\cdots i_p} V_{i_1\cdots i_p} \tag{12.115}$$

ただし $V_{i_1\cdots i_p}$ はブレーンが巻きついているサイクルの体積であり、$V_{i_1\cdots i_p} = L_{i_1}\cdots L_{i_p}$ によって与えられる。$N_{i_1\cdots i_p}$ は添え字によって示された方向へのブレーンの巻きつき数を表す。また、コンパクト化された内部空間が十分小さいとして非コンパクトな時空にのみ注目すれば、トーラスに巻きついたブレーンは粒子のように見えるから、その粒子を第二量子化することでブレーンの場 ϕ を定義することができる。古典的に得られた電荷の式 (12.115) をこの場に対する電荷の作用として現すと、

$$[\widehat{Z}^{i_1\cdots i_p}, \phi] = qN_{i_1\cdots i_p} V_{i_1\cdots i_p} \phi \tag{12.116}$$

となる。

コンパクト化によって、ブレーンとゲージ場との結合は次のようになる。

$$S = -\sum qN_{i_1\cdots i_p} V_{i_1\cdots i_p} \int A_{\mu i_1\cdots i_p} dx^\mu \tag{12.117}$$

この場合、内部空間の添え字 $i_1\cdots i_p$ は、ブレーンが巻きつく向きごとにある U(1) ゲージ対称性を区別する添え字である。ゲージ場 $A_{\mu i_1\cdots i_p}$ および第二量子化されたブレーンの場 ϕ に対する U(1) ゲージ変換は次のように与えられる。

$$\delta(\alpha_{i_1\cdots i_p}) A_{\mu i_1\cdots i_p} = \partial_\mu \alpha_{i_1\cdots i_p}, \quad \delta(\alpha_{i_1\cdots i_p})\phi = iqN_{i_1\cdots i_p} V_{i_1\cdots i_p} \alpha_{i_1\cdots i_p}\phi. \tag{12.118}$$

特に、大域的な変換に対しては、電荷 $\widehat{Z}^{i_1\cdots i_p}$ を用いて

$$\delta(\alpha_{i_1\cdots i_p})\phi = \frac{i}{p!}\alpha_{i_1\cdots i_p}[\widehat{Z}^{i_1\cdots i_p}, \phi] \tag{12.119}$$

と与えることができる。

Soryushiron Kenkyu

12.3.3 カレントと外微分形式

一般に、D 次元時空上の n 形式ゲージ場 A_n に対して

$$S = -\frac{1}{n!}\int d^D x A_{\mu_1\cdots\mu_n} J^{\mu_1\cdots\mu_n} \tag{12.120}$$

のように結合するカレント $J^{\mu_1\cdots\mu_n}$ があるとき、次の式によって $D-n$ 形式を定義するのが便利である。

$$J^{\mu_1\cdots\mu_n} = \frac{1}{(D-n)!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_n\nu_1\cdots\nu_{D-n}} J_{\nu_1\cdots\nu_{D-n}} \tag{12.121}$$

すると、上記の作用は外微分形式を用いて次のように表すことができる。

$$S = -\int A_n \wedge J_{D-n} \tag{12.122}$$

これが電荷 q のブレーンの場合には次のように表される。

$$S = -q\int_{\mathcal{M}} A_n \tag{12.123}$$

$\mathcal{M}$ はブレーンの worldvolume である。ブレーンに対するカレントを表すために、任意の背景場 A_n に対して次の式を満足する $\delta_{D-n}(\mathcal{M})$ を定義しよう。

$$\int_{\mathcal{M}} A_n = \int A_n \wedge \delta_{D-n}(\mathcal{M}) \tag{12.124}$$

右辺は時空全体の積分を表す。このような δ_{D-n} を定義する利点は、ブレーンの境界や交差などを外微分形式の言葉で書くことができるということである。

n 次元部分多様体 $\mathcal{M}_n$ 上の積分についてのストークスの定理

$$\int_{\mathcal{M}_n} dA_{n-1} = \int_{\partial\mathcal{M}_n} A_{n-1} \tag{12.125}$$

の両辺の差を (12.124) に従って書き換えれば

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}_n} dA_{n-1} - \int_{\partial\mathcal{M}_n} A_{n-1} &= \int dA_{n-1}\wedge\delta(\mathcal{M}_n) - \int A_{n-1}\wedge\delta(\partial\mathcal{M}_n)\\ &= \int A_{n-1}\wedge((-)^n d\delta(\mathcal{M}_n) - \delta(\partial\mathcal{M}_n))\end{aligned} \tag{12.126}$$

が得られる。時空の無限遠方では $\delta = 0$ であると仮定して二行目へ移る際に部分積分を行った。この式は任意の A_{n-1} に対して 0 になるはずであるから、次の関係式が成り立つ。

$$\delta_{D-n+1}(\partial\mathcal{M}_n) = (-)^n d\delta_{D-n}(\mathcal{M}_n). \tag{12.127}$$

また、二つのブレーンの交差は

$$\delta(\mathcal{M}\cap\mathcal{N}) = \delta(\mathcal{M})\wedge\delta(\mathcal{N}) \tag{12.128}$$

によって与えられる。

Soryushiron Kenkyu

12.3.4 ディラックの量子化条件

一般の n 階反対称テンソル場 A_n は、$(n-1)$-ブレーンと次の作用によって相互作用する場として定義することができる。

$$S_{\rm ele} = q_e \int_{\rm brane} A_n. \tag{12.129}$$

この作用はゲージ変換 $\delta A_n = d\Lambda_{n-1}$ に対して表面項を除いて不変である。ゲージ変換のパラメータ Λ_{n-1} は任意の反対称 $(n-1)$ 階テンソルである。ゲージ不変な場の強さは $F_{n+1} = dA_n$ と定義することができ、ビアンキ恒等式 $dF_{n+1} = 0$ を満足する。ただし、ビアンキ恒等式は場の相互作用項によって変更されることがあり、その場合には場の強さとポテンシャルの関係も修正されるが、ここでは最も単純な自由場の場合だけを考える。

時空の次元を D としよう。F_{n+1} と双対な場を作用の F_{n+1} による微分係数として次のように定義することができる。

$$\delta S_{\rm gauge} = \int F^{\rm mag}_{D-n-1} \wedge \delta F_{n+1} \tag{12.130}$$

ただし、$S_{\rm gauge}$ は反対称テンソル場の作用の運動項で、ブレーンとの相互作用項を含まず、場の強さ F_{n+1} だけで書かれているものである。この式は電磁気の場合の関係式 $\delta L = \mathbf{D}\cdot\delta\mathbf{E} - \mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B}$ を反対称テンソル場に一般化したものである。A_n の運動方程式は $dF^{\rm mag}_{D-n-1} = 0$ であるが、これを $F^{\rm mag}_{D-n-1}$ に対するビアンキ恒等式とみなせば、$F^{\rm mag}_{D-n-1} = A^{\rm mag}_{D-n-2}$ を満足するポテンシャル $A^{\rm mag}_{n-1}$ が存在することが保証される。

この双対なポテンシャルは $(D-n-3)$-ブレーンと結合することができる。このブレーンは、もとの場 A_n に対して磁気的なブレーンと呼ばれ、その結合定数は磁荷と呼ばれる。それに対し、(12.129) によって A_n と結合するブレーンは電気的であると呼ばれ、その結合定数は電荷と呼ばれる。$(D-n-3)$-ブレーンの磁荷を q_m と置けば、$A^{\rm mag}_{D-n-2}$ とブレーンの相互作用項は次のように表される。

$$S_{\rm mag} = q_m \int A^{\rm mag}_{D-n-2}. \tag{12.131}$$

ゲージ場 A_n と相互作用項 (12.129) によって相互作用する $n-1$ ブレーンが背景に存在した場合 A_n に対する運動方程式は作用 $S_{\rm gauge} + S_{\rm ele}$ から次のように与えられる。

$$dF^{\rm mag}_{D-n-1} = q_e \delta_{D-n}. \tag{12.132}$$

ただし、$(n-1)$-ブレーン上の積分を D 次元時空全体の積分として表すために、δ-関数的な $(D-n)$-形式 δ_{D-n} を導入した。これは次の性質を満足する。

$$\int_n A_n = \int_D A_n \wedge \delta_{D-n}. \tag{12.133}$$

world volume が境界をもたない、閉じた磁気的なブレーンを考え、その worldvolume を B とする。ストークスの定理を用いれば、作用 $S_{\rm mag}$ を場の強さ $F^{\rm mag}_{D-n-1}$ の積分として次のように表すことができる。

$$S_{\rm mag} = q_m \oint_B A^{\rm mag}_{D-n-2} = q_m \int_D F^{\rm mag}_{D-n-1}. \tag{12.134}$$

ここで、D は B を境界とする面である。しかしこの面の取り方は一意的ではない。そこで二つの異なる面をとり、それぞれ D_1、D_2 とする。それぞれの面を用いて定義された作用を S_1 および S_2 とする。物理的には面 D をどのようにとっても同じでなければならない。作用は経路積分において常に e^{iS} の形で現れるから、作用が 2π の倍数異なるものは物理的に同じものであるとみな

Soryushiron Kenkyu

すことができる。従って、S_1 と S_2 が必ずしも同じ値である必要はないが、その差は必ず 2π の倍数でなければならない。一方二つの作用の差は、閉曲面 $D_1 - D_2$ 上の積分として表すことができ、さらにストークスの定理および運動方程式 (12.132) を用いれば、次のようになる。

$$2\pi\mathbf{Z} \ni q_m \oint_{D_1-D_2} F^{\mathrm{mag}}_{D-n-2} = q_m \oint_V dF^{\mathrm{mag}}_{D-n-2} = q_e q_m N. \tag{12.135}$$

ここで、V は $D_1 - D_2$ を境界に持つ面であり、N はその面を通りぬける電気的なブレーンの枚数であり、整数である。任意の $N \in \mathbf{Z}$ に対してこの条件が満足されるためには電荷 q_e と磁荷 q_m は Dirac の量子化条件 [24] と呼ばれる次の条件を満足する必要がある。

$$q_e q_m \in 2\pi\mathbf{Z} \tag{12.136}$$

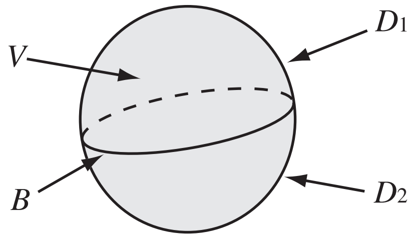

図 12.1: B は磁気的なブレーンの worldvolume を表す $D-n-2$ 次元面、D_1 と D_2 は B を境界とする $D-n-1$ 次元面、V は D_1 と D_2 で囲まれる $D-n$ 次元の領域。

12.3.5 反対称テンソル場の規格化

ゲージ場は通常以下の二つのうちのどちらかの方法で規格化される。

まず一つ目は、共変微分が結合定数を含まず

$$D^{(G)}_\mu = \partial_\mu - i\widetilde{A}^{(R)}_\mu \tag{12.137}$$

となるような規格化である。ただし $\widetilde{A}^{(R)}_\mu$ はリー代数に値を取る 1-形式である。共変微分が作用する場に応じて表現 R が選ばれる。ここでは $\widetilde{A}_\mu$ がエルミートになるように i を付けた。ゲージ群が $\mathrm{U}(1)$ である場合には、電荷が素電荷の何倍かを表す整数 n を用いて

$$D^{(G)}_\mu = \partial_\mu - in\widetilde{A}_\mu \tag{12.138}$$

となる。このようなゲージ場の規格化を採用した場合、結合定数はゲージ場の運動項の係数として現れる。非アーベル群であれば、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}\,\mathrm{tr}(\widetilde{F}^{(R)}_{\mu\nu}\widetilde{F}^{(R)\mu\nu}) \tag{12.139}$$

ゲージ群が $\mathrm{U}(1)$ であれば

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}\widetilde{F}_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} \tag{12.140}$$

と与えられる。運動項が (12.139) のように与えられた場合にはトレースを取るのにどの表現を用いるかによって結合定数の規格化が変化する。しかしリー代数の生成子の定義の違いは結合定数の

定義には影響しないことに注意しよう。それは、物理量の計算にはゲージ場の成分 $\widetilde{A}^a_\mu$ と生成子 T_a が必ず積の形で現れるためである。ただしゲージ場のプロパゲータなど計算の途中であらわれる量は生成子の規格化の仕方に依存する。

もう一つよく用いられる規格化の方法はゲージ場の運動項を次のように規格化するものである。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\widehat{F}^a_{\mu\nu}\widehat{F}^{a,\mu\nu}. \tag{12.141}$$

この場合、ゲージ場のプロパゲータが単純な係数を持つ。このときは結合定数は共変微分の中の係数として

$$D^{(G)}_\mu = \partial_\mu - ig'\widehat{A}^a_\mu T_a \tag{12.142}$$

のように現れる。

ゲージ場の規格化の取り方としては、$\widetilde{A}_\mu$ も $\widehat{A}^a_\mu$ もどちらもよく用いられる。しかし、われわれが用いる規格化はこれらのどちらでもない。10 次元や 11 次元の超重力理論においては、ゲージ場に結合する荷電粒子の場を扱うことよりも電荷を持った古典的なブレーンを扱うことの方が多いため、共変微分の形が簡単であるということはそれほど重要ではない。それよりも互いに電磁双対な関係にあるブレーンを同時に扱うことが多いため、ディラックの量子化条件 (12.136) がもっとも簡単になるような規格化を用いるのが便利である。

そもそもディラックの量子化条件の 2π がどこから現れたかを振り返ってみると、e^{iS} が $S \to S+2\pi$ に対する不変性を持っていたことに由来している。そこで、S が現れるところでは必ず $1/2\pi$ の因子をつけて $S/2\pi$ のまとまりで扱うことにしてみよう。この方針に従うと、(12.129) は次のように書くのがよい。

$$\frac{S_{\rm ele}}{2\pi} = q'_e\int A_n. \tag{12.143}$$

ただし $q'_e = q_e/(2\pi)$ である。また、双対場の定義 (12.130) も次のように $1/(2\pi)$ だけ変更しよう。

$$\frac{\delta S_{\rm gauge}}{2\pi} = \int F'^{\rm mag}_{D-n-1}\wedge\delta F_{n+1} \tag{12.144}$$

従って、双対場の規格化も $A'^{\rm mag}_{D-n-2} = A^{\rm mag}_{D-n-2}/(2\pi)$ のように変更される。このことを考慮すると、

$$\frac{S_{\rm mag}}{2\pi} = q_m\int A'^{\rm mag}_{D-n-2}. \tag{12.145}$$

によって定義される磁荷は (12.131) によって定義される q_m と同じものである。以上のように $S_{\rm ele/mag}/(2\pi)$ の係数として定義された q'_e と q_m の間には 2π を含まない次の量子化条件が成り立つ。

$$q'_e q_m \in \mathbf{Z}. \tag{12.146}$$

従って、必要であれば素電荷、素磁荷を共に整数に取る事ができる。

一般の次元のブレーンではなく、荷電粒子に結合した U(1) ゲージ場の場合にこのような規格化を用いると、荷電粒子の場の共変微分の中に次のように 2π が現れてしまうという欠点がある。

$$D^{(G)}_\mu = \partial_\mu - 2\pi i q'_e A_\mu. \tag{12.147}$$

しかし高次元のブレーンの場合にはこのような共変微分は定義されないので問題にはならない。

非可換ゲージ場の場合にも $S/(2\pi)$ を用いるほうが都合のよい場合がある。ゲージ群が SU(N) の場合に、反エルミートなゲージ場を用いて共変微分および場の強さが $D = d + A_1$ および $F_2 = dA_1 + A_1\wedge A_1$ と与えられる場合、インスタントン積分は次のように量子化される。

$$\frac{1}{2}\int {\rm tr}_{\rm fund}(F_2\wedge F_2) \in (2\pi)^2\mathbf{Z}. \tag{12.148}$$

トレースは基本表現を用いて定義した。この右辺には 2π が現れている。ここでもしゲージ場の規格化を $A = (2\pi)A'$ のように変更し、場の強さ $F' = dA' + (2\pi)A' \wedge A'$ を用いれば、今度はインスタントン積分に 2π が現れない。

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{tr}_{\mathrm{fund}}(F_2' \wedge F_2') \in \mathbf{Z}. \tag{12.149}$$

12.3.6 自己双対場

次元が $4n+2$ である場合には、ランク k が次元の半分であるような場 F_k に対して、$*F_k^{\pm} = \pm F_k^{\pm}$ によって自己双対な場を定義することができる。(次元が $4n$ の場合には $**F_k = -F_k$ であり、自己双対条件を課すことはできない。)

このような場を記述する作用として、通常用いられる $*F_k \wedge F_k$ は自己双対条件を用いると恒等的に 0 になることが示される。従ってそのような作用は存在しない。補助場を導入することによって共変性を持った作用を構成できることが知られている。

ラグランジアンを用いず、運動方程式だけで議論すれば、自己双対場であっても簡単に扱うことができる。自己双対な場に対しては、運動方程式とビアンキ方程式の区別はなく、どちらも(相互作用を無視すれば)$dF_k^{\pm} = 0$ によって与えられる。あと、重力と結合した場合にはアインシュタイン方程式を書くためにエネルギー運動量テンソルが必要となる。自己双対条件が課されていない場 F_k は、自己双対部分 F_k^+ と反自己双対部分 F_k^- に常に一意的に分解することができる。

$$F_k = F_k^+ + F_k^-. \tag{12.150}$$

この場合、エネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu}(F_k) = T_{\mu\nu}(F_k^+) + T_{\mu\nu}(F_k^-) \tag{12.151}$$

のように分解される。従って、自己双対条件が課された場に対するエネルギー運動量テンソルは通常の形のものをそのまま用いることができる。

第13章　11 次元超重力理論

13.1　零質量場

13.1.1　11 次元のスピノル

まず最初にスピノル関係の約束、公式についてまとめておく。

計量は時間方向が $-$ で、それ以外の 10 個の空間方向が $+$ であるものを用いる。すなわち、$(d_+, d_-) = (10, 1)$ であるとする。

11 次元のスピノルは $2^5 = 32$ 成分である。ディラック共役行列 D としては $-i\gamma_0$ を採用する。ここでは時間方向の計量を負に取ってあるから、この行列はエルミートである。従って、(12.30) によって定義されるディラック共役は次のように与えられる。

$$\overline{\psi} = i\psi^\dagger\gamma^0. \tag{13.1}$$

荷電共役行列を C とする。公式 (12.24) より、C は反対称である。また、(12.34) より、次の式が成り立つ。

$$C(\gamma_\mu)^T = -\gamma_\mu C. \tag{13.2}$$

表 12.1 からもわかるように 11 次元のスピノル表現は実正であるから、次の式によってマヨラナスピノルを定義することができる。

$$\psi = C\overline{\psi}^T. \tag{13.3}$$

以下ではほとんどの場合スピノル添え字は省略するが、スピノル添え字をあらわに書く場合には (13.3) は $\psi^a = C^{ab}\overline{\psi}_b$ と書くことにする。また、添え字の上げ下げを次のように定義しておく。

$$\psi^a = C^{ab}\psi_b, \quad \psi_a = (C^{-1})_{ab}\psi^b. \tag{13.4}$$

この約束を用いれば、マヨラナスピノルの定義式 (13.3) は $\psi^a = \overline{\psi}^a$ のように書くことができる。したがって、マヨラナスピノルについては ψ とそのディラック共役 $\overline{\psi}$ を区別する必要はない。C が反対称行列であることを用いれば、$\eta_\alpha\xi^\alpha = -\eta^\alpha\xi_\alpha$ が成り立つことがわかる。したがって、添え字の縮約をする際にはどちらが上付きでどちらが下付きであるかを指定しなければならない。スピノル添え字を省略する場合には必ず左にあるほうが下付き添え字、右にあるほうが上付き添え字を持つものと約束しておく。つまり $\eta\xi = \eta_a\xi^a$ である。

γ 行列のスピノル添え字の位置をそろえた次の行列は対称行列である。

$$(\gamma^m)_{\alpha\beta} \equiv C^{-1}_{\alpha\gamma}(\gamma^m)^\gamma{}_\beta. \tag{13.5}$$

γ 行列のこの性質と C が反対称行列であることを用いれば、任意個の γ 行列の積をマヨラナスピノルで挟んだ 2 次形式に対して次の転置公式が成り立つことがわかる。

$$(\psi_1\gamma^{\mu_1\cdots\mu_k}\psi_2) = (-)^k(\psi_2\gamma^{\mu_k\cdots\mu_1}\psi_1). \tag{13.6}$$

任意個の γ 行列を間に挟んだマヨラナフェルミオンの 2 次形式は実である。すなわち次の式が成り立つ。

$$(\psi_1\gamma^{\mu_1\cdots\mu_k}\psi_2)^* = (\psi_1\gamma^{\mu_1\cdots\mu_k}\psi_2). \tag{13.7}$$

ここでは特に用いないが、γ-行列の成分が全て実数であるような表現を取るのがしばしば便利である。例えば、次のように取ることができる。

$$\begin{aligned}
C &= -i\sigma_y\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},\\
\gamma_0 &= i\sigma_y\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},\\
\gamma_1 &= \sigma_z\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},\\
\gamma_2 &= \sigma_x\otimes\sigma_z\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},\\
\gamma_3 &= \sigma_x\otimes\sigma_y\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\sigma_y,\\
\gamma_4 &= \sigma_x\otimes\sigma_x\otimes\sigma_z\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},\\
\gamma_5 &= \sigma_x\otimes\sigma_x\otimes\sigma_y\otimes\mathbf{1}\otimes\sigma_y,\\
\gamma_6 &= \sigma_x\otimes\sigma_x\otimes\sigma_x\otimes\sigma_z\otimes\mathbf{1},\\
\gamma_7 &= \sigma_x\otimes\sigma_x\otimes\sigma_x\otimes\sigma_y\otimes\sigma_y,\\
\gamma_8 &= \sigma_x\otimes\sigma_x\otimes\sigma_x\otimes\sigma_x\otimes\mathbf{1},\\
\gamma_9 &= \sigma_x\otimes\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\otimes\sigma_z,\\
\gamma_{11} &= \sigma_x\otimes\sigma_y\otimes\sigma_z\otimes\sigma_y\otimes\sigma_x.
\end{aligned} \tag{13.8}$$

$\epsilon^{012\cdots,11}$ は完全反対称テンソル（厳密にはテンソル密度）を表すとする。その成分 $\epsilon^{012\cdots11}$ が $+1$ であるのか -1 であるのかはここでは特定しないが、γ 行列の間に次の関係が成り立っているとする。

$$e\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{11}} = \mathbf{1}_{32}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{11}}. \tag{13.9}$$

ただし $e=\det e_\mu^{\widehat{i}}$ である。11 階反対称テンソル場 X_{11} が与えられたとき、その積分を次のように定義する。

$$\int X_{11} = \int d^{11}x\frac{1}{11!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{11}}X_{\mu_1\cdots\mu_{11}} \tag{13.10}$$

一般の n 階反対称テンソル $A_{\mu_1\cdots\mu_n}$ に対してその添え字を γ 行列で縮約し、重みが 1 になるように規格化したものを $\not{A}_n$ と書く。すなわち、$\not{A}_n$ は次のように定義される。

$$\not{A}_n = \frac{1}{n!}A_{\mu_1\cdots\mu_n}\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}. \tag{13.11}$$

13.1.2 作用と超対称変換

表 12.2 を見てみると、11 次元時空においてグラビトンの自由度は 44、グラビティーノの自由度は 128 であるから、あと $128-44=84$ の自由度のボゾンを導入する必要がある。この数はちょうど ${}_{11-2}C_3$ であるから、3 階反対称テンソル場を導入することによってボゾンとフェルミオンの自由度をそろえることができる。実際、これらの場を含み、局所的超対称変換で不変な 11 次元超重力理論の作用が Cremmer, Julia, Scherk らによって与えられた。[25] フェルミオンについて 4 次以上の項を無視すれば、その作用、変換則は次のように与えられる。

11 次元超重力理論の作用と変換則

11 次元超重力理論の作用は、

$$\begin{aligned}\frac{S}{2\pi} &= \int d^{11}xe\left[R-\frac{1}{2\cdot 4!}K_{\mu\nu\rho\sigma}K^{\mu\nu\rho\sigma}-\frac{1}{2}\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega)}\psi_\rho+\frac{1}{8}\psi_\mu\gamma^{[\mu}\not{K}_4\gamma^{\nu]}\psi_\nu\right] \\ &\quad -\frac{1}{3!}\int A_3\wedge K_4\wedge K_4. \end{aligned}\tag{13.12}$$

ただし、$K_4=dA_3$ であり、$\cdots\gamma^{[\mu}\cdots\gamma^{\nu]}\cdots$ は $(1/2)(\cdots\gamma^\mu\cdots\gamma^\nu\cdots)-(1/2)(\cdots\gamma^\nu\cdots\gamma^\mu\cdots)$ を意味している。
変換則は

$$\delta\psi_\mu = D_\mu^{(\omega)}\xi+\frac{1}{24}\gamma_\mu\not{K}_4\xi-\frac{1}{8}\not{K}_4\gamma_\mu\xi, \tag{13.13}$$

$$\delta e^\mu_{\hat{m}} = \frac{1}{4}(\psi_{\hat{m}}\gamma^\mu\xi), \tag{13.14}$$

$$\delta A_{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{4}[(\psi_\mu\gamma_{\nu\rho}\xi)+(\psi_\nu\gamma_{\rho\mu}\xi)+(\psi_\rho\gamma_{\mu\nu}\xi)]. \tag{13.15}$$

§12.3.5 の方針に従って、作用を 2π で割ったものの係数が簡単になるような場の規格化を採用した。これは 11 次元のプランク長さを $l_p=(2\pi)^{-1}$ に取ることを意味している。すなわち、アインシュタイン作用部分を長さのスケールを省略せずに書けば

$$S=\frac{1}{(2\pi)^8l_p^9}\int d^{11}xeR\cdots \tag{13.16}$$

となる。すなわちニュートン定数は $2\kappa_{11}^2=(2\pi)^8l_p^9$ と与えられる。

[25] で用いられた場の定義との関係は次のように与えられる。左辺が [25] で用いられている記号であり、左辺はそれをわれわれの記号で書き換えたものである。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{L}, \tag{13.17}$$

$$2K = (2\pi l_p)^{9/2}, \tag{13.18}$$

$$g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}, \tag{13.19}$$

$$F_{\mu\nu\rho\sigma} = (2\pi l_p)^{-3/2}K_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{13.20}$$

$$A_{\mu\nu\rho} = (2\pi l_p)^{-3/2}A_{\mu\nu\rho}, \tag{13.21}$$

$$\psi_\mu = \psi_\mu. \tag{13.22}$$

13.1.3 変分計算

上記の作用が超対称変換のもとで不変であることを ψ の 2 次の項までについてチェックしておこう。まず、作用を以下のように分割しておく。

$$\begin{aligned}&\frac{\mathcal{L}_E}{2\pi}=eR,\quad \frac{\mathcal{L}_\psi}{2\pi}=-\frac{e}{2}\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu^{(\omega)}\psi_\rho,\\ &\frac{\mathcal{L}_K}{2\pi}=-\frac{e}{2\cdot 4!}K_{\mu\nu\rho\sigma}K^{\mu\nu\rho\sigma},\quad \frac{\mathcal{L}_{CS}}{2\pi}=-\frac{e}{3!4!4!3!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{11}}A_{\mu_1\mu_2\mu_3}K_{\mu_4\cdots\mu_7}K_{\mu_8\cdots\mu_{11}},\\ &\frac{\mathcal{L}_Y}{2\pi}=\frac{e}{8}\psi_\mu\gamma^{[\mu}\not{K}_4\gamma^{\nu]}\psi_\nu=\frac{e}{8}\psi_\mu\langle\gamma^\mu\not{K}_4\gamma^\nu\rangle_{6,2}\psi_\nu.\end{aligned}\tag{13.23}$$

3 点結合項は γ 行列の階数による分解を用いて書き換えた。変換則も次のように分割しておく。

$$\begin{aligned}
&\delta_{\psi 1}\psi_\mu = D^{(\omega)}_\mu \xi, \quad \delta_{\psi 2}\psi_\mu = \frac{1}{24}\gamma_\mu \not{K}_4 \xi - \frac{1}{8}\not{K}_4 \gamma_\mu \xi, \\
&\delta_e e^\mu_{\hat{m}} = \frac{1}{4}(\psi_{\hat{m}}\gamma^\mu \xi), \quad \delta_A A_3 = -\frac{1}{4}(\psi_\mu \gamma_{\nu\rho}\xi + \psi_\nu \gamma_{\rho\mu}\xi + \psi_\rho \gamma_{\mu\nu}\xi)
\end{aligned} \tag{13.24}$$

チェックすべき項は次の表で矢印であらわされている 8 つである。

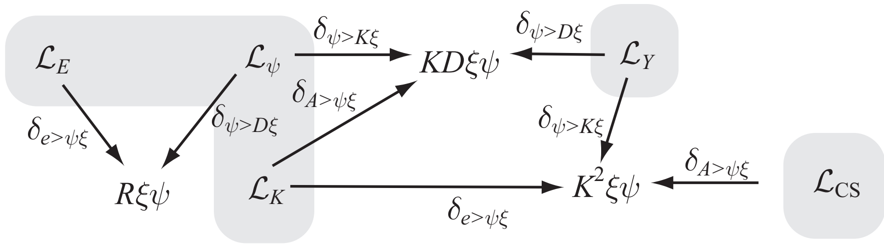

図 13.1: 11 次元超重力理論の超対称変換による変分の相殺。スピノルについて 4 次以上の項は無視している。

まず、§12.2 において一般の次元で示したように、変分のうち、K_4 を含まない二つは互いに相殺する。

$$\delta_e \mathcal{L}_E + \delta_{\psi 1}\mathcal{L}_\psi = 0. \tag{13.25}$$

あとチェックすべきなのは K_4 について 1 次の変分を与える

$$\delta_A \mathcal{L}_K + \delta_A \mathcal{L}_Y + \delta_{\psi 2}\mathcal{L}_\psi = 0 \tag{13.26}$$

と、K_4 について 2 次の項

$$\delta_e \mathcal{L}_K + \delta_{\psi 1}\mathcal{L}_Y + \delta_A \mathcal{L}_{CS} = 0. \tag{13.27}$$

である。

まず、三点結合項 $\mathcal{L}_Y$ のグラビティーノに対する $\delta_{\psi 1}$ 変分は

$$\frac{\delta_{\psi 1}\mathcal{L}_Y}{2\pi} = \frac{e}{4}\psi_\mu \langle \gamma^\mu \not{K}_4 \gamma^\nu \rangle_{6,2} D^{(\omega)}_\nu \xi = \frac{e}{4}\psi_\mu \langle \gamma^{\mu\nu}\not{K}_4\rangle_6 D^{(\omega)}_\nu \xi - \frac{e}{4}\psi_\mu \langle \gamma^{\mu\nu}\not{K}_4\rangle_2 D^{(\omega)}_\nu \xi \tag{13.28}$$

この式に含まれる共変微分は変換パラメータ ξ にのみ作用する。グラビティーノ運動項 $\mathcal{L}_\psi$ に対する $\delta_{\psi 2}$ の変分より、

$$\frac{\delta_{\psi 2}\mathcal{L}_\psi}{2\pi} = -\frac{e}{4}\psi_\mu D^{(\omega)}_\nu \langle \gamma^{\mu\nu}\not{K}_4\rangle_6 \xi + \frac{e}{4}\psi_\mu D^{(\omega)}_\nu \langle \gamma^{\mu\nu}\not{K}_4\rangle_2 \xi \tag{13.29}$$

この式に含まれる共変微分はゲージ場 K_4 と変換パラメータ ξ の両方に作用する。したがって、これらを加えると、共変微分が K_4 に作用する部分だけが残るが、$\langle \gamma^{\mu\nu} D^{(\omega)}_\nu \not{K}_4\rangle_6$ を含む項は K_4 のビアンキ恒等式に比例するから 0 になり、結局次の項のみが残る。

$$\frac{\delta_{\psi 2}\mathcal{L}_\psi}{2\pi} + \frac{\delta_{\psi 1}\mathcal{L}_Y}{2\pi} = \frac{e}{4}\psi_\mu \langle \gamma^{\mu\nu} D^{(\omega)}_\nu \not{K}_4\rangle_2 \xi = \frac{e}{6}\delta A_{\mu\nu\rho} D^{(\omega)}_\alpha K^{\alpha\mu\nu\rho}. \tag{13.30}$$

これは K_4 運動項の A_3 の変分と相殺する。

Soryushiron Kenkyu

次に K_4 について 2 次の変分を考えよう。三点結合項 $\mathcal{L}_Y$ の $\delta_{\psi 2}$ による変分を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\delta_{\psi 2}\mathcal{L}_Y}{2\pi} &= \frac{e}{64}\psi_\mu \not{K}_4 \gamma^\mu \not{K}_4 \xi + \frac{e}{64}\psi_\mu \gamma^\nu \not{K}_4 \gamma^\mu \not{K}_4 \gamma_\nu \xi \\ &= \frac{e}{8}\psi_\mu \langle \not{K}_4 \gamma^\mu \not{K}_4 \rangle_9 \xi - \frac{e}{8}\psi_\mu \langle \not{K}_4 \gamma^\mu \not{K}_4 \rangle_1 \xi \\ &= \frac{e}{2}\frac{1}{4!4!3!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{11}} K_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} K_{\mu_5\mu_6\mu_7\mu_8}\delta A_{\mu_9\mu_{10}\mu_{11}} + \frac{e}{4}(\psi^{\widehat{m}}\gamma^\nu\xi)T_{\widehat{m}\nu}[K_4]. \end{aligned} \tag{13.31}$$

ただし $T_{\mu\nu}[K_4]$ は反対称テンソル場 K_4 に対するエネルギー運動量テンソルであり、次のように与えられる。

$$T_{\mu\nu}[K_4] = \frac{1}{3!}K_{\mu\alpha\beta\gamma}K_\nu{}^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2\cdot 4!}g_{\mu\nu}K_{\alpha\beta\gamma\delta}K^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{13.32}$$

$T_{\mu\nu}[K_4]$ を含む項を得るために公式 (12.64) を用いた。

(13.31) の第 1 項は Chern-Simons 項 $\mathcal{L}_{CS}$ の変分と相殺し、第二項は K_4 の運動項の多脚場の変分と相殺する。

13.1.4 6 形式場

A_3 に対する双対場 A_6 を定義し、その超対称変換を決定しておこう。双対場とは A_3 に対する運動方程式をビアンキ恒等式として、A_3 に対するビアンキ恒等式を運動方程式として再現するような場である。K_4 は、次の運動方程式を満足する。

$$d*(K_4 - \kappa_4) = \frac{1}{2}K_4 \wedge K_4. \tag{13.33}$$

ここで、左辺の微分が共変微分ではないことに注意しよう。微分を共変微分にしたものは、捩率がある場合には共変微分でないものと次のように異なるので、ここでは重要である。

$$(*d*K_4)^{\mu\nu\rho} = (*\nabla * K_4)^{\mu\nu\rho} - \frac{5}{2}T_{\kappa\lambda}{}^{[\kappa}K^{\lambda\mu\nu\rho]} \tag{13.34}$$

κ_4 は作用中の 3 点結合項からの寄与であり、次のように定義される。

$$\kappa_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{8}\psi_\alpha\gamma^{[\alpha}\gamma_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\beta]}\psi_\beta. \tag{13.35}$$

そこで、双対場を

$$K_7 = *(K_4 - \kappa_4) \tag{13.36}$$

によって定義しよう。これはビアンキ恒等式 $dK_7 = (1/2)K_4 \wedge K_4$ を満足するから、ポテンシャル A_6 を用いて次のように書けるはずである。

$$K_7 = dA_6 + \frac{1}{2}A_3 \wedge dA_3. \tag{13.37}$$

K_7 がこのように A_3 を含むために、A_3 のゲージ変換のもとで K_7 を不変にするためには A_6 が次のように変換される必要がある。

$$\delta_{A_3}(\Lambda_2)A_6 = -\frac{1}{2}\Lambda_2 \wedge K_4. \tag{13.38}$$

(13.36) より、A_6 は質量殻上で次の式を満足する。

$$dA_6 = *K_4 - *\kappa_4 - \frac{1}{2}A_3 \wedge K_4. \tag{13.39}$$

質量殻上でこの式と矛盾しないように A_6 の超対称変換を決定しなければならない。そのためにまず (13.39) の右辺の超対称変換を計算しよう。これは既に知っている多脚場や A_3 の変換則を用いて決定することができる。ここでもフェルミオンの高次の項は無視する。便宜上、任意の 4 形式 Λ_4 を導入し、それと $\wedge$ 積を取り積分した形で書く事にする。こうすることにより浮いている添え字が無くなるので式を書くのが楽になる。まず、ゲージ場を含まない変分は次の二つである。

$$\int -\Lambda_4 \wedge *\delta_0\kappa_4 = \int d^{11}x\frac{e}{4}(D_\mu^{(\omega)}\xi)\langle\gamma^\mu \not{\Lambda}_4\gamma^\nu\rangle_{6,2}\psi_\nu, \tag{13.40}$$

$$\begin{aligned}\int \delta_A(\Lambda_4 \wedge *K_4) &= -\int d^{11}x\frac{e}{3!}\Lambda^{\mu\nu\rho\sigma}D_\mu^{(\omega)}\delta A_{\nu\rho\sigma} \\ &= -\int d^{11}x\frac{e}{4\cdot 4!}\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}D_\mu^{(\omega)}(\xi\langle\gamma^\mu\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\nu\rangle_2\psi_\nu)\end{aligned} \tag{13.41}$$

これらの和は $\gamma^{[\mu}\not{\Lambda}_4\gamma^{\nu]} = \langle\gamma^\mu\not{\Lambda}_4\gamma^\nu\rangle_{2,6}$ を用いると次のように変形される。

$$\begin{aligned}&\int[-\Lambda_4\wedge *\delta_0\kappa_4 + \delta_A(\Lambda_4\wedge *K_4)] \\ &= \int d^{11}x\frac{e}{4\cdot 4!}\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}(D_\mu^{(\omega)}(\xi\langle\gamma^\mu\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\nu\rangle_6\psi_\nu) - \frac{1}{8}\xi\gamma^{[\mu}\not{\Lambda}_4\gamma^{\nu]}\psi_{\mu\nu} \\ &= \int\Lambda_4\wedge d\theta_6 - \int d^{11}x\frac{e}{8}\xi\gamma^{[\mu}\not{\Lambda}_4\gamma^{\nu]}\psi_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{13.42}$$

ただし、θ_6 は次のように定義した。

$$\theta_6 = -\frac{1}{4}(\xi\langle\gamma_6\gamma^\nu\rangle_5\psi_\nu) \tag{13.43}$$

また、$\psi_{\mu\nu}$ は次のように定義される。

$$\psi_{\mu\nu} = D_\mu^{(\omega)}\psi_\nu - D_\nu^{(\omega)}\psi_\mu. \tag{13.44}$$

ゲージ場を一つ含む変分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int\delta(\Lambda_4\wedge A_3\wedge K_4) &= -\int\Lambda_4\wedge\delta A_3\wedge K_4 + \int\frac{1}{2}\Lambda_4\wedge d(A_3\wedge\delta A_3) \\ &= -\int d^{11}x\frac{e}{4}(\psi_\mu\langle\not{\Lambda}_4\gamma^\mu\not{K}_4\rangle_9\xi) + \int\frac{1}{2}\Lambda_4\wedge d(A_3\wedge\delta A_3),\end{aligned} \tag{13.45}$$

$$\int\delta_e(\Lambda_4\wedge *K_4) = \int d^{11}x\frac{e}{4}(\psi_\mu\langle\not{\Lambda}_4\gamma^\mu\not{K}_4\rangle_1\xi), \tag{13.46}$$

$$-\int\Lambda_4\wedge *\delta_1\kappa_4 = \int d^{11}x\frac{e}{64}[(\psi_\mu\not{\Lambda}_4\gamma^\mu\not{K}_4\xi) + (\psi_\mu\gamma^\nu\not{\Lambda}_4\gamma^\mu\not{K}_4\gamma_\nu\xi)]. \tag{13.47}$$

(13.46) の計算には公式 (12.64) を用いた。(13.45)、(13.46)、(13.47) を加えると、

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\delta(\Lambda_4\wedge A_3\wedge K_4) + \delta_e(\Lambda_4\wedge *K_4) - \Lambda_4\wedge *\delta_1\kappa_4 \\ &= \frac{1}{2}\Lambda_4\wedge d(A_3\wedge\delta A_3) - \frac{1}{8}(\psi_\mu\langle\not{\Lambda}_4\gamma^\mu\not{K}_4\rangle_9\xi) + \frac{1}{16}(\psi_\mu\langle\not{\Lambda}_4\gamma^\mu\not{K}_4\rangle_7\xi) \\ &\qquad - \frac{1}{16}(\psi_\mu\langle\not{\Lambda}_4\gamma^\mu\not{K}_4\rangle_3\xi) + \frac{1}{8}(\psi_\mu\langle\not{\Lambda}_4\gamma^\mu\not{K}_4\rangle_1\xi) \\ &= \frac{1}{2}\Lambda_4\wedge d(A_3\wedge\delta A_3) - \frac{1}{64}(\psi_\mu\gamma_\alpha\not{K}_4\gamma^\mu\not{\Lambda}_4\gamma^\alpha\xi) - \frac{1}{64}(\psi_\mu\not{K}_4\gamma^\mu\not{\Lambda}_4\xi).\end{aligned} \tag{13.48}$$

ゲージ場を含まない部分 (13.42) とゲージ場について 1 次の部分 (13.48) を全て加えると、(13.39) の両辺の超対称変換は次のように与えられる。

$$\int \Lambda_4 \wedge d\delta A_6 = \int \Lambda_4 \wedge d(\theta_6 + \frac{1}{2}A_3 \wedge \delta A_3)$$
$$+ \int d^{11}xe \left[\frac{1}{8}(\xi\gamma^\nu \not{\Lambda}_4\gamma^\mu\psi_{\mu\nu}) - \frac{1}{64}(\psi_\mu\gamma_\alpha\not{K}_4\gamma^\mu\not{\Lambda}_4\gamma^\alpha\xi) - \frac{1}{64}(\psi_\mu\not{K}_4\gamma^\mu\not{\Lambda}_4\xi)\right]. \quad (13.49)$$

質量殻上でこの関係が成り立つように δA_6 を決めなければならない。グラビティーノの運動方程式は次のように与えられる。

$$\gamma^\alpha\psi_{\alpha\mu} = -\frac{1}{8}\gamma^\nu\not{K}_4\gamma_\mu\psi_\nu - \frac{1}{24}\gamma_\mu\gamma^\nu\not{K}_4\psi_\nu. \quad (13.50)$$

この式を用いれば、(13.49) の 2 行目はちょうど 0 になることがわかる。従って、A_6 の変換則は次のように取れば良い。

$$\delta A_6 = \theta_6 + \frac{1}{2}A_3 \wedge \delta A_3. \quad (13.51)$$

ここで、A_6 の超対称変換の中に A_3 が含まれているが、これはもともと K_7 の定義の中に A_3 が含まれていたことからきている。実際、この第 2 項のおかげで、場の強さ δK_7 の超対称変換は次のようにゲージ不変になる。

$$\delta_{\rm ss}K_7 = d\theta_6 + K_4 \wedge \delta_{\rm ss}A_3. \quad (13.52)$$

13.2 M-ブレーン

13.2.1 11 次元の超対称代数

大域的な超対称変換と並進対称性の生成子を次のように定義しておこう。超対称性変換の生成子 $\widehat{Q}$ を次のように定義する。

$$\delta_Q(\xi)\phi = [i\xi\widehat{Q}, \phi], \quad (13.53)$$

$\widehat{Q}$ はマヨラナスピノルであり、次の式が成り立つ。

$$\xi\widehat{Q} = \widehat{Q}\xi = i\widehat{Q}^\dagger\gamma^0\xi \quad (13.54)$$

ここでは、大域的な変換と対応する電荷を定義するために、時空はほとんど平坦であり、そこからの揺らぎを線形近似で扱うものとする。11 次元の超対称変換 $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$ の交換関係を計算してみよう。$\{Q_\alpha, Q_\beta\}$ は二つのスピノル添え字 α と β に対して対称であるから $32 \times 33/2$ 個の独立成分を持つ。このことだけから、交換関係を次の形に書くことができるということがわかる。

$$[i\xi_2\widehat{Q}, i\xi_1\widehat{Q}] = -\frac{i}{4}(\xi_2\gamma^\mu\xi_1)\widehat{P}_\mu - \frac{i}{8}(\xi_2\gamma^{\mu\nu}\xi_1)\widehat{Z}_{\mu\nu} - \frac{i}{4\cdot 5!}(\xi_2\gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}\xi_1)\widehat{Z}_{\mu_1\cdots\mu_5} \quad (13.55)$$

右辺に現れる $\widehat{P}_\mu$、$\widehat{Z}_{\mu\nu}$、$\widehat{Z}_{\mu_1\cdots\mu_5}$ が何であるのかはこの段階では明らかではない。この節の目的は、これらがそれぞれ運動量、M2 ブレーン電荷、M5 ブレーン電荷の演算子であることを確認することができる。

まず、超対称変換以外の対称性についてまとめておく。局所ローレンツ変換は次のように与えられる。

$$\delta_M(\lambda_{\widehat{m}\widehat{n}})e_\mu^{\widehat{m}} = e_\mu^{\widehat{n}}\lambda_{\widehat{n}}{}^{\widehat{m}}, \quad \delta_M(\lambda_{\widehat{m}\widehat{n}})A_3 = 0, \quad \delta_M(\lambda_{\widehat{m}\widehat{n}})A_6 = 0. \quad (13.56)$$

Soryushiron Kenkyu

A_3 ゲージ変換は

$$\delta_{A_3}(\Lambda_2)e_\mu{}^m = 0, \quad \delta_{A_3}(\Lambda_2)A_3 = d\Lambda_2, \quad \delta_{A_3}(\Lambda_2)A_6 = -\frac{1}{2}\Lambda_2 \wedge K_4. \tag{13.57}$$

A_6 ゲージ変換のボゾン場への作用は

$$\delta_{A_6}(\Lambda_5)e_\mu{}^m = 0, \quad \delta_{A_6}(\Lambda_5)A_3 = 0, \quad \delta_{A_6}(\Lambda_5)A_6 = d\Lambda_5 \tag{13.58}$$

M2-ブレーンおよび M5-ブレーンの電荷は、カレントの積分として次のように定義する。

$$\widehat{Z}^{ij} = \int d^{10}xJ^{0ij}, \quad \widehat{Z}^{i_1\cdots i_5} = \int d^{10}xJ^{0i_i\cdots i_5} \tag{13.59}$$

ただしカレントはゲージ場との次の結合によって定義される。

$$S_2 = -\frac{1}{6}\int d^{11}xA_{\mu\nu\rho}J^{\mu\nu\rho}, \quad S_5 = -\frac{1}{5!}\int d^{11}xA_{\mu_1\cdots\mu_6}J^{\mu_1\cdots\mu_6}. \tag{13.60}$$

この電荷が非自明になるためには時空がコンパクト化されており、そのサイクルにブレーンが巻きついている必要がある。

A_3 および A_6 に対応する内部対称性の生成子を $\widehat{Z}^{\mu\nu}$ および $\widehat{Z}^{\mu_1\cdots\mu_5}$ とすれば次のように書くことができる。

$$\delta_{A_3}(\Lambda_2)\phi = \frac{i}{2}\Lambda_{\mu\nu}[\widehat{Z}^{\mu\nu}, \phi], \quad \delta_{A_6}(\Lambda_5)\phi = \frac{i}{5!}\Lambda_{\mu_1\cdots\mu_5}[\widehat{Z}^{\mu_1\cdots\mu_5}, \phi]. \tag{13.61}$$

$\widehat{Z}^{\mu\nu}$ と $\widehat{Z}^{\mu_1\cdots\mu_5}$ はどちらもエルミートな演算子である。

$\delta_{\rm gc}(\epsilon)$ は §4.1.3 で定義した共変な無限小一般座標変換

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon) = \delta^0_{\rm gc}(\epsilon) - \delta_M(\epsilon^\lambda\omega_{\lambda\widehat{m}\widehat{n}}) - \delta_{A_3}(\epsilon^\lambda A_{\lambda\mu\nu}) - \delta_{A_6}(\epsilon^\lambda A_{\lambda\mu_1\cdots\mu_5}) \tag{13.62}$$

であり、それぞれのボゾン場に対して次のように与えられる。

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon)e_\mu{}^{\widehat{m}} = D^{(\omega)}_\mu\epsilon^{\widehat{m}}, \quad \delta_{\rm gc}(\epsilon)A_{\mu\nu\rho} = \epsilon^\lambda K_{\lambda\mu\nu\rho}, \quad \delta_{\rm gc}(\epsilon)A_6 = \epsilon^\mu K^0_{\mu[6]} + \frac{1}{2}\epsilon^\mu A_{\mu[2]} \wedge K_4 \tag{13.63}$$

運動量演算子は、並進変換と次のように関係している。

$$\delta_{\rm gc}(\epsilon)\phi = [i\epsilon^\mu\widehat{P}_\mu, \phi] \tag{13.64}$$

(13.13)、(13.14)、(13.15) および (13.51) に与えられた 11 次元超重力理論の超対称変換の交換関係を計算してみよう。ここでは変換パラメータ ξ による超対称変換を $\delta_Q(\xi)$ のように書くことにする。また、二つの変換パラメータ ξ_1 と ξ_2 を用いて次のものを定義しておく。

$$\epsilon^\mu = -\frac{1}{4}(\xi_2\gamma^\mu\xi_1), \tag{13.65}$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\xi_2\gamma_{\mu\nu}\xi_1), \tag{13.66}$$

$$\Lambda_{\mu_1\cdots\mu_5} = -\frac{1}{4}(\xi_2\gamma_{\mu_1\cdots\mu_5}\xi_1). \tag{13.67}$$

まず、多脚場の上での代数を見てみよう。超対称変換を二回繰り返して行えば、次のようになる。

$$\delta_Q(\xi_2)\delta_Q(\xi_1)e^{\widehat{m}}_\mu = -\frac{1}{4}D^{(\omega)}_\mu\xi_2\gamma^{\widehat{m}}\xi_1 + \frac{1}{96}\xi_2\not{K}_4\gamma_\mu\gamma^{\widehat{m}}\xi_1 - \frac{1}{32}\xi_2\gamma_\mu\not{K}_4\gamma^{\widehat{m}}\xi_1 \tag{13.68}$$

Soryushiron Kenkyu

右辺第 1 項の共変微分は ξ_2 だけに作用する。交換関係は、この変換から ξ_1 と ξ_2 を入れ替えたものを引けば得られる。まず、微分項は、

$$-\frac{1}{4}D_\mu^{(\omega)}\xi_2\gamma^{\widehat{m}}\xi_1-(\xi_1\leftrightarrow\xi_2)=-\frac{1}{4}D_\mu^{(\omega)}(\xi_2\gamma^{\widehat{m}}\xi_1). \tag{13.69}$$

となり、§4.1.3 で与えた一般座標変換になる。テンソル場を含む項については γ 行列の階数ごとに分解すると、ξ_1 と ξ_2 の反対称性から $\gamma^{[2]}$ と $\gamma^{[6]}$ を含む項が残り、$\gamma^{[4]}$ を含む項は消える。その結果得られる項は、添え字 μ と $\widehat{m}$ に対して反対称になり、局所ローレンツ変換と解釈できる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{96\cdot 4!}K_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\xi_2\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_\mu\gamma^{\widehat{m}}\xi_1-3\xi_2\gamma_\mu\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^{\widehat{m}}\xi_1\right]-(\xi_1\leftrightarrow\xi_2)\\ =\;&-\frac{1}{24\cdot 4!}K_{\alpha\beta\gamma\delta}\xi_2\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_\mu{}^{\widehat{m}}\xi_1-\frac{1}{12\cdot 2!}K_{\alpha\beta\mu}{}^{\widehat{m}}\xi_2\gamma^{\alpha\beta}\xi_1\end{aligned} \tag{13.70}$$

改めてまとめて書けば、

$$[\delta_Q(\xi_2),\delta_Q(\xi_1)]e_\mu^{\widehat{m}}=D_\mu^{(\omega)}\epsilon^{\widehat{m}}+\frac{1}{2}\xi_2K_\mu{}^{\widehat{m}}\xi_1 \tag{13.71}$$

ただし、$K_{\mu\nu}$ は次のように定義される行列である。

$$(K_{\widehat{m}\widehat{n}})_{\alpha\beta}=-\frac{1}{12\cdot 4!}K_{\mu\nu\rho\sigma}(\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}{}_{\widehat{m}\widehat{n}})_{\alpha\beta}-\frac{1}{6\cdot 2!}K_{\mu\nu\widehat{m}\widehat{n}}(\gamma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \tag{13.72}$$

(13.71) の右辺第 2 項は、局所ローレンツ変換と解釈することができる。超場形式ではこの項は超空間上の曲率 $R_{\alpha\beta mn}\sim(K_{mn})_{\alpha\beta}$ の存在によるものであると解釈することができる。

次に、反対称テンソル場の上での代数を見てみよう。超対称変換を二回行うと、

$$\begin{aligned}\delta_Q(\xi_2)\delta_Q(\xi_1)A_{\mu\nu\rho}\;=\;&-\frac{1}{4}(D_\mu^{(\omega)}\xi_2\gamma_{\nu\rho}\xi_1+D_\nu^{(\omega)}\xi_2\gamma_{\rho\mu}\xi_1+D_\rho^{(\omega)}\xi_2\gamma_{\mu\nu}\xi_1)\\ &+\frac{1}{32}(\xi_2\not{K}_4\gamma_{\mu\nu\rho}\xi_1-\xi_2\gamma_\mu\not{K}_4\gamma_{\nu\rho}\xi_1-\xi_2\gamma_\nu\not{K}_4\gamma_{\rho\mu}\xi_1-\xi_2\gamma_\rho\not{K}_4\gamma_{\mu\nu}\xi_1)\end{aligned} \tag{13.73}$$

この式においても右辺の共変微分は ξ_2 にのみ作用している。交換関係を取れば、微分項はゲージ変換と解釈できる。場の強さに比例する項からは、γ-行列の階数ごとに分解することにより $\gamma^{[1]}$、$\gamma^{[3]}$、$\gamma^{[5]}$、$\gamma^{[7]}$ を含む項が得られるが、$\gamma^{[3]}$ と $\gamma^{[7]}$ は ξ_1 と ξ_2 の反対称性により消える。$\gamma^{[5]}$ の項を計算してみると、その係数はちょうど 0 になることがわかる。結局 $\gamma^{[1]}$ を含む項のみが残って、次の交換関係を得る。

$$[\delta_Q(\xi_2),\delta_Q(\xi_1)]A_3=\epsilon^\alpha K_{\alpha[3]}+d\Lambda_2 \tag{13.74}$$

この第 1 項は §4.1.3 にあるように、一般座標変換であるとみなすことができる。

A_6 の上で超対称変換を 2 回繰り返せば、

$$\begin{aligned}\delta_Q(\xi_2)\delta_Q(\xi_1)A_6\;=\;&-\frac{1}{4}(\xi_1\langle\gamma_6\gamma^\mu\rangle_5D_\mu^{(\omega)}\xi_2)\\ &-\frac{1}{64}\Big[(\xi_1\gamma_6\not{K}_4\xi_2)+(\xi_1\gamma^\mu\gamma_6\not{K}_4\gamma_\mu\xi_2)\Big]+\frac{1}{8}A_3\wedge(\xi_1\langle\gamma_3\gamma^\mu\rangle_2D_\mu^{(\omega)}\xi_2)\\ &-\frac{1}{128}A_3\wedge\Big[(\xi_1\gamma_3\not{K}_4\xi_2)+(\xi_1\gamma^\mu\gamma_3\not{K}_4\gamma_\mu\xi_2)\Big]\end{aligned} \tag{13.75}$$

従って交換関係は、

$$\begin{aligned}[\delta_Q(\xi_2),\delta_Q(\xi_1)]A_6\;=\;&\frac{1}{4}d(\xi_1\gamma_5\xi_2)+\frac{1}{8}A_3\wedge d(\xi_1\gamma_2\xi_2)\\ &+\frac{1}{4}\Big[(\xi_1\langle\gamma_6\not{K}_4\rangle_{10}\xi_2)-(\xi_1\langle\gamma_6\not{K}_4\rangle_2\xi_2)\Big]+\frac{1}{8}A_3\wedge(\xi_1\langle\gamma_3\not{K}_4\rangle_1\xi_2)\\ =\;&d\Lambda_5+\epsilon^\mu K_{\mu[6]}+\frac{1}{2}A_3\wedge(d\Lambda_2+\epsilon^\mu K_{\mu[3]})-\Lambda_2\wedge K_4.\\ =\;&d\Lambda_5+\epsilon^\mu K^0_{\mu[6]}+\frac{1}{2}\epsilon^\mu A_{\mu[2]}\wedge K_4-\frac{1}{2}\Lambda_2\wedge K_4-\frac{1}{2}d(\Lambda_2\wedge A_3).\end{aligned} \tag{13.76}$$

となる。ただし、$K_7^0 = dA_6$ である。

これまでに得られた交換関係は全て次の形に書くことができる。

$$[\delta_Q(\xi_2), \delta_Q(\xi_1)] = \delta_{\rm gc}(\epsilon) + \delta_M(\frac{1}{2}\xi_2 K_{mn}\xi_1) + \delta_{A_3}(\Lambda_2) + \delta_{A_6}(\Lambda_5). \tag{13.77}$$

(13.77) において、背景が平坦な時空であり、変換パラメータが定数である場合に演算子の交換関係として書き換えれば交換関係 (13.55) が得られる。

13.2.2 BPS bound

(13.54) を用いると、交換関係 (13.55) は次のように書き換えることができる。

$$\{\widehat{Q}, \widehat{Q}^\dagger\} = \frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma_0)\widehat{P}_\mu + \frac{1}{8}(\gamma^{\mu\nu}\gamma_0)\widehat{Z}_{\mu\nu} + \frac{1}{4\cdot 5!}(\gamma^{\mu_1\cdots\mu_5}\gamma_0)\widehat{Z}_{\mu_1\cdots\mu_5} \tag{13.78}$$

この式から、ブレーンのエネルギーに対する重要な結果を導くことができる。例として M2-ブレーンが $1,2$ 方向に伸びている場合を考えよう。そして運動量 P_μ のうち $P_0 = E$ のみが値を持つとする。この場合、(13.78) は次のようになる。

$$4\{\widehat{Q}, \widehat{Q}^\dagger\} = \widehat{P}_0 + \gamma^{12}\gamma_0\widehat{Z}_{12} \tag{13.79}$$

このような状態で上記の交換関係を両側から挟むと次の式が得られる。

$$4\langle s|\{Q, Q^\dagger\}|s\rangle = E + Z^{12}\gamma_{012} \tag{13.80}$$

ただし、演算子 $\widehat{P}_0$ と $\widehat{Z}^{\mu\nu}$ を状態 $|s\rangle$ における期待値 E と Z^{12} で置き換えた。また、$|s\rangle$ のノルムは 1 であるとした。この式の両辺はスピノルの足を二つ持った行列であるが、その両側を任意のスピノル $\overline{\eta}$ とその複素共役 $\overline{\eta}^\dagger$ で挟んでみよう。

$$\langle s|4\{\overline{\eta}Q, (\overline{\eta}Q)^\dagger\}|s\rangle = \overline{\eta}(E + Z^{12}\gamma_{012})\overline{\eta}^\dagger \tag{13.81}$$

スピノル η がどのようなものであっても、この式の左辺は 0 または正である。従って右辺も同様の性質を持たなければならない。γ_{012} はエルミート行列であるから、ユニタリー変換によって対角化することができ、その固有値は ± 1 である。上記の条件は E が $-Z^{12}\gamma_{012}$ のすべての固有値にたいしてそれより大きいか、等しくなければならないことをいっているから、次の条件が成り立つ必要がある。

$$E \geq |Z^{12}|. \tag{13.82}$$

等号が成り立つ場合を考えてみよう。この場合行列 $E + Z^{12}\gamma_{012}$ は 0 の固有値をもつ。対応するスピノルを η_0 とおこう。つまり、スピノル η_0 は次の条件を満足する。

$$\gamma_{012}\eta_0 = \pm\eta_0. \tag{13.83}$$

右辺の符号は γ_{12} の符号、すなわち M2-ブレーンの裏表の取り方によって決まる。上の式に η_0 を代入すれば、状態 $|s\rangle$ に対して部分的に超対称性が残っていることを示す次の式を得ることができる。

$$(\overline{\eta}Q)|s\rangle = (\overline{\eta}Q)^\dagger|s\rangle = 0. \tag{13.84}$$

Q はマヨラナスピノルであるからこれら二つの条件は等価である。ここでは 012 方向に広がっている M2-ブレーンについて考えたが、これを一般の方向を向いた M2-ブレーンに拡張するのは簡

単である。たとえば、時間方向も含めた M2-ブレーンの方向が反対称テンソル $S^{\mu\nu\rho}$ によってあらわされる場合、残っている超対称性をあらわすパラメータ η は次の式を満足する。

$$\frac{1}{3!}\gamma_{\mu\nu\rho}S^{\mu\nu\rho}\eta = \pm\eta. \tag{13.85}$$

ただし、$S^{\mu\nu\rho}$ は $(1/6)S^{\mu\nu\rho}S_{\mu\nu\rho} = -1$ のように規格化されているものとする。

ブレーンが BPS であり、その電荷が q_{M2}、すなわち、ゲージ場との結合が

$$\frac{S_{\mathrm{cur}}}{2\pi} = q_{\mathrm{M2}}\int_{\text{M2-brane}} A_3. \tag{13.86}$$

によって与えられるとしよう。§12.3.5 での方針に従い $S_{\mathrm{cur}}/(2\pi)$ に対する係数として電荷 q_{M2} を定義した。ブレーンの面積が無限大であれば電荷 Z_{12} やエネルギー E が発散してしまうので、コンパクト化などによってブレーンの面積 A が有限になっている場合を考えよう。その場合、

$$Z^{12} = 2\pi q_{\mathrm{M2}}A, \quad E = T_{\mathrm{M2}}A \tag{13.87}$$

である。ただし T_{M2} は M2-ブレーンの張力である。BPS 条件より、

$$T_{M2} = 2\pi q_{\mathrm{M2}} = \frac{q_{\mathrm{M2}}}{(2\pi)^2 l_p^3}. \tag{13.88}$$

最後の表式では単位が 長さ$^{-3}$ であることがわかるようにプランク長さ l_p を復活した。(前にも述べたようにここでは $2\pi l_p = 1$ という単位を用いている。)

全く同様の議論を M5-ブレーンに対して繰り返すこともできる。M5-ブレーンの向きをあらわす反対称テンソルを $S^{\mu_1\cdots\mu_6}$ とし、$(1/6!)S_{\mu_1\cdots\mu_6}S^{\mu_1\cdots\mu_6} = -1$ を満足しているとしよう。このとき、M5-ブレーンによって破れずに残る超対称性に対応するパラメータは次の条件を満足する。

$$\frac{1}{6!}\gamma_{\mu_1\cdots\mu_6}S^{\mu_1\cdots\mu_6}\eta = \pm\eta. \tag{13.89}$$

M5-ブレーンが BPS object であることを仮定すれば次の張力を得ることができる。

$$T_{\mathrm{M5}} = \frac{q_{\mathrm{M5}}}{(2\pi)^5 l_p^6}. \tag{13.90}$$

13.2.3 ブレーン上の場

M5-ブレーンはその余次元が 5 であるので、その上には 5 個のスカラー場があるはずである。超対称性を持った理論であれば、ボゾンの自由度とフェルミオンの自由度が一致しなければならないが、5 という数はフェルミオンで実現することはできない。(6 次元のスピノルの成分の最小数は 8 であり、フェルミオンの力学的自由度の最小数はその半分の 4 である。)従って、少なくともあと 3 つのボゾンの自由度が存在しなければならない。これはちょうど自己双対場 H_3 の自由度の個数と一致している。

実際に M5-ブレーン上の超対称性を調べてみよう。$0, 1, 2, 3, 4, 5$ 方向に伸びた M5-ブレーンを考えると、電荷 Z^{12345} を持っている。従って、BPS 条件は

$$(E - Z^{12345}\gamma_{012345})\xi = 0 \tag{13.91}$$

となり、この条件を満足するスピノル ξ の 16 成分は M5-ブレーン上のカイラリティが片方だけが許される。16 個の成分は 6 次元においては二つのスピノルによって表される。このような、同じカイラリティを持った二つの超対称電荷によって構成される 6 次元の超対称理論は $\mathcal{N} = (2, 0)$ 理論と呼ばれる。あとで §19.8.2 で述べるように、この理論には重力多重項を除けば表 13.1 のテンソル多重項のみが存在している。[26]

Soryushiron Kenkyu

表 13.1: 6 次元 $\mathcal{N} = (2,0)$ 理論のテンソル多重項

$B^{-}_{\mu\nu}$	:	anti-self-dual tensor field
$\phi \times 5$	:	scalar fields
$\psi \times 4$	:	spinor fields

13.2.4 M2-M5 系

M-ブレーンとゲージ場の結合を次のように与えよう。

$$\frac{S_2}{2\pi} = -q_2 \int_{\mathrm{M2}} A_3, \quad \frac{S_5}{2\pi} = -q_5 \int_{\mathrm{M2}} A_6. \tag{13.92}$$

q_2 と q_5 はそれぞれブレーンの「素電荷」を表している。M2-ブレーンと M5-ブレーンが共存する系を考えれば、これらはディラックの量子化条件を満足しなければならない。実は、11 次元超重力理論の場合には、ゲージ場に相互作用項（Chern-Simons 項）があるために、電荷により強い条件が課される。このことを見てみよう。

A_6 と A_3 の関係は (12.144) によって定義されているので、ディラックの量子化条件は

$$q_2 q_5 \in \mathbf{Z} \tag{13.93}$$

によって与えられる。(13.92) の S_5 が A_6 のゲージ変換のもとでゲージ不変であるためには、M5-ブレーンに端が無いことが必要である。M2-ブレーンの場合にも、端がなければ S_2 は A_3 のゲージ変換のもとでゲージ不変であるが、実は端があっても以下のようにゲージ不変性を保つことができる。

M5-ブレーンの上には場 B_2 が存在する。そこで、M2-ブレーンの端がこのゲージ場と次のように結合しているとしよう。

$$\frac{S_1}{2\pi} = -q_1 \int_{\partial M2} B_2. \tag{13.94}$$

そして A_3 のゲージ変換が、ゲージ場 B_2 も次のように変換すると仮定する。

$$\delta A_3 = d\Lambda_2, \quad \delta A_6 = -\frac{1}{2}\Lambda_2 \wedge K_4, \quad \delta_{A_3} B_2 = \Lambda_2 \tag{13.95}$$

（この関係により B_2 の規格化を定める。）ここでもし次の式が成り立てば、$S_2 + S_1$ は δ_{A_3} のもとでゲージ不変になっていることがわかる。

$$q_1 = -q_2 \tag{13.96}$$

次に、カレントについて見てみよう。M2-brane および M5-ブレーンのカレントに対して

$$J^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{8!}\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa_1\cdots\kappa_8} J_{\kappa_1\cdots\kappa_8}, \quad J^{\mu_1\cdots\mu_6} = \frac{1}{8!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_6\nu_1\cdots\nu_5} J_{\nu_1\cdots\nu_5} \tag{13.97}$$

を定義して運動方程式、ビアンキ項等式を外微分形式で表せば

$$dK_7 - \frac{1}{2}K_4 \wedge K_4 = \frac{1}{2\pi} J_8, \tag{13.98}$$

$$dK_4 = \frac{1}{2\pi} J_5. \tag{13.99}$$

となる。ただし K_4 と K_7 の間の関係は $K_7 = *K_4$ および $K_4 = - * K_7$ である。ここで、J_5 は (13.92) に与えられた S_5 による M5-ブレーンと A_6 の相互作用により次のように与えられるとしよう。

$$\frac{J_5}{2\pi} = q_5 \delta_5(\mathrm{M5}) \tag{13.100}$$

(13.98) の両辺を外微分して (13.99) を用いると、

$$- K_4 \wedge J_5 = dJ_8 \tag{13.101}$$

もし $J_8 \propto \delta_8(M2)$ であれば、この式の右辺は M2-ブレーンが存在する部分でのみ値を持つ。従って M5-ブレーン上で、M2-ブレーンと交わっているような特殊な点を除いて $K_4 \wedge \delta_5 = 0$ が成り立つ必要があり、不自然である。これを避けるには、J_8 が M5-ブレーンでも値を持つようにすればよい。そのために、M5-ブレーン上に新たに場の強さ H_3 を導入する。そして、J_8 を次のようにおく。

$$\frac{J_8}{2\pi} = q_2 \delta_8(\mathrm{M2}) + q_5 H_3 \wedge \delta_5(\mathrm{M5}). \tag{13.102}$$

右辺第 1 項は (13.92) に与えられた S_2 による M2-ブレーンと A_3 の相互作用によって現れる項である。右辺第 2 項はここで新たに導入された項で、係数に q_5 をつけたのは後で都合が言いようにである。この J_8 を (13.101) に代入すると、次の式が得られる。

$$- K_4 \wedge \delta_5(\mathrm{M5}) = \frac{q_2}{q_5} d\delta_8(\mathrm{M2}) + dH_3 \wedge \delta_5(\mathrm{M5}). \tag{13.103}$$

さらに、M2-ブレーンが M5-ブレーン上に端を持つことができるとし、

$$d\delta_8(\mathrm{M2}) = -\delta_9(\partial \mathrm{M2}) = -\delta_4 \wedge \delta_5(\mathrm{M5}) \tag{13.104}$$

こうしておくと、(13.103) から M5-ブレーン上で次の式が成り立つことがわかる。

$$dH_3 + K_4 = \frac{q_2}{q_5} \delta_4 \tag{13.105}$$

これは M5-ブレーン上の場 H_3 の運動方程式（あるいはビアンキ項等式）であるとみなすことができる。

M5-ブレーン上で、M2-ブレーンの端点以外の点では、ビアンキ恒等式 $dH_3 + K_4 = 0$ が満足されるから、ポテンシャル B_2 を導入し、

$$H_3 = dB_2 - A_3 \tag{13.106}$$

と置くことができる。この組み合わせはちょうどゲージ変換 (13.95) のもとで不変になるようにとった。$H_3^0 = H_3 - A_3 = dB_2$ と置くと、ゲージ場 B_2 と M2-ブレーン電荷の関係を次のように書くことができる。

$$dH_3^0 = \frac{q_2}{q_5} \delta_4. \tag{13.107}$$

すなわち、M2-ブレーンの境界は M5-ブレーンの上のゲージ場に対して磁気的なチャージ

$$\widetilde{q}_1 = \frac{q_2}{q_5} \tag{13.108}$$

をもっているということがわかる。

この磁荷は電荷 (13.96) に与えられた電荷 q_1 と次の量子化条件を満足しなければならない。

$$q_1 \widetilde{q}_1 \in \mathbf{Z} \tag{13.109}$$

(13.93) (13.96) (13.108) (13.109) を組み合わせると、q_1 と q_5 は次の二つの量子化条件を同時に満足する必要があることがわかる。

$$q_2 q_5 \in \mathbf{Z}, \quad \frac{q_2^2}{q_5} \in \mathbf{Z}. \tag{13.110}$$

これらを満足する最も自然な組み合わせは

$$q_2 = q_5 = 1 \tag{13.111}$$

であり、M2-ブレーンと M5-ブレーンの電荷はこのように量子化されていると考えられている。この場合、M2 ブレーン境界の電荷、磁荷について $q_1 = -\widetilde{q_1}$ が成り立つが、これは M5-brane 上のゲージ場 B_2 が反自己双対であることと矛盾しない。

(13.103) の式は次のように書き換えることができる。((13.111) を仮定した。)

$$d\left(\delta_8(\mathrm{M2}) + H_3^0 \wedge \delta(\mathrm{M5})\right) = 0 \tag{13.112}$$

この式は、δ_8 によって表される M2-ブレーンのカレントが M5-ブレーン上ではゲージ場 H_3^0 として逃げていくことを表している。

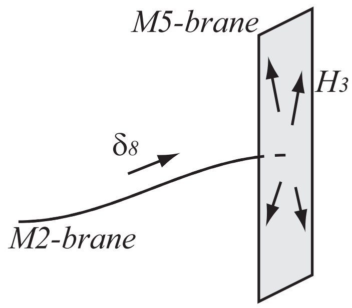

図 13.2: M2-ブレーンのカレントは、M5-ブレーン上のゲージ場となって逃げていく

以上のように、ブレーンが他のブレーンの上に端を持つ場合、電荷の保存則やゲージ不変性を満たすためにはブレーンの端がブレーン上のゲージ場と結合している必要があり、ブレーン上のゲージ場を見ることでブレーンが端を持つことができるとすればどのブレーンにくっつくことができるのか、を推測することができる。[27]

13.3 古典解

13.3.1 M5-ブレーン解

M5-ブレーンに平行な座標を y^i、半径方向の座標を r、M5-ブレーンを囲む $\mathbf{S}^4$ 上の座標を θ^a としよう。M5-ブレーンの解は、M5-ブレーン上の Poincare 対称性とそれを中心とした回転対称性を仮定すれば次のように置くことができる。

$$ds^2 = a^2(r)\eta_{ij}dy^i dy^j + b^2(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_4^2). \tag{13.113}$$

$d\Omega_4^2$ は、半径 1 の $\mathbf{S}^4$ 上の計量である。これは直行座標であるが、局所ローレンツ座標を多脚場の対角成分のみが値を持つようにとることにする。(13.113) であらわされる多様体上での 0 でな

いスピン接続の成分は次の通りである。

$$\omega_{i-\hat{j}\hat{r}}=\frac{a'}{b}\delta_{\hat{i}\hat{j}},\quad \omega_{a-\hat{b}\hat{r}}=\left(1+\frac{rb'}{b}\right)\delta_{\hat{a}\hat{b}}=\omega^0_{a-\hat{b}\hat{r}}+\frac{rb'}{b}\delta_{\hat{a}\hat{b}},\quad \omega_{a-\widehat{bc}}=\omega^0_{a-\widehat{bc}}. \tag{13.114}$$

ただし、ω^0 は、平坦な $r-\theta^a$ 空間上での、つまり $b=1$ のときのスピン接続である。$\delta\psi_M=0$ の解が存在するとして、そのスピノルを ξ とする。系の対称性から、このスピノルの y^i 依存性と θ^a 依存性は平坦な空間上での定数スピノルと同じであるはずである。すなわち、平坦な時空上で定義される定数スピノル ξ_0 を用いて次のように置くことができる。

$$\xi=s(r)\xi_0. \tag{13.115}$$

$s(r)$ は r にのみ依存する関数である。このことから ξ は次の式を満足する。

$$\partial_i\xi=D_a^{(\omega_0)}\xi=0,\quad \partial_r\xi=\frac{s'}{s}\xi. \tag{13.116}$$

$D_a^{(\omega_0)}\xi$ は平坦な時空上で定義される θ^a 方向の共変微分であり、次の式によって定義される。

$$D_a^{(\omega_0)}\xi=\partial_a\xi+\frac{1}{4}\omega^0_{a-\widehat{bc}}\gamma^{\widehat{bc}}\xi+\frac{1}{2}\omega^0_{a-\widehat{br}}\gamma^{\widehat{br}}\xi. \tag{13.117}$$

さらにグラビティーノの真空期待値は 0 であると仮定しよう。

これらの式をグラビティーノの超対称変換 (13.14) が 0 であるという条件に代入すれば、3 つの関数 $a(r)$、$b(r)$、$s(r)$ に対する、3 つの独立な一階の微分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned}\delta\psi_a &= D_a^0\xi+\frac{rb'}{2b}\gamma_{\hat{a}}\gamma_{\hat{r}}\xi+\frac{rb}{6}\gamma_{\hat{a}}\not{K}_4\xi=0, && (13.118)\\ \delta\psi_i &= \partial_i\xi+\frac{a'}{2b}\gamma_{\hat{i}}\gamma_{\hat{r}}\xi-\frac{a}{12}\gamma_{\hat{i}}\not{K}_4\xi=0, && (13.119)\\ \delta\psi_r &= \partial_r\xi-\frac{b}{12}\gamma_{\hat{r}}\not{K}_4\xi=0. && (13.120)\end{aligned}$$

ξ が (13.116) を満足することを用いて、次の式を得る。

$$b\gamma_{\hat{r}}\not{K}_4:\frac{b'}{b}:\frac{a'}{a}:\frac{s'}{s}=-1:\frac{1}{3}:-\frac{1}{6}:-\frac{1}{12}. \tag{13.121}$$

この式から直ちに、次のように置ける。

$$b\gamma_{\hat{r}}\not{K}_4=-\frac{H'}{H},\quad a=H^{-1/6},\quad b=H^{1/3},\quad s=H^{-1/12}. \tag{13.122}$$

ここで、K_4 のフラックスの保存を用いれば、

$$\gamma_{\hat{r}}\not{K}_4=\frac{N}{\Omega_4r^4b^4} \tag{13.123}$$

が得られる。この式は超対称性 ξ のうち、どの半分が残るかも規定している。この式を (13.122) の最初の式に代入すれば関数 H についての微分方程式を得ることができ、簡単に次の解が得られる。

$$H=1+\frac{N}{3\Omega_4r^3}. \tag{13.124}$$

こうして解は次のようになる。

$$ds^2=H^{-1/3}\eta_{ij}dx^idx^j+H^{2/3}\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{13.125}$$

調和関数 H は次の式により決定される。

$$\Delta H = (2\pi l_p)^3 \delta^5(x^\mu). \tag{13.126}$$

N 枚の M5-ブレーンが重なっている場合、調和関数 H は次のように与えられる。

$$H = 1 + \frac{r_0^3}{r^3}, \quad r_0^3 = \frac{(2\pi l_p)^3 N}{3\Omega_4}. \tag{13.127}$$

M5-ブレーン解の地平面の近傍では $\mathbf{S}^4$ の半径は (13.127) で定義されている半径 r_0 に収束する。従って、地平面近傍でのこの解の様子は 11 次元超重力理論を半径 $\mathbf{S}^4$ コンパクト化して得られる 7 次元超重力理論の解として調べるのがしばしば便利である。半径 r_0 とブレーンの枚数 N との関係は、$\mathbf{S}^n$ コンパクト化の一般公式 (A.152) によっても得ることができる。

13.3.2 M2-ブレーン解

M2-ブレーン解も M5-ブレーンと同様にして求めることができる。M2-ブレーンに平行な座標を y^i、半径座標を r、M2-ブレーンを囲む $\mathbf{S}^7$ 上の座標を θ^a とすれば、計量は次のように置くことができる。

$$ds^2 = a^2(r)\eta_{ij}dy^i dy^j + b^2(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_7^2). \tag{13.128}$$

$\delta\psi_\mu = 0$ を満足する変換パラメータが存在するという条件から、次の 3 つの独立な式を得る。

$$\begin{aligned}
\delta\psi_a &= D_a^{(\omega_0)}\xi + \frac{rb'}{2b}\gamma_{\hat{a}}\gamma_{\hat{r}}\xi - \frac{rb}{12}\gamma_{\hat{a}}\not{K}_4\xi = 0, & (13.129)\\
\delta\psi_i &= \partial_i\xi + \frac{a'}{2b}\gamma_{\hat{i}}\gamma_{\hat{r}}\xi + \frac{a}{6}\gamma_{\hat{i}}\not{K}_4\xi = 0, & (13.130)\\
\delta\psi_r &= \partial_r\xi + \frac{b}{6}\gamma_{\hat{r}}\not{K}_4\xi = 0. & (13.131)
\end{aligned}$$

ξ が $D_a^{(\omega_0)} = \partial_i\xi = 0$ を満足することを用いて、次の式を得る。

$$b\gamma_{\hat{r}}\not{K}_4 : \frac{a'}{a} : \frac{b'}{b} : \frac{s'}{s} = 1 : -\frac{1}{3} : \frac{1}{6} : -\frac{1}{6}. \tag{13.132}$$

この式から直ちに、

$$b\gamma_{\hat{r}}\not{K}_4 = \frac{H'}{H}, \quad a = H^{-1/3}, \quad b = H^{1/6}, \quad s = H^{-1/6}. \tag{13.133}$$

ここで、K_7 のフラックスの保存を用いれば、

$$\gamma_{\hat{r}}\not{K}_4 = -\frac{N}{\Omega_7 r^7 b^7} \tag{13.134}$$

が得られる。これを (13.133) に代入すれば、関数 H に対する微分方程式が得られ、簡単に次の解が得られる。

$$H = 1 + \frac{N}{6\Omega_7 r^6}. \tag{13.135}$$

こうして、解は次のようになる。

$$ds^2 = H^{-2/3}\eta_{ij}dx^i dx^j + H^{1/3}\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{13.136}$$

Soryushiron Kenkyu

調和関数 H は次の式により決定される。

$$\Delta H = (2\pi l_p)^6 \delta^8(x^\mu). \tag{13.137}$$

N 枚の重なった M2-ブレーンの場合には

$$H = 1 + \frac{r_0^6}{r^6}, \quad r_0^6 = \frac{(2\pi l_p)^6 N}{6\Omega_7} \tag{13.138}$$

M2-ブレーン解の地平面の近傍では $\mathbf{S}^7$ の半径は (13.138) で定義されている半径 r_0 に収束する。従って、地平面近傍でのこの解の様子は 11 次元超重力理論を半径 $\mathbf{S}^7$ コンパクト化して得られる 4 次元超重力理論の解として調べるのがしばしば便利である。半径 r_0 とブレーンの枚数 N との関係は、$\mathbf{S}^n$ コンパクト化の一般公式 (A.152) によっても得ることができる。

13.3.3 ド・ジッター時空と反ド・ジッター時空

先ほど得られた M5-ブレーン解は、地平面 $r=0$ の近傍では反ド・ジッター時空の構造を持っていることが知られている。そこでまずド・ジッター (dS) 時空と反ド・ジッター (AdS) 時空について簡単にまとめておこう。

まず dS 空間から考えよう。。$n+1$ 次元 dS 時空 $\mathbf{dS}_{n+1}$ は、平坦な $n+2$ 次元ミンコフスキー時空

$$ds^2 = -(dx^{-1})^2 + (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2. \tag{13.139}$$

にうめこまれた部分多様体として、次のように表す事ができる。

$$-(x^{-1})^2 + (x^0)^2 + (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = R^2. \tag{13.140}$$

dS 空間には、目的に応じていくつかの便利な座標が存在する。

- Spherical slicing

  まず、$(x^0, \ldots, x^n)$ 空間上のベクトルを $r\mathbf{n} = (x^0, \ldots, x^n)$ によって単位ベクトル $\mathbf{n}$ と半径座標 r によって表す。(13.140) より $r^2 - (x^{-1})^2 = R^2$ が成り立つので半径座標 r と時間座標 x^{-1} を角度座標 τ を用いて

  $$x^{-1} = R\sinh\tau, \quad r = R\cosh\tau. \tag{13.141}$$

  と表そう。座標 τ および $\mathbf{n}$ を用いれば、計量は次のように書くことができる。

  $$ds^2 = R^2(-d\tau^2 + \cosh^2\tau d\Omega_n^2) \tag{13.142}$$

  この座標系は断面 $\tau = \mathrm{const}$ が球面であることから spherical slicing と呼ばれる。

- Planar slicing

  $\mathbf{dS}_{n+1}$ 上の $n+1$ 個の座標変数として $t = x^{-1} + x^n$ および $\mathbf{x} = (x^0, \ldots, x^{n-1})$ を採用しよう。補助的な変数 $y = -x^{-1} + x^n$ を導入すれば、 計量は次のように書ける。

  $$ds^2 = dtdy + d\mathbf{x}^2 = -\frac{R^2}{t^2}dt^2 + \left(d\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}}{t}dt\right)^2 \tag{13.143}$$

二つ目の等号では (13.140) より従う $ty = R^2 - \mathbf{x}^2$ を用いた。ここで、$\mathbf{x} = t\mathbf{y}$ により新しい座標 $\mathbf{y}$ を導入すれば、次のような簡単な形になる。

$$ds^2 = -\frac{R^2}{t^2}dt^2 + t^2 d\mathbf{y}^2 \tag{13.144}$$

この座標系は、断面 $t = \text{const}$ が平面であることから planar slicing と呼ばれる。

- Static coordinate

  (13.140) を次のように書いてみよう。

$$-(x^{-1})^2 + (x^0)^2 = R^2 - \mathbf{x}^2. \tag{13.145}$$

ただし $\mathbf{x}$ は n 次元ベクトル $(x^1, \ldots, x^n)$ を表す。これは (x^{-1}, x^0) 平面上の双曲線を表す式である。そこで、次のように置いてみよう。

$$x^{-1} = \sqrt{R^2 - \mathbf{x}^2}\sinh t, \quad x^0 = \sqrt{R^2 - \mathbf{x}^2}\cosh t \tag{13.146}$$

これを (13.139) に代入すれば、次の計量を得る。

$$ds^2 = -(R^2 - r^2)dt^2 + \frac{R^2}{R^2 - r^2}dr^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2. \tag{13.147}$$

ただし、$d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2$ と分解した。この座標は、断面 $t = \text{const}$ の計量が t に依存しないことから、static coordinate もしくは cosmological coordinate と呼ばれる。

次に、AdS 空間について考えよう。$n+1$ 次元 AdS 空間 $\mathbf{AdS}_{n+1}$ は、平坦な $n+2$ 次元空間

$$ds^2 = -(dx^{-1})^2 - (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2. \tag{13.148}$$

にうめこまれた部分多様体として、次のように表す事ができる。

$$-(x^{-1})^2 - (x^0)^2 + (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = -R^2. \tag{13.149}$$

AdS 空間には、目的に応じていくつかの便利な座標が存在する。

- Planar slicing (Poincare coordinate)

  $\mathbf{dS}_{n+1}$ 上の $n+1$ 個の座標変数として $r = x^{-1} + x^n$ および $\mathbf{x} = (x^0, \ldots, x^{n-1})$ を採用しよう。補助的な変数 $y = -x^{-1} + x^n$ を導入すれば、 計量は次のように書ける。

$$ds^2 = drdy + d\mathbf{x}^2 = \frac{R^2}{r^2}dr^2 + \left(d\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}}{r}dr\right)^2 \tag{13.150}$$

二つ目の等号では (13.149) より従う $yr = -R^2 - \mathbf{x}^2$ を用いた。ここで、$\mathbf{x} = r\mathbf{y}$ により新しい座標 $\mathbf{y}$ を導入すれば、次のような簡単な形になる。

$$ds^2 = \frac{R^2}{r^2}dr^2 + r^2 d\mathbf{y}^2 \tag{13.151}$$

この座標系では n 次元のポアンカレ対称性が見やすい形になっている。そのためポアンカレ座標系とも呼ばれる。

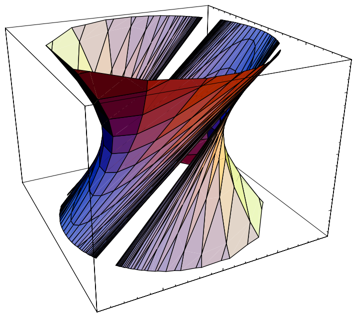

図 13.3: AdS_2 上に取ったポアンカレ座標。図中の縦の線が t 一定、横の線が r 一定の線を表す。斜めに切れている部分は地平面を表しており、この座標系では地平面を超えて一つの座標系を用いることはできない。この図は地平面の両側を表すために二つの座標系を組み合わせている。(`adscoordinate.nb`)

- Static coordinate (global coordinate)

  (13.149) を次のように書いてみよう。

$$(x^{-1})^2 + (x^0)^2 = R^2 + \mathbf{x}^2. \tag{13.152}$$

ただし $\mathbf{x}$ は n 次元ベクトル $(x^1, \ldots, x^n)$ を表す。これは (x^{-1}, x^0) 平面上の円を表す式である。そこで、次のように置いてみよう。

$$x^{-1} = \sqrt{R^2 + r^2}\sin t, \quad x^0 = \sqrt{R^2 + r^2}\cos t \tag{13.153}$$

($r = |\mathbf{x}|$ を導入した。) これを (13.148) に代入すれば、次の計量を得る。

$$ds^2 = -(R^2 + r^2)dt^2 + \frac{R^2}{R^2 + r^2}dr^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2. \tag{13.154}$$

ただし、$d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2$ と分解した。さらに、$r = R\sinh\theta$ によって、座標 r のかわ

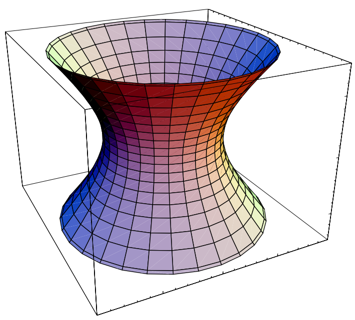

図 13.4: AdS_2 上に取った大域的座標。図中の縦の線が t が一定、横の線が r が一定の線を表している。この図では時間方向が循環しているように見えるが、実際には被覆として定義される。(`adscoordinate.nb`)

りに θ を用いれば、計量は次のように書くことができる。

$$ds^2 = R^2[-\cosh^2\theta dt^2 + d\theta^2 + \sinh^2\theta d\Omega_{n-1}^2]. \tag{13.155}$$

この座標は、AdS 空間全体を張れるという利点がある。

$\mathbf{AdS}_{n+1}$ 空間の対称性（アイソメトリー）について考えてみよう。平坦な $n+2$ 次元空間への埋め込みによる定義から、$\mathbf{AdS}_{n+1}$ は $\mathrm{SO}(n,2)$ の対称性を持っていることが明らかである。この対称性の生成子を J^{MN} と置くことにしよう。$n+2$ 次元空間の直交座標系を用いれば、これは次のように書くことができる。

$$J^{MN} = x^M \eta^{NK} \frac{\partial}{\partial x^K} - x^N \eta^{MK} \frac{\partial}{\partial x^K} \tag{13.156}$$

これらの生成子は次の交換関係を満足する。

$$[J^{MN}, J^{PQ}] = \eta^{NP} J^{MQ} - \eta^{MP} J^{NQ} - \eta^{NQ} J^{MP} + \eta^{MQ} J^{NP}. \tag{13.157}$$

ポアンカレ座標、大域座標それぞれでこれがどのように表示されるかを見ておくのも有益である。まず、ポアンカレ座標での表示を見てみよう。光錐座標 $x^+ = r = x^{-1} + x^n$ と $x^- = y = -x^{-1} + x^n$ を導入すると、上記の生成子は次の 4 種類に分類される。

$$D = \frac{1}{2} J^{+-}, \quad P^\mu = J^{+\mu}, \quad K^\mu = J^{-\mu}, \quad M^{\mu\nu} = J^{\mu\nu}. \tag{13.158}$$

ただし、μ、ν は光錐座標以外の n 個の座標を表す。光錐座標に対する計量が $\eta^{+-} = \eta^{-+} = 2$ であることを用いれば、交換関係 (13.157) は次のように書きかえることができる。まず、$M^{\mu\nu}$ 同士の交換関係は、$M^{\mu\nu}$ が $\mathrm{SO}(1, n-1)$ の生成子であることを意味している。

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho}. \tag{13.159}$$

$M^{\mu\nu}$ とそれ以外の生成子との交換関係は、この $\mathrm{SO}(n-1,1)$ のもとで P^μ と K^μ はベクトル、D はスカラーとして振舞うことを意味している。

$$[M^{\mu\nu}, P^\rho] = \eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu, \quad [M^{\mu\nu}, K^\rho] = \eta^{\nu\rho} K^\mu - \eta^{\mu\rho} K^\nu, \quad [M^{\mu\nu}, D] = 0. \tag{13.160}$$

P^μ 同士、K^μ 同士は可換である。

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad [K^\mu, K^\nu] = 0. \tag{13.161}$$

D とそれ以外の生成子との交換関係は、D による変換に対して $M^{\mu\nu}$ と D がウェイト 0 を、P^μ がウェイト 1 を、そして K^μ がウェイト -1 を持っていることを表している。

$$[D, P^\mu] = P^\mu, \quad [D, K^\mu] = -K^\mu. \tag{13.162}$$

最後に、P^μ と K^μ の間の交換関係は次のようになる。

$$[P^\mu, K^\nu] = -2M^{\mu\nu} - 2\eta^{\mu\nu} D. \tag{13.163}$$

$M^{\mu\nu}$ と P^μ は期待されたとおりポアンカレ群を成している。これら以外に K^μ をコンフォーマル推進、D を拡大変換とみなせば、n 次元ミンコフスキー空間のコンフォーマル代数に一致する。

$n+2$ 次元の直交座標 $(y, r, \mathbf{x})$ から $(R, r, \mathbf{y})$ に移ろう。こうすることによって、演算子を $\mathbf{AdS}_{n+1}$ 上で閉じた形に表現することができる。これらの変数のあいだの関係は

$$R^2 = -ry - \mathbf{x}^2, \quad \mathbf{y} = \frac{1}{r} \mathbf{x}, \tag{13.164}$$

である。新しい変数による変微分を ∂' で表せば、次の式が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial'}{\partial r} - \frac{y}{2R} \frac{\partial'}{\partial R}, \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{1}{r} \frac{\partial'}{\partial y^\mu} - \frac{1}{R} x_\mu \frac{\partial'}{\partial R}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{r}{2R} \frac{\partial'}{\partial R} \tag{13.165}$$

これらを用いて運動量演算子 P^μ を書きなおしてみると、次のように座標 y^μ についての並進演算になっていることがわかる。

$$P^\mu = J^{+\mu} = r\frac{\partial}{\partial x_\mu} - 2x^\mu\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial'}{\partial y_\mu} \tag{13.166}$$

一方、大域座標で考えてみよう。座標 x^{-1} だけを特別視し、点 $x^{-1} = R$ の近傍に対してどのように生成子が作用するかを見ることにより、次のような組に分けることができる。

$$M^{\mu\nu} = J^{\mu\nu}, \quad P^\mu = \frac{1}{R}J^{-1\mu}. \tag{13.167}$$

P^μ の定義中の $1/R$ という因子は $x^{-1} = R$ の近傍で $P^\mu \sim \partial^\mu$ となり、運動量とみなすことができるようにするために導入した。$M^{\mu\nu}$ は $\mathrm{SO}(n,1)$ 部分群をなす。そして P^μ はその部分群に対してベクトルとして振舞う。P^μ 同士の間の交換関係は次のように与えられる。

$$[P^\mu, P^\nu] = \frac{1}{R^2}M^{\mu\nu}, \tag{13.168}$$

AdS 空間の半径 R が大きくなる極限では、P^μ 同士が可換になり $n+1$ 次元のポアンカレ代数に帰着する。

13.3.4 地平面近傍

M5-ブレーンの地平面近傍の様子について見てみよう。ここでいう地平面近傍とは、調和関数 (13.127) 中の定数項が無視できる領域、すなわち $r \ll r_0$ の領域を意味している。この場合、計量 (13.125) は次のように与えられる。

$$ds^2 = \frac{r}{r_0}\eta_{ij}dx^i dx^j + \frac{r_0^2}{r^2}dr^2 + r_0^2 d\Omega_4^2. \tag{13.169}$$

ただし、M5-ブレーンに垂直な座標に対して極座標 $\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dr^2 + r^2 d\Omega_4^2$ を導入した。この多様体は $\mathbf{AdS}_7$ と $\mathbf{S}^4$ の直積である。実際、$r = r'^2/(4r_0)$ という変数変換を行えば、次のようにはじめの二つの項がポアンカレ座標系の $\mathbf{AdS}$ 空間の計量 (13.151) と同じ形になる。

$$ds^2 = \frac{r'^2}{4r_0^2}\eta_{ij}dx^i dx^j + \frac{4r_0^2}{r'^2}dr'^2 + r_0^2 d\Omega_4^2. \tag{13.170}$$

$\mathbf{S}^4$ および $\mathbf{AdS}_7$ の半径を R' および R とおくと、それぞれ $R' = r_0$ および $R = 2r_0$ と与えられる。

この時空の対称性を調べるには、$\mathbf{AdS}_7$ と $\mathbf{S}^4$ がそれぞれ平坦な $\mathbf{R}^8$ や $\mathbf{R}^5$ に埋めこむことができるということを利用するのがよい。この性質のため、$\mathbf{AdS}_7 \times \mathbf{S}^4$ 全体は 13 次元の空間に埋めこむことができる。二つの新しい座標 u と v を導入し、平坦な $\mathbf{R}^{13}$ 上の計量を次のように取ろう。

$$ds_{13}^2 = -du^2 + u^2 ds_7^2 + dv^2 + v^2 ds_4^2. \tag{13.171}$$

ds_7^2 と ds_4^2 はそれぞれ半径が 1 の $\mathbf{AdS}_7$ と $\mathbf{S}_4$ の上の計量を表している。$\mathbf{AdS}_7$ 上の座標を x^μ、$\mathbf{S}^4$ 上の座標を x^α と表す。さらに $x^{\mu'} = (x^\mu, u)$, $x^{\alpha'} = (x^\alpha, v)$ のように、新たに導入した座標まで含めた添え字は $'$ をつけることにする。11 次元時空 $\mathcal{M}_{11}$ は、この空間上で次の式によって定義される部分空間である。

$$u = R, \quad v = R'. \tag{13.172}$$

13 次元空間に張った直交座標を $y^I = \{y^m, y^a\}$ とする。y^m および y^a はそれぞれ $x^{\mu'}$ と $x^{\alpha'}$ で張られる空間の上の直交座標である。

11 次元時空 $\mathcal{M}_{11}$ の対称性は 13 次元空間の回転 SO(11, 2) の部分群であり、$\mathbf{AdS}_7$ の対称性 SO(2, 6) と $\mathbf{S}^4$ の対称性 SO(5) の直積として与えられる。この対称性の生成子は次のように与えることができる。

$$J^{IJ} = y^I \partial^{y^J} - y^J \partial^{y^I}. \tag{13.173}$$

ただし、実際に $\mathcal{M}_{11}$ の対称性を表しているのは部分群 SO(6, 2) × SO(5) であるので、二つの添え字はともに $\mathbf{R}^8$ 方向であるか、ともに $\mathbf{R}^5$ 方向でなければばならない。このように定義した生成子の交換関係は次のように与えられる。

$$[J^{MN}, J^{PQ}] = \eta^{NP} J^{MQ} - \eta^{NQ} J^{MP} - \eta^{MP} J^{NQ} + \eta^{MQ} J^{NP}. \tag{13.174}$$

$\mathcal{M}_{11}$ 上の点 $\mathbf{r}_0 = (R, \mathbf{0}, R', \mathbf{0})$ に注目し、この近傍での様子を見るためには、座標 u, v とそれ以外を別々に取り扱うほうが便利である。生成子は次の 4 種類に分けることができる。

$$P^\mu = \frac{1}{R} J^{u\mu}, \quad P^\alpha = \frac{1}{R'} J^{v\alpha}, \quad M^{\mu\nu} = J^{\mu\nu}, \quad M^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta}. \tag{13.175}$$

$M^{\mu\nu}$ と $M^{\alpha\beta}$ はベクトル $\mathbf{r}_0$ を動かさない回転を生成する生成子であり、P^μ および P^α は点 $\mathbf{r}_0$ を動かす平行移動に相当する生成子である。しかし通常の平行移動とは異なり、P^μ 同士や P^α 同士は可換ではない。

$$[P^\mu, P^\nu] = \frac{1}{R^2} J^{\mu\nu}, \quad [P^\alpha, P^\beta] = -\frac{1}{R'^2} J^{\alpha\beta}. \tag{13.176}$$

これは背景の時空が曲がっているからにほかならない。背景が平坦になる $R, R' \to \infty$ の極限ではこれらの運動量は互いに可換になり、11 次元ポアンカレ代数に帰着する。

次に、$\mathcal{M}_{11}$ 上の大域的超対称性について考えてみよう。以前にも説明したように、大域的超対称性はグラビティーノの変換が 0 になるような特殊な局所的超対称変換として定義される。これは変換パラメータに対する次のキリングスピノル方程式で表される。

$$\delta\psi_\mu = D_\mu \xi - \frac{1}{4r_0} \gamma_\mu \gamma^{\widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_2 \widehat{\theta}_3 \widehat{\theta}_4} \xi = 0, \tag{13.177}$$

$$\delta\psi_\alpha = D_\alpha \xi + \frac{1}{2r_0} \gamma_\alpha \gamma^{\widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_2 \widehat{\theta}_3 \widehat{\theta}_4} \xi = 0. \tag{13.178}$$

この式も、上で定義した 13 次元の平坦な空間を用いることで簡単に解くことができる。その準備として次の行列を定義しておこう。

$$\gamma_{\mathbf{S}^4} = \gamma^{\widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_2 \widehat{\theta}_3 \widehat{\theta}_4}. \tag{13.179}$$

この行列は次の性質を満足する。

$$\gamma_{\mathbf{S}^4}^2 = 1, \quad \gamma_{\mathbf{S}^4} \gamma^\mu = \gamma^\mu \gamma_{\mathbf{S}^4}, \quad \gamma_{\mathbf{S}^4} \gamma^a = -\gamma^a \gamma_{\mathbf{S}^4}^2. \tag{13.180}$$

さらに、次のスピノルを定義する。

$$\xi' = \gamma_{\mathbf{S}^4} \xi. \tag{13.181}$$

このスピノルを用いれば、キリングスピノル方程式は次のように書きかえることができる。まず、$\mathbf{AdS}_7$ 方向の添え字をもつ一つ目の方程式は

$$D_\mu \xi - \frac{1}{4r_0} \gamma_\mu \xi' = 0, \quad D_\mu \xi' - \frac{1}{4r_0} \gamma_\mu \xi = 0. \tag{13.182}$$

この二つの式は互いに等価であり、左から $\gamma_{\mathbf{S}^4}$ を掛ける事で移り合う。同様に、$\mathbf{S}^4$ 方向の添え字を持つ二つ目の方程式からも次の二つの等価な式を得ることができる。

$$D_\alpha\xi + \frac{1}{2r_0}\gamma_\alpha\xi' = 0, \quad D_\alpha\xi' - \frac{1}{2r_0}\gamma_\alpha\xi = 0. \tag{13.183}$$

実は ξ と ξ' を 13 次元 64 成分スピノルの成分とみなすことで、これらの式は簡単に解くことができる。13 次元の γ-行列を次のように定義しよう。

$$\widetilde{\gamma}^u = i\sigma_y \otimes \mathbf{1}_{32}, \quad \widetilde{\gamma}^\mu = \sigma_z \otimes \gamma^\mu, \quad \widetilde{\gamma}^v = \sigma_x \otimes \mathbf{1}_{32}, \quad \widetilde{\gamma}^\alpha = \sigma_z \otimes \gamma^\alpha. \tag{13.184}$$

13 次元のスピノル

$(d_+, d_-) = (11, 2)$ の 13 次元空間でのスピノルと γ 行列について簡単にまとめておこう。まず、11 次元の γ 行列との関係を次のように設定する。（ここでは本文中に区別していた α と μ をまとめて μ で表した。）

$$\widetilde{\gamma}^u = i\sigma_y \otimes \mathbf{1}_{32}, \quad \widetilde{\gamma}^v = \sigma_x \otimes \mathbf{1}_{32}, \quad \widetilde{\gamma}^\mu = \sigma_z \otimes \gamma^\mu. \tag{13.185}$$

荷電共役行列は次のように定義される。

$$\widetilde{C} = \sigma_x \otimes C \tag{13.186}$$

ディラックスピノルは次のように定義する。

$$\overline{\widetilde{\psi}} = i\widetilde{\psi}^\dagger(\sigma_x \otimes \gamma^0) \tag{13.187}$$

このように定義しておくと、11 次元のマヨラナスピノルを縦に二つ並べたものは 13 次元の意味でも次の式を満足するマヨラナスピノルである。

$$\widetilde{\psi} = \widetilde{C}\overline{\widetilde{\psi}}^T \tag{13.188}$$

座標 (13.171) で、多脚場を対角的に取ることにし、そこで定義されたスピン接続を $\widetilde{\omega}$ とおこう。これは次の成分を持つ。

$$\widetilde{\omega}_{\mu-\widehat{\nu}\widehat{\rho}} = \omega_{\mu-\widehat{\nu}\widehat{\rho}}, \quad \widetilde{\omega}_{\mu-\widehat{\nu}\widehat{u}} = \frac{1}{u}e_{\mu\widehat{\nu}}, \quad \widetilde{\omega}_{\alpha-\widehat{\beta}\widehat{\gamma}} = \omega_{\alpha-\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}, \quad \widetilde{\omega}_{\alpha-\widehat{\beta}\widehat{v}} = \frac{1}{v}e_{\alpha\widehat{\beta}}. \tag{13.189}$$

従って、13 次元での共変微分と 11 次元の共変微分の間には次の関係が成り立つ。

$$\widetilde{D}_\mu = D_\mu + \frac{1}{2u}\widetilde{\gamma}_\mu\widetilde{\gamma}^{\widehat{u}}, \quad \widetilde{D}_\alpha = D_\alpha + \frac{1}{2v}\widetilde{\gamma}_\alpha\widetilde{\gamma}^{\widehat{v}}. \tag{13.190}$$

さらに、13 次元のスピノル $\widetilde{\xi} = (\xi, \xi')^T$ を定義すると、キリングスピノル方程式は次の方程式の組と等価であることがわかる。

$$\widetilde{D}_\mu\widetilde{\xi} = \widetilde{D}_\alpha\widetilde{\xi} = 0, \tag{13.191}$$

$$\widetilde{\gamma}_{\mathbf{R}^5}\widetilde{\xi} = \widetilde{\xi}, \quad \widetilde{\gamma}_{\mathbf{R}^5} \equiv \widetilde{\gamma}^{\widehat{v}\widehat{\theta}_1\widehat{\theta}_2\widehat{\theta}_3\widehat{\theta}_4}. \tag{13.192}$$

二つ目の条件は、$\widetilde{\xi}$ の定義から従う。一つ目の条件は $\widetilde{\xi}$ は $\mathbf{R}^{13}$ 上では単なる定数スピノルであることを意味している。すなわち、$\mathcal{M}_{11}$ 上のキリングスピノルを得るには、13 次元空間で (13.192) を満足する定数スピノル $\widetilde{\xi}$ を与え、座標変換によってその曲線座標系 (13.171) 、すなわち $\gamma^{\widehat{u}\widehat{v}}$ が

対角化されるような座標系での成分を決定し、その値から $\tilde{\xi}$ と ξ の関係を通して ξ を読み取ればよい。点 $\mathbf{r}_0$ においては、直交座標 y^I による局所座標系と曲線座標 x^I による局所座標系が一致する。従って、その点では $\tilde{\xi}(x)=\tilde{\xi}(y)$ である。一般には $\tilde{\xi}(x)=M(x)\tilde{\xi}(y)$ のように、座標 x に依存した局所ローレンツ変換 $M(x)$ を行うことによって $\tilde{\xi}(x)$ を得ることができる。

得られた大域的超対称性とそのほかのアイソメトリーによって生成される超対称代数を調べよう。$\mathcal{M}_{11}$ 上の超対称変換のパラメータとして $\tilde{\xi}(x)=M(x)\tilde{\xi}_0$ を用いることにしよう。$\tilde{\xi}_0$ は座標 y^I に対して定義されたスピノルであり、定数である。$M(x)$ は座標 y によって与えられたスピノルを座標 x の局所ローレンツ系のスピノルへと変換する回転行列であり、場所に依存する。従って $\tilde{\xi}(x)$ も場所に依存するスピノル場である。変換パラメータ $\tilde{\xi}_0$ による無限小変換に対応する生成子を $i\xi_0 Q=(i/2)\tilde{\xi}_0\tilde{Q}$ とする。ただし、64 成分のスピノル電荷 $\tilde{Q}$ は y^I 座標におけるスピノルとして定義されている。

このことから、J^{MN} と Q との間の交換関係が決まる。すなわち、J^{MN} による回転のもとで $\tilde{Q}$ はスピノルとして変換される。

$$[J^{MN},\tilde{Q}]=\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{MN}\tilde{Q}. \tag{13.193}$$

超対称変換同士の交換関係は、任意の局所的な変換に対して成り立つ交換関係 (**??**) を用いると、次のようになる。

$$[i\tilde{\xi}_1^0\tilde{Q},i\tilde{\xi}_2^0\tilde{Q}]=4[\delta_{\xi_2},\delta_{\xi_1}]=(\xi_1\gamma^\mu\xi_2)\partial_\mu+(\xi_1\gamma^\alpha\xi_2)\partial_\alpha=\frac{1}{2}(\tilde{\xi}_1\tilde{\gamma}^{\mu u}\tilde{\xi}_2)\partial_\mu+\frac{1}{2}(\tilde{\xi}_1\tilde{\gamma}^{\alpha v}\tilde{\xi}_2)\partial_\alpha \tag{13.194}$$

ただし、ξ は $\tilde{\xi}_0$ に対して $M(x)$ による局所ローレンツ変換を行い得られた $\tilde{\xi}$ から $\tilde{\gamma}^{\widehat{uv}}=+1$ 部分を取り出したものである。一般座標変換の生成子としてスカラー場に対する表現 $\delta_\epsilon=-\epsilon\cdot\partial$ を用いた。最後の変形では、11 次元スピノルと 13 次元スピノルの間に次の式が成り立つことを用いた。

$$\xi_1\gamma^\mu\xi_2=\frac{1}{2}\tilde{\xi}_1\tilde{\gamma}^{\mu u}\tilde{\xi}_2,\quad \xi_1\gamma^\alpha\xi_2=\frac{1}{2}\tilde{\xi}_1\tilde{\gamma}^{\alpha v}\tilde{\xi}_2. \tag{13.195}$$

さらに、われわれは 13 次元空間上での超対称変換を考えているわけではなく、$\mathcal{M}_{11}$ の上での変換の代数を考えているのであるから、常に (13.172) を用いて変形することができる。こうして次の式を得る。

$$[i\tilde{\xi}_1^0\tilde{Q},i\tilde{\xi}_2^0\tilde{Q}]=-\frac{1}{2R}(\tilde{\xi}_1\tilde{\gamma}^{u\mu}\tilde{\xi}_2)u\partial_\mu-\frac{1}{2R'}(\tilde{\xi}_1\tilde{\gamma}^{v\alpha}\tilde{\xi}_2)v\partial_\alpha \tag{13.196}$$

右辺の $u\partial_\mu$ や $v\partial_\alpha$ という演算子が $\mathbf{R}^{13}$ 上の回転の生成子であることに気付けば、これが直交座標系 y^I では次のように与えられることがわかる。

$$[i\tilde{\xi}_1^0\tilde{Q},i\tilde{\xi}_2^0\tilde{Q}]=-\frac{1}{4R}(\tilde{\xi}_1^0\tilde{\gamma}^{mn}\tilde{\xi}_2^0)J_{mn}-\frac{1}{4R'}(\tilde{\xi}_1^0\tilde{\gamma}^{ab}\tilde{\xi}_2^0)J_{ab} \tag{13.197}$$

以上の結果をまとめると、$\mathbf{AdS}_7\times\mathbf{S}^4$ 上の超対称変換代数は次のようになる。

$\mathbf{AdS}_7\times\mathbf{S}^4$ 上の超対称変換代数

$$[J^{MN},J^{PQ}] = \eta^{NP}J^{MQ}-\eta^{NQ}J^{MP}-\eta^{MP}J^{NQ}+\eta^{MQ}J^{NP}, \tag{13.198}$$

$$[J^{MN},\tilde{Q}] = -\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{MN}\tilde{Q}, \tag{13.199}$$

$$\{\tilde{Q},\tilde{Q}\} = \frac{1}{4R}\tilde{\gamma}^{mn}J_{mn}+\frac{1}{4R'}\tilde{\gamma}^{ab}J_{ab}. \tag{13.200}$$

ただし J^{MN} は $\mathbf{R}^5$ と $\mathbf{R}^8$ の添え字を同時に持つことはできないということと、$\tilde{Q}$ は $\tilde{\gamma}_{\mathbf{R}^5}\tilde{Q}=\tilde{Q}$ を満足することに注意しなければならない。

この代数を、M5-ブレーンがもともと持っていたポアンカレ対称性が明白になるように書きなおしておくのも有益であろう。その場合、まず γ 行列を次のように分解しよう。

$$\widetilde{\gamma}^{-1} = i\sigma_y \otimes \mathbf{1}_8 \otimes \mathbf{1}_4, \quad \widetilde{\gamma}^{\mu} = \sigma_z \otimes \gamma^{\mu} \otimes \mathbf{1}_4, \quad \widetilde{\gamma}^{6} = \sigma_x \otimes \mathbf{1}_8 \otimes \mathbf{1}_4, \quad \widetilde{\gamma}^{a} = \sigma_z \otimes \gamma^{7} \otimes \gamma^{a}. \tag{13.201}$$

$$\widetilde{\gamma}_{\mathbf{R}^5} = \sigma_z \otimes \gamma^7 \otimes \mathbf{1}_4, \quad \widetilde{\gamma}^{\pm} = 2\sigma_{\pm} \otimes \mathbf{1}_8 \otimes \mathbf{1}_4, \quad \widetilde{\gamma}^{+-} = 2\sigma_z \otimes \mathbf{1}_8 \otimes \mathbf{1}_4. \tag{13.202}$$

ただし、$\sigma_{\pm}$ はスピンの上げ下げを行う行列で、次のように定義される。

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.203}$$

さらに、13 次元の荷電共役行列は、

$$\widetilde{C} = \sigma_x \otimes C_7 \otimes C_5. \tag{13.204}$$

γ 行列のこの表示において条件を満足する超対称電荷は次のように表すことができる。

$$\widetilde{Q} = \frac{1}{\sqrt{2R}} \begin{pmatrix} Q_L \\ Q_R \end{pmatrix}. \tag{13.205}$$

ただし、Q_L および Q_R はそれぞれ γ^7 の固有値 $+1$ および -1 を持つ 6 次元ワイルスピノルであると同時に $\mathrm{Sp}(2) = \mathrm{SO}(5)$ のスピノル表現にも属している。二つのスピノル表現はどちらも実負であるから、テンソル積表現は実正であり、Q_L と Q_R はこの意味でシンプレクティックマヨラナワイルスピノルである。

次に J^{mn} を §13.3.3 で行ったように光錐座標 $x^{\pm} = \pm x^{-1} + x^6$ を導入し、SO$(2,6)$ の生成子を次のように分解する。

$$M^{\mu\nu} = J^{\mu\nu}, \quad P^{\mu} = J^{+\mu}, \quad K^{\mu} = J^{-\mu}, \quad D = \frac{1}{2}J^{+-}, \quad A^{ab} = J^{ab}. \tag{13.206}$$

$M^{\mu\nu}$ および A^{ab} のもとでの超対称電荷の変換性は明らかであろう。すなわち SO$(5,1)$ および SO(5) のスピノルとして変換される。自明でないのは、P^{μ}、K^{μ}、D との交換関係である。まず、D との交換関係をみてみると、Q_L と Q_R がウェイト $-1/2$ と $1/2$ を持っていることがわかる。

$$[D, Q_L] = -\frac{1}{2}Q_L, \quad [D, Q_R] = \frac{1}{2}Q_R. \tag{13.207}$$

ビアンキ恒等式を用いればこのように決定されたウェイトは加法的に保存されることが示される。

$$[P^{\mu}, Q_L] = \gamma^{\mu} Q_R, \quad [P^{\mu}, Q_R] = 0, \quad [K^{\mu}, Q_L] = 0, \quad [K^{\mu}, Q_R] = -\gamma^{\mu} Q_L. \tag{13.208}$$

Q_R は P^{μ} と可換であり、M5-ブレーン上の大域的超対称性に対応している。Q_L は超コンフォーマル変換の生成子でしばしば S と書かれる。

超対称電荷同士の交換関係を見てみよう。カイラリティが同じものについては次のようになる。

$$\{Q_L, Q_L\} = -\gamma^{\mu} K_{\mu}, \quad \{Q_R, Q_R\} = \gamma^{\mu} P_{\mu}. \tag{13.209}$$

さらに異なるカイラリティの超対称電荷については次の交換関係を得る。

$$\begin{aligned} \{Q_L, Q_R\} &= \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + iD + \frac{R}{2R'}\gamma^{ab} A_{ab}, & (13.210) \\ \{Q_R, Q_L\} &= \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu} M_{\mu\nu} - iD + \frac{R}{2R'}\gamma^{ab} A_{ab}. & (13.211) \end{aligned}$$

この二つの式は等価であり、互いに転置の関係にある。M5-ブレーン解の場合は、二つの半径 R と R' の比は $R/R'=2$ と与えられている。

以上のような考察は M2-ブレーンの地平面近傍でも行うことができ、$\mathbf{AdS}_4\times\mathbf{S}^7$ 上の超対称代数を得ることができるが、ここでは省略する。

13.3.5 PP-波

M-ブレーンや D3-ブレーンの地平面近傍では、時空の構造が $AdS_m\times S^n$ になる。AdS_m と S^n のそれぞれの半径を R および R' としよう。アインシュタイン方程式はこれらの半径の比がある一定の値になることを要求する。従って自由なパラメータは R と R' のうちの一つだけである。それらの半径をともに無限大に持っていくような極限を取れば、平坦なミンコフスキー時空に帰着する。しかし半径を大きくする極限と同時に観測者を加速し、ローレンツ収縮をさせることで背景時空がある一定の曲率を持った $AdS_m\times S^n$ とは違ったより簡単な時空へと変形することができる。このような極限をペンローズ極限と呼び、ペンローズ極限を取ることによって得られる時空を PP-波と呼ぶ。

実際にペンローズ極限を取ることによって PP-波解を求めよう。まず、大域的座標で $AdS_m\times S^n$ の計量を次のように書く。

$$ds^2=R^2\Big(-\cosh^2\varphi d\tau^2+d\varphi^2+\sinh^2\varphi d\Omega_{m-2}^2\Big)+R'^2\Big(\cos^2\theta d\phi^2+d\theta^2+\sin^2\theta d\Omega_{n-2}^2\Big) \quad (13.212)$$

R および R' が大きい極限を考えるには、これらを無限大にとる極限でそのまま平坦なミンコフスキー時空に帰着するような座標を用いるのが便利である。そのために変数を次のようにリスケールする。

$$t=R\tau,\quad \rho=R\varphi,\quad z=R'\phi,\quad r=R'\theta. \quad (13.213)$$

$\rho\ll R$、$r\ll R'$ として展開することにより、次のような計量を得る。

$$\begin{aligned}ds^2 &= \Big(-\cosh^2\frac{\rho}{R}d\tau^2+d\rho^2+R^2\sinh^2\frac{\rho}{R}d\Omega_{m-2}^2\Big)\\ &\quad +\Big(\cos^2\frac{r}{R'}dz^2+dr^2+R'^2\sin^2\frac{r}{R'}d\Omega_{n-2}^2\Big)\\ &= -d\tau^2+dz^2+d\rho^2+\rho^2d\Omega_{m-2}^2+dr^2+r^2d\Omega_{n-2}^2\\ &\quad -\frac{\rho^2}{R^2}d\tau^2-\frac{r^2}{R'^2}dz^2+\frac{\rho^4}{3R^2}d\Omega_{m-2}^2-\frac{r^4}{3R'^2}d\Omega_{n-2}^2+\mathcal{O}(R^{-4}). \end{aligned} \quad (13.214)$$

最後の表式の 1 行目は R や R' を含まない項であり、平坦なミンコフスキー時空の計量に他ならない。R と R' が大きくなる極限ではこの部分のみが残る。

ここで、次のように光錐座標を導入しよう。

$$x^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(t\pm z). \quad (13.215)$$

すると、先ほどの計量は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}ds^2 &= -2dx^+dx^-+d\rho^2+\rho^2d\Omega_{m-2}^2+dr^2+r^2d\Omega_{n-2}^2\\ &\quad -\frac{1}{2}\Big(\frac{\rho^2}{R^2}+\frac{r^2}{R'^2}\Big)[(x^+)^2+(x^-)^2]-\Big(\frac{\rho^2}{R^2}-\frac{r^2}{R'^2}\Big)(x^+x^-)+\frac{\rho^4}{3R^2}d\Omega_{m-2}^2-\frac{r^4}{3R'^2}d\Omega_{n-2}^2\\ &\quad +\mathcal{O}(R^{-4}). \end{aligned} \quad (13.216)$$

観測者が z 方向に運動すると、ローレンツ収縮によって長さが縮み、時間は延びる。これは、光錐座標に対する次のリスケールで表すことができる。

$$x^+ = \Omega X^+, \quad x^- = \frac{1}{\Omega} X^-. \tag{13.217}$$

大きくブーストすればするほど Ω の値は大きくなる。ペンローズ極限は R および R' と Ω の比が一定になるようにしながらそれら全てを無限大にする極限をとることによって実現される。この極限において、計量は次のようになる。

PP-波の計量

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2dX^+dX^- + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{m-2}^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_{n-2}^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}\Big(\mu^2\rho^2 + \mu'^2 r^2\Big)(X^+)^2. \end{aligned} \tag{13.218}$$

ここで、質量次元をもつパラメータ μ と μ' を次のように定義した。

$$\mu = \frac{\Omega}{R}, \quad \mu' = \frac{\Omega}{R'}. \tag{13.219}$$

R と R' の比は固定されているから、μ と μ' の比も一定であるが、これら両方のパラメータの値そのものはローレンツ変換によって好きな値に取る事ができる。

計量を求めたついでに PP-波解のアイソメトリーを表す代数も求めておこう。これも $AdS_m \times S^n$ の代数からペンローズ極限を取ることによって得ることができる。[28] AdS_m の対称性は SO$(m-1,2)$、S^n の対称性は SO$(n+1)$ である。これらの生成子をそれぞれ J^{MN} および J^{AB} としよう。ただしここでは実な表現を用いることにする。すなわち、これらは具体的に次のように与えられるものであるとする。

$$J^{MN} = x^M\partial^N - x^N\partial^M, \quad J^{AB} = x^A\partial^B - x^B\partial^A. \tag{13.220}$$

R や R' が大きいところでポアンカレ群に帰着するように、次のようにおく。

$$P^\mu = \frac{1}{R}J^{u\mu}, \quad P^\alpha = \frac{1}{R'}J^{v\alpha}. \tag{13.221}$$

R や R' が大きい極限ではこれらの生成子は $P^\mu \sim \partial^\mu$、$P^\alpha \sim \partial^\alpha$ となる。さらに、光錐座標を定義するために、t 方向と z 方向を $\mu = (t, i)$, $\alpha = (z, a)$ のように分離しよう。そして光錐方向の運動量を次のように定義しよう。

$$P^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(P^t \pm P^z). \tag{13.222}$$

ローレンツブーストは、次のリスケールに対応している。

$$P^+ = \Omega\widehat{P}^+, \quad P^- = \frac{1}{\Omega}\widehat{P}^-, \quad J^{ti} = \Omega\widehat{J}^{ti}, \quad J^{za} = \Omega\widehat{J}^{za}. \tag{13.223}$$

新しく定義された生成子同士の交換関係を計算し、R、R'、Ω の比を保ったまま全てを無限大に持っていくと、次の交換関係が得られる。

Soryushiron Kenkyu

PP-波の対称性

$$[P^-, P^i] = \frac{1}{\sqrt{2}}\mu^2 P^{*i}, \quad [P^-, P^\alpha] = \frac{1}{\sqrt{2}}\mu'^2 P^{*\alpha}, \tag{13.224}$$

$$[P^-, P^{*i}] = -\frac{1}{\sqrt{2}}P^i, \quad [P^-, P^{*\alpha}] = -\frac{1}{\sqrt{2}}P^\alpha, \tag{13.225}$$

$$[P^i, P^{*j}] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\delta^{ij}P^+, \quad [P^\alpha, P^{*\beta}] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\delta^{\alpha\beta}P^+. \tag{13.226}$$

ただし $P^{*i} = J^{ti}$ および $P^{*a} = J^{\phi a}$ を導入した。

超対称性も含めた超対称代数も同様にして決定することができる。ボゾン的な生成子と同様に超対称電荷もリスケールする必要がある。どのようにリスケールすればよいかを見るために、反交換関係 (13.200) の右辺がどのようにリスケールされるかを見てみよう。まず、J^{MN} をリスケールされた生成子で書くと次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{R}J^{ut} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Omega\widehat{P}^+ + \frac{1}{\Omega}\widehat{P}^-\right), \quad \frac{1}{R}J^{ui} = P^i, \quad \frac{1}{R}J^{ti} = \frac{\Omega}{R}P^{*i}, \quad \frac{1}{R}J^{ij}, \\
&\frac{1}{R'}J^{v\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Omega\widehat{P}^+ - \frac{1}{\Omega}\widehat{P}^-\right), \quad \frac{1}{R'}J^{va} = P^a, \quad \frac{1}{R'}J^{za} = \frac{\Omega}{R'}P^{*a}, \quad \frac{1}{R'}J^{ab}
\end{aligned} \tag{13.227}$$

$\widetilde{\gamma}^{MN}$ については、γ^{uvtz} が対角化されるような表示を用いるのが便利である. 対角成分のうち左上の半分が $+1$、右上の半分が -1 であるとしよう。この場合、上半分の成分だけが 0 ではないスピノルに対しては $\widetilde{\gamma}^{ut} = \widetilde{\gamma}^{vz}$ であり、下半分だけが 0 ではないスピノルに対しては $\widetilde{\gamma}^{ut} = -\widetilde{\gamma}^{vz}$ であることなどを考慮すれば、R、R'、Ω を同時に大きくする極限で次のように振舞うことがわかる。

$$-\frac{i}{4R}\widetilde{\gamma}_{mn}J^{mn} - \frac{i}{4R'}\widetilde{\gamma}_{ab}J^{ab} \sim \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\Omega) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\Omega^{-1}) \end{pmatrix}. \tag{13.228}$$

従って、極限が定義できるためには超対称電荷を次のようにリスケールすべきである。

$$\begin{pmatrix} Q^+ \\ Q^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega^{1/2}\widehat{Q}^+ \\ \Omega^{-1/2}\widehat{Q}^- \end{pmatrix}. \tag{13.229}$$

この結果、Ω が大きくなる極限で次の代数が得られる。

Soryushiron Kenkyu

PP-波上の超対称代数

PP-波上の超対称代数は以下のようになる。まず、運動量演算子と超対称電荷の交換関係は次のように与えられる。

$$[\hat{P}^+, \hat{Q}^\pm] = [P^i, \hat{Q}^+] = [P^{*i}, \hat{Q}^+] = [P^a, \hat{Q}^+] = [P^{*a}, \hat{Q}^+] = 0 \tag{13.230}$$

$$[\hat{P}^-, \hat{Q}^\pm] = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\mu\gamma^{ut} - \mu'\gamma^{v\phi})\hat{Q}^\pm, \tag{13.231}$$

$$[P^i, \hat{Q}^-] = -\frac{\mu}{2}\gamma^{ui}\hat{Q}^+, \quad [P^{*i}, \hat{Q}^-] = -\frac{1}{2}\gamma^{ti}\hat{Q}^+, \tag{13.232}$$

$$[P^a, \hat{Q}^-] = -\frac{\mu'}{2}\gamma^{va}\hat{Q}^+, \quad [P^{*a}, \hat{Q}^-] = -\frac{1}{2}\gamma^{za}\hat{Q}^+. \tag{13.233}$$

超対称電荷同士の交換関係は、

$$\{\hat{Q}^+, \hat{Q}^+\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\tilde{\gamma}^{ut} + \tilde{\gamma}^{v\phi})\hat{P}^+, \tag{13.234}$$

$$\{\hat{Q}^-, \hat{Q}^-\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\tilde{\gamma}^{ut} - \tilde{\gamma}^{v\phi})\hat{P}^- + \frac{1}{4}\mu J_{ij}\tilde{\gamma}^{ij} + \frac{1}{4}\mu' J_{ab}\tilde{\gamma}^{ab}, \tag{13.235}$$

$$\left.\begin{array}{l}\{\hat{Q}^+, \hat{Q}^-\} \\ \{\hat{Q}^-, \hat{Q}^+\}\end{array}\right\} = \frac{1}{2}P^i\tilde{\gamma}_{ui} + \frac{1}{2}\mu P^{*i}\tilde{\gamma}_{ti} + \frac{1}{2}P^a\tilde{\gamma}_{va} + \frac{1}{2}\mu' P^{*a}\tilde{\gamma}_{za}. \tag{13.236}$$

回転に対しては超対称電荷はスピノルとして変換される。すなわち

$$[J^{ij}, \hat{Q}^\pm] = -\frac{1}{2}\gamma^{ij}\hat{Q}^\pm, \quad [J^{ab}, \hat{Q}^\pm] = -\frac{1}{2}\gamma^{ab}\hat{Q}^\pm. \tag{13.237}$$

ただし、それぞれの式は 13 次元のスピノルを二分割または γ 行列を 4 分割したうちの一つのブロックを取り出したものとして解釈しなければならない。例えば、最後の式は右辺が $\{\hat{Q}^+, \hat{Q}^-\}$ の場合には右上の、$\{\hat{Q}^-, \hat{Q}^+\}$ の場合には左下のブロックを取り出したものと解釈しなければならない。

第14章　超場形式による11次元超重力理論

以下では §4.1 で述べられていることを用いています。

14.1　超場と成分場の関係

14.1.1　超場への成分場の埋め込み

11 次元超重力理論は、物理的な自由度として多脚場 $e_\mu{}^{\widehat{m}}$、グラビティーノ $\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}$、3 階反対称場 $A_{\mu\nu\rho}$ を含む。これらがどのように超場に埋め込まれるかを見ておこう。

まず、多脚場 $e_\mu{}^{\widehat{m}}$ とグラビティーノ $\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}$ については、§4.1 で述べたことがそのまま成り立つ。例えば、§4.1 ではこれらの場の超対称変換が (4.89) で与えられることを仮定したが、11 次元超重力理論においてもこれは成り立つ。ただし K_μ は次のように定義される。

$$K_\mu = \frac{1}{24}\gamma_\mu \not{K}_4 - \frac{1}{8}\not{K}_4\gamma_\mu + \mathcal{O}(\psi^2). \tag{14.1}$$

さらに K_μ は (4.117) を満足する必要があるが、これも成り立つことが以下のように示される。K_ν に左から γ-行列を掛けると、

$$\gamma_\mu K_\nu = \frac{1}{24}\gamma_\mu\gamma_\nu \not{K}_4 - \frac{1}{8}\gamma_\mu\not{K}_4\gamma_\nu + \mathcal{O}(\psi^2). \tag{14.2}$$

ここで μ と ν について対称化すれば、どちらも 4 階の γ-行列部分が残る。一方スピノル添字の対称化は 4 階部分を落とす。したがって (4.117) が成り立つ。

以上のことから、11 次元超重力理論においても §4.1 で述べたことがそのまま成り立つ。

成分表示での多脚場、グラビティーノ、スピン接続は超空間上の多脚場、スピン接続に次のように埋め込まれている。

$$E_\mu{}^{\widehat{m}}|_{\theta=0} = e_\mu{}^{\widehat{m}}, \quad E_\mu{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} = \psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}, \quad \Omega_\mu{}^{\widehat{m}\widehat{n}}|_{\theta=0} = \omega_\mu{}^{\widehat{m}\widehat{n}}, \tag{14.3}$$

超空間上の多脚場にはこれら以外にも成分 $E_\alpha{}^{\widehat{A}}$ があるが、これらには対応する物理的な場が存在しない。実はこの成分はゲージ変換によって適当な値に固定することができる。ここでは次のようにゲージ固定条件を次のようにとることにする。

$$E_\alpha{}^{\widehat{m}}|_{\theta=0} = 0, \quad E_\alpha{}^{\widehat{\beta}}|_{\theta=0} = \delta_\alpha{}^{\widehat{\beta}}, \quad \Omega_\alpha{}^{\widehat{m}\widehat{n}}|_{\theta=0} = 0. \tag{14.4}$$

11 次元の超重力理論では、これらの場以外に 3 階反対称テンソル場が存在している。そこで超場形式においても、超空間上の 3 階反対称テンソル場 A_{MNP} および対応する場の強さ

$$\begin{aligned} K_{MNPQ} \quad &= \quad \partial_M A_{NPQ} - (-)^{M(N+P+Q)}\partial_N A_{PQM} \\ &\quad +(-)^{(M+N)(P+Q)}\partial_P A_{QMN} - (-)^{(M+N+P)Q}\partial_Q A_{MNP}, \end{aligned} \tag{14.5}$$

を導入する。この場と x 空間上の場の関係は、次のように与えられる。

$$A_{\mu\nu\rho}(x^\mu) = A_{\mu\nu\rho}(x^\mu,\theta^\alpha)|_{\theta=0}, \quad K_{\mu\nu\rho\sigma}(x^\mu) = K_{\mu\nu\rho\sigma}(x^\mu,\theta^\alpha)|_{\theta=0}. \tag{14.6}$$

14.1.2 反対称テンソル場の超共変化

成分形式での 3 階反対称テンソル場の超対称変換の知識を用いて §4.2.2 で与えた方法で場の強さ K_4 およびその双対場 K_7 の超共変化を決定しよう。

A_3 の変換則 (13.15) を用いて場の強さ K_4 の超対称変換を計算すると、次のようになる。

$$\delta K_{\mu\nu\rho\sigma} = -3[\partial_\mu(\psi_\nu\gamma_{\rho\sigma}\xi)]_{[\mu\nu\rho\sigma]} + \mathcal{O}(\xi\psi^3) \tag{14.7}$$

この右辺にある微分が ξ に作用する項を打ち消すために ψ^2 項を加えれば、K_4 の超共変化 $\widetilde{K}_4$ が得られる。

$$K^{\mathrm{cov}}_{\mu\nu\rho\sigma} = K_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{3}{2}[(\psi_\mu\gamma_{\nu\rho}\psi_\sigma)]_{[\mu\nu\rho\sigma]} + \mathcal{O}(\psi^4) \tag{14.8}$$

双対場 K_7 の超共変化も同様に行うことができる。K_4 と K_7 の超共変化を微分形式の形で表すと次のようになる。

$$K^{\mathrm{cov}}_4 = K_4 - \frac{1}{8}\psi_\mu\langle\gamma^\mu\gamma_4\gamma^\nu\rangle_2\psi_\nu + \mathcal{O}(\psi^4), \tag{14.9}$$

$$K^{\mathrm{cov}}_7 = K_7 + \frac{1}{8}\psi_\mu\langle\gamma^\mu\gamma_7\gamma^\nu\rangle_5\psi_\nu + \mathcal{O}(\psi^4). \tag{14.10}$$

これらはフェルミオンを含まない双対関係を満足する。

$$K^{\mathrm{cov}}_7 = *K^{\mathrm{cov}}_4. \tag{14.11}$$

§4.2.2 で説明したように、(14.8) から、超空間上のテンソル場 $K_4(x,\theta)$ の他の成分の $\theta = 0$ での値を読み取ることができる。

$$K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}(\theta=0) = \widetilde{K}_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}, \tag{14.12}$$

$$K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{\alpha}}(\theta=0) = \mathcal{O}(\psi^3), \tag{14.13}$$

$$K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}(\theta=0) = \frac{1}{4}(\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} + \mathcal{O}(\psi^2), \tag{14.14}$$

$$K_{\widehat{p}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}(\theta=0) = \mathcal{O}(\psi^1), \tag{14.15}$$

$$K_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}\delta}(\theta=0) = \mathcal{O}(\psi^0). \tag{14.16}$$

14.2 拘束条件とビアンキ恒等式

14.2.1 拘束条件とビアンキ恒等式の設定

ここでは [29] および [30] に従って 11 次元超重力理論の超空間を用いた定式化について説明する。ここまでの議論は、フェルミオンの高次の項は無視して、成分形式との比較によって超場の拘束条件を推定してきた。以下では与えられた超場の拘束条件を出発点として、そこから運動方程式や超対称変換則を導いていく。ここからの議論はフェルミオンの高次の項まで含めて厳密である。

超場には欲しい自由度よりもはるかに多くの自由度が含まれるために、拘束条件を手で課すことによってそれらを減らす必要がある。そのために拘束条件を設定する。

捩率については、4 次元の場合に §4.2.2 で述べたことがそのまま成り立つので次のように取るべきことがわかる。

11 次元超重力理論の振率に対する拘束条件

$$T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta)=T_{\widehat{\alpha}\widehat{m}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta)=T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}}(x,\theta)=0,\quad T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{k}}(x,\theta)=\frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}. \tag{14.17}$$

これら以外の場の強さのうち、$T_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}{}^{\widehat{\alpha}}$ と $R_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{m}\widehat{n}}$ の $\theta=0$ 部分は物理的な場の強さを与える。それら以外の場については独立な自由度ではなく、これらの場、あるいはより一般には理論に含まれるそのほかの場を用いて書けている。

反対称テンソル場に対する拘束条件は §14.1.2 での解析から推測することができる。(14.15) と (14.16) はフェルミオンについて高次の項にしか寄与しないのでここでの議論からは決定できないのであるが、実際にはそれらを単に 0 と置いた次の条件を課せばよいことが知られている。

反対称テンソル場に対する拘束条件

$$K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{\alpha}}(z)=K_{\widehat{p}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}(z)=K_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}\widehat{\delta}}(z)=0,\quad K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}(z)=\frac{1}{4}(\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}. \tag{14.18}$$

超空間上の振率テンソルおよび曲率テンソルに対しては §4.2.2 で与えたビアンキ恒等式 $I_{\widehat{M}\widehat{N}\widehat{P}}{}^{\widehat{Q}}=0$ が課される。そして反対称テンソル場に対しては、ビアンキ恒等式 $dK=0$ が課される。ただし d は超空間上での外微分演算子である。この恒等式は添え字を局所直交系のものに書き換えることで次のようになる。

反対称テンソル場のビアンキ恒等式

$$0=J_{\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}\widehat{D}\widehat{E}}\equiv(D_{\widehat{A}}K_{\widehat{B}\widehat{C}\widehat{D}\widehat{E}}+2T_{\widehat{A}\widehat{B}}{}^{\widehat{F}}K_{\widehat{F}\widehat{C}\widehat{D}\widehat{E}})|_{[\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}\widehat{D}\widehat{E}\}} \tag{14.19}$$

14.2.2 SO(11) の表現

スピノル添え字を複数個含むテンソルを扱う際に、それがどのように既約分解されるかを知っていると便利なことが多い。そこでここではスピノル表現の積の既約分解について、後に必要となるものについてまとめておく。

SO(11) のディンキンラベルを、ディンキン図形の頂点の順に (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) と書くことにする。短いルートに対応するものは a_5 であるとする。この短いルートはスピノル表現に対応しており、a_5 が偶数であればボゾン的な、奇数であればフェルミオン的な表現を与える。以下で現れる主な SO(11) の表現のディンキンラベルと次元を表 14.1（ボゾン的な表現）と表 14.2（フェルミオン的な表現）に与えておく。

3 つのスピノルの対称積 $\psi^{\alpha\beta\gamma}$ は次のように規約分解される。

$$[\mathbf{32}\times\mathbf{32}\times\mathbf{32}]_{\mathrm{sym}}=\mathbf{4224}+\mathbf{1408}+\mathbf{320}+\mathbf{32}. \tag{14.20}$$

ここで、$\psi^{\alpha\beta\gamma}$ から $\mathbf{32}$ を取り出すテンソルを $T_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$ としよう。これは γ-行列を用いて何通りかの方法で作ることができる。

$$\begin{aligned}
T^{(1)}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} &= (\gamma_k)_{\alpha\beta}(\gamma_k)_{\gamma}{}^{\delta}+(\gamma_k)_{\beta\gamma}(\gamma_k)_{\alpha}{}^{\delta}+(\gamma_k)_{\gamma\alpha}(\gamma_k)_{\beta}{}^{\delta}, && (14.21)\\
T^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} &= \frac{1}{2}[(\gamma_{kl})_{\alpha\beta}(\gamma_{kl})_{\gamma}{}^{\delta}+(\gamma_{kl})_{\beta\gamma}(\gamma_{kl})_{\alpha}{}^{\delta}+(\gamma_{kl})_{\gamma\alpha}(\gamma_{kl})_{\beta}{}^{\delta}], && (14.22)\\
T^{(5)}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} &= \frac{1}{5!}[(\gamma_{klstu})_{\alpha\beta}(\gamma_{klstu})_{\gamma}{}^{\delta}+(\gamma_{klstu})_{\beta\gamma}(\gamma_{klstu})_{\alpha}{}^{\delta}+(\gamma_{klstu})_{\gamma\alpha}(\gamma_{klstu})_{\beta}{}^{\delta}]. && (14.23)
\end{aligned}$$

Soryushiron Kenkyu

表 14.1: SO(11) の表現の次元とディンキンラベル（ボゾン的なもののうち以下で用いるものだけ）

1	$(0,0,0,0,0)$	スカラー
11	$(1,0,0,0,0)$	ベクトル
55	$(0,1,0,0,0)$	二階反対称テンソル（随伴表現)
65	$(2,0,0,0,0)$	トレースレス対称テンソル
165	$(0,0,1,0,0)$	三階反対称テンソル
330	$(0,0,0,1,0)$	四階反対称テンソル
429	$(1,1,0,0,0)$	
462	$(0,0,0,0,2)$	五階反対称テンソル
1144	$(0,2,0,0,0)$	
1430	$(1,0,1,0,0)$	
3003	$(1,0,0,1,0)$	
4290	$(1,0,0,0,2)$	
5005	$(0,1,1,0,0)$	
11583	$(0,1,0,1,0)$	
17160	$(0,1,0,0,2)$	
28314	$(0,0,0,0,4)$	
37752	$(0,0,1,0,2)$	
47190	$(0,0,0,1,2)$	

表 14.2: SO(11) の表現の次元とディンキンラベル（フェルミオン的なもののうち以下で用いるものだけ）

32	$(0,0,0,0,1)$	スピノル
320	$(1,0,0,0,1)$	γ-トレースレススピノルベクトル
1408	$(0,1,0,0,1)$	
4224	$(0,0,0,0,3)$	

しかし、(14.20) からもわかるように $\psi^{\alpha\beta\gamma}$ は一つしか **32** を含まないからこれらはすべて比例係数を除き同じもののはずである。このことはスピノル添え字のうちの α と β を、対称スピノルの

Soryushiron Kenkyu

完全系 $(\gamma_m)^{\alpha\beta}$、$(\gamma_{mn})^{\alpha\beta}$、$(\gamma_{mnpqr})^{\alpha\beta}$ で展開することで示すことができる。

$$
\begin{aligned}
(\gamma_m)^{\alpha\beta}T^{(1)\ \delta}_{\alpha\beta\gamma} &= -14(\gamma_m)_\gamma{}^\delta, \\
(\gamma_{mn})^{\alpha\beta}T^{(1)\ \delta}_{\alpha\beta\gamma} &= -14(\gamma_{mn})_\gamma{}^\delta, \\
(\gamma_{mnpqr})^{\alpha\beta}T^{(1)\ \delta}_{\alpha\beta\gamma} &= 2(\gamma_{mnpqr})_\gamma{}^\delta, \qquad (14.24)\\
(\gamma_m)^{\alpha\beta}T^{(2)\ \delta}_{\alpha\beta\gamma} &= 70(\gamma_m)_\gamma{}^\delta, \\
(\gamma_{mn})^{\alpha\beta}T^{(2)\ \delta}_{\alpha\beta\gamma} &= 70(\gamma_{mn})_\gamma{}^\delta, \\
(\gamma_{mnpqr})^{\alpha\beta}T^{(2)\ \delta}_{\alpha\beta\gamma} &= -10(\gamma_{mnpqr})_\gamma{}^\delta, \qquad (14.25)\\
(\gamma_m)^{\alpha\beta}T^{(5)\ \delta}_{\alpha\beta\gamma} &= 84(\gamma_m)_\gamma{}^\delta, \\
(\gamma_{mn})^{\alpha\beta}T^{(5)\ \delta}_{\alpha\beta\gamma} &= 84(\gamma_{mn})_\gamma{}^\delta, \\
(\gamma_{mnpqr})^{\alpha\beta}T^{(5)\ \delta}_{\alpha\beta\gamma} &= -12(\gamma_{mnpqr})_\gamma{}^\delta. \qquad (14.26)
\end{aligned}
$$

従って

$$T^{(1)\ \delta}_{\alpha\beta\gamma} : T^{(2)\ \delta}_{\alpha\beta\gamma} : T^{(5)\ \delta}_{\alpha\beta\gamma} = -1 : 5 : 6. \tag{14.27}$$

また、$T^{(1,2,5)\delta}_{\alpha\beta\gamma}$ が 0 でないことは明らかである。

$\psi^{\alpha\beta\gamma}$ から次のようにスピノルベクトル ψ^γ_m を取り出すことができる。

$$\psi^\gamma_m = (\gamma_m)_{\alpha\beta}\psi^{\alpha\beta\gamma} \tag{14.28}$$

このスピノルベクトルは $\mathbf{32}\times\mathbf{11} = \mathbf{32}+\mathbf{320}$ のように分解できる。

$$\psi^\delta = (\gamma_m)^\delta{}_\gamma\psi^\gamma_m = (\gamma_m)_{\alpha\beta}(\gamma_m)_\gamma{}^\delta\psi^{\alpha\beta\gamma}, \quad \widetilde{\psi}^\gamma_m = \psi^\gamma_m - \frac{1}{11}(\gamma_m)^\gamma{}_\delta\psi^\delta. \tag{14.29}$$

ψ^δ が $\mathbf{32}$ の $\widetilde{\psi}^\gamma_m$ は $\mathbf{320}$ 成分を表している。さらに、次のように定義される ψ^γ_{mn} は $\mathbf{1408}$、$\mathbf{320}$、$\mathbf{32}$ の 3 つの規約表現を含む。

$$\psi^\gamma_{mn} = (\gamma_{mn})_{\alpha\beta}\psi^{\alpha\beta\gamma} \tag{14.30}$$

$\mathbf{320}+\mathbf{32}$ に属する ψ^γ_m を取り出し、そこからさらに $\mathbf{32}$ を取り出すには次のようにする。

$$\psi^\gamma_m = (\gamma_n)^\gamma{}_\delta\psi^\delta_{mn}, \quad \psi^\gamma = (\gamma_m)^\gamma{}_\delta\psi^\delta_m. \tag{14.31}$$

また、$\mathbf{1408}$ は次のように取り出すことができる。

$$\widetilde{\psi}^\gamma_{mn} = \psi^\gamma_{mn} + \frac{1}{9}[(\gamma_m)\psi_n - (\gamma_n)\psi_m] - \frac{1}{90}(\gamma_{mn})\psi \tag{14.32}$$

14.2.3 成分場に対するビアンキ恒等式

まず $I^1_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}} = 0$ という条件は曲率 $R_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}}$ に対する次のビアンキ恒等式を与える。

$$R_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{q}} + R_{\widehat{n}\widehat{p}\widehat{m}}{}^{\widehat{q}} + R_{\widehat{p}\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{q}} = 0. \tag{14.33}$$

この式は (1.124) によって定義されるテンソル X が 0 であることを意味しているから、(1.126) および (1.128) より次の式が成り立つ。

$$R_{\widehat{m}\widehat{n}} - R_{\widehat{n}\widehat{m}} = R_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}} + R_{\widehat{m}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{p}} + R_{\widehat{m}\widehat{r}\widehat{p}\widehat{q}} = 0, \tag{14.34}$$

振率の成分 $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}$ はグラビティーノの場の強さである。$I_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{\alpha}} = 0$ は、グラビティーノの場の強さに対するビアンキ恒等式である。

$$(D_{\widehat{m}} T_{\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{\alpha}} + T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\beta}} T_{\widehat{\beta}\widehat{p}}{}^{\widehat{\alpha}})|_{[\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}]} = 0. \tag{14.35}$$

反対称テンソル場については (14.19) の全ての添え字がベクトルである場合の

$$0 = J_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}} = D_{\widehat{m}} K_{\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}|_{[\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}]}, \tag{14.36}$$

は x-空間での反対称テンソル場のビアンキ恒等式を与える。

これらのビアンキ恒等式は、それぞれの場の強さに対応するポテンシャルの存在を保証する。具体的にポテンシャルを用いてどのように表されるかは、これら以外のビアンキ恒等式を解いた後で議論する。

14.2.4 振率に対するビアンキ恒等式（微分を含まないもの）

ビアンキ恒等式によってこれらの関係がある程度決定される。$I^1_{\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}}{}^{\widehat{m}} = 0$ という条件は拘束条件 (14.17) のために微分を含まず、場の強さの間の代数関係を与える。$I^1_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{p}}$ を用いれば、$T_{\widehat{\alpha}\widehat{m}}{}^{\widehat{\beta}}$ を用いて $R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{m}\widehat{n}}$ を与えることができる。

$$R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{m}\widehat{n}} = -\frac{1}{2} T_{\widehat{m}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}} (\gamma_{\widehat{n}})_{\widehat{\gamma}\widehat{\alpha}}|_{\{\alpha\beta\}} \tag{14.37}$$

さらに、この式の $\widehat{m}$ と $\widehat{n}$ の対称部分に注目すると、左辺は 0 であるから次の式が得られる。

$$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\gamma}} (\gamma_{\widehat{n}})_{\widehat{\gamma}\widehat{\beta}}|_{\{\alpha\beta\}\{mn\}} = 0. \tag{14.38}$$

$T_{\mu\alpha}{}^{\beta}$ はスピノル添え字を二つ持つので、γ 行列の反対称積で展開することができる。従って、次のようにおくことができる。

$$T_\mu = \sum_{k=0}^{5} Y_{\mu-\lambda_1\cdots\lambda_k} \gamma_{\lambda_1\cdots\lambda_k}. \tag{14.39}$$

$Y_{\mu-\lambda_1\cdots\lambda_k}$ は後ろの k 個の添え字について反対称な $k+1$ 階テンソルである。これに γ_ν を掛けて μ と ν について対称化すると、

$$T_\mu \gamma_\nu|_{\{\mu\nu\}} = \sum (Y_{\mu-\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}} \gamma_{\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}\nu} + (k+1) Y_{\mu-\lambda_1\cdots\lambda_k\nu} \gamma_{\lambda_1\cdots\lambda_k})|_{\{\mu\nu\}} \tag{14.40}$$

拘束条件は、この行列の対称部分、すなわち γ-行列の反対称積に分解したときに 1 階、2 階、5 階の部分が 0 になることを要求している。

まず、1 階部分からは次の条件を得る。

$$(Y_\mu \gamma_\nu + 2 Y_{\mu-\lambda\nu} \gamma_\lambda)_{\{\mu\nu\}} = 0. \tag{14.41}$$

$(\mu, \nu) = (1, 1)$ とおいて γ_1 部分を取り出すと、$Y_1 = 0$ が得られる。他の成分に対しても同様であるから、$Y_\mu = 0$ が結論される。これを (14.41) に戻せば、$Y_{\mu\nu\rho}$ が完全反対称であることがわかる。

2 階部分からは

$$(Y_{\mu-\lambda} \gamma_{\lambda\nu} + 3 Y_{\mu-\lambda_1\lambda_2\nu} \gamma_{\lambda_1\lambda_2})_{\{\mu\nu\}} = 0 \tag{14.42}$$

を得る。$(\mu, \nu) = (1, 1)$ とおいて γ_{12} 部分を取り出すと、$Y_{(1-2)}\gamma_{12} = 0$ となり、$Y_{\mu\nu}$ の非対角成分が 0 であることがわかる。さらに $(\mu, \nu) = (1, 2)$ で γ_{12} 部分を取り出すと、$Y_{1-1}\gamma_{12} - Y_{2-2}\gamma_{12} = 0$

Soryushiron Kenkyu

となり、対角成分が全て等しいことがわかる。従って $Y_{\mu\nu} = X\delta_{\mu\nu}$ とおくことができる。さらにこれを (14.42) に戻せば $Y_{\mu\nu\rho\sigma}$ が完全反対称であることがわかる。

11 次元では 5 階と 6 階の γ 行列の反対称積は同じものであるからそれらが互いに相殺する可能性を考慮しなければならないが、実際にはそのような相殺は起こらないことがわかる。5 階、6 階の部分を取り出すと、次の条件が得られる。

$$(Y_{\mu-\lambda_1\cdots\lambda_4}\gamma_{\lambda_1\cdots\lambda_4\nu} + Y_{\mu-\lambda_1\cdots\lambda_5}\gamma_{\lambda_1\cdots\lambda_5\nu})_{\{\mu\nu\}} = 0. \tag{14.43}$$

$(\mu,\nu) = (0,0)$ および $(\mu,\nu) = (0,1)$ の場合に γ_{01234} を含む項を取り出せば、$Y_{0-1234}\gamma_{01234} = Y_{1-1234} = Y_{0-0234} = 0$ が得られる。これは $Y_{\lambda-\mu\nu\rho\sigma} = \delta_{\lambda[\mu}X_{\nu\rho\sigma]}$ を意味している。$Y_{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}$ に対しても全く同様に $Y_{\lambda-\mu\nu\rho\sigma\tau} = \delta_{\lambda[\mu}X_{\nu\rho\sigma\tau]}$ が得られる。

こうして、(14.38) の一般解が次のように得られた。

$$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = X(\gamma_{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} + Y_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} + Y_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} + X^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} + X^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} \tag{14.44}$$

X と Y は任意の反対称テンソルである。これを (14.37) に代入すれば、

$$\begin{aligned} R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}-\widehat{m}\widehat{n}} &= \frac{1}{2}X(\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} - Y_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}(\gamma^{\widehat{p}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} + \frac{3}{2}Y_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} \\ &\quad -\frac{1}{2}X^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} + \frac{1}{2}X^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} \end{aligned} \tag{14.45}$$

$I_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{\delta}} = 0$ は (14.44) に含まれるテンソルに対する条件を与える。$I_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$ が属する表現の規約分解は、三階対称スピノル表現を規約分解して得られる 4 つの規約表現にさらにスピノル表現をかけることで得られる。

$$\begin{aligned} 4224 \times 32 &= 47190 + 37752 + 28314 + 17160 + 4290 + 462_5, && (14.46) \\ 1408 \times 32 &= 17160 + 11583 + 5005 + 4290 + 3003 + 1430 + 1144 + 462_5 \\ &\qquad +429 + 330_4 + 165_3 + 55_2, && (14.47) \\ 320 \times 32 &= 4290 + 3003 + 1430 + 462_5 + 429 + 330_4 + 165_3 + 65 + 55_2 + 11_1, && (14.48) \\ 32 \times 32 &= 462_5 + 330_4 + 165_3 + 55_2 + 11_1 + 1_0. && (14.49) \end{aligned}$$

この中で、0 から 5 までの添え字のついているものは、反対称テンソル表現であることを意味している。（添え字は反対称テンソルの階数である。）$I_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$ は、階数が 0、3、4 の反対称テンソル場の線形関数であるから、上記の規約分解の中でそれらの表現以外は実際には 0 になっている。特に、4224×32 の規約分解はこれらの表現を含まないから 0 である。従って、$I_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = 0$ を示すためには、対称な 3 つのスピノル添え字から得られる 4 つの規約表現のうち、$1408 + 320 + 32$ のみを考えれば十分である。このことは $(\gamma^{uv})^{\alpha\beta}I_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$ が 0 になることを示せば十分であることを意味している。

$$\begin{aligned} (\gamma_{uv})^{\alpha\beta}I_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} &= -\frac{22}{3}X\gamma^{uv} \\ &\quad -\frac{1}{3}Y_{mnp}\gamma^{uvmnp} + \frac{2}{3}(Y_{umn} + 30X^{umn})\gamma^{vmn}|_{[uv]} - \frac{2}{3}(Y_{uvm} + 30X^{uvm})\gamma^{m} \\ &\quad +\frac{1}{12}(Y_{mnpq} - 8X_{mnpq})\gamma^{uvmnpq} + \frac{2}{3}(Y_{umnp} - 8X_{umnp})\gamma_{vmnp}|_{[uv]} \\ &\quad -7(Y_{uvmn} - 8X_{uvmn})\gamma^{mn} \end{aligned} \tag{14.50}$$

Soryushiron Kenkyu

これが 0 になるという条件は、次のようになる。

$$X = X_{mnp} = Y_{mnp} = Y_{mnpq} - 8X_{mnpq} = 0. \tag{14.51}$$

従って $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ は次のように与えられる。

$$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = X^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} + 8X_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = 36(\gamma_{\widehat{m}}\not{X}_4)_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} - 12(\not{X}_4\gamma_{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}. \tag{14.52}$$

このように、$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ は 4 階反対称テンソル場の自由度を含み、11 次元超重力理論に現れるテンソル場に関係していると期待されるが、実際にそうであることはこのあとで見るように超空間上での反対称テンソル場に対するビアンキ恒等式を用いて示すことができる。

$I^1_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{p}} = 0$ という条件を解くことで $R_{\widehat{\alpha}\widehat{k}-\widehat{m}\widehat{n}}$ を $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}$ を用いて書くことが出来る。

$$R_{\widehat{\alpha}\widehat{p}-\widehat{m}\widehat{n}} = \frac{1}{8}(\gamma_{\widehat{p}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\beta}} - \frac{1}{8}(\gamma_{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}T_{\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{\beta}} - \frac{1}{8}(\gamma_{\widehat{n}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}T_{\widehat{p}\widehat{m}}{}^{\widehat{\beta}} \tag{14.53}$$

$I_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}}{}^{\widehat{m}} = 0$ は自動的に成り立つ。

14.2.5 反対称テンソル場に対するビアンキ恒等式（微分を含まないもの）

$J_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}$ は (14.52) を用いれば、次のように K_4 と X_4 の関係を与える。

$$\begin{aligned} J_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}} &= \left(\frac{1}{2}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}K_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}} - 108(\gamma_{\widehat{p}}\not{X}_4\gamma_{\widehat{q}\widehat{r}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} + 36(\not{X}_4\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\right)_{\{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\}[\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}]} \\ &= \frac{1}{2}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}(K_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}} - 288X_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}), \end{aligned} \tag{14.54}$$

従って、X と K の関係が次のように決定される、

$$X_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{288}K_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{14.55}$$

つまり、$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ は次のように与えられる。

$$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = \frac{1}{8}(\gamma_{\widehat{m}}\not{K}_4)_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} - \frac{1}{24}(\not{K}_4\gamma_{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = \frac{1}{12.4!}(\gamma_{mpqrs}K_{pqrs})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} + \frac{1}{6.3!}(\gamma_{qrs}K_{mqrs})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} \tag{14.56}$$

このように、捩率の成分 $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ は、捩率、および曲率に対するビアンキ恒等式だけを用いていても物理的意味は明らかにならないが、反対称テンソル場のビアンキ恒等式からその成分が 4 階反対称テンソル場に等しいことが明らかになる。

次の 3 つが 0 になることは直ちに確かめられる。

$$J_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}\widehat{q}\widehat{r}} = J_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}\widehat{\delta}\widehat{r}} = J_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}\widehat{\delta}\widehat{\epsilon}} = 0. \tag{14.57}$$

14.2.6 ビアンキ恒等式（θ 微分を含むもの）

グラビティーノの運動方程式は、この成分に対する条件として表されるが、この条件はグラスマン奇のビアンキ恒等式、すなわちスピノル添え字を奇数個持つビアンキ恒等式から得ることができる。$J_{\widehat{\alpha}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}} = 0$ は K の θ 依存性を決定するのに用いることができる。

$$D_{\widehat{\alpha}}K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}} = -\frac{3}{2}T_{\widehat{p}\widehat{q}}{}^{\widehat{\beta}}(\gamma_{\widehat{r}\widehat{s}})_{\widehat{\beta}\widehat{\alpha}}|_{[\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}]}, \tag{14.58}$$

(14.56) によって $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ は反対称テンソル場で書けているから、その θ 微分も (14.58) によって次のように決定される。

$$D_{\widehat{\alpha}}T_{\widehat{m}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}} = -\frac{1}{16}[\frac{1}{8}(\gamma_{\widehat{m}}\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}})_{\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}} - \frac{1}{24}(\gamma^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}\gamma_{\widehat{m}})_{\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}}](\gamma_{\widehat{r}\widehat{s}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\delta}}T_{\widehat{p}\widehat{q}}{}^{\widehat{\delta}} \qquad (14.59)$$

一方、振率に対するビアンキ恒等式 $I_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}}$ も $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ の θ 微分を含む。

$$\frac{3}{2}I_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}} = \left[-D_{\widehat{\alpha}}T_{\widehat{m}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}} + R_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}}\right]_{\{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\}} + \frac{1}{8}(\gamma^{k})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}T_{\widehat{k}\widehat{m}}{}^{\widehat{\gamma}}. \qquad (14.60)$$

この式の曲率テンソルを (14.53) を用いてグラビティーノ超場で書き換え、さらに θ 微分項も (14.59) によってグラビティーノ超場で書き換えればこの式を $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}$ の線形関係として表すことができる。$T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}$ を SO(11) の規約表現に分解すると、$1408+320+32$ となる。(14.60) が 0 になるという条件は、ローレンツ共変性よりこれら 3 つの規約表現のうちの幾つかが 0 であるという条件を与えるはずである。スピノル添え字が 3 つある (14.60) を直接扱うのは難しいので、α と β を γ^u でつぶしてみると、次の式をえる。

$$\frac{3}{2}(\gamma_u)^{\alpha\beta}I_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}} = \left(-\frac{144}{96}\gamma^u\gamma^pT_{pm} + \frac{40}{96}\gamma^m\gamma^pT_{pu} + \frac{41}{96}\delta^{mu}\gamma^{pq}T_{pq} + \frac{5}{96}\gamma^{mu}\gamma^{pq}T_{pq}\right)^{\gamma} \qquad (14.61)$$

この式から簡単に次の式を示すことができる。

$$(\gamma^{\widehat{k}})^{\widehat{\alpha}}{}_{\widehat{\beta}}T_{\widehat{k}\widehat{m}}{}^{\widehat{\beta}} = 0. \qquad (14.62)$$

この式は $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}$ の規約分解のうち $320+32$ が 0 であることを表している。$T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}$ の $\theta=0$ 成分はグラビティーノの場の強さに対応するから、(14.62) の $\theta=0$ 成分はグラビティーノの運動方程式であると解釈できる。実際に成分場で書いたときにグラビティーノの運動方程式を与えることは後で改めてチェックする。

(14.61) の中には γ^mT_{mn} という形でのみ T_{mn} が現れているので、(14.62) が成り立てば (14.61) は 0 になる。さらに、(14.62) をもちいれば $(\gamma_{uv})^{\alpha\beta}I_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}} = (\gamma_{uvwxy})^{\alpha\beta}I_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}} = 0$ も示すことができる。これらの式は $I_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\gamma}} = 0$ を表している。

グラビティーノの運動方程式に相当する (14.62) が成り立っていれば、$T_{m\alpha}{}^{\beta}$、K_{mnpq} の θ 依存性は (14.58) や (14.60) から得ることができる。上で述べたように (14.62) はこれら二つの式から得られる θ 依存性が互いに矛盾しないための条件になっている。θ 依存性がまだ決定されていないのは、グラビティーノの場の強さを含む超場 $T_{mn}{}^{\alpha}$ である。$T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}$ の θ 依存性を決定するには、ビアンキ恒等式 $I_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} = 0$ を用いればよい。

$$D_{\widehat{\alpha}}T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\beta}} = -R_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} - D_{\widehat{m}}T_{\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} - D_{\widehat{n}}T_{\widehat{\alpha}\widehat{m}}{}^{\widehat{\beta}} - T_{\widehat{n}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\gamma}}T_{\widehat{\gamma}\widehat{m}}{}^{\widehat{\beta}} - T_{\widehat{\alpha}\widehat{m}}{}^{\widehat{\gamma}}T_{\widehat{\gamma}\widehat{n}}{}^{\widehat{\beta}} \qquad (14.63)$$

ただし、この式の右辺の $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\beta}}$ の一部の成分はグラビティーノの運動方程式の超空間版 (14.62) によって 0 になっている。このことと矛盾しないためにはこの式の右辺の対応する成分が消えていなければならない。この部分を抜き出すために、(14.63) の γ-トレースを取り、グラビティーノの運動方程式 (14.62) を用いれば、グラビティーノの場の強さを含まない次の式を得る。

$$\frac{1}{2}R_{mp}\gamma^p = D_mT_n\gamma^n - D_nT_m\gamma^n + T_nT_m\gamma^n - T_mT_n\gamma^n \qquad (14.64)$$

ただし、恒等式 (14.34) を用いた。また、リッチテンソルを $R_{mp} = R_{mnp}{}^{n}$ と定義した。この式の右辺の γ-行列の反対称積による分解は次のようになる。

$$D_mT_n\gamma^n - D_nT_m\gamma^n = \frac{1}{12}\langle\gamma_m \not{D}\not{K}\rangle_4 + \frac{1}{6}\langle\gamma_m\not{D}\not{K}\rangle_2, \qquad (14.65)$$

$$T_nT_m\gamma^n - T_mT_n\gamma^n = -\frac{1}{24}\langle 3\not{K}\gamma_m\not{K} - \gamma_m\not{K}\not{K}\rangle_1 + \frac{1}{24}\langle\gamma_m\not{K}\not{K}\rangle_7 + \frac{1}{12}\langle\gamma_m\not{K}\not{K}\rangle_5 \qquad (14.66)$$

ただし反対称テンソル場に対するビアンキ恒等式 $J_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}=0$ より従う $\not{D}\not{K}+\not{K}\not{D}=0$ を用いた。（この式中の微分演算子はどちらも K に作用する。）よって右辺は次のように書くことができる。

$$-\frac{1}{24}\langle 3\not{K}\gamma_m\not{K}-\gamma_m\not{K}\not{K}\rangle_1+\frac{1}{8}\gamma_m\left(\langle\not{D}\not{K}\rangle_3+\frac{1}{2}\langle\not{K}\not{K}\rangle_8\right)+\frac{1}{24}\left(\langle\not{D}\not{K}\rangle_3+\frac{1}{2}\langle\not{K}\not{K}\rangle_8\right)\gamma_m \quad (14.67)$$

これらを用いると、(14.64) は次の 2 つに分解できる。

$$R_{mp}\gamma^p=-\frac{1}{12}\langle 3\not{K}\gamma_m\not{K}-\gamma_m\not{K}\not{K}\rangle_1, \quad (14.68)$$

$$\langle\not{D}\not{K}\rangle_3+\frac{1}{2}\langle\not{K}\not{K}\rangle_8=0. \quad (14.69)$$

(14.68) は次のように書き換えることもできる。

$$R_{mn}-\frac{1}{2}\eta_{mn}R=\frac{1}{2\cdot 3!}K_{mpqr}K_n{}^{pqr}-\frac{1}{4\cdot 4!}\eta_{mn}K^2_{pqrs} \quad (14.70)$$

この式が成り立つためには $R_{\widehat{m}\widehat{n}}$ が対称テンソルである必要があるが、実際 (14.34) にあるようにこの条件は満足されている。この式は $\theta=0$ 成分としてグラビトンの運動方程式を含んでいる。

一方 (14.69) は、次の式と等価である。

$$D_mK^{muvw}-\frac{1}{2\cdot 4!\cdot 4!}\gamma^{uvwklmnpqrs}K_{klmn}K_{pqrs}=0. \quad (14.71)$$

この式は $\theta=0$ 成分として反対称テンソル場の運動方程式を含んでいる。

これらが実際に成分場の運動方程式を与えることは後でチェックする。

14.3 成分場による書き換え

14.3.1 成分場に対する超対称変換

超場形式では、超対称変換を超空間上の一般座標変換として得ることができる。

$$\delta e_\mu{}^{\widehat{m}}=D_\mu\epsilon^{\widehat{m}}-\frac{1}{4}\xi^{\widehat{\alpha}}\psi_\mu{}^{\widehat{\beta}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}-\lambda^{\widehat{m}}{}_{\widehat{k}}e_\mu{}^{\widehat{k}} \quad (14.72)$$

$$\delta\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}=D_\mu\xi^{\widehat{\alpha}}+\xi^{\widehat{\beta}}T_{\widehat{\beta}\mu}{}^{\widehat{\alpha}}+\epsilon^{\widehat{k}}e_\mu{}^{\widehat{m}}T_{\widehat{k}\widehat{m}}{}^{\widehat{\alpha}}+\epsilon^{\widehat{k}}\psi_\mu{}^{\widehat{\beta}}T_{\widehat{k}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\alpha}}-\lambda^{\widehat{\alpha}}{}_{\widehat{\beta}}E_\mu{}^{\widehat{\beta}} \quad (14.73)$$

変換パラメータ $\xi^{\widehat{\alpha}}$ を含む部分だけを取り出して見ると、

$$\delta e_\mu{}^{\widehat{m}}=\frac{1}{4}(\xi\gamma^{\widehat{m}}\psi_\mu) \quad (14.74)$$

$$\delta\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}=D_\mu\xi^{\widehat{\alpha}}+\xi^{\widehat{\beta}}T_{\widehat{\beta}\mu}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0}=D_\mu\xi^{\widehat{\alpha}}+\frac{1}{24}(\gamma_\mu\not{K}^{\mathrm{cov}}\xi)^{\widehat{\alpha}}-\frac{1}{8}(\not{K}^{\mathrm{cov}}\gamma_\mu\xi)^{\widehat{\alpha}} \quad (14.75)$$

3 階反対称ポテンシャル場については

$$\begin{aligned}\delta A_3 &= \frac{1}{6}\epsilon^{\widehat{m}}e^{\widehat{n}}\wedge e^{\widehat{p}}\wedge e^{\widehat{q}}K_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}}|_{\theta=0}-\frac{1}{2}\epsilon^{\widehat{m}}e^{\widehat{n}}\wedge\psi^{\widehat{\alpha}}\wedge\psi^{\widehat{\beta}}K_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}|_{\theta=0}-\frac{1}{2}\xi^{\widehat{\alpha}}\psi^{\widehat{\beta}}\wedge e^{\widehat{p}}\wedge e^{\widehat{q}}K_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{p}\widehat{q}}|_{\theta=0}\\ &= \frac{1}{6}\epsilon^{\widehat{m}}e^{\widehat{n}}\wedge e^{\widehat{p}}\wedge e^{\widehat{q}}K^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}}-\frac{1}{8}\epsilon^{\widehat{m}}e^{\widehat{n}}\wedge\psi^{\widehat{\alpha}}\wedge\psi^{\widehat{\beta}}(\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}+\frac{1}{4}(\xi\gamma_{[2]}\wedge\psi) \quad (14.76)\end{aligned}$$

パラメータ $\xi^{\widehat{\alpha}}$ に依存する部分を取り出すと、

$$\delta A_3=\frac{1}{4}(\xi\gamma_{[2]}\wedge\psi) \quad (14.77)$$

Soryushiron Kenkyu

14.3.2 超共変化された場の強さ

捩率、曲率、4 階反対称テンソル場の $\theta=0$ 成分が対応するポテンシャルを用いてどのように表されているかを見ておこう。これらの $\theta=0$ 成分を次のように定義しておく。

$$K^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}}=W_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}}|_{\theta=0},\quad \psi^{{\rm cov}\,\widehat{\alpha}}_{\widehat{m}\widehat{n}}=T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0},\quad R^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}}=R^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}}|_{\theta=0}. \tag{14.78}$$

超空間上の反対称テンソル場を $W_{MNPQ}(x,\theta)$ とする。W の足のうち m 個が dx で n 個が $d\theta$ である成分を $W_{m|n}$ と書くことにすると、拘束条件より、

$$\begin{aligned} W_{4|0}|_{\theta=0} &= \frac{1}{24}e^{\widehat{m}}\wedge e^{\widehat{n}}\wedge e^{\widehat{p}}\wedge e^{\widehat{q}}W_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}}|_{\theta=0}-\frac{1}{4}e^{\widehat{m}}\wedge e^{\widehat{n}}\wedge\psi^{\widehat{\alpha}}\wedge\psi^{\widehat{\beta}}W_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}|_{\theta=0} \\ &= K^{\rm cov}+\frac{1}{8}(\psi\wedge\gamma_{[2]}\wedge\psi) \end{aligned} \tag{14.79}$$

一方ビアンキ恒等式より、W はポテンシャル V を用いて $W=dV$ と書くことができる。特に、$W_{4|0}$ 成分 は $V_{3|0}$ 成分のみと関係しており、成分表示でのポテンシャル A_3 を

$$A_3=V_{3|0}|_{\theta=0}, \tag{14.80}$$

によって定義すれば

$$W_{4|0}|_{\theta=0}=K_4\equiv dA_3 \tag{14.81}$$

のようにポテンシャル A_3 を用いて表すことができる。したがって、(14.79) と (14.81) を比較すれば、$K_4^{\rm cov}$ をポテンシャル A_3 を用いて与える次の式が得られる。

$$K_4^{\rm cov}=K_4-\frac{1}{8}(\psi\wedge\gamma_{[2]}\wedge\psi). \tag{14.82}$$

あるいは、

$$K^{\rm cov}_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}=K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}-\frac{3}{2}(\psi_{\widehat{p}}\gamma_{\widehat{q}\widehat{r}}\psi_{\widehat{s}})|_{[\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}]}=K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}-\frac{1}{8}(\psi_{\widehat{m}}\langle\gamma^{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}\gamma^{\widehat{n}}\rangle_2\psi_{\widehat{n}}). \tag{14.83}$$

反対称テンソル場は超場形式では捩率の $T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}$ 成分と次のように関係している。

$$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}=\frac{1}{8}(\gamma_{\widehat{m}}\not{W}_{4|0})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}-\frac{1}{24}(\not{W}_{4|0}\gamma_{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} \tag{14.84}$$

この式の $\theta=0$ 成分は (14.78) を用いれば

$$T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}|_{\theta=0}=\frac{1}{8}(\gamma_{\widehat{m}}\not{K}^{\rm cov})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}-\frac{1}{24}(\not{K}^{\rm cov}\gamma_{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}} \tag{14.85}$$

となる。ここに現れているのが K ではなく $K^{\rm cov}$ であることに注意すること。

スピン接続を多脚場を用いて表すには $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}=0$ を用いるが、ひとまずこれ以外の拘束条件を用いて

$$\begin{aligned} T_{2|0}{}^{\widehat{k}}(\theta=0) &= \frac{1}{2}e^{\widehat{m}}\wedge e^{\widehat{n}}T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}|_{\theta=0}+e^{\widehat{m}}\wedge\psi^{\widehat{\alpha}}T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{k}}|_{\theta=0}-\frac{1}{2}\psi^{\widehat{\alpha}}\wedge\psi^{\widehat{\beta}}T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{k}}|_{\theta=0} \\ &= T^{{\rm cov}\widehat{k}}+\frac{1}{8}(\psi\wedge\gamma^{\widehat{k}}\psi) \end{aligned} \tag{14.86}$$

ただしここで $T^{{\rm cov}\widehat{k}}$ を次のように定義した。

$$T^{{\rm cov}\widehat{k}}_{\widehat{m}\widehat{n}}=T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}|_{\theta=0} \tag{14.87}$$

一方ビアンキ恒等式より、次のように書けることが保障される。

$$T_{2|0}{}^{\widehat{k}}|_{\theta=0} = de^{\widehat{k}} + \omega^{\widehat{k}\widehat{l}} \wedge e_{\widehat{l}} \tag{14.88}$$

(14.86) と (14.88) の二つを比較すれば

$$T^{\mathrm{cov}\,\widehat{k}}_{\mu\nu} = \partial_\mu e_\nu{}^{\widehat{k}} - \partial_\nu e_\mu{}^{\widehat{k}} + \omega_\mu{}^{\widehat{k}\widehat{l}} e_{\nu\widehat{l}} - \omega_\nu{}^{\widehat{k}\widehat{l}} e_{\mu\widehat{l}} - \frac{1}{4}\psi_\mu\gamma^{\widehat{k}}\psi_\nu. \tag{14.89}$$

もちろん (14.87) によって定義された $T^{\mathrm{cov}\,\widehat{k}}_{\mu\nu}$ は拘束条件により 0 である。これを解くことにより、ω を e と ψ を用いて表すことができる。

$$\omega_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(-e_{\lambda\widehat{k}}\partial_\mu e_\nu{}^{\widehat{k}} + e_{\mu\widehat{k}}\partial_\nu e_\lambda{}^{\widehat{k}} + e_{\nu\widehat{k}}\partial_\lambda e_\mu{}^{\widehat{k}}) + \frac{1}{8}(\psi_\mu\gamma_\lambda\psi_\nu - \psi_\nu\gamma_\mu\psi_\lambda - \psi_\lambda\gamma_\nu\psi_\mu). \tag{14.90}$$

グラビティーノの場の強さと $T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}$ の関係も、同様の手続きで求めることができる。まず、ビアンキ恒等式は次のように書けることを保障する。

$$T_{\mu\nu}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} = \psi_{\mu\nu}{}^{\widehat{\alpha}} \equiv D_\mu\psi_\nu{}^{\widehat{\alpha}} - D_\nu\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}} \tag{14.91}$$

一方、拘束条件と (14.78) で定義される $\psi^{\mathrm{cov}\,\widehat{\alpha}}_{\mu\nu}$ を用いて

$$T_{\mu\nu}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} = \psi^{\mathrm{cov}\,\widehat{\alpha}}_{\mu\nu} + \psi_\mu{}^{\widehat{\beta}} e_\nu{}^{\widehat{n}} T_{\widehat{\beta}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} + e_\mu{}^{\widehat{m}}\psi_\nu{}^{\widehat{\beta}} T_{\widehat{m}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} \tag{14.92}$$

これら二つを比較すれば、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\psi^{\mathrm{cov}\,\widehat{\alpha}}_{\widehat{m}\widehat{n}} &= \psi_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}} + \psi_{\widehat{m}}{}^{\widehat{\beta}} T_{\widehat{n}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} - \psi_{\widehat{n}}{}^{\widehat{\beta}} T_{\widehat{m}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{\alpha}}|_{\theta=0} \\ &= \psi_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{\alpha}} + \frac{1}{8}(K^{\mathrm{cov}}\gamma_{\widehat{n}}\psi_{\widehat{m}})^{\widehat{\alpha}} - \frac{1}{24}(\gamma_{\widehat{n}}K^{\mathrm{cov}}\psi_{\widehat{m}})^{\widehat{\alpha}} - \frac{1}{8}(K^{\mathrm{cov}}\gamma_{\widehat{m}}\psi_{\widehat{n}})^{\widehat{\alpha}} + \frac{1}{24}(\gamma_{\widehat{m}}K^{\mathrm{cov}}\psi_{\widehat{n}})^{\widehat{\alpha}}\end{aligned} \tag{14.93}$$

最後に (14.85) を代入した。

曲率テンソルについても同様である。局所ローレンツ系のテンソルとの関係は

$$R_{2|0\widehat{p}\widehat{q}}|_{\theta=0} = \frac{1}{2}e^{\widehat{m}} \wedge e^{\widehat{n}} R^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}} + \psi^{\widehat{\alpha}} \wedge e^{\widehat{m}} R_{\widehat{\alpha}\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}}|_{\theta=0} - \frac{1}{2}\psi^{\widehat{\alpha}} \wedge \psi^{\widehat{\beta}} R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{p}\widehat{q}}|_{\theta=0} \tag{14.94}$$

一方ビアンキ恒等式より、次のようにスピン接続を用いて表すことができる。

$$R_{2|0\widehat{p}\widehat{q}}|_{\theta=0} = d\omega_{\widehat{p}\widehat{q}} + \omega_{\widehat{p}\widehat{r}} \wedge \omega^{\widehat{r}}{}_{\widehat{q}} \tag{14.95}$$

比較すれば

$$\begin{aligned}R^{\mathrm{cov}}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}} &= R_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}} - \psi^{\widehat{\alpha}}_{\widehat{m}} R_{\widehat{\alpha}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}} + \psi^{\widehat{\alpha}}_{\widehat{n}} R_{\widehat{\alpha}\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}} + \psi^{\widehat{\alpha}}_{\widehat{m}}\psi^{\widehat{\beta}}_{\widehat{n}} R_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{p}\widehat{q}} \\ &= R_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}} \\ &\quad + \frac{1}{8}(\psi_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}}\psi^{\mathrm{cov}}_{\widehat{p}\widehat{q}}) - \frac{1}{8}(\psi_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{p}}\psi^{\mathrm{cov}}_{\widehat{q}\widehat{n}}) - \frac{1}{8}(\psi_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{q}}\psi^{\mathrm{cov}}_{\widehat{n}\widehat{p}}) - (\widehat{m} \leftrightarrow \widehat{n}) \\ &\quad - \frac{1}{4}(\psi_{\widehat{m}} T_{\widehat{p}}\gamma_{\widehat{q}}\psi_{\widehat{n}}) - (\widehat{m} \leftrightarrow \widehat{n}) \\ &= R_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}} \\ &\quad + \frac{1}{8}(\psi_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}}\psi^{\mathrm{cov}}_{\widehat{p}\widehat{q}}) - \frac{1}{8}(\psi_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{p}}\psi^{\mathrm{cov}}_{\widehat{q}\widehat{n}}) - \frac{1}{8}(\psi_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{q}}\psi_{\widehat{n}\widehat{p}}) - (\widehat{m} \leftrightarrow \widehat{n})\end{aligned} \tag{14.96}$$

14.3.3 成分場についての運動方程式

グラビティーノの運動方程式は超場に対する式 (14.62) の $\theta = 0$ 成分として次のように与えられる。

$$\gamma^{\widehat{m}}\psi^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} = 0 \tag{14.97}$$

これが $\gamma^{\widehat{k}\widehat{m}\widehat{n}}\psi^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} = 0$ と同値であることはすぐに確かめられる。ここに (14.93) を代入すれば、

$$0 = \gamma^{\widehat{k}\widehat{m}\widehat{n}}\psi^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} = \gamma^{\widehat{k}\widehat{m}\widehat{n}}\psi_{\widehat{m}\widehat{n}} - \frac{1}{4}\gamma^{\widehat{k}}\not{K}^{\rm cov}\gamma^{\widehat{m}}\psi_{\widehat{m}} + \frac{1}{4}\gamma^{\widehat{m}}\not{K}^{\rm cov}\gamma^{\widehat{k}}\psi_{\widehat{m}} \tag{14.98}$$

が得られる。これは成分形式で得られる運動方程式 (13.50) にグラビティーノの 2 次まで一致する。

超場形式で、反対称テンソル場の運動方程式は超空間上の式 (14.71) によって与えられる。もう一度書いておこう。

$$D_m K^{muvw} - \frac{1}{2\cdot 4!\cdot 4!}\gamma^{uvwklmnpqrs}K_{klmn}K_{pqrs} = 0. \tag{14.99}$$

この式は $\theta = 0$ 成分として反対称テンソル場の運動方程式を含んでいる。実際、グラビティーノの寄与を無視すれば、これが以前に成分形式で得られた運動方程式 (13.33) に一致することは明らかである。ここではフェルミオンについて高次の項まで含めた運動方程式を導出し、フェルミオンの 2 次の項まで (13.33) と一致することを見ておこう。

まず、(14.99) の第 1 項の $\theta = 0$ 成分が成分場表示でどうなるかを見てみよう。まずは一般の、添え字を縮約しない微分について、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}(D_{\widehat{n}}K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}})^{\rm cov} = D_{\widehat{n}}K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}|_{\theta=0} &= e_{\widehat{n}}{}^{\mu}\left(D_\mu K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}|_{\theta=0} - \psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}D_{\widehat{\alpha}}K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}|_{\theta=0}\right) \\ &= e_{\widehat{n}}{}^{\mu}\left(D_\mu K^{\rm cov}_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}} - \frac{3}{2}\psi^{\rm cov}_{\widehat{p}\widehat{q}}{}^{\widehat{\beta}}(\gamma_{\widehat{r}\widehat{s}})_{\widehat{\beta}\widehat{\alpha}}\psi_\mu{}^{\widehat{\alpha}}|_{[\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}]}\right)\end{aligned} \tag{14.100}$$

$D_{\widehat{\alpha}}K$ をグラビティーノで表すために (14.58) を用いた。この式の第 2 項はグラビティーノの運動方程式を用いることでさらに変形することができる。まず、次のように交換関係、反交換関係を用いて書き換える。

$$\frac{3}{2}\psi^{\rm cov}_{\widehat{p}\widehat{q}}\gamma_{\widehat{r}\widehat{s}}\psi_{\widehat{n}}|_{[\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}]} = -\frac{1}{8}\psi^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{k}}\langle\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}\gamma^{\widehat{m}}\gamma^{\widehat{k}}\rangle_2\psi_{\widehat{n}} = -\frac{1}{32}\psi^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{k}}\{[\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}},\gamma^{\widehat{m}}],\gamma^{\widehat{k}}\}\psi_{\widehat{n}} \tag{14.101}$$

ここで、(14.97) の運動方程式 $\gamma^{\widehat{m}}\psi^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} = 0$ を用いれば、最後の表式の交換関係と反交換関係を入れ替えることができて、

$$= -\frac{1}{32}\psi^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{k}}[\{\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}},\gamma^{\widehat{m}}\},\gamma^{\widehat{k}}]\psi_{\widehat{n}} = -\frac{1}{8}\psi^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{k}}\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}{}^{\widehat{m}\widehat{k}}\psi_{\widehat{n}} \tag{14.102}$$

こうして得られた (14.102) と、$K^{\rm cov}$ の式 (14.83) を (14.100) に代入すると、

$$(D_{\widehat{k}}K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}})^{\rm cov} = D_{\widehat{k}}K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}} - \frac{1}{8}D_{\widehat{k}}(\psi_{\widehat{m}}\langle\gamma^{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}\gamma^{\widehat{n}}\rangle_2\psi_{\widehat{n}}) - \frac{1}{8}\psi^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}}\gamma_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}}{}^{\widehat{m}\widehat{n}}\psi_{\widehat{k}} \tag{14.103}$$

運動方程式 (14.99) の第 1 項のように、共変微分の添え字と K の添え字をひとつ縮約し、$\psi^{\rm cov}$ の式 (14.93) を代入すると次のように変形することができる。

$$(D_{\widehat{k}}K^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}})^{\rm cov} = D_{\widehat{k}}(K^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}} - \kappa^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}) + \frac{1}{32}\psi_{\widehat{m}}\gamma_{\widehat{n}}\not{K}^{\rm cov}\gamma^{\widehat{m}\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{n}}\psi_{\widehat{k}} + \frac{1}{16}\psi_{\widehat{m}}\not{K}^{\rm cov}\gamma^{\widehat{m}\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}\psi_{\widehat{k}} \tag{14.104}$$

ただし、κ は次のように定義されるもので、成分形式の作用の 3 点結合項の変分として現れるものと同じである。

$$\kappa^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}} = \frac{1}{8}(\psi_{\widehat{m}}\langle\gamma^{\widehat{m}}\gamma^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}\gamma^{\widehat{n}}\rangle_{2,6}\psi_{\widehat{n}}) \tag{14.105}$$

さらに (14.104) の $\psi K\psi$ 項を整理することにより、次の式を得る。

$$(D_{\widehat{k}}K^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}})^{\rm cov} = D_{\widehat{k}}(K^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}} - \kappa^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}) + \frac{1}{8}\psi_{\widehat{m}}\langle K\!\!\!/^{\rm cov}\gamma^{\widehat{m}\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}\rangle_9\psi_{\widehat{k}} - \frac{1}{8}\psi_{\widehat{m}}\langle K\!\!\!/^{\rm cov}\gamma^{\widehat{m}\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}\rangle_1\psi_{\widehat{k}} \quad (14.106)$$

ここで、

$$K^{\rm cov}_{\mu\nu\rho\sigma} = K_{\mu\nu\rho\sigma} - \zeta_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \zeta_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{3}{2}(\psi_\mu\gamma_{\nu\rho}\psi_\sigma)_{[\mu\nu\rho\sigma]} \quad (14.107)$$

のように ζ を定義すると、

$$\frac{1}{8}\psi_{\widehat{m}}\langle K\!\!\!/^{\rm cov}\gamma^{\widehat{m}\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}\rangle_9\psi_{\widehat{k}} = -\frac{1}{4!\cdot 4!}\epsilon^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}m_{1\sim4}n_{1\sim4}}K^{\rm cov}_{m_{1\sim4}}\zeta_{n_{1\sim4}} \quad (14.108)$$

が成り立つ。さらに、

$$-\frac{1}{8}\psi_{\widehat{m}}\langle K\!\!\!/^{\rm cov}\gamma^{\widehat{m}\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}\rangle_1\psi_{\widehat{k}} = -\frac{5}{8}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^{[\widehat{m}}\psi_{\widehat{k}})K^{{\rm cov}\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}]} = -\frac{5}{2}T_{\widehat{m}\widehat{k}}{}^{[\widehat{m}}K^{{\rm cov}\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}]} \quad (14.109)$$

が成り立つ。したがって、

$$(D_{\widehat{k}}K^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}})^{\rm cov} = D_{\widehat{k}}(K^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}-\kappa^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}})-\frac{5}{2}T_{\widehat{m}\widehat{k}}{}^{[\widehat{m}}(K-\kappa)^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}]}-\frac{1}{4!\cdot4!}\epsilon^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}m_{1\sim4}n_{1\sim4}}K^{\rm cov}_{m_{1\sim4}}\zeta_{n_{1\sim4}}-\frac{5}{2}T_{\widehat{m}\widehat{k}}{}^{[\widehat{m}}(\kappa-\zeta)^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}]} \quad (14.110)$$

さらに (13.34) を用いれば

$$(D_{\widehat{k}}K^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}})^{\rm cov} = (*d*(K-\kappa))^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}-\frac{1}{4!\cdot4!}\epsilon^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}m_{1\sim4}n_{1\sim4}}K^{\rm cov}_{m_{1\sim4}}\zeta_{n_{1\sim4}}-\frac{5}{2}T_{\widehat{m}\widehat{k}}{}^{[\widehat{m}}(\kappa-\zeta)^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}]} \quad (14.111)$$

運動方程式は

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & (*d*(K-\kappa))^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}} - \frac{1}{2\cdot4!\cdot4!}\epsilon^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}m_{1\sim4}n_{1\sim4}}K_{m_{1\sim4}}K_{n_{1\sim4}} \\ & + \frac{1}{2\cdot4!\cdot4!}\epsilon^{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}m_{1\sim4}n_{1\sim4}}\zeta_{m_{1\sim4}}\zeta_{n_{1\sim4}} - \frac{5}{2}T_{\widehat{m}\widehat{k}}{}^{[\widehat{m}}(\kappa-\zeta)^{\widehat{k}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}]} \end{aligned} \quad (14.112)$$

右辺 1 行目はグラビティーノについて 2 次までの項であり、(13.33) と一致する。二行目はグラビティーノについて 4 次の項である。

重力場の運動方程式は (14.68) の $\theta=0$ 成分として次のように与えられる。

$$R^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}{}^{\widehat{n}}\gamma^{\widehat{p}} = -\frac{1}{4}\langle K\!\!\!/^{\rm cov}_4\gamma_{\widehat{m}}K\!\!\!/^{\rm cov}_4\rangle_1 + \frac{1}{12}\langle K\!\!\!/^{\rm cov}_4K\!\!\!/^{\rm cov}_4\gamma_{\widehat{m}}\rangle_1 \quad (14.113)$$

あるいは、γ-行列を使わない式 (14.70) の $\theta=0$ 成分は

$$R^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{n}} - \frac{1}{2}\eta_{\widehat{m}\widehat{n}}R^{\rm cov} = \frac{1}{2\cdot3!}K^{\rm cov}_{\widehat{m}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}K^{{\rm cov}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}}_{\widehat{n}} - \frac{1}{4\cdot4!}\eta_{\widehat{m}\widehat{n}}(K^{\rm cov}_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}\widehat{s}})^2 \quad (14.114)$$

14.4 平坦な超空間

$T(z)$ に対する次の拘束条件

$$T_{\widehat{m}\widehat{n}}{}^{\widehat{k}}(z) = T_{\widehat{m}\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{k}}(z) = 0, \quad T_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}^{\widehat{k}}(z) = \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} \quad (14.115)$$

を用いて、多脚場の θ 展開のはじめのいくつかの項を求めよう。

まず、捩率の定義を用いると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} D_\mu E_\nu{}^{\widehat{k}} - D_\nu E_\mu{}^{\widehat{k}} &= -\frac{1}{4}E_\mu{}^{\widehat{\alpha}}E_\nu{}^{\widehat{\beta}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}, && (14.116) \\ D_\alpha E_\mu{}^{\widehat{k}} - D_\mu E_\alpha{}^{\widehat{k}} &= -\frac{1}{4}E_\alpha{}^{\widehat{\alpha}}E_\mu{}^{\widehat{\beta}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}, && (14.117) \\ D_\alpha E_\beta{}^{\widehat{k}} + D_\beta E_\alpha{}^{\widehat{k}} &= \frac{1}{4}E_\alpha{}^{\widehat{\alpha}}E_\beta{}^{\widehat{\beta}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}. && (14.118) \end{aligned}$$

(14.116) の $\theta=0$ 部分は次のように与えられる。

$$\partial_\mu e_\nu^{\widehat{k}} + \omega_\mu{}^{\widehat{k}}{}_{\widehat{l}} e_\nu^{\widehat{l}} - [\mu\nu] = \frac{1}{4}\psi_\mu \gamma^{\widehat{k}} \psi_\nu \tag{14.119}$$

この関係式は、スピン接続 ω が、$e_\mu^{\widehat{m}}$ を用いて定義される部分のほかにグラビティーノからの寄与を含んでいることを意味する。

$$\omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}} = \omega_{\mu-\widehat{m}\widehat{n}}(e_\mu^{\widehat{m}}) + \frac{1}{8}(\psi_{\widehat{m}}\gamma_\mu\psi_{\widehat{n}} - \psi_{\widehat{n}}\gamma_{\widehat{m}}\psi_\mu - \psi_\mu\gamma_{\widehat{n}}\psi_{\widehat{m}}) \tag{14.120}$$

(14.117) および (14.118) の $\theta=0$ 成分は次の式を与える。

$$\partial_\alpha E_\mu{}^{\widehat{k}} = -\frac{1}{4}e_\alpha{}^{\widehat{\alpha}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\psi_\mu^{\widehat{\beta}}, \quad \partial_\alpha E_\beta{}^{\widehat{k}} + \partial_\beta E_\alpha{}^{\widehat{k}} = \frac{1}{4}e_\alpha{}^{\widehat{\alpha}} e_\beta{}^{\widehat{\beta}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}. \tag{14.121}$$

従って、$E_M{}^{\widehat{k}}$ の θ^1 項が次のように決定される。

$$E_\mu{}^{\widehat{k}} = e_\mu^{\widehat{k}} - \frac{1}{4}\theta^\alpha e_\alpha{}^{\widehat{\alpha}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\psi_\mu^{\widehat{\beta}} + \mathcal{O}(\theta^2), \quad E_\beta{}^{\widehat{k}} = \frac{1}{8}\theta^\alpha e_\alpha{}^{\widehat{\alpha}} e_\beta{}^{\widehat{\beta}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} + \mathcal{O}(\theta^2). \tag{14.122}$$

ただし $E_\beta{}^{\widehat{k}}$ については上記の形にするのに局所ローレンツ変換を持ちいた。

宇宙項が 0 である超重力理論では、場の方程式の解として平坦な時空が存在する。これを超空間に拡張し、その上での並進対称性についてみてみよう。このような背景は次のように与えることができる。

$$E_\mu{}^{\widehat{m}} = \delta_\mu^{\widehat{m}}, \quad E_\mu{}^{\widehat{\alpha}} = 0, \quad E_\alpha{}^{\widehat{\beta}} = \delta_\alpha^{\widehat{\beta}}, \quad E_\alpha{}^{\widehat{m}} = \frac{1}{8}\gamma_{\alpha\beta}^{\widehat{m}}\theta^\beta, \tag{14.123}$$

ここで注意しなければならないのは、拘束条件

$$D_\alpha E_\beta{}^{\widehat{m}} + D_\beta E_\alpha{}^{\widehat{m}} = T_{\alpha\beta}^{\widehat{m}} = \frac{1}{4}\gamma_{\alpha\beta}^{\widehat{m}} \tag{14.124}$$

を満足するために $E_\alpha{}^{\widehat{m}}$ を 0 にすることができないという点である。逆行列 $E_{\widehat{A}}{}^N$ は次のように与えられる。

$$E_{\widehat{m}}{}^\mu = \delta_{\widehat{m}}^\mu, \quad E_{\widehat{m}}{}^\alpha = 0, \quad E_{\widehat{\alpha}}{}^\beta = \delta_{\widehat{\alpha}}^\beta, \quad E_{\widehat{\alpha}}{}^\mu = -\frac{1}{8}\gamma_{\alpha\beta}^\mu\theta^\beta, \tag{14.125}$$

曲率 $\widetilde{R}_{\widehat{A}\widehat{B}-\widehat{m}\widehat{n}}$ はすべて 0 にすることができるので、スピン接続はすべての成分を 0 に取っておくことができる。

$$\omega_{M-\widehat{m}\widehat{n}} = 0. \tag{14.126}$$

大域的な超対称性変換は超空間上の一般座標変換のうち、このゲージを破らないものとして定義される。すなわち、大域的対称性の変換パラメータは次の条件を満足しなければならない。

$$E_{\widehat{B}}{}^M \delta E_M{}^{\widehat{A}} = E_{\widehat{B}}{}^M D_M \epsilon^{\widehat{A}} + \epsilon^{\widehat{C}} T_{\widehat{C}\widehat{B}}{}^{\widehat{A}} = 0. \tag{14.127}$$

$\widehat{B} = \widehat{k}$ の場合には

$$\partial_\kappa \epsilon^{\widehat{A}} = 0. \tag{14.128}$$

となり、ϵ が x^μ に依存しないことがすぐに結論される。$\widehat{B} = \widehat{\alpha}$ の場合には次の二つの式を与える。

$$E_{\widehat{\alpha}}{}^\beta D_\beta \epsilon^{\widehat{m}} + \frac{1}{4}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\epsilon^{\widehat{\beta}} = 0, \quad E_{\widehat{\alpha}}{}^\gamma D_\gamma \epsilon^{\widehat{\beta}} = 0. \tag{14.129}$$

右側の式は $\epsilon^{\widehat{\alpha}}$ が θ に依存しない定数であることを表しており、左側の式は次のように解くことができる。

$$\epsilon^{\widehat{\beta}}(z) = \xi^{\widehat{\beta}}, \quad \epsilon^{\widehat{m}}(z) = \epsilon^{\widehat{m}} - \frac{1}{4}\theta^{\widehat{\alpha}}(\gamma^{\widehat{m}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\xi^{\widehat{\beta}}. \tag{14.130}$$

添え字が接空間の場合には次のように係数が変化することに注意すること。

$$\epsilon^\mu(z) = \epsilon^{\widehat{m}}(z)E_{\widehat{m}}{}^\mu + \epsilon^{\widehat{\alpha}}(z)E_{\widehat{\alpha}}{}^\mu = \epsilon^\mu - \frac{1}{8}\theta^\alpha(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\xi^\beta \tag{14.131}$$

すなわち、背景を変化させない大域的な座標変換は次のように与えられる。

$$\theta \to \theta + \xi, \quad x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu + \frac{1}{8}\theta\gamma^\mu\xi. \tag{14.132}$$

14.5 超空間上のブレーン

超空間上の超一般座標変換とブレーン上の一般座標変換のもとで不変なブレーンの作用を書くのはきわめて簡単である。たとえば、次の南部-後藤作用はこの条件を満足する。

$$S = -T\int d^{p+1}\sigma\sqrt{-\det(G_{ij})}. \tag{14.133}$$

ただしブレーン上の座標を σ^i とし、ブレーン上に誘導された計量 G_{ij} は次のように定義される。

$$G_{ij} = (-)^{MN}\partial_i z^M \partial_j z^N g_{MN}. \tag{14.134}$$

超空間上の計量 g_{MN} は次のように定義した。

$$g_{MN} = E_M{}^{\widehat{m}} E_N{}^{\widehat{n}} \eta_{\widehat{m}\widehat{n}}. \tag{14.135}$$

この計量の定義において局所ローレンツ添え字の縮約がベクトル添え字についてのみなされていることに注意。

$\Pi^{\widehat{m}}$ を導入しよう。

$$\Pi^{\widehat{m}} = dz^M E_M{}^{\widehat{m}}. \tag{14.136}$$

Wess-Zumino ゲージでの展開式 (14.122) を代入すれば

$$\Pi^{\widehat{k}} = d\sigma^i \Pi_i^{\widehat{k}} = dx^\mu\left(e_\mu^{\widehat{k}} - \frac{1}{4}\theta^\alpha e_\alpha{}^{\widehat{\alpha}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\psi_\mu^{\widehat{\beta}}\right) + \frac{1}{8}d\theta^\beta\theta^\alpha e_\alpha{}^{\widehat{\alpha}} e_\beta{}^{\widehat{\beta}}(\gamma^{\widehat{k}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} + \mathcal{O}(\theta^2). \tag{14.137}$$

これを用いて、南部-後藤作用は次のように書くことができる。

$$S = -T\int d^{p+1}\sigma\sqrt{-\det\left(\Pi_i^{\widehat{m}}\Pi_j^{\widehat{n}}\eta_{\widehat{m}\widehat{n}}\right)} \tag{14.138}$$

前にも述べたように、この作用は明らかに超空間上の一般座標変換（すなわち通常の一般座標変換と局所的超対称変換）とブレーン上の一般座標変換に対する不変性を持っている。これが成分場で表したときにどのようになるかを見るために、$\Pi_i^{\widehat{m}}$ のフェルミオンを含む部分を次のように分離しよう。

$$\Pi_i^{\widehat{m}} = P_i^{\widehat{m}} + \frac{1}{8}\theta\gamma^{\widehat{m}}\partial_i\theta. \tag{14.139}$$

これを先ほどの南部-後藤作用に代入し、フェルミオン θ について 4 次以上の項を無視すると次のようになる。

$$S = -T\int d^{p+1}\sigma\sqrt{-\det(\widetilde{g}_{ij})}\Big[1 + \frac{1}{8}\widetilde{g}^{ij}P_j^{\widehat{m}}(\theta\gamma_{\widehat{m}}\partial_i\theta)\Big] + \mathcal{O}(\delta\Pi^2). \tag{14.140}$$

ここでブレーン上の γ-行列の役割を果たす次の行列を導入しよう。

$$\widetilde{\gamma}_i \equiv \gamma_{\widehat{m}}P_i^{\widehat{m}}. \tag{14.141}$$

Soryushiron Kenkyu

これは γ 行列とよく似た性質を満足する。

$$\{\widetilde{\gamma}_i, \widetilde{\gamma}_j\} = 2G_{ij}. \tag{14.142}$$

この γ-行列を用いると、上記の作用のフェルミオンについて二次の項は次のように書く事ができる。

$$S_\theta = -\frac{1}{8}T\int d^{2n+1}\sigma\sqrt{-\det(\widetilde{g}_{ij})}(\theta\widetilde{\gamma}^i\partial_i\theta). \tag{14.143}$$

上記の作用で与えられるブレーンが存在すると超対称性はすべて自発的に破れてしまう。これは変換則 (14.132) において超対称変換がブレーン上のフェルミオン場 θ をシフトすることから明らかである。また、ブレーンの振動モードの個数を調べてみると、ボゾン的な振動モードはブレーンに垂直な方向の個数で与えられるのに対してフェルミオン的な振動モードは時空の超対称性の個数分だけ（すなわち θ の成分数だけ）存在する。フェルミオンの力学的自由度はその成分数の半分である。このようにして決まるブレーンの力学的自由度の数は一般にはボゾンとフェルミオンとで一致しない。

超対称性を部分的に残す BPS ブレーンを表す作用を得るには、（一般にはブレーン上にゲージ場を導入した上で、）フェルミオンの自由度の数を調整するために κ-変換と呼ばれるフェルミオン的なゲージの下で不変になるように作用を変更する必要がある。これについては具体的なブレーンについて述べる際に説明する。

14.5.1 M2-ブレーン作用

M2-ブレーンの作用のボゾン部分は、ブレーンの張力 T に比例する部分とブレーンの電荷 Q に比例する部分からなり、次のように与えられる。

$$S = -T\int d^3\sigma\sqrt{-\det(G_{ij})} + Q\int A_3. \tag{14.144}$$

超対称性を持つ M2-ブレーンの作用を得るにはこれを超場形式で書かれた作用であると解釈しなおすだけでよい。[31] 第 1 項は先ほどの南部-後藤作用であるから、ここでは第二項目の Wess-Zumino 項について見てみよう。背景にゲージ場が存在しない場合、すなわち $K_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ であり、それ以外の成分は拘束条件 (14.18) によって与えられる場合を考えると、超場 K_4 は次のように与えられる。

$$K_4 = -\frac{1}{4}K_{\widehat{p}\widehat{q}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\Pi^{\widehat{p}}\wedge\Pi^{\widehat{q}}\wedge\Pi^{\widehat{\alpha}}\wedge\Pi^{\widehat{\beta}} = -\frac{1}{16}(\gamma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge d\theta^\alpha\wedge d\theta^\beta + \mathcal{O}(\theta^4). \tag{14.145}$$

従ってポテンシャルは次のように取ることができる。

$$A_3 = \frac{1}{16}dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge(\theta\gamma_{\mu\nu}d\theta) + \mathcal{O}(\theta^4). \tag{14.146}$$

これを (14.144) の Wess-Zumino 項に代入すると、

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{WZ}} &= \frac{1}{16}Q\int dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge(\theta\gamma_{\mu\nu}d\theta) + \mathcal{O}(\theta^4) \\ &= \frac{1}{16}Q\int\sqrt{-G}d^3\sigma\epsilon^{ijk}(\theta\widetilde{\gamma}_{ij}\partial_k\theta) + \mathcal{O}(\theta^4) \\ &= \frac{1}{8}Q\int\sqrt{-G}d^3\sigma(\theta\widetilde{\gamma}^k\Gamma\partial_k\theta) + \mathcal{O}(\theta^4). \end{aligned} \tag{14.147}$$

ただし、Γ を次のように定義した。

$$\Gamma\epsilon_{ijk} = \widetilde{\gamma}_{[i}\widetilde{\gamma}_j\widetilde{\gamma}_{k]}. \tag{14.148}$$

こうして Wess-Zumino 項から得られたフェルミオンの作用を南部-後藤作用から得られたものと合計すると、

$$S_{\text{fermion}} = -\frac{1}{8}\int d^3\sigma(\theta\widetilde{\gamma}^i\partial_i(T - Q\Gamma)\theta) \tag{14.149}$$

となる。ここでもし $T = |Q|$ であれば、上記の作用は次の局所的な変換で不変である。

$$\delta\theta = (T + Q\Gamma)\kappa. \tag{14.150}$$

これによりフェルミオンの自由度のうちの半分はゲージ自由度になる。

第15章　II 型超重力理論

15.1　10 次元のスピノル

10 次元の γ 行列やスピノルについては、11 次元と全く同じ物を用いる。荷電共役行列、ディラック共役、マヨラナ条件など、すべて 11 次元と同じ物を用いる。

10 次元の荷電共役行列は次の式を満足する。

$$\gamma^\mu C = -C(\gamma^\mu)^T, \quad C^T = -C. \tag{15.1}$$

ディラック共役は次のように定義される。

$$\overline{\psi} = i\psi^\dagger\gamma^0. \tag{15.2}$$

10 次元にはマヨラナワイルスピノルが存在する。ワイルスピノルは γ^{11} の $+1$ または -1 の固有ベクトルとして定義される。γ^{11} の正の固有値に対応するものを左巻き、負の固有値に対応するものを右巻きと呼ぶことにする。

二つのマヨラナスピノルの 2 次形式に対して次の式が成り立つ。

- 転置公式
$$(\psi_1\gamma^{\mu_1\cdots\mu_k}\psi_2) = (-)^k(\psi_2\gamma^{\mu_k\cdots\mu_1}\psi_1). \tag{15.3}$$

- 共役公式
$$(\psi_1\gamma^{\mu_1\cdots\mu_k}\psi_2) = (-)^k(\psi_2\gamma^{\mu_k\cdots\mu_1}\psi_1) = (\psi_1\gamma^{\mu_1\cdots\mu_k}\psi_2). \tag{15.4}$$

10 次元完全反対称テンソル ϵ_{10} の符号は特に指定しないが、任意の 10 階完全反対称テンソル場 X_{10} に対して次の式が成り立つものとする。

$$\int X_{10} = \int d^{10}x\sqrt{-g}\frac{\mathrm{tr}}{32}X_{10}\gamma^{11} = \int d^{10}x\frac{1}{10!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}X_{\mu_1\cdots\mu_{10}} \tag{15.5}$$

15.2　IIA 型超重力理論の作用と超対称変換

10 次元には、超重力理論が 3 種類存在することが知られており、それぞれ IIA 型、IIB 型、I 型と呼ばれる。IIA 型と IIB 型の理論はマヨラナワイルで数えて二つの、I 型理論は一つの超対称電荷を持つ。

IIA 型と IIB 型の理論は二つの超対称電荷の相対的なカイラリティによって区別され、互いに反対のカイラリティを持つ場合を IIA 型、同じカイラリティを持つ場合を IIB 型と呼ぶ。この節ではまず IIA 型理論について考える。

Soryushiron Kenkyu

IIA 型超重力理論に含まれる場は全て零質量である。光錐座標をとって光錐方向に直行する方向に注目すれば、物理的なモードは SO(8) の表現として分類することができる。IIA 型理論の物理的モードの個数は 11 次元超重力理論と同じ 256 個であり、SO(8) の次の表現に属している。

$$(\mathbf{8_v} + \mathbf{8_s}) \times (\mathbf{8_v} + \mathbf{8_c}). \tag{15.6}$$

これらのうち、スピンが整数、すなわちベクトルの添え字のみで表すことができる表現、すなわち $\mathbf{8_v} \times \mathbf{8_v}$ と $\mathbf{8_s} \times \mathbf{8_c}$ に属する場はボゾンであり、スピノルの添え字を一つ持つ $\mathbf{8_v} \times \mathbf{8_c}$ と $\mathbf{8_s} \times \mathbf{8_v}$ に属する場はフェルミオンである。

$\mathbf{8_s} \times \mathbf{8_c}$ に属する場は R-R 場と呼ばれるが、既約分解するといくつかの反対称テンソル場によって表される。それらに対応する場の強さは 2 階、4 階の反対称テンソルであり、その双対場は 8 階と 6 階の反対称テンソルである。さらに IIA 型理論には宇宙定数に対応するパラメータがあり、このパラメータまで含めると全ての偶数階のテンソル場が現れる。これらを全てまとめて扱うことにより、IIA 型超重力理論の運動方程式は比較的単純な形に書くことができる。

一方、IIA 型理論の作用を構成するためには、偶数階のテンソル場を電気的な場と磁気的な場に分け、電気的な場の強さをポテンシャルで表す必要がある。そのため、偶数階のテンソル全てをまとめて扱うことができなくなり、作用の形は少し複雑になる。そこで以下ではまず反対称テンソル場の場の強さが満足する運動方程式を与え、その後でポテンシャルを導入して超対称不変な作用を与えることにする。

まず、IIA 型理論を構成する場を与えておこう。ボゾン場は重力場、3 階反対称テンソル場 $H_{\mu\nu\rho}$ (これはポテンシャルである。)、ディラトン場、そして R-R 場よりなる。$H_{\mu\nu\rho}$ は場の強さを表すテンソル場であり、対応するポテンシャルを $B_{\mu\nu}$ とする。重力場は計量 $g_{\mu\nu}$ または多脚場 $e_\mu^{\widehat{m}}$ によって表現される。R-R 場の場の強さは偶数階の反対称テンソルとして表現され、それらを G_{2n} $(n = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ と書くことにする。フェルミオンはグラビティーノ ψ_μ とディラティーノ λ からなる。これらはどちらもマヨラナスピノルである。それぞれ二つのマヨラナワイルスピノルに分解することもできるが、一つのマヨラナスピノルとしてまとめて表すほうが以下の計算には便利である。

作用および変換則を書き下すためには、ゲージ場の強さを、ビアンキ恒等式を満足するようにポテンシャルであらわす必要がある。まず、R-R 場のビアンキ恒等式は

$$dm = 0, \quad dG_2 = mH_3, \quad dG_4 = H_3 \wedge G_2. \tag{15.7}$$

最初の式は m が力学的自由度を持たない定数、つまり理論のパラメータであることを意味している。NS-NS 反対称テンソル場のビアンキ恒等式は

$$dH_3 = 0, \tag{15.8}$$

である。これらのビアンキ恒等式を満足させるためには場の強さをポテンシャルを用いて次のようにあらわしておけばよい。

Soryushiron Kenkyu

場の強さとポテンシャル

IIA 型超重力理論の場の強さとポテンシャルの間の関係は次のように与えられる。

$$H_3 = dB_2, \quad G_2 = dC_1 + mB_2, \quad G_4 = dC_3 + B_2 \wedge dC_1 + \frac{m}{2} B_2 \wedge B_2. \tag{15.9}$$

これらの場の強さは次のゲージ変換のもとで不変である。

$$\delta B_2 = d\Lambda_1, \quad \delta C_3 = d\Lambda_2 - \Lambda_1 \wedge dC_1, \quad \delta C_1 = d\Lambda_0 - m\Lambda_1. \tag{15.10}$$

$\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ はそれぞれ独立なゲージ変換のパラメータである。これらのうち、Λ_1 による変換はすべての反対称テンソル場を変化させることに注意しなければならない。

さらに、作用および超対称変換を書くために次の量を定義しておくのが便利である。

$$\not{H}_3 = \frac{1}{3!} H_{mnp} \gamma^{mnp}, \quad \not{G}_2 = \frac{1}{2!} G_{mn} \gamma^{mn}, \quad \not{G}_4 = \frac{1}{4!} G_{mnpq} \gamma^{mnpq}. \tag{15.11}$$

さらに、R-R 場をすべてまとめて次の行列を定義しておく。

$$\not{G} = -m + \not{G}_2 \gamma^{\widehat{11}} - \not{G}_4. \tag{15.12}$$

$\not{G}$ は偶数個の γ-行列の積を含み、カイラリティを変化させない。また、荷電共役の意味で対称な行列である。すなわち、次の条件を満足する。

$$\not{G} \gamma^{11} = \gamma^{11} \not{G}, \quad \not{G} C = C \not{G}^T. \tag{15.13}$$

ようやく IIA 型超重力理論の作用を与える準備が整った。次に与える作用は、あとで行う議論には影響しないフェルミオンについて 4 次の項を無視したものである。

IIA 型超重力理論のラグランジアン

IIA 型超重力理論のラグランジアンは以下に与える 7 つのラグランジアンの和である。（あとで参照するときに便利なように 7 つの部分に分けておいた。）重力とディラトン場、$B_{\mu\nu}$ に対する運動項

$$\frac{\mathcal{L}_{\rm grav}}{2\pi}=\frac{e}{e^{2\phi}}[R+4(\partial_\mu\phi)^2],\quad \frac{\mathcal{L}_{HH}}{2\pi}=-\frac{e}{e^{2\phi}}\frac{1}{2\cdot 3!}H^2_{\mu\nu\rho},\tag{15.14}$$

R-R 場の運動項

$$\frac{\mathcal{L}_{GG}}{2\pi}=-\frac{e}{2}m^2-\frac{e}{4}G^2_{\mu\nu}-\frac{e}{2\cdot 4!}G^2_{\mu\nu\rho\sigma}.\tag{15.15}$$

位相項

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}_{\rm top}}{2\pi} &= -\frac{1}{2}B_2dC_3dC_3-\frac{1}{2}B_2^2dC_1dC_3-\frac{m}{6}B_2^3dC_3-\frac{1}{6}B_2^3dC_1dC_1-\frac{m}{8}B_2^4dC_1-\frac{m^2}{40}B_2^5\\ &= -\frac{1}{2}B_2G_4G_4+\frac{1}{2}B_2^2G_2G_4-\frac{m}{6}B_2^3G_4-\frac{1}{6}B_2^3G_2^2+\frac{m}{8}B_2^4G_2-\frac{m^2}{40}B_2^5.\end{aligned}\tag{15.16}$$

この位相項については外微分形式を用いて 10-形式としてラグランジアンを与えた。$\wedge$ 記号は省略した。その積分は (15.5) を満足するように定義されている。m を含む項の係数は (15.10) のもとでのゲージ不変性より一意的に決めることができる。
フェルミオンを含む項は以下の 3 つに分けられる。

$$\frac{\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} = \frac{e}{2e^{2\phi}}(\psi_\mu\not{D}^{(\omega)}\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu-\psi_\mu\not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\lambda-\lambda\not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\psi_\mu+\lambda\not{D}^{(\omega)}\lambda),\tag{15.17}$$

$$\frac{\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi} = \frac{e}{8e^{2\phi}}(-\psi_m\gamma^{[m}\not{H}_3\gamma^{n]}\gamma_{11}\psi_n-2\psi_m\langle\gamma^m\not{H}_3\rangle_4\gamma_{11}\lambda-\lambda\not{H}_3\gamma_{11}\lambda),\tag{15.18}$$

$$\frac{\mathcal{L}_{fGf}}{2\pi} = \frac{e}{16e^{\phi}}(-2\psi_m\gamma^{[m}\not{G}\gamma^{n]}\psi_n+2\psi_\mu\gamma^\mu\not{G}\lambda+\lambda\not{G}\lambda).\tag{15.19}$$

ここで与えた作用はアインシュタイン作用の係数が $e^{-2\phi}$ を含んでいるが、このような計量の取り方は弦計量と呼ばれる。
上記の作用を不変に保つ局所的超対称変換は次のように与えられる。

IIA 型超重力理論の変換則

フェルミオンの変換則は、

$$\delta\psi_\mu = D_\mu^{(\omega)}\xi + \frac{1}{4}\langle \not{H}_3\gamma_\mu\rangle_2\gamma_{11}\xi + \frac{e^\phi}{8}\not{G}\gamma_\mu\xi, \tag{15.20}$$

$$\delta\lambda = (\not{\partial}\phi)\xi + \frac{1}{2}\not{H}_3\gamma_{11}\xi + \frac{e^\phi}{8}\gamma^\mu\not{G}\gamma_\mu\xi. \tag{15.21}$$

ボゾンの変換則は

$$\delta e^\mu_{\widehat{m}} = \frac{1}{4}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^\mu\xi), \quad \delta\phi = \frac{1}{8}(\lambda\xi), \tag{15.22}$$

$$\delta B_2 = \theta_2, \quad \delta C_1 = \theta_1, \quad \delta C_3 = \theta_3 - B_2\wedge\theta_1. \tag{15.23}$$

ただし、θ_1、θ_2、θ_3 は次のように定義される反対称テンソルである。

$$\theta_{mn} = \frac{1}{4}(\psi_\mu\langle\gamma_{mn}\gamma^\mu\rangle_1\gamma_{11}\xi) = \frac{1}{4}[(\psi_n\gamma_m\gamma_{11}\xi) - (\psi_m\gamma_n\gamma_{11}\xi)], \tag{15.24}$$

$$\theta_\mu = -\frac{1}{8e^\phi}(2\overline{\psi}_\mu\gamma_{\widehat{11}}\xi + \overline{\lambda}\gamma_\mu\gamma_{\widehat{11}}\xi), \tag{15.25}$$

$$\begin{aligned}\theta_{\mu\nu\rho} &= -\frac{1}{8e^\phi}(2\overline{\psi}_\mu\gamma_{\nu\rho}\xi + 2\overline{\psi}_\nu\gamma_{\rho\mu}\xi + 2\overline{\psi}_\rho\gamma_{\mu\nu}\xi + \overline{\lambda}\gamma_{\mu\nu\rho}\xi) \\ &= -\frac{1}{8e^\phi}(2\overline{\psi}_\sigma\langle\gamma_{\mu\nu\rho}\gamma^\sigma\rangle_2\xi + \overline{\lambda}\gamma_{\mu\nu\rho}\xi)\end{aligned} \tag{15.26}$$

反対称テンソル場の強さは次のように変換される。

$$\delta H_3 = d\theta_2, \quad \delta G_2 = d\theta_1 + m\theta_2, \quad \delta G_4 = d\theta_3 + G_2\wedge\theta_2 - H_3\wedge\theta_1. \tag{15.27}$$

II 型超重力理論の R-R ゲージ場は、作用の代わりに運動方程式やビアンキ方程式を用いれば、その双対場も含めてまとめてきれいな形に表す事ができる。[32] 通常、あるゲージ場 A とその場の強さ $F = dA$ が与えられた場合、その双対場の強さは作用を F で変分することで $\delta S = \int \widetilde{F}\wedge\delta F$ のように定義する。そうすれば A に対する運動方程式 $d\widetilde{F} = 0$ が双対場のビアンキ方程式を与え、$\widetilde{F} = d\widetilde{A}$ と書けることを保証する。IIA 型超重力理論の R-R 場の場合には、その場の強さが単に dC ではないので、少し工夫する必要がある。もっともよい取り方は、作用のうち位相項を除いた部分だけを用いて上記のように双対場を定義する方法である。位相項を除くと、R-R 場を含む作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{S_{GG}}{2\pi} + \frac{S_{fGf}}{2\pi} &= \frac{1}{2}\int m\wedge *m + G_2\wedge *G_2 + G_4\wedge *G_4 \\ &\quad + \int m\wedge *\kappa_0 + G_2\wedge *\kappa_2 + G_4\wedge *\kappa_4.\end{aligned} \tag{15.28}$$

ただし、κ_n はそれぞれ次のように与えられるフェルミオンの 2 次形式である。

$$\kappa_0 = \frac{1}{16e^\phi}(2\psi_m\gamma^{mn}\psi_n - 2\psi_m\gamma^m\lambda - \lambda\lambda), \tag{15.29}$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{16e^\phi}(2\psi_m\gamma^{[m}\gamma_2\gamma^{n]}\gamma^{11}\psi_n + 2\psi_m\gamma^m\gamma_2\gamma^{11}\lambda + \lambda\gamma_2\gamma^{11}\lambda), \tag{15.30}$$

$$\kappa_4 = \frac{1}{16e^\phi}(2\psi_m\gamma^{[m}\gamma_4\gamma^{n]}\psi_n - 2\psi_m\gamma^m\gamma_4\lambda - \lambda\gamma_4\lambda). \tag{15.31}$$

作用 (15.28) を m、G_2、G_4 によって変分することで、それぞれの双対場は次のように定義される。

$$G_6 = *(G_4 - \kappa_4), \quad G_8 = -*(G_2 - \kappa_2), \quad G_{10} = *(m - \kappa_0). \tag{15.32}$$

Soryushiron Kenkyu

もとの場の強さとここで定義した双対場の形式和を次のように定義する。

$$G_{\text{even}} = m + G_2 + G_4 + G_6 + G_8 + G_{10}. \tag{15.33}$$

上記で双対場を定義する際に位相項を無視したためにそれらのビアンキ恒等式は $dG_{2n} = 0$ から位相項の寄与の分だけずれる。位相項まで含めた作用全体から得られる運動方程式は、m、G_2、G_4 に対するビアンキ恒等式も含め、この形式和を用いて次のように単純な形に書くことができる。

$$dG_{\text{even}} = H_3 \wedge G_{\text{even}} \tag{15.34}$$

G_{even} はその定義より次の自己双対条件を満足する。

$$*\, G_{\text{even}} + \mathcal{T} G_{\text{even}} = *\kappa_0 + *\kappa_2 + *\kappa_4 + \kappa_4 - \kappa_2 + \kappa_0. \tag{15.35}$$

ただし、$\mathcal{T}$ は外微分形式の「転置」を表す記号であり、

$$\mathcal{T}(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}) = dx^{i_n} \wedge \cdots \wedge dx^{i_1}. \tag{15.36}$$

のような演算を表す。この演算は n-形式場に対して符号 $(-)^{\pi(n)}$ を与える。(15.34) は電気的な場と磁気的な場の両方に対する式を含んでいる。(15.35) とあわせれば、この式は電気的な R-R 場に対する運動方程式とビアンキ恒等式を含んでいる。

R-R 場のポテンシャルを導入しビアンキ恒等式 (15.34) を満足するように場の強さをポテンシャルで表そう。(15.34) を満足するような場の強さをポテンシャルを用いてあらわす方法は一通りではない。

まず、一番目の方法としては次のようにあらわすことができる。(後に述べる別のポテンシャルと定義するために (1) という番号をつけて区別する。)

$$G_{\text{even}} = e^{B_2} \wedge G^0_{\text{even}} = e^{B_2} \wedge (m + dC^{(1)}_{\text{odd}}). \tag{15.37}$$

G^0_{even} は $dG^0_{\text{even}} = 0$ を満足する反対称テンソルの形式和であり、階数が 2 以上の部分については $G^0_{\text{even}} = dC^{(1)}_{\text{odd}}$ のようにポテンシャル $C^{(1)}_{\text{odd}}$ を用いて表すことができる。$C^{(1)}_{\text{odd}}$ は G_{even} 同様異なる階数の反対称テンソルの形式的な和であり、奇数階のテンソルのみを含む。G^0_{even} のスカラー部分はポテンシャルを用いて表すことはできず、理論のパラメータを表す定数であると解釈される。

2 番目の方法は、$C^{(1)}_{\text{odd}}$ のかわりに $C^{(2)}_{\text{odd}} = e^{B_2} C^{(1)}_{\text{odd}}$ を用いる方法である。この場合には、場の強さは次のように書くことができる。

$$G_{\text{even}} = dC^{(2)}_{\text{odd}} - H_3 \wedge C^{(2)}_{\text{odd}} + m e^{B_2}. \tag{15.38}$$

この定義を用いると、$m = 0$ である場合に場の強さがポテンシャルの高々 2 次になるという利点がある。

前に与えた作用、変換則はポテンシャルとして前者、すなわち $C^{(1)}_{\text{odd}}$ を用いて書いている。以下でも $C^{(1)}_{\text{odd}}$ を用いることにする。

(15.35) と矛盾しないように双対ポテンシャルの超対称変換を決定しよう。ポテンシャルの形式和 C_{odd} の変換則を次のように置こう。

$$\delta C_{\text{odd}} = e^{-B_2} \wedge \theta_{\text{odd}} \tag{15.39}$$

Soryushiron Kenkyu

C_1 や C_3 の変換則 (15.23) は実際に (15.39) の形をしており、θ_1 と θ_3 は (15.26) と (15.26) にすでに与えられている。あとは θ_5、θ_7、θ_9 を決定すればよい。(15.39) を場の強さ (15.37) に代入すれば、場の強さの変換則が次のように与えられる。

$$\delta G_{\rm even} = d\theta_{\rm odd} + \theta_2 \wedge G_{\rm even} - H_3 \wedge \theta_{\rm odd}. \tag{15.40}$$

θ_5 を決定するために (15.40) の 6-形式部分を $d\theta_5$ について解くと次の式を得る。

$$d\theta_5 = \delta[*(G_4 - \kappa_4)] - \theta_2 \wedge G_4 + H_3 \wedge \theta_3. \tag{15.41}$$

この式の右辺を計算して、θ_5 を決定しよう。ただし、この式は質量殻上でのみ成り立つことに注意しよう。このことまで考慮して θ_5 を決定するには、変換パラメータ ξ の微分を含む項に注目すれば良い。ξ の微分を含む項は運動方程式で 0 になる項からは決して現れないので、運動方程式を考慮する必要がなくなる。そのような項は、G_4 の超対称変換の中の $d\theta_3$ から現れるものと、κ_4 の中のグラビティーノを変換して現れるものだけである。この二つの部分を実際に計算してみると、次のようになることがわかる。

$$\begin{aligned} *\delta G_4 &= *d\theta_3 \quad + (\text{no } D\xi \text{ terms}) \\ &= -\frac{1}{8e^{\phi}}(2\psi_m\langle\gamma^m\gamma_6 \not{D}^{(\omega)}\rangle_8\gamma_{11}\xi + \lambda\langle\gamma_6\not{D}^{(\omega)}\rangle_7\gamma^{11}\xi) + (\text{no } D\xi \text{ terms}). \end{aligned} \tag{15.42}$$

次に、κ_4 の超対称変換から得られる変分であるが、

$$- *\delta\kappa_4 = \frac{1}{8e^{\phi}}(2\psi_m\langle\gamma^m\gamma_6\not{D}^{(\omega)}\rangle_{8,4}\gamma_{11}\xi + \lambda\gamma_6\not{D}^{(\omega)}\gamma_{11}\xi) + (\text{no } D\xi \text{ terms}). \tag{15.43}$$

これら二つの寄与を加えると、

$$d\theta_5 = -\frac{1}{8e^{\phi}}(2\psi_m\langle\not{D}^{(\omega)}\gamma_6\gamma^m\rangle_4\gamma_{11}\xi + \lambda\langle\not{D}^{(\omega)}\gamma_6\rangle_5\gamma^{11}\xi) + (\text{no } D\xi \text{ terms}). \tag{15.44}$$

ここで、$\langle\not{D}^{(\omega)}\gamma_6\rangle_5 = D^{(\omega)} \wedge \gamma_5$ を用いると、式中の共変微分を外微分として書きかえることができて、θ_5 として次の表式を得る。

$$\theta_5 = -\frac{1}{8e^{\phi}}(2\psi_m\langle\gamma_5\gamma^m\rangle_4\gamma^{11}\xi + \lambda\gamma_5\gamma^{11}\xi). \tag{15.45}$$

同様な計算を繰り返すことによって θ_7 および θ_9 も次のように得ることができる。

$$\theta_7 = -\frac{1}{8e^{\phi}}(2\psi_m\langle\gamma_7\gamma^m\rangle_6\xi + \lambda\gamma_7\xi), \tag{15.46}$$

$$\theta_9 = -\frac{1}{8e^{\phi}}(2\psi_m\langle\gamma_9\gamma^m\rangle_8\gamma^{11}\xi + \lambda\gamma_9\gamma^{11}\xi). \tag{15.47}$$

ついでに、H_3 についても双対場の超対称変換を決定しておこう。そのためにはまず B_2 の運動方程式を与える必要がある。。まず、ボゾン部分だけを考慮すると、B_2 による作用の変分は次のように与えられる。

$$\frac{\delta S_{\rm bosonic}}{2\pi} = \int \Big(d(e^{-2\phi} * H_3) + m * G_2 + G_2 \wedge *G_4 - \frac{1}{2}G_4 \wedge G_4\Big) \wedge \delta B_2. \tag{15.48}$$

この変分に現れている $*G$ は双対場とはフェルミオンの寄与の分だけずれているが、S_{fGf} からの寄与がちょうどこのずれを与える。$\delta G_n = \delta B_2 \wedge G_{n-2}$ を用いれば S_{fGf} の変分は次のように与えられる。

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{fGf}}{2\pi} = \int \Big(- m \wedge *\kappa_2 - G_2 \wedge *\kappa_4\Big) \wedge \delta B_2 \tag{15.49}$$

この変分を上記の変分に加え、さらに R-R 場の双対関係を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_{\rm bosonic}}{2\pi}+\frac{\delta S_{fGf}}{2\pi} &= \int\Big(d(e^{-2\phi}*H_3)-mG_8+G_2\wedge G_6-\frac{1}{2}G_4\wedge G_4\Big)\wedge\delta B_2\\ &= \int\Big(d(e^{-2\phi}*H_3)-\frac{1}{2}(\mathcal{T}G_{\rm even}\wedge G_{\rm even})_8\Big)\wedge\delta B_2. \end{aligned}\tag{15.50}$$

ただし、$(\cdots)_8$ は 8-形式部分のみを取り出す操作を表す。この式の最後の表式にはフェルミオンの寄与は現れない。$G_{\rm even}=e^{B_2}\wedge G^0_{\rm even}$ および $\mathcal{T}G_{\rm even}=e^{-B_2}\wedge\mathcal{T}G^0_{\rm even}$ を用いれば、この式の中の $G_{\rm even}$ を $G^0_{\rm even}$ に置き換えてもよいことがわかる。最後に S_{fHf} の寄与まで加えれば、次の運動方程式を得る。

$$d(e^{-2\phi}*(H_3-\kappa_3))=\frac{1}{2}(\mathcal{T}G^0_{\rm even}\wedge G^0_{\rm even})_8.\tag{15.51}$$

ここで、H_3 の双対場 H_7 を次の関係式で定義しよう。

$$H_7=e^{-2\phi}*(H_3-\kappa_3)\tag{15.52}$$

H_3 に対する運動方程式より、H_7 の満足すべきビアンキ恒等式は次のように与えられる。

$$dH_7=\frac{1}{2}(\mathcal{T}G^0_{\rm even}\wedge G^0_{\rm even})_8=-\frac{1}{2}d(\mathcal{T}C_{\rm odd}\wedge dC_{\rm odd})_7\tag{15.53}$$

ただしここでは $m=0$ を仮定した。$m\neq 0$ の場合には m を含む項だけ分けて書けばよいが、ここではその手間を省くために $m=0$ である場合だけを考える。(15.53) を満足する H_7 はポテンシャル B_6 を用いて次のように与えることができる。

$$H_7=dB_6-\frac{1}{2}(\mathcal{T}C_{\rm odd}\wedge dC_{\rm odd})_7.\tag{15.54}$$

B_6 の超対称変換を決定しよう。これは (15.52) と矛盾しないように決める。(15.52) の両辺を超対称変換しよう。すると次の式を得る。

$$d\delta_{\rm ss}B_6+d\frac{1}{2}(\mathcal{T}C_{\rm odd}\wedge e^{B_2}\wedge\theta_{\rm odd})_6=e^{-2\phi}*(d\theta_2-\delta_{ss}\kappa_3)+(\text{no }D\xi\text{ term})\tag{15.55}$$

この式が質量殻上で成り立てばよいので、運動方程式を用いることができる。B_6 の変換則を決定するには、$D\xi$ を含む項を見るだけで十分である。そのような項は運動方程式の影響を受けないので、運動方程式を考慮する必要はない。

(15.55) の左辺は exact な形をしているので、右辺もそのような形に変形しよう。まず、Hodge 双対をとる前の式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} d\theta_2 &= d\frac{1}{4}(\psi_\mu\langle\gamma_2\gamma^\mu\rangle_1\gamma^{11}\xi)=\frac{1}{4}(\psi_\mu\langle \not{D}^{(\omega)}\gamma_3\gamma^\mu\rangle_1\gamma^{11}\xi), &(15.56)\\ \delta\kappa_3 &= \frac{1}{4}(\psi_\mu\langle\not{D}^{(\omega)}\gamma_3\gamma^\mu\rangle_{5,1}\gamma^{11}\xi+\lambda\langle\not{D}^{(\omega)}\gamma_3\rangle_4\gamma^{11}\xi). &(15.57)\end{aligned}$$

従って、これらを加えると次のようになる。

$$d\theta_2-\delta\kappa_3=-\frac{1}{4}(\psi_\mu\langle\not{D}^{(\omega)}\gamma_3\gamma^\mu\rangle_5\gamma^{11}\xi+\lambda\langle\not{D}^{(\omega)}\gamma_3\rangle_4\gamma^{11}\xi)\tag{15.58}$$

さらに Hodge dual をとると、次のように微分を外に出すことができる。

$$*(d\theta_2-\delta\kappa_3)=\frac{1}{4}(\psi_\mu\langle\not{D}^{(\omega)}\gamma_7\gamma^\mu\rangle_5\xi-\lambda\langle\not{D}^{(\omega)}\gamma_7\rangle_6\xi)=d\frac{1}{4}(\psi_\mu\langle\gamma_6\gamma^\mu\rangle_5\xi-\lambda\gamma_6\xi)\tag{15.59}$$

従って、B_6 の変換則は次のように決定される。

$$\delta B_6=\theta_6-\frac{1}{2}(\mathcal{T}C_{\rm odd}\wedge e^{B_2}\wedge\theta_{\rm odd})_6\tag{15.60}$$

ただし、θ_6 は次のように定義される。

$$\theta_6=\frac{1}{4e^{2\phi}}(\psi_\mu\langle\gamma_6\gamma^\mu\rangle_5\xi-\lambda\gamma_6\xi)\tag{15.61}$$

15.3 アインシュタイン計量

超重力理論の文献では、しばしばアインシュタイン計量、すなわちアインシュタイン作用 $\sqrt{-g}R$ の係数がディラトン場に依存しない定数になる計量が用いられる。そこで他の文献との比較に便利なように、先ほど与えた弦計量での作用とアインシュタイン計量での作用の間の関係を簡単に述べておこう。

10 次元の弦計量とアインシュタイン計量

10 次元 II 型超重力理論において、弦計量からアインシュタイン計量に移るには、次のワイル変換を行う。

$$g^{\rm str}_{\mu\nu}=e^{\phi/2}g^E_{\mu\nu},\quad e^{\rm str}_{\mu\widehat{m}}=e^{\phi/4}e^E_{\mu\widehat{m}}. \tag{15.62}$$

超対称変換に余計な指数因子が現れないように、フェルミオンに対しても次のワイル変換を行う。

$$\xi^{\rm str}=e^{\phi/8}\xi^E,\quad \psi_\mu=e^{\phi/8}\psi'_\mu,\quad \lambda=e^{-\phi/8}\lambda'. \tag{15.63}$$

アインシュタイン計量は、運動項についてディラトンとグラビトンの混合を解いた形であるということもできる。アインシュタイン計量での作用を書く際にはさらに、グラビティーノとディラティーノのあいだの適当な線形変換を行うことによってフェルミオンの間の混合も解いた形がよく用いられる。そのためにはワイル変換によってえられた ψ'_μ と λ' に対してさらに次の線形変換を行うことにより ψ^E_μ と λ^E を定義する。

$$\psi^E_\mu=\psi'_\mu-\frac{1}{8}\gamma_\mu\lambda',\quad \lambda^E=\lambda'. \tag{15.64}$$

この式の中に現れている $\gamma_\mu=e_{\mu\widehat{m}}\gamma^{\widehat{m}}$ は、ワイル変換を行った後のアインシュタイン計量を用いて定義されたものである。

この変換によって、ボゾン場の運動項は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{e^{-1}L_b}{2\pi} &= R-\frac{1}{2}(\partial^m\phi)(\partial_m\phi)-\frac{1}{12e^\phi}H^{mnp}H_{mnp}\\ &\quad -\frac{1}{2}m^2e^{(5/2)\phi}-\frac{1}{4}e^{(3/2)\phi}G^{mn}G_{mn}-\frac{1}{48}e^{(1/2)\phi}G^{mnpq}G_{mnpq}.\end{aligned} \tag{15.65}$$

ボゾンだけからなる項はこれ以外に位相項があるが、この項は計量を含まないために、ワイル変換によって形を変えない。

また、フェルミオンの運動項は次のように書きなおされる。

$$\frac{e^{-1}L_f}{2\pi}=-\frac{1}{2}\psi_m\gamma^{mnp}D^{(\omega)}_n\psi_p-\frac{1}{16}\lambda\gamma^mD^{(\omega)}_m\lambda+\frac{1}{8}(\partial_n\phi)\lambda\gamma^m\gamma^n\psi_m. \tag{15.66}$$

三点結合項に対しても上記の変換を行えば次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{e^{-1}L_{fGf}}{2\pi} &= \frac{1}{8}e^{(5/4)\phi}m\left[\psi_m\gamma^{mn}\psi_n-\frac{5}{4}\lambda\gamma^m\psi_m-\frac{21}{32}\lambda\lambda\right]\\ &\quad +\frac{1}{8\cdot 2}e^{(3/4)\phi}G_{ab}\left[\psi^m\gamma_{[m}\gamma^{ab}\gamma_{n]}\gamma_{11}\psi^n-\frac{3}{4}\lambda\gamma^m\gamma^{ab}\gamma_{11}\psi_m+\frac{5}{32}\lambda\gamma^{ab}\gamma_{11}\lambda\right]\\ &\quad +\frac{1}{8\cdot 4!}e^{(1/4)\phi}G_{abcd}\left[\psi^m\gamma_{[m}\gamma^{abcd}\gamma_{n]}\psi^n-\frac{1}{4}\lambda\gamma^m\gamma^{abcd}\psi_m+\frac{3}{32}\lambda\gamma^{abcd}\lambda\right]\end{aligned} \tag{15.67}$$

$$\frac{e^{-1}L_{fHf}}{2\pi} = \frac{1}{8\cdot 3!}e^{-(1/2)\phi}H_{abc}\left(-\psi^m\gamma_{[m}\gamma^{abc}\gamma_{n]}\gamma_{11}\psi^n+\frac{1}{2}\lambda\gamma^m\gamma^{abc}\gamma_{11}\psi_m\right) \tag{15.68}$$

Soryushiron Kenkyu

質量パラメータが 0 である IIA 型超重力理論の作用および変換則は M.Huq and M.A.Namazie [33] によって初めて与えられた。この論文の作用は上で与えたアインシュタイン計量での作用に対して次の置き換えを行うことによって得られる。

$$e^{\phi} \to \phi^{3/2}, \quad (2\pi l_N)^3 F_4 \to 2F_4, \quad (2\pi l_N)^2 H_3 \to 2F_3, \quad (2\pi l_N) F_2 \to F_2. \tag{15.69}$$

ラグランジアンの全体の係数が異なるが、古典論を議論している限り物理的に意味ない。

一般の質量パラメータを持つ IIA 型超重力理論は L.Romans [34] によって最初に与えられた。そこでの記号とわれわれの記号の間の関係は次のように与えられる。

$$g_{\mu\nu}^{\rm ours} = g_{\mu\nu}^{\rm Rom}, \quad \frac{L^{\rm ours}}{2\pi} = -4L^{\rm Rom}, \tag{15.70}$$

これ以外のボゾン場については、次のように関係している。

$$\begin{aligned} &\phi^{\rm ours} = -2\phi^{\rm Rom}, \quad H_3^{\rm ours} = -2G_3^{\rm Rom}, \\ &m^{\rm ours} = -m^{\rm Rom}, \quad G_2^{\rm ours} = +2m^{\rm Rom} B_2^{\rm Rom}, \quad G_4^{\rm ours} = -2F_4^{\rm Rom}. \end{aligned} \tag{15.71}$$

ただし、Romans の論文では B_2 に対するゲージ変換を用いて R-R 1-形式場が $C_\mu = 0$ となるゲージを取っている。フェルミオンについては、次のように関係している。

$$\psi_m^{\rm ours} = 2\psi_m^{\rm Rom}, \quad \overline{\psi}_m^{\rm ours} = 2\overline{\psi}_m^{\rm Rom}, \quad \lambda^{\rm ours} = -4\sqrt{2}\lambda^{\rm Rom}, \quad \overline{\lambda}^{\rm ours} = 4\sqrt{2}\overline{\lambda}^{\rm Rom}. \tag{15.72}$$

15.4 IIA 型超重力理論の変分計算

15.4.1 共通部分

ここでは IIA 型超重力理論の作用が実際に超対称変換のもとで不変であることをフェルミオンについて 2 次までのオーダーで示す。その際に次の事実を知っておくと、計算の方針を立てやすくなる。

- 作用の中の H_3 および G をすべて 0 とおいたものは H_3 および G を 0 とおいた変換則のもとで不変である。
- 作用の中の G をすべて 0 とおいたものは G を 0 とおいた変換則のもとで不変である。

作用中でゲージ場 H_3 や G について一次の項は必ずフェルミオンを二つ含んでいるから、フェルミオンの 4 次の項を無視しているここでの近似では、作用全体が超対称変換のもとで不変である時にこれらの事実が成り立つことは明らかである。ここではまず作用全体の超対称変換のもとでの不変性を仮定せずに実際に変分計算を行うことによってこれらの事実を確認することからはじめる。実はこれらの事実は、時空の次元が 10 であることにはよらずに成り立つ。したがって後にほかの次元での作用の不変性を示すのにここでの計算を用いることができる。

まず、ゲージ場を含まない部分からはじめよう。考慮すべき場は多脚場、ディラトン、グラビティーノ、ディラティーノであり、これらの作用は次のように与えられる。

$$\frac{\mathcal{L}_{\rm grav}}{2\pi} = \frac{e}{e^{2\phi}}(R + 4(\partial\phi)^2), \tag{15.73}$$

$$\frac{\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} = \frac{e}{2e^{2\phi}}(\psi_\mu \not{D}^{(\omega)}\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu - \psi_\mu \not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\lambda - \lambda \not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\psi_\mu + \lambda\not{D}^{(\omega)}\lambda). \tag{15.74}$$

Soryushiron Kenkyu

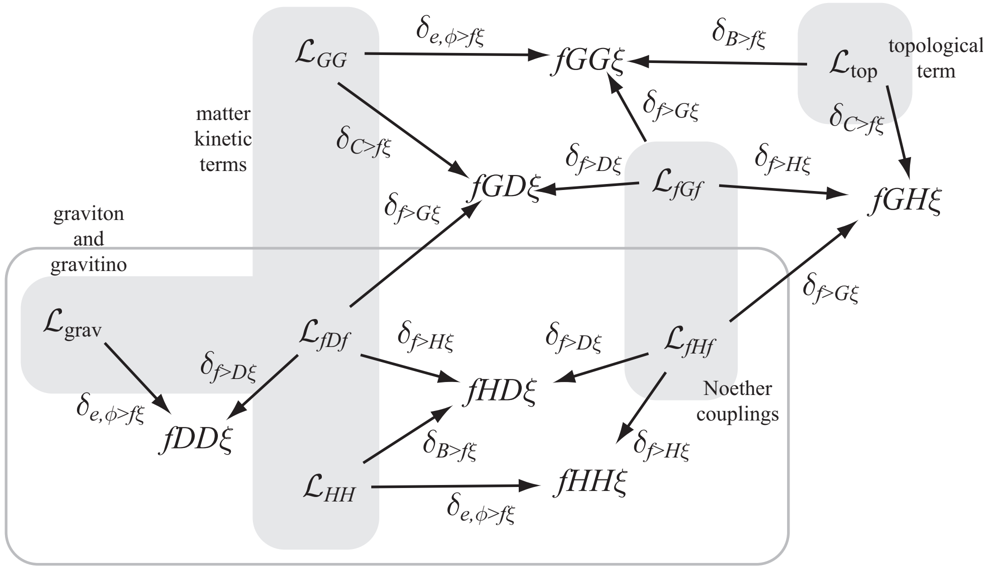

図 15.1: IIA 型超重力理論の超対称変換による変分の相殺。スピノルについて 4 次以上の項は無視している。

この二つの作用の和が（フェルミオンの 4 次の項を無視している近似において）次の変換のもとで不変であることを示そう。

$$\delta e^{\mu}_{\widehat{m}} = \frac{1}{4}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^{\mu}\xi), \quad \delta\phi = \frac{1}{8}(\lambda\xi), \tag{15.75}$$

$$\delta_0\psi_\mu = D^{(\omega)}_\mu\xi, \quad \delta_0\lambda = (\partial\!\!\!/\phi)\xi. \tag{15.76}$$

フェルミオンの超対称変換 (15.76) においてゲージ場 H_3 および G を含む項を無視したことを表すために δ_0 という記号を用いた。

フェルミオン運動項の変分であるが、

$$\begin{aligned}\frac{\delta_0\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} \quad = \quad & \frac{e}{e^{2\phi}}\Big[-\frac{1}{2}(\psi_\alpha\gamma^{\alpha mn}[D^{(\omega)}_m, D^{(\omega)}_n]\xi) - \frac{1}{2}(\lambda\gamma^{mn}[D^{(\omega)}_m, D^{(\omega)}_n]\xi) \\ & -(D^{(\omega)}_m\partial_n\phi)(\psi^m\gamma^n\xi) + (D^{(\omega)2}\phi - (\partial\phi)^2)(\psi_\mu\gamma^\mu\xi + \lambda\xi)\Big].\end{aligned} \tag{15.77}$$

となる。ここで

$$[D^{(\omega)}_m, D^{(\omega)}_n]\xi = \frac{1}{4}R_{mnpq}\gamma^{pq}\xi \tag{15.78}$$

および曲率テンソルに対するビアンキの第一恒等式 $R_{m[npq]} = 0$ を用い、グラビトンを含む項とディラトンを含む項に分けて整理すれば、次のように $\delta e^{\widehat{m}n}$ と $\delta\phi$ の線形結合として表わされることがわかる。

$$\begin{aligned}\frac{\delta_0\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} \quad = \quad & \left[-\frac{2e}{e^{2\phi}}\left(R_{\widehat{m}n} - \frac{1}{2}e_{\widehat{m}n}R\right) + eT_{\widehat{m}n}[\phi]\right]\delta e^{\widehat{m}n} \\ & + \frac{e}{e^{2\phi}}\left[2R + 8D^{(\omega)2}\phi - 8(\partial\phi)^2\right]\delta\phi.\end{aligned} \tag{15.79}$$

ただし、ディラトン場のエネルギー運動量テンソルは次のように定義される。

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{\rm grav}}{\delta e^{\widehat{m}n}} = \frac{2e}{e^{2\phi}}\left(R_{\widehat{m}n} - \frac{1}{2}e_{\widehat{m}n}R\right) - eT_{\widehat{m}n}[\phi], \tag{15.80}$$

$$T_{mn}[\phi] = \frac{1}{e^{2\phi}}(-4D^{(\omega)}_m\partial_n\phi + 4g_{mn}D^{(\omega)2}\phi - 4g_{mn}(\partial\phi)^2) \tag{15.81}$$

(15.79) の $\delta e^{\widehat{m}n}$ に比例する項と (15.80) を見比べれば、$\mathcal{L}_{\text{grav}}$ の多脚場の超対称変換によって (15.79) の $\delta e^{\widehat{m}n}$ に比例する項が相殺できることがわかる。(15.79) の $\delta\phi$ に比例する項は $\mathcal{L}_{\text{grav}}$ のディラトンの超対称変換によって相殺できる。以上で、H_3 と G が 0 の場合の不変性の証明は終わりである。

次に、H_3 を含む変分について考えよう。作用の中で H_3 を含み、G を含まない項は H_3 の運動項 $\mathcal{L}_H H$ と三点結合項 $\mathcal{L}_{fHf}$ の二つである。

$$\frac{\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi} = \frac{e}{6e^{2\phi}}H_{\mu\nu\rho}\kappa^{\mu\nu\rho}, \tag{15.82}$$

$$\frac{\mathcal{L}_{HH}}{2\pi} = -\frac{1}{12e^{2\phi}}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} \tag{15.83}$$

ただし、κ_3 は次のように定義されるフェルミオンの二次形式である。

$$\begin{aligned}\kappa_3 &= \frac{1}{8}(-\psi_m\gamma^{[m}\gamma_3\gamma^{n]}\gamma_{11}\psi_n - \psi_m\gamma^m\gamma_3\gamma_{11}\lambda + \psi_m\gamma_3\gamma^m\gamma_{11}\lambda - \lambda\gamma_3\gamma_{11}\lambda)\\ &= \frac{1}{8}(-\psi_m\langle\gamma^m\gamma_3\gamma^n\rangle_{1,5}\gamma_{11}\psi_n - 2\psi_m\langle\gamma^m\gamma_3\rangle_4\gamma_{11}\lambda - \lambda\gamma_3\gamma_{11}\lambda).\end{aligned} \tag{15.84}$$

B_2 の超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta_B B_{mn} = \theta_{mn}, \quad \theta_{mn} = \frac{1}{4}(\psi_\mu\langle\gamma_{mn}\gamma^\mu\rangle_1\gamma_{11}\xi) = \frac{1}{4}[(\psi_n\gamma_m\gamma_{11}\xi) - (\psi_m\gamma_n\gamma_{11}\xi)]. \tag{15.85}$$

また、フェルミオンの超対称変換のうち H_3 を含む変分を δ_1 によってあらわそう。

$$\delta_1\psi_\mu = \frac{1}{4}\langle\not{H}_3\gamma_\mu\rangle_2\gamma_{11}\xi, \quad \delta_1\lambda = \frac{1}{2}\not{H}_3\gamma_{11}\xi. \tag{15.86}$$

フェルミオンの 4 次の項は無視しているから、H_3 について一次の変分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\delta_1\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} &= -\frac{e}{4e^{2\phi}}(\psi_\mu\langle\not{D}^{(\omega)}\not{H}_3\gamma^\mu\rangle_{1,5}\gamma_{11}\xi) - \frac{e}{4e^{2\phi}}(\lambda\langle\not{D}^{(\omega)}\not{H}_3\rangle_4\gamma_{11}\xi) - \frac{e}{4e^{2\phi}}(\lambda\not{H}_3(\not{\partial}\phi)\gamma_{11}\xi)\\ &\quad+\frac{e}{4e^{2\phi}}\Big[(\psi_\mu(\not{\partial}\phi)\langle\not{H}_3\gamma^\mu\rangle_2\gamma_{11}\xi) - (\psi_\mu\gamma^\mu\not{H}_3(\not{\partial}\phi)\gamma_{11}\xi)\Big],\end{aligned} \tag{15.87}$$

$$\frac{\delta_0\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi} = \frac{e}{6e^{2\phi}}H_{\mu\nu\rho}\delta_0\kappa^{\mu\nu\rho}. \tag{15.88}$$

ただし、$\delta_0\kappa_3$ は次のように与えられる。

$$\delta_0\kappa_3 = \frac{1}{4}\psi_m\langle\not{D}^{(\omega)}\gamma_3\gamma^m\rangle_{1,5}\gamma_{11}\xi + \frac{1}{4}\lambda\langle\not{D}^{(\omega)}\gamma_3\rangle_4\gamma_{11}\xi + \frac{1}{4}\lambda\gamma_3(\not{\partial}\phi)\gamma_{11}\xi + \frac{1}{4}\psi_m\langle\gamma^m\gamma_3\rangle_4(\not{\partial}\phi)\gamma_{11}\xi. \tag{15.89}$$

式中の γ-行列の縮約の際には通常次元を含む因子が現れるが、ここでの計算に必要な次の縮約は次元に依存する係数は現れない。

$$\gamma^\alpha\langle\not{H}_3\gamma_\alpha\rangle_2 = 3\not{H}_3, \quad \gamma^\alpha\gamma^\mu\langle\not{H}_3\gamma_\alpha\rangle_2 = -\langle\gamma_\alpha\not{H}_3\rangle_2 - 3\langle\gamma_\alpha\not{H}_3\rangle_4. \tag{15.90}$$

(15.87) 中の共変微分 $\not{D}$ は H_3 と ξ の両方に作用するのに対し、(15.88) の κ_3 に含まれる共変微分は ξ のみに作用する。このため和をとると共変微分が H_3 に作用する項のみが残る。$\not{\partial}\phi$ を含む項も含めて和をとると次のようにまとまることがわかる。

$$\frac{\delta_1\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} + \frac{\delta_0\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi} = \frac{e}{3!}\theta^{abcd}D_aH_{bcd} - \frac{e}{4}(\psi_\mu\langle(\not{D}e^{-2\phi}\not{H}_3)\gamma^\mu\rangle_1\gamma_{11}\xi). \tag{15.91}$$

ただし、θ_4 は次のように定義される。

$$\theta_{abcd} = -\frac{1}{4e^{2\phi}}[(\psi_\mu\gamma_{abcd}{}^\mu\gamma_{11}\xi) + (\lambda\gamma_{abcd}\gamma_{11}\xi)] \tag{15.92}$$

最後の項の共変微分 $\slashed{D}$ は $e^{-2\phi}\slashed{H}_3$ に作用する。ここまでの計算においては、H_3 は任意の反対称テンソルでよく、ビアンキ恒等式は用いられていない。（これは後にここでの計算を再利用するためである。）IIA 型超重力理論においてはビアンキ恒等式 $dH_3 = 0$ が成り立つから、(15.91) の第 1 項は消える。(15.91) の第 2 項は、H_3 の運動項 (15.83) の δ_B による変分と相殺する。ただし、δ_B はゲージ場 B_2 に対する変分 (15.85) を表わしている。実際に変分してみると、次のように (15.91) の第 2 項をちょうど相殺する項が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_B\mathcal{L}_{HH}}{2\pi} &= \frac{e}{2}(D_m e^{-2\phi}H^{mpq})\delta B_{pq} \\
&= \frac{e}{8}(D_m e^{-2\phi}H^{mpq})(\psi_\mu\langle\gamma_{pq}\gamma^\mu\rangle_1\gamma_{11}\xi) \\
&= \frac{e}{4}(\psi_\mu\langle(\slashed{D}e^{-2\phi}\slashed{H}_3)\gamma^\mu\rangle_1\gamma_{11}\xi). \qquad (15.93)
\end{aligned}$$

H_3 について二次の変分の計算に移ろう。まず、三点結合項の κ_3 の δ_1 による変分は、次のようになる。

$$\frac{\delta_1\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi} = e\delta e^{\mu\widehat{m}}T_{\widehat{m}\mu}[H_3] + 2\delta\phi\mathcal{L}_{HH}. \qquad (15.94)$$

これはちょうど $\mathcal{L}_{HH}$ の多脚場およびディラトン場による変分によって相殺される。こうして、$G = 0$ の場合の作用の超対称変換のもとでの不変性が証明された。

15.4.2 R-R 場を含む部分

IIA 型超重力理論の作用の中で R-R 場を含むのは R-R 場の運動項、三点結合項、位相項の 3 つである。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{L}_{GG}}{2\pi} &= -\frac{e}{2}m^2 - \frac{e}{4}G_{\mu\nu}^2 - \frac{e}{2\cdot 4!}G_{\mu\nu\rho\sigma}^2, \qquad (15.95) \\
\frac{\mathcal{L}_{fGf}}{2\pi} &= \frac{e}{16e^\phi}(2\psi_m\gamma^{[n}\slashed{G}\gamma^{m]}\psi_n + 2\psi_\mu\gamma^\mu\slashed{G}\lambda + \lambda\slashed{G}\lambda), \qquad (15.96) \\
\frac{\mathcal{L}_{\mathrm{top}}}{2\pi} &= -\frac{1}{2}B_2dC_3dC_3 - \frac{1}{2}B_2^2dC_1dC_3 - \frac{1}{6}B_2^3dC_1dC_1 \\
&\qquad -\frac{m}{6}B_2^3dC_3 - \frac{m}{8}B_2^4dC_1 - \frac{m^2}{40}B_2^5 \\
&= -\frac{1}{2}B_2G_4G_4 + \frac{1}{2}B_2^2G_2G_4 - \frac{1}{6}B_2^3G_2^2 \\
&\qquad -\frac{m}{6}B_2^3G_4 + \frac{m}{8}B_2^4G_2 - \frac{m^2}{40}B_2^5. \qquad (15.97)
\end{aligned}$$

R-R 場の超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta C_1 = \theta_1, \quad \delta C_3 = \theta_3 - B_2\wedge\theta_1. \qquad (15.98)$$

ただし、θ_1 および θ_3 は次のように定義される。

$$\begin{aligned}
\theta_\mu &= -\frac{1}{8e^\phi}(2\overline{\psi}_\mu\gamma_{\widehat{11}}\xi + \overline{\lambda}\gamma_\mu\gamma_{\widehat{11}}\xi), \qquad (15.99) \\
\theta_{\mu\nu\rho} &= -\frac{1}{8e^\phi}(2\overline{\psi}_\mu\gamma_{\nu\rho}\xi + 2\overline{\psi}_\nu\gamma_{\rho\mu}\xi + 2\overline{\psi}_\rho\gamma_{\mu\nu}\xi + \overline{\lambda}\gamma_{\mu\nu\rho}\xi) \\
&= -\frac{1}{8e^\phi}(2\overline{\psi}_\mu\langle\gamma_{\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\rangle_2\xi + \overline{\lambda}\gamma_{\mu\nu\rho}\xi) \qquad (15.100)
\end{aligned}$$

また、フェルミオンの変換則にも R-R 場を含む項があるが、それらを δ_{RR} を用いて表わす。

$$\delta_{RR}\psi = \frac{e^\phi}{8}\not{G}\gamma_\mu\xi, \quad \delta_{RR}\lambda = \frac{e^\phi}{8}\gamma^\mu\not{G}\gamma_\mu\xi. \tag{15.101}$$

まず、フェルミオンの運動項の δ_{RR} による変分と、三点結合項の δ_0 による変分を計算してみよう。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_{RR}\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} &= \frac{e}{8e^\phi}(-\psi_\mu\not{D}\not{G}\gamma^\mu\xi + \psi_\mu\gamma^\mu\not{G}\not{D}\xi + \lambda\not{G}\not{D}\xi \qquad D \to G,\xi \\
&\quad -\psi_\mu\gamma^\mu\not{G}(\not{\partial}\phi)\xi - \lambda\not{G}(\not{\partial}\phi)\xi), \qquad (15.102)\\
\frac{\delta_0\mathcal{L}_{fGf}}{2\pi} &= \frac{e}{8e^\phi}(\psi_m\not{D}\not{G}\gamma^m\xi - \psi_m\gamma^m\not{G}\not{D}\xi - \lambda\not{G}\not{D}\xi \qquad D \to \xi \\
&\quad +\psi_\mu\gamma^\mu\not{G}(\not{\partial}\phi)\xi + \lambda\not{G}(\not{\partial}\phi)\xi). \qquad (15.103)
\end{aligned}$$

これらは符号が逆であることを除き全く同じ形をしている。しかし、(15.102) 中の共変微分 D_μ が G と ξ の両方に作用する（$\not{G}$ が $\not{D}$ の左側にある場合もである。）のに対して (15.103) 中の共変微分は ξ のみに作用する。このためこれらは完全には相殺せず、共変微分が G に作用する寄与が残る。

$$\frac{\delta_{RR}\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} + \frac{\delta_0\mathcal{L}_{fGf}}{2\pi} = \frac{e}{8e^\phi}(-\psi_\mu\not{D}\not{G}\gamma^\mu\xi + \psi_\mu\gamma^\mu\not{G}\not{D}\xi + \lambda\not{G}\not{D}\xi), \qquad D \to G. \tag{15.104}$$

ここまでは、G の内部構造も次元が 10 であることも用いていないが、さらに計算を進めるために G の定義式

$$\not{G} = -m + \not{G}_2\gamma_{11} - \not{G}_4 \tag{15.105}$$

を代入し、次元が 10 であることも用いてさらに整理しよう。定数項 m は微分で 0 になるから効かず、G_2 を含む項と G_4 を含む項だけが残る。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_{RR}\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} + \frac{\delta_0\mathcal{L}_{fGf}}{2\pi} &= \frac{e}{8e^\phi}(2\psi_\mu\langle\not{D}\not{G}_2\gamma^\mu\rangle_{4,0}\gamma_{11}\xi - \lambda\not{G}_2\not{D}\gamma_{11}\xi) \\
&+ \frac{e}{8e^\phi}(2\psi_\mu\langle\not{D}\not{G}_4\gamma^\mu\rangle_{6,2}\xi - \lambda\not{G}_4\not{D}\xi). \qquad (15.106)
\end{aligned}$$

この式は運動方程式に比例する部分

$$\text{EOM-part} = eG^{mn}D_m\theta_n + \frac{e}{3!}G^{mnpq}D_m\theta_{npq} \tag{15.107}$$

とビアンキ恒等式に比例する部分

$$\text{BI-part} = \frac{e}{3!}mH_{mnp}\overline{\theta}^{mnp} + \frac{e}{2!3!}G_{mn}H_{pqr}\theta^{mnpqr} \tag{15.108}$$

とに分けられる。ここで、次の反対称テンソルを定義した。

$$\begin{aligned}
\overline{\theta}^{mnp} &= \frac{1}{8e^\phi}(2\psi_\mu\gamma^{mnp\mu}\gamma_{11}\xi - \lambda\gamma^{mnp}\gamma_{11}\xi), \qquad (15.109)\\
\theta^{mnpqr} &= \frac{1}{8e^\phi}(2\psi_\mu\gamma^{mnpqr\mu}\xi - \lambda\gamma^{mnpqr}\xi). \qquad (15.110)
\end{aligned}$$

さらに R-R 場の運動項 $\mathcal{L}_{GG}$ を考えよう。$\mathcal{L}_{GG}$ には多脚場とゲージ場 B_2 および C が含まれるが、B および C に対して超対称変換を行うと次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_{B,C}\mathcal{L}_{GG}}{2\pi} &= -eG^{mn}D_m\theta_n - \frac{e}{2}mG^{mn}\theta_{mn} \\
&\quad -\frac{e}{3!}G^{mnpq}D_m\theta_{npq} - \frac{e}{2!2!}G^{mnpq}G_{mn}\theta_{pq} + \frac{e}{3!}G^{mnpq}H_{mnp}\theta_q. \qquad (15.111)
\end{aligned}$$

ただし、ゲージ場の強さの変分が

$$\delta G_2 = d\theta_1 + m\theta_2, \quad \delta G_4 = d\theta_3 + G_2 \wedge \theta_2 - H_3 \wedge \theta_1. \tag{15.112}$$

と与えられることを用いた。ここまでに得られた R-R 場を含む変分を合計すると、ゲージ場について一次の項はすべて相殺し、次の変分が残る。

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_{RR}\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} + \frac{\delta_0 \mathcal{L}_{fGf}}{2\pi} + \frac{\delta_{B,C}\mathcal{L}_{GG}}{2\pi} \\ = \; & \frac{e}{3!} m H_{mnp} \bar{\theta}^{mnp} + \frac{e}{2!3!} G_{mn} H_{pqr} \theta^{mnpqr} \\ & -\frac{e}{2} m G^{mn} \theta_{mn} - \frac{e}{2 \cdot 2} G^{mnpq} G_{mn} \theta_{pq} + \frac{e}{3!} G^{mnpq} H_{mnp} \theta_q. \end{aligned} \tag{15.113}$$

さらに、H_3 と G を一つずつ含む項を与える次の変分を計算してみよう。

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{RR}\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi} &= \frac{e}{64 e^{\phi}} (-\psi_m \gamma^n \slashed{H}_3 \gamma^m \slashed{G} \gamma_n \gamma_{11} \xi + \psi_m \slashed{H}_3 \gamma^m \gamma^n \slashed{G} \gamma_n \gamma_{11} \xi \\ & \qquad -\lambda \slashed{H}_3 \gamma^m \slashed{G} \gamma_m \gamma_{11} \xi - \lambda \gamma^m \slashed{H}_3 \slashed{G} \gamma_m \gamma_{11} \xi), \end{aligned} \tag{15.114}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1 \mathcal{L}_{fGf}}{2\pi} &= \frac{e}{64 e^{\phi}} (+\psi_m \gamma^n \slashed{G} \gamma^m \slashed{H}_3 \gamma_n \gamma_{11} \xi - \psi_m \gamma^n \slashed{G} \gamma_n \gamma^m \slashed{H}_3 \gamma_{11} \xi \\ & \qquad -2\lambda \slashed{G} \slashed{H}_3 \gamma_{11} \xi). \end{aligned} \tag{15.115}$$

ここまでくれば、後は $\slashed{G}$ について場合わけして考えれば、次の結果を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{RR}\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi} + \frac{\delta_1 \mathcal{L}_{fGf}}{2\pi} &= -\frac{e}{3!} m H_{mnp} \bar{\theta}^{mnp} - \frac{e}{3!2} H_{mnp} G_{qr} \theta^{mnpqr} \\ & \quad -\frac{1}{3!4!3!} \epsilon^{mnpqrstabc} H_{mnp} G_{qrst} \theta_{abc} - \frac{e}{3!} H_{mnp} G^{mnpq} \theta_q. \end{aligned} \tag{15.116}$$

位相項の超対称変換は次のように与えられる。

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathrm{top}}}{2\pi} = -\frac{1}{2} \int \theta_2 \wedge G_4 \wedge G_4 - \int \theta_3 \wedge H_3 \wedge G_4. \tag{15.117}$$

(15.113) (15.116) (15.117) を合計すると、H_3 を含む全ての項は相殺し、R-R 場について 2 次の変分のみが残る。

$$\begin{aligned} & (15.113) + (15.116) + (15.117) \\ = & -\frac{e}{2} m G^{mn} \theta_{mn} - \frac{e}{2 \cdot 2} G^{mnpq} G_{mn} \theta_{pq} - \frac{1}{2} \frac{1}{2!4!4!} \epsilon^{abcdefghij} \theta_{ab} G_{cdef} G_{ghij} \end{aligned} \tag{15.118}$$

$\mathcal{L}_{fGf}$ の δ_{RR} による変分は、(A.18) や $\gamma_\alpha \gamma_5 \gamma^\alpha = 0$ などを用いれば、簡単に次のように計算される。

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{RR}\mathcal{L}_{fGf}}{2\pi} &= \frac{e}{64} (\psi_m \gamma^n \slashed{G} \gamma^m \slashed{G} \gamma_n \xi) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4!4!} \epsilon^{abcdmnpqrs} G_{abcd} G_{mnpq} \theta_{rs} + \frac{e}{2} m G^{mn} \theta_{mn} + \frac{e}{2 \cdot 2} G_{mn} G^{mnpq} \theta_{pq} \\ & \quad + e(T_{\mu\hat{n}}[m] + T_{\mu\hat{n}}[G_2] + T_{\mu\hat{n}}[G_4]) \delta e^{\mu\hat{n}}. \end{aligned} \tag{15.119}$$

この変分の 1 行目は先ほどの変分を相殺し、2 行目のエネルギー運動量テンソルを含む項は $\mathcal{L}_{GG}$ の多脚場による変分によって相殺される。（エネルギー運動量テンソルの定義については §A.3 を参照すること。）

Soryushiron Kenkyu

15.5 11 次元超重力理論から IIA 型理論へのコンパクト化

10 次元の IIA 型超重力理論は、質量パラメータ m が 0 である場合には 11 次元の超重力理論を $\mathbf{S}^1$ でコンパクト化をすることによって得られることが知られている。ここでは実際に作用、および変換則について、11 次元の超重力理論から出発して IIA 型理論のものを導いてみよう。

11 次元の超対称変換パラメータを ξ とすれば、これは 32 成分マヨラナスピノルである。x^{11} 方向をコンパクト化すれば、γ^{11} が 10 次元でのカイラリティ行列となり、その固有値によって二つのマヨラナワイルスピノルへ分解される。

$$\xi = \xi_L + \xi_R, \quad \gamma^{11}\xi_L = \xi_L, \quad \gamma^{11}\xi_R = -\xi_R. \tag{15.120}$$

11 次元のグラビティーノ Ψ_M はベクトル添え字 M の値によって 10 次元のグラビティーノ ψ_μ とディラティーノ λ に分解される。

$$\psi_\mu \sim \Psi_\mu, \quad \lambda \sim \Psi_{11}. \tag{15.121}$$

実際には ψ_μ と λ は Ψ_μ と Ψ_{11} のもう少し複雑な線形結合として与えられる。11 次元の計量 G_{MN} からは、10 次元の計量 $g_{\mu\nu} \sim G_{\mu\nu}$、U(1) ゲージ場 $C_\mu \sim G_{\mu,11}$、スカラー場 $e^\rho \sim G_{11,11}$ が得られる。11 次元の 3 階反対称テンソル場 A_{MNP} は、10 次元での 3 階反対称テンソル場 $C_{\mu\nu\rho} \sim A_{\mu\nu\rho}$ と 2 階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu} \sim A_{\mu\nu,11}$ とに分けられる。以上の場は確かに IIA 型超重力理論に含まれる場に一致している。

コンパクト化のコツは、ベクトル場 C_μ に関する U(1) ゲージ変換を一般座標変換と分離することである。このための準備として、次の 1-形式を定義する。

$$\widetilde{dx}^{11} = dx^{11} + C_\mu dx^\mu, \tag{15.122}$$

11 次元で x^{11} だけを定数シフトする座標変換は 10 次元では C_μ の U(1) ゲージ変換と解釈される。$x^{11} \to x'^{11} = x^{11} + \lambda(x^\mu)$ という座標変換に対して次のように C_μ が変換されるとしよう。

$$x^{11} \to x'^{11} = x^{11} + \lambda, \quad C_\mu \to C'_\mu = C_\mu - \partial_\mu \lambda. \tag{15.123}$$

この変換のもとで、(15.122) によって定義される 1-形式 $\widetilde{dx}^{11}$ は不変である。これを用いて、11 次元の計量を次のように 10 次元の場で分解する。

$$ds^2 = g^{(10)}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2\rho}(\widetilde{dx}^{11})^2. \tag{15.124}$$

dx^{11} ではなく U(1) ゲージ変換で不変である $\widetilde{dx}^{11}$ を用いたおかげで上のように定義した $g^{(10)}_{\mu\nu}$ は U(1) ゲージ変換のもとで不変である。局所ローレンツ変換を用いて局所ローレンツ系の $\widehat{11}$ 軸を 11 軸にそろえる。これは、$E^\mu_{\widehat{11}} = 0$ を意味している。それ以外の成分は次のようにおく。

$$E_M{}^{\widehat{A}} = \begin{pmatrix} e_\mu{}^{\widehat{a}} & e^\rho C_\mu \\ 0 & e^\rho \end{pmatrix}, \quad E_{\widehat{A}}{}^M = \begin{pmatrix} e^\mu_{\widehat{a}} & -C_{\widehat{a}} \\ 0 & e^{-\rho} \end{pmatrix}. \tag{15.125}$$

反対称テンソルの場の強さ K_{PQRS} についても、10 次元の場の強さが C_1 のゲージ変換で不変になるように (15.122) で定義された $\widetilde{dx}^{11} = dx^{11} + C_1$ を用いて次のように分解する。

$$K_4 = G_4 + H_3 \wedge \widetilde{dx}^{11} \tag{15.126}$$

G_4 と H_3 は 10 次元の場の強さである。ポテンシャルは C_1 ゲージ変換で不変でなくてもさほど不都合は無いので、$\widetilde{dx}^{11}$ でも dx^{11} でもどちらを用いてもよい。

$$A_3 = C_3 + B_2 \wedge \widetilde{dx}^{11} = C_3' + B_2 \wedge dx^{11}. \tag{15.127}$$

ここで現れた二つの 3 階反対称テンソル場 C_3 と C_3' は互いに次の関係にある。

$$C_3' = C_3 + B_2 \wedge C_1. \tag{15.128}$$

これらはどちらもよく用いられるが、以下では C_3 のほうを用いることにしよう。この定義式を微分すると、

$$dA_3 = dC_3 + B_2 \wedge dC_1 + dB_2 \wedge \widetilde{dx}^{11}, \tag{15.129}$$

となる。ただし、$d(\widetilde{dx}^{11}) = dC_1$ に注意すること。これを (15.126) と比較すれば、場の強さとポテンシャルの関係が次のように得られる。

$$G_4 = dC_3 + B_2 \wedge dC_1, \quad H_3 = dB_2. \tag{15.130}$$

これらの関係を踏まえた上で、それぞれの場の超対称変換を調べよう。一般に、超対称変換はゲージ固定条件 (15.125) を破ってしまう。

$$\delta_{11} E^m_{\widehat{11}} = \frac{1}{4}(\Psi_{\widehat{11}} \gamma^m \xi) \tag{15.131}$$

ただし、11 次元の超対称変換を δ_{11} と書いた。このように、δ_{11} だけではゲージ固定条件を破ってしまうので、次の局所ローレンツ変換 δ_L を同時に行ってゲージをもとにもどす必要がある。

$$\delta_L E^m_{\widehat{11}} = M_{\widehat{11}\widehat{M}} e^m_{\widehat{M}}, \quad M_{\widehat{11}\widehat{a}} = -\frac{1}{4}(\Psi_{\widehat{11}} \gamma_{\widehat{a}} \xi). \tag{15.132}$$

ただし、$M_{\widehat{K}\widehat{L}}$ は反対称テンソルであり、局所ローレンツ変換のパラメータである。成分 $M_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}$ によって与えられる局所ローレンツ変換はゲージ固定に影響を与えないので自由に取ることができるが、ここではまだ決めずに、あとで多脚場の変換則が簡単になるように決定する。この二つの変換を組み合わせたもの $\delta_{10} = \delta_{11} + \delta_L$ が 10 次元での超対称変換である。

11 次元のグラビティーノの変換則 (13.14) から 10 次元のグラビティーノとディラティーノの変換則を導出しよう。ゲージ固定条件を保つための局所ローレンツ変換をフェルミオンに作用させるとスピノルを 3 個含む項を与えるので、ここでは無視することができる。11 次元での共変微分を 10 次元の言葉で書きなおせば次のように与えられる。

$$D^{(11)}_{\widehat{i}} \xi = D^{(10)}_{\widehat{i}} \xi + \frac{e^\rho}{8}[\gamma_{\widehat{i}}, \not{G}_2] \gamma^{\widehat{11}} \xi, \tag{15.133}$$

$$D^{(11)}_{\widehat{11}} \xi = -\frac{e^\rho}{4} \not{G}_2 \xi - \frac{1}{2}(\not{\partial}\rho) \gamma^{\widehat{11}} \xi \tag{15.134}$$

また、$\not{K}_4$ は次のように分解される。

$$\not{K}_4 = \not{G}_4 + \frac{1}{e^\rho} \not{H}_3 \gamma_{\widehat{11}} \tag{15.135}$$

これを用いれば、10 次元グラビティーノ ψ_μ とディラティーノ λ の変換則が次のように与えられる。

$$\delta\lambda = \frac{3}{2}(\not{\partial}\rho) - \frac{1}{e^\rho} \not{H}_3 \gamma_{\widehat{11}} - \frac{1}{8}\gamma^{\widehat{i}}(e^\rho \not{G}_2 \gamma_{\widehat{11}} - \not{G}_4)\gamma_{\widehat{i}} \xi, \tag{15.136}$$

$$\delta\psi_{\widehat{i}} = D_{\widehat{i}}\xi + \frac{1}{4}\gamma_{\widehat{i}}(\not{\partial}\rho)\xi + \frac{1}{8}(e^\rho \not{G}_2 \gamma_{\widehat{11}} - \not{G}_4)\gamma_{\widehat{i}}\xi + \frac{1}{8e^\rho}\{\gamma_{\widehat{i}}, \not{H}_3\}\gamma_{\widehat{11}}\xi. \tag{15.137}$$

ただし、$\psi_{\widehat{i}}$ および λ は次のように定義した。

$$\lambda = 3\gamma_{\widehat{11}}\Psi_{\widehat{11}}, \quad \psi_{\widehat{i}} = \Psi_{\widehat{i}} + \frac{1}{2}\gamma_{\widehat{i}}\gamma_{\widehat{11}}\Psi_{\widehat{11}}. \tag{15.138}$$

グラビティーノの添え字が局所ローレンツ座標の添え字であることに注意。もし接空間の添え字を持ったものでこのような関係を設定してしまうと、ψ_μ が C_μ のゲージ変換で不変ではなくなってしまうからである。

最後に、IIA 型超重力理論の弦計量へ移るために次のワイル変換を行う。

$$(e_\mu^{\widehat{m}})_{\rm old} = e^{-\rho/2}(e_\mu^{\widehat{m}})_{\rm new}, \quad (\xi)_{\rm old} = e^{-\rho/4}(\xi)_{\rm new},$$
$$(\psi_{\widehat{i}})_{\rm old} = e^{+\rho/4}(\psi_{\widehat{i}})_{\rm new}, \quad (\lambda)_{\rm old} = e^{+\rho/4}(\lambda)_{\rm new}. \tag{15.139}$$

このワイル変換のもとで共変微分については次の式が成り立つ。

$$(D_{\widehat{i}}\xi)_{\rm old} = e^{\rho/4}\left(D_{\widehat{i}}\xi - \frac{1}{4}\gamma_{\widehat{i}}(\partial\!\!\!/\rho)\xi\right)_{\rm new} \tag{15.140}$$

ワイル変換の結果、次の変換則を得る。

$$\delta\lambda = \frac{3}{2}(\partial\!\!\!/\rho)\xi + \frac{1}{2}H\!\!\!\!/_3\gamma_{\widehat{11}}\xi + \frac{e^{(3/2)\rho}}{8}\gamma^{\widehat{i}}(G\!\!\!\!/_2\gamma_{\widehat{11}} - G\!\!\!\!/_4)\gamma_{\widehat{i}}\xi, \tag{15.141}$$
$$\delta\psi_{\widehat{i}} = D_{\widehat{i}}\xi + \frac{1}{8}e^{(3/2)\rho}(G\!\!\!\!/_2\gamma_{\widehat{11}} - G\!\!\!\!/_4)\gamma_{\widehat{i}}\xi + \frac{1}{8}\{\gamma_{\widehat{i}}, H\!\!\!\!/_3\}\gamma_{\widehat{11}}\xi. \tag{15.142}$$

最後にディラトン場を $\phi = (3/2)\rho$ によって定義すれば、以前に与えた変換則 (15.20) および (15.21) の $m = 0$ の場合の式を得る。

次にボゾン場の変換則を決定しよう。ディラトン ϕ については、

$$\delta_{10}\rho = -e^\rho\delta_{10}e^{-\rho} = -e^\rho(\delta_{11}+\delta_L)E_{\widehat{11}}^{11} = -e^\rho(\frac{1}{4}\Psi_{\widehat{11}}\gamma^{11}\xi + M_{\widehat{11}\widehat{a}}E_{\widehat{a}}^{11}) = -\frac{1}{4}(\Psi_{\widehat{11}}\gamma^{\widehat{11}}\xi). \tag{15.143}$$

ψ_μ と λ で書き換えてワイル変換を行えば、以前に与えた変換則が再現される。

$$\delta\phi = \frac{1}{8}(\lambda\xi). \tag{15.144}$$

多脚場については、ワイル変換を行う前の場を用いて書くと次のようになる。

$$\delta_{10}e_{\widehat{m}}^\mu = \delta_{11}E_{\widehat{m}}^\mu = \frac{1}{4}\Psi_{\widehat{m}}\gamma^\mu\xi. \tag{15.145}$$

さらにワイル変換を行い、IIA 型超重力理論の弦計量での変換則を得ると、次のようになる。

$$\delta e_{\widehat{m}}^\mu = \frac{1}{4}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^\mu\xi) - \frac{1}{24}(\lambda\gamma^\mu{}_{\widehat{m}}\xi) \tag{15.146}$$

はじめの項以外は次の局所ローレンツ変換によって消すことができる。

$$M_{\widehat{m}\widehat{n}} = -\frac{1}{24}(\lambda\gamma_{\widehat{m}\widehat{n}}\xi) \tag{15.147}$$

こうして、次の変換則をえる。

$$\delta e_{\widehat{m}}^\mu = \frac{1}{4}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^\mu\xi). \tag{15.148}$$

R-R 1-形式場については、

$$\delta_{10}C_\mu = -(\delta_{11}+\delta_L)(E_\mu^{\widehat{a}}E_{\widehat{a}}^{11}) = -\frac{1}{4}e^{-\rho}(\Psi_{\widehat{11}}\gamma_\mu^{(10)}\xi + \Psi_\mu^{(10)}\gamma_{\widehat{11}}\xi) \tag{15.149}$$

さらに (15.138) によって ψ_μ と λ で書きなおし、ワイル変換を行うと、(15.23) にあるのと同じ次の変換則が得られる。

$$\delta C_\mu = \frac{1}{8e^\phi}(-2\overline{\psi}_\mu\gamma_{\widehat{11}}\xi - \overline{\lambda}\gamma_\mu\gamma_{\widehat{11}}\xi). \tag{15.150}$$

NS-NS 2-形式場の変分には、局所ローレンツ変換 δ_L は効かない。そして

$$\gamma_\mu^{(11)} = \gamma_\mu^{(10)} + e^\rho C_\mu \gamma_{\widehat{11}} \tag{15.151}$$

から現れる C_μ はちょうど相殺して、次の変分を与える。

$$\delta_{10}B_{\mu\nu} = \delta_{11}A_{\mu\nu 11} = -\frac{1}{4}e^\rho(\Psi_\mu^{(10)}\gamma_\nu^{(10)}\gamma_{\widehat{11}}\xi - \Psi_\nu^{(10)}\gamma_\mu^{(10)}\gamma_{\widehat{11}}\xi + \Psi_{\widehat{11}}^{(10)}\gamma_{\mu\nu}^{(10)}\xi) \tag{15.152}$$

さらに弦計量の量を用いて書きかえると、(15.23) に与えられた次の変換則を得る。

$$\delta B_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\psi_\mu\gamma_\nu\gamma_{\widehat{11}}\xi - \psi_\nu\gamma_\mu\gamma_{\widehat{11}}\xi). \tag{15.153}$$

R-R 3-形式場の変分にもやはり局所ローレンツ変換 δ_L は効かず δ_{11} だけで与えられる。今度は C_μ を含む項は消えずに、$\delta B_{\mu\nu}$ に比例する項を与える。

$$\begin{aligned}
\delta_{10}C_{\mu\nu\rho} &= \delta_{11}A_{\mu\nu\rho} \\
&= -\frac{1}{4}(\Psi_\mu^{(11)}\gamma_{\nu\rho}^{(11)}\xi) + [\mu\nu\rho] \\
&= -\frac{1}{4}(\Psi_\mu^{(10)}\gamma_{\nu\rho}^{(10)}\xi) - \frac{1}{4}e^\rho C_\mu(\Psi_{\widehat{11}}\gamma_{\nu\rho}^{(10)}\xi + \Psi_\nu^{(10)}\gamma_{\rho\widehat{11}}^{(10)}\xi + \Psi_\rho^{(10)}\gamma_{\widehat{11}\nu}^{(10)}\xi) + [\mu\nu\rho] \\
&= -\frac{1}{4}(\Psi_\mu^{(10)}\gamma_{\nu\rho}^{(10)}\xi) + C_\mu\delta_{10}B_{\nu\rho} + [\mu\nu\rho]
\end{aligned} \tag{15.154}$$

$[\mu\nu\rho]$ は、3 つの添字を cyclic にまわした、あと二つの項を表す。さらに書きかえると、(15.23) にある次の変換則を得る。

$$\delta C_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{8e^\phi}(-2\overline{\psi}_\mu\gamma_{\nu\rho}\xi - 2\overline{\psi}_\nu\gamma_{\rho\mu}\xi - 2\overline{\psi}_\rho\gamma_{\mu\nu}\xi - \overline{\lambda}\gamma_{\mu\nu\rho}\xi) + (C_\mu\delta B_{\nu\rho} + C_\nu\delta B_{\rho\mu} + C_\rho\delta B_{\mu\nu}). \tag{15.155}$$

以上のように、IIA 型理論の超対称性変換は 11 次元の超対称性変換から直接求められるから、IIA 型理論の代数も (**??**) から直ちに得ることができる。

$$[\delta_{\xi_2}, \delta_{\xi_1}] = -\frac{1}{4}(\xi_2\gamma^\mu\xi_1)\partial_\mu. \tag{15.156}$$

右辺は ξ_1 と ξ_2 のカイラリティが同じ部分のみが寄与する。

§A.7.3 にある公式を用いて 11 次元の作用から 10 次元の作用を導こう。とりあえずワイル変換は後回しにして、場の x^{11} 方向の依存性がないときに作用がどのように書きなおされるかを見てみる。11 次元超重力理論の作用 (13.12) の中のアインシュタイン作用部分は公式 (A.137) を用いれば次のように書きかえられる。

$$\int dx^{11}\sqrt{-g}R = \int dx^{10}\sqrt{-g}\left[e^\rho R - e^{3\rho}\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^2\right]. \tag{15.157}$$

局所ローレンツ座標で場の強さ K_4 は次のように分解される。

$$K_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = G_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}, \quad K_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\widehat{11}} = \frac{1}{e^\rho}H_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} \tag{15.158}$$

この分解を用いれば、作用は次のように書きかえられる。

$$\frac{S}{2\pi} = -\int dx^{11}\sqrt{-g}\frac{1}{2\cdot 4!}|K_{KLMN}|^2 = -\int dx^{10}\sqrt{-g}\left[\frac{e^\rho}{2\cdot 4!}|G_{\mu\nu\rho\sigma}|^2 + \frac{1}{2\cdot 3! e^\rho}|H_{\mu\nu\rho}|^2\right] \tag{15.159}$$

Soryushiron Kenkyu

さいごに位相項であるが、(15.127) を用いれば、

$$\frac{S}{2\pi} = -\frac{1}{3!}\int A_3 \wedge K_4 \wedge K_4 = -\frac{1}{2}\int B_2 \wedge dC_3' \wedge dC_3'. \tag{15.160}$$

ただし、C_3' は (15.128) によって与えられる。こうして、次の作用が得られた。

$$\begin{aligned}\frac{S}{2\pi} \quad &= \quad \int dx^{10}\sqrt{-g}\left[e^{\rho}R - \frac{1}{2\cdot 3!e^{\rho}}H^2_{\mu\nu\rho} - \frac{e^{3\rho}}{4}G^2_{\mu\nu} - \frac{e^{\rho}}{2\cdot 4!}G^2_{\mu\nu\rho\sigma}\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}\int B_2 \wedge dC_3' \wedge dC_3'. \end{aligned} \tag{15.161}$$

弦計量へ移るためにワイル変換 (15.139) を行い、ディラトン場 $\phi = (3/2)\rho$ を導入すれば、以前に与えた作用 (15.15) を得る。

15.6 IIB 型超重力理論の運動方程式と超対称変換

IIB 型超重力理論は、on-shell での自由度が次の表現に属するような零質量場の集合によって記述される。

$$(\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_c) \times (\mathbf{8}_v + \mathbf{8}_c) \tag{15.162}$$

$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v = \mathbf{35}_v + \mathbf{28} + \mathbf{1}$ の成分は IIA 型超重力理論と同じであり、重力 $g_{\mu\nu}$、2 階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$、そしてディラトン場 ϕ を表す。一方 $\mathbf{8}_c \times \mathbf{8}_c = \mathbf{35}_c + \mathbf{28} + \mathbf{1}$ の成分は IIA 型超重力理論とは異なり 4 階、2 階、0 階の反対称テンソル場 $C_{\mu\nu\rho\sigma}$、$C_{\mu\nu}$、C を含む。これらそれぞれに対応した場の強さを G_5、G_3、G_1 とする。これらの場の強さとポテンシャルの間の正確な関係式は後で与える。これらの場の強さのうち、G_5 は自己双対条件を満足する。このために作用を簡単な形に書くことはできず、通常この理論は作用ではなく運動方程式を用いて表される。フェルミオンを 0 とおくと、運動方程式は次のように与えられる。

IIB 型超重力理論の運動方程式

フェルミオンの寄与を無視したとき、5 階反対称テンソル場は次の自己双対条件を満足する。

$$*G_5 = -G_5 \tag{15.163}$$

反対称テンソル場に対するビアンキ恒等式は、

$$dH_3 = 0, \quad dG_1 = 0, \quad dG_3 = H_3 \wedge G_1, \quad dG_5 = H_3 \wedge G_3. \tag{15.164}$$

フェルミオンの寄与を無視したとき、反対称テンソル場の運動方程式は

$$d(e^{-2\phi} * H_3) = -G_3 \wedge G_5 + G_1 \wedge *G_3, \quad d * G_1 = *G_3 \wedge H_3, \quad d * G_3 = -G_5 \wedge H_3. \tag{15.165}$$

フェルミオンを無視したディラトン場および重力場の方程式は

$$R - \frac{1}{12}H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma} = 4(\partial\phi)^2 - 4\nabla^2\phi, \tag{15.166}$$
$$\frac{1}{e^{2\phi}}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = \frac{2}{e^{2\phi}}(g_{\mu\nu}\nabla^2\phi - g_{\mu\nu}(\partial_\alpha\phi)(\partial^\alpha\phi) - \nabla_\mu\partial_\nu\phi) + \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \tag{15.167}$$

ただし、$T_{\mu\nu}$ は反対称テンソル場のエネルギー運動量テンソルであり、次のように定義される。

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{e^{2\phi}}\left(\frac{1}{2}H_{\mu\alpha\beta}H_\nu{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\cdot 3!}g_{\mu\nu}H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma}\right) \\ &+ \left(G_\mu G_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G_\alpha G^\alpha\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2}G_{\mu\alpha\beta}G_\nu{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\cdot 3!}g_{\mu\nu}G_{\alpha\beta\gamma}G^{\alpha\beta\gamma}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{1}{4!}G_{\mu\alpha\beta\gamma\delta}G_\nu{}^{\alpha\beta\gamma\delta} \end{aligned} \tag{15.168}$$

R-R 場をまとめて扱うためには、次の形式和を定義するのがよい。ただしフェルミオンの寄与は無視している。

$$G_{\mathrm{odd}} = G_1 + G_3 + G_5 + *G_3 - *G_1 \tag{15.169}$$

これは定義により次の自己双対条件を満足する。ここでもフェルミオンの寄与は無視している。

$$*G_{\mathrm{odd}} = -\mathcal{T}G_{\mathrm{odd}}. \tag{15.170}$$

G_{odd} を用いれば、運動方程式とビアンキ恒等式は次のように IIA 型のものとまったく同じ形にまとめて書くことができる。

$$dG_{\mathrm{odd}} = H_3 \wedge G_{\mathrm{odd}}. \tag{15.171}$$

この式にはフェルミオンの寄与が現れない。（現れないように G_{odd} の定義にフェルミオンの項を加えて定義する。）B_2 に対する運動方程式は、フェルミオンの項を無視すれば、

$$d(e^{-2\phi} * H_3) = \frac{1}{2}(\mathcal{T}G_{\mathrm{odd}} \wedge G_{\mathrm{odd}})_8. \tag{15.172}$$

ただし、G^*_{odd} は G_{odd} の複素共役であり、$(\cdots)_8$ は 8-形式部分のみを取り出す操作を表す。

ビアンキ恒等式 (15.171) が与えられたときにそれを実現するようにポテンシャルを導入する方法は一意的ではない。まず、次のように書くことができる。

$$G_{\mathrm{odd}} = e^{B_2} \wedge dC^{(1)}_{\mathrm{even}}. \tag{15.173}$$

また、$C^{(2)}_{\rm even} = e^{B_2} \wedge C^{(1)}_{\rm even}$ を用いれば次のように書くこともできる。

$$G_{\rm odd} = dC^{(2)}_{\rm even} - H_3 \wedge C^{(2)}_{\rm even}. \tag{15.174}$$

さらに、§15.7 で述べる SL$(2,\mathbf{R})$ 対称性が明らかになるようにするには、$C^{(2)}_0$、$C^{(2)}_2$ とともに 4-形式ポテンシャルとして次のように定義される $C^{(3)}_4$ を用いるのがよい。

$$C^{(3)}_4 = C^{(2)}_4 - \frac{1}{2} B_2 \wedge C^{(2)}_2. \tag{15.175}$$

このポテンシャルを用いれば、G_5 が次のように SL$(2,R)$ 不変な形に書ける。

$$G_5 = dC^{(3)}_4 - \frac{1}{2} C^{(2)}_2 \wedge dB_2 + \frac{1}{2} B_2 \wedge dC^{(2)}_2. \tag{15.176}$$

IIB 型超重力理論はグラビティーノとディラティーノの 2 種類のフェルミオンを二つずつ含む。これらを ψ^i_μ および λ^i と表す。ψ^i_μ は左巻きの、λ^i は右巻きのカイラリティをもつマヨラナワイルスピノルである。この理論の超対称性変換のパラメータは ξ^i と表すことにする。これらのフェルミオンの超対称変換は次のように書くことが出きる。

IIB 型超重力理論の超対称変換

$$\delta\psi_\mu = D_\mu \xi + \frac{1}{8} H_{\mu\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\sigma_z \xi + \frac{e^\phi}{8} \not{G} \gamma_\mu \xi, \tag{15.177}$$

$$\delta\lambda = (\not{\partial}\phi)\xi + \frac{1}{2} \not{H}_3 \sigma_z \xi + \frac{e^\phi}{8} \gamma^\mu \not{G} \gamma_\mu \xi. \tag{15.178}$$

$$\gamma^{\widehat{11}}\xi = +\xi, \quad \gamma^{\widehat{11}}\psi_\mu = +\psi_\mu, \quad \gamma^{\widehat{11}}\lambda = -\lambda. \tag{15.179}$$

ただし、$\not{G}$ は次のように定義される 16×16 行列である。

$$\not{G} = \left(i\not{G}_1 \sigma_y - \not{G}_3 \sigma_x + \frac{i}{2} \not{G}_5 \sigma_y \right)^{LR} \tag{15.180}$$

最後の項に 1/2 という因子が付いているのは、G_5 が自己双対場であることを反映している。L および R というのはカイラリティをあらわし、$\gamma^{11} = +1$ の成分が L である。$\not{G}$ の中の LR 成分のみが変換則に寄与する。

多脚場とディラトンについては

$$\delta e^{\widehat{m}}_\mu = -\frac{1}{4}(\psi_\mu \gamma^{\widehat{m}} \xi), \quad \delta\phi = \frac{1}{8}(\lambda\xi). \tag{15.181}$$

反対称テンソル場の超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta C_{\rm even} = e^{-B_2} \wedge \theta_{\rm even}, \quad \delta B_2 = \theta^{\rm NS}_2. \tag{15.182}$$

ただし、

$$\theta^{\rm NS}_{mn} = \frac{1}{2}(\sigma_z)_{IJ}(\psi_{I[n}\gamma_{m]}\xi_J), \tag{15.183}$$

$$\theta_{2n} = -\frac{1}{8e^\phi}(\sigma_x \sigma_z^{n+1})_{IJ}(2\psi_{I\mu}\langle\gamma_{2n}\gamma^\mu\rangle_{2n-1}\xi_J - \lambda_I \gamma_{2n}\xi_J) \tag{15.184}$$

式中のパウリ行列は R-対称性の足に作用する。パウリ行列が作用する添え字について $\not{G}$ を分解す

れば、次のようになる。

$$\not{G}^{12} = \left(\not{G}_1 - \not{G}_3 + \frac{1}{2}\not{G}_5\right)^{LR}, \quad \not{G}^{21} = \left(-\not{G}_1 - \not{G}_3 - \frac{1}{2}\not{G}_5\right)^{LR}. \tag{15.185}$$

ただし左辺の $\not{G}$ の肩の 1 と 2 はパウリ行列が作用する添え字であり、右辺の L と R はそれぞれ $\gamma^{11} = +1$ および $\gamma^{11} = -1$ の成分を表す。これら二つの行列は独立ではなく、互いに荷電共役の意味で転置の関係にある。

$$(\not{G}^{12}C)^T = -\not{G}^{21}C \tag{15.186}$$

15.7　IIB 型超重力理論の SL(2, **Z**) 対称性

IIB 型の超重力理論は 2-形式場を二つ持っており、これらを互いに混ぜるような対称性が存在する。零質量場の運動方程式のレベルでは、この対称性は SL(2, **R**) であるが、これらの場に対する電荷が量子化されていることを考慮すると、その電荷のスペクトルを変化させない対称性は部分群 SL(2, **Z**) である。一方、IIB 型理論の二つの超対称電荷は同じカイラリティを持つので、二つの超対称性を回転させる U(1) の R-対称性も存在する。ここではそれぞれの場に対してこれらの対称性がどのように作用するかを見てみよう。

これらの対称性を見ためにはアインシュタイン計量を用いるのが便利である。そこで前に与えた弦計量での運動方程式からワイル変換によってアインシュタイン計量に移っておく。ここで行うワイル変換は IIA 型超重力理論に対して行ったものと全く同じもの（式 (15.62) から (15.64)）を用いる。（ワイル変換は R-R 場は変換しないので、IIA 理論と IIB 理論に対して同じものを用いることができる。）

作用についての対称性の議論をする前にこの対称性に対する幾何学的な解釈を与えておくのが便利である。時空のそれぞれの点で仮想的な二次元平面を考える。この平面を Z-平面と呼ぶことにしよう。さらに、Z 平面上に格子を考え、これを Z-格子と呼ぶことにする。Z 格子の形状は回転、および拡大、縮小して重なるものは同一視すれば、二つのパラメータによって指定することができる。IIB 理論にスカラー場は時空の各点において Z 格子の形状を指定する二つのパラメータと同一視することができる。

Z 格子の形状をあらわす一つの方法は、Z 格子を生成する基底ベクトルを用いるものである。このために Z 平面上の多脚場 ${P_I}^m$ を導入しよう。I は二つの基底ベクトルを区別する添え字であり、m はそれぞれのベクトルの成分をあらわす Z 平面上の規格直交座標の添え字である。条件

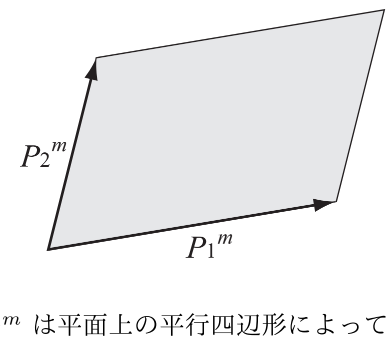

図 15.2: 多脚場 ${P_I}^m$ は平面上の平行四辺形によって表すことができる。

$\det {P_I}^m = 1$ という条件を課すことによって拡大、縮小の自由度を固定することにしよう。このと

き行列 $P_I{}^m$ は SL(2, **R**) の元とみなすことができる。次のようにして局所直交系に対して複素座標を導入するのも便利である。

$$P_I{}^{\pm} = P_I{}^1 + iP_I{}^2. \tag{15.187}$$

Z 平面を回転させる局所 SO(2) 対称性によって、これらは次のように変換される。

$$P_I{}^{\pm} \to P_I'^{\pm} = e^{\pm i\alpha} P_I{}^{\pm}, \quad P_I{}^m \to P_I'^m = P_I{}^m e^{i\alpha\sigma_y} \tag{15.188}$$

右からかかる SO(2) 回転がゲージ変換であるから、二つのパラメータは SL(2, **R**)/SO(2) の上に値を取る。上記の SO(2) 変換はゲージ変換であるから、対応するゲージ場を定義する必要がある。そのために、多脚場を用いて次のように定義される 1-形式場 V および $V^{\pm}$ を導入しよう。

$$(P^{-1})_m{}^I dP_I{}^n = \frac{1}{4}(\sigma_z - i\sigma_x)V^+ + \frac{1}{4}(\sigma_z + i\sigma_x)V^- + i\sigma_y V \tag{15.189}$$

V と $V^{\pm}$ は SL(2, **R**) 変換に対しては定義から明らかに不変である。U(1) 変換のもとで、V と $V^{\pm}$ は次のように変換される。

$$V^{\pm} \to e^{\pm 2i\alpha} V^{\pm}, \quad V \to V + d\alpha. \tag{15.190}$$

従って、V は局所的 U(1) 変換に対してゲージ場の役割を果たすことができる。すなわち、$\phi \to e^{in\alpha}\phi$ と変換される場があるとき、共変微分を $(\partial_\mu - inV_\mu)\phi$ ととれば、局所的 U(1) 変換のもとで共変に振舞う。また、$V^{\pm}$ を用いれば、微分を二つ含む、局所 U(1) 変換で不変な $P_I{}^m$ の運動項を次のように構成することができる。

$$\frac{\mathcal{L}}{2\pi} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} V_\mu^+ V_\nu^- \tag{15.191}$$

局所 SO(2) 変換を用いて常に $P_1{}^2 = 0$ というゲージを取ることができる。このときの多脚場は二つのパラメータ ϕ と χ で次のように表すことができる。

$$P_I{}^m = e^{(\chi/2)(\sigma_x - i\sigma_y)} e^{(\phi/2)\sigma_z} = \begin{pmatrix} e^{\phi/2} & 0 \\ -e^{\phi/2}\chi & e^{-\phi/2} \end{pmatrix}. \tag{15.192}$$

ここで用いた二つのパラメータが IIB 型超重力理論に現れる二つのスカラー場、ディラトンとアクシオンに対応する。（これまでアクシオンは C と表していたが、ここでは χ という文字を用いた。）$P_1{}^2 = 0$ ゲージでは 1-形式場 V と $V^{\pm}$ は次のように与えられる。

$$V^{\pm} = d\phi \mp ie^{\phi} d\chi, \quad V = \frac{1}{2} e^{\phi} d\chi. \tag{15.193}$$

このゲージでは作用 (15.191) はちょうど以前に与えたアインシュタイン計量でのディラトン場とアクシオン場の作用に一致する。Z 格子の形状をあらわすゲージ不変量としては次の複素パラメータがしばしば用いられる。

$$\tau = -\frac{P_2{}^-}{P_1{}^-} = \chi + ie^{-\phi}. \tag{15.194}$$

この量は $P_I{}^m$ とは異なり SL(2, **R**) 対称性のもとで非線型に変換される。

次に二つの 2-形式場について考えよう。これらは次のように SL(2, **R**) の 2 重項を組む。

$$B_2^1 = C_2, \quad B_2^2 = B_2, \quad H_3^A = dB_2^A. \tag{15.195}$$

アインシュタイン計量での二階反対称テンソル場に対する運動方程式は二つをまとめて次のように書くことができる。

$$d(\mathcal{M}_{IJ} * H_3^J) = -G_5 \wedge \epsilon_{IJ} H_3^J. \tag{15.196}$$

ただし $\mathcal{M}_{IJ} = P_I{}^m P_J{}^m$ は Z 格子の計量であり、$P_1{}^2 = 0$ ゲージでは χ と ϕ を用いて次のように与えられる。

$$\mathcal{M}_{IJ} = \begin{pmatrix} e^{\phi} & -e^{\phi}\chi \\ -e^{\phi}\chi & e^{-\phi} + e^{\phi}\chi^2 \end{pmatrix}. \tag{15.197}$$

5 階反対称テンソル場のビアンキ恒等式も、次のように SL(2, **R**) 共変な形に書くことができる。

$$dG_5 = -\frac{1}{2}\epsilon_{IJ} H_3^I \wedge H_3^J. \tag{15.198}$$

このように、H_3^I は Z 格子上の点と同じように変換される。特に、H_3^I の積分で定義される 5-ブレーンの電荷は Z-格子と一対一対応している。

次の SL(2, **Z**) 変換を考えよう。

$$H_3^I \to H_3'^I = M^I{}_J H_3^J, \quad M^I{}_J = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}. \tag{15.199}$$

この変換のもとで、複素スカラー場に対する変換は次のように与えられる。

$$\tau \to \tau' = \frac{p\tau + q}{r\tau + s}. \tag{15.200}$$

$P_I{}^m$ はこの変換のもとで線形に変換されるが、もし $P_1{}^2 = 0$ ゲージを壊さないことを要請すれば、同時に次の SO(2) 変換を行う必要がある。

$$P_I{}^m \to P_I'^m = \begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix} P_I{}^m e^{i\alpha\sigma_y}, \quad \alpha = -\arg(s - r\tau). \tag{15.201}$$

超対称性変換についても、局所的 U(1) 対称性や大域的 SL(2, **R**) 対称性が明らかな形に書きなおすことができる。まず、この節の最初で述べたワイル変換と線形変換によってアインシュタイン計量に移ると、ディラティーノとグラビティーノの変換則は次のように与えられる。

$$\delta\lambda = (\not{\partial}\phi)\xi - ie^{\phi}(\not{\partial}\chi)\sigma_y\xi + \frac{1}{2}e^{-\phi/2}\not{H}_3\sigma_z\xi + \frac{1}{2}e^{\phi/2}\not{G}_3\sigma_x\xi, \tag{15.202}$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_\mu &= D_\mu\xi + \frac{i}{4}e^{\phi}(\partial_\mu\chi)\sigma_y\xi + \frac{i}{8}\frac{\not{G}_5}{2}\gamma_\mu\sigma_y\xi \\ &\quad + \frac{1}{8}e^{-\phi/2}\not{H}_3\gamma_\mu\sigma_z\xi - \frac{1}{8}e^{\phi/2}\not{G}_3\gamma_\mu\sigma_x\xi \\ &\quad + \frac{1}{16}e^{-\phi/2}\gamma_\mu\not{H}_3\sigma_z\xi - \frac{1}{16}e^{\phi/2}\gamma_\mu\not{G}_3\sigma_x\xi. \end{aligned} \tag{15.203}$$

この変換則は次の局所的 SO(2) 変換に対して不変である。

$$\begin{pmatrix} \psi_\mu^1 \\ \psi_\mu^2 \end{pmatrix} \to e^{-(i\alpha/2)\sigma_y} \begin{pmatrix} \psi_\mu^1 \\ \psi_\mu^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \to e^{(3i\alpha/2)\sigma_y} \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \to e^{-(i\alpha/2)\sigma_y} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}. \tag{15.204}$$

対称性を見やすくするには、次のように複素場を定義するのが便利である。($\lambda^\pm$ の符号が逆であることに注意。)

$$H_3^\pm = e^{\phi/2}G_3 \pm ie^{-\phi/2}H_3, \quad \psi_\mu^\pm = \psi_\mu^1 \pm i\psi_\mu^2, \quad \lambda^\mp = \lambda^1 \pm i\lambda^2, \quad \xi^\pm = \xi^1 \pm i\xi^2. \tag{15.205}$$

Soryushiron Kenkyu

表 15.1: 局所的 U(1) 変換のもとでのそれぞれの場が持つ電荷

$\psi_\mu^\pm$	$\lambda^\pm$	$\xi^\pm$	$V^\pm$	$H_3^\pm$
$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{3}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 2	± 1

これらの複素場は、局所的 U(1) 変換に対して表 15.1 に与えたような電荷を持っている。これらの複素場を用いれば、上記の変換則は次のように表すことができる。

$$\delta\lambda^\mp = \not{V}^\mp\xi^\pm \pm \frac{i}{2}\not{H}_3^\mp\xi^\mp, \tag{15.206}$$

$$\delta\psi_\mu^\pm = \left(D_\mu \mp \frac{i}{2}V_\mu \mp \frac{i}{16}\not{G}_5\gamma_\mu\right)\xi^\pm \mp \frac{i}{16}(2\not{H}_3^\pm\gamma_\mu + \gamma_\mu\not{H}_3^\pm)\xi^\mp. \tag{15.207}$$

15.8 II 型超重力理論の T-双対性

IIA 型超重力理論を $\mathbf{S}^1$ でコンパクト化したものと、IIB 型超重力理論を $\mathbf{S}^1$ でコンパクト化したものは、適当な変数変換によって互いに等価になることが知られており、その関係は T-双対性と呼ばれる。

まずはじめに NS-NS sector のみを考えよう。R-R 場やフェルミオン場は全て 0 とする。R-R 場の運動方程式の全ての項は R-R 場（またはフェルミオン）を含むから、このように置くことは運動方程式と矛盾しない。この場合には自己双対場を含まないので IIB 型理論のほうも作用で表すことがる。実際、NS-NS 場についての運動方程式は IIA 型も IIB 型も全く同じであるから IIA 型超重力理論と同じ作用によって表される。まず、IIA 型理論の作用が 9 次元にコンパクト化されたときにどのようになるかを見てみよう。10 次元での IIA 型超重力理論の作用の NS-NS 場の部分は次のように与えられる。

$$\frac{S_{\mathrm{NS-NS}}}{2\pi} = \int dx^{10}\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left[\left(R + 4(\partial\phi)^2\right) - \frac{1}{2\cdot 3!}H_{\mu\nu\rho}^2\right] \tag{15.208}$$

この理論を 9 次元にコンパクト化するために計量を次のようにおこう。

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(9)}dx^\mu dx^\nu + e^{2\sigma}(\widetilde{dx}^9)^2, \quad \widetilde{dx}^9 = dx^9 + v_1. \tag{15.209}$$

1-形式 $\widetilde{dx}^9$ は $x^9 \to x^9 + a(x^i)$ という座標変換に対して不変である。上記の計量の分解は、多脚場を次のように取ることに対応している。

$$E_M{}^{\widehat{A}} = \begin{pmatrix} e_\mu^{\widehat{a}} & e^\sigma v_\mu \\ 0 & e^\sigma \end{pmatrix}. \tag{15.210}$$

10 次元の計量を用いて、9 次元の計量 $g_{\mu\nu}$ およびベクトル場 v_μ を表すと次のようになる。

$$v_\mu = G_{\mu 9}\frac{1}{G_{99}}, \quad g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - G_{\mu 9}\frac{1}{G_{99}}G_{9\mu}. \tag{15.211}$$

反対称テンソル場 B_{MN} は次のように分解しよう。

$$H_3 = h_3 + h_2 \wedge \widetilde{dx}^9, \quad B_2 = b_2 + b_1 \wedge \widetilde{dx}^9. \tag{15.212}$$

9 次元の反対称テンソル場 b_2 およびベクトル場 b_1 を 10 次元の場を用いて書くと次のようになる。

$$b_\mu = B_{\mu 9}, \quad b_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} - B_{\mu 9}\frac{1}{G_{99}}G_{\mu 9} + G_{\mu 9}\frac{1}{G_{99}}B_{\mu 9}. \tag{15.213}$$

すべての場は x^9 に依存しないと仮定し、x^9 方向の周期性を

$$0 \le x^9 < 1, \tag{15.214}$$

ととり、x^9 に対する積分を行う。すると、作用は次のように得られる。

$$\begin{aligned}\frac{S^{\mathrm{IIA}/\mathbf{S}^1}_{\mathrm{NS-NS}}}{2\pi} &= \int dx^9 \sqrt{-g}\frac{1}{e^{2\varphi}}\left[\left(R - (\partial\sigma)^2 + 4(\partial\varphi)^2\right)\right.\\ &\qquad \left. - \left(\frac{e^{2\sigma}}{4}f^2_{\mu\nu} + \frac{e^{-2\sigma}}{4}h^2_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2\cdot 3!}h^2_{\mu\nu\rho}\right]\end{aligned} \tag{15.215}$$

ただし、9 次元でのディラトン場を次のように定義した。

$$\varphi = \phi - \frac{1}{2}\sigma. \tag{15.216}$$

アインシュタイン作用の部分は §15.5 で与えた公式を、反対称テンソル場については局所ローレンツ系で $H_{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{9}} = e^{-\sigma}h_{\widehat{a}\widehat{b}}$ および $H_{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}} = h_{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}}$ が成り立つことを用いれば上記の作用が簡単に得られる。一方、IIB 型超重力理論の NS-NS 場の作用についても全く同様にコンパクト化を行うことができる。IIA 型理論の場と区別するために場に “ ′ ” を付けることにすると、9 次元にコンパクト化したときの作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{S^{\mathrm{IIB}/\mathbf{S}^1}_{\mathrm{NS-NS}}}{2\pi} &= \int dx^9 \sqrt{-g'}\frac{1}{e^{2\varphi'}}\left[\left(R' - (\partial\sigma')^2 + 4(\partial\varphi')^2\right)\right.\\ &\qquad \left. - \left(\frac{e^{2\sigma'}}{4}f'^2_{\mu\nu} + \frac{e^{-2\sigma'}}{4}h'^2_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2\cdot 3!}h'^2_{\mu\nu\rho}\right]\end{aligned} \tag{15.217}$$

これら二つの作用は、次の置き換えをすることで互いに移り合う。この作用は次の置き換えのもとで不変である。

$$h_3 = h'_3. \quad h_2 = f'_2, \quad f_2 = h'_2, \quad \sigma = -\sigma', \quad \varphi = \varphi'. \tag{15.218}$$

（h_2、f_2、σ をそのまま h'_2、f'_2、σ' と同定するような自明な置き換えのもとでも NS-NS セクターの作用は当然不変であるが、この関係は R-R セクターへ拡張することができない。）ポテンシャルについての関係式は関係式 (15.218) に (15.212) の分解を適用することで次のように得られる。

$$v'_1 = b_1, \quad b'_1 = v_1, \quad b'_2 = b_2 + b_1 \wedge v_1. \tag{15.219}$$

この、コンパクト化を通した IIA 型理論と IIB 型理論の間の関係を T-双対性と呼ぶ。上記の関係式を G_{MN} と B_{MN} に対しての関係式として書くと次のようになる。

$$G'_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - G_{\mu 9}\frac{1}{G_{99}}G_{\nu 9} + B_{\mu 9}\frac{1}{G_{99}}B_{\nu 9}, \quad B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + G_{\mu 9}\frac{1}{G_{99}}B_{\mu 9} - B_{\mu 9}\frac{1}{G_{99}}G_{\mu 9} \tag{15.220}$$

この関係式は、$X_{MN} = G_{MN} + B_{MN}$ を定義すると、次のようにまとめて表すことができる。

$$X'_{\mu\nu} = X_{\mu\nu} - X_{\mu 9}\frac{1}{X_{99}}X_{9\mu}, \quad X'_{\mu 9} = X_{\mu 9}\frac{1}{X_{99}}, \quad X'_{9\mu} = -\frac{1}{X_{99}}X_{9\mu}, \quad X'_{99} = \frac{1}{X_{99}}. \tag{15.221}$$

次に、R-R 場の間の関係について考えよう。IIB 型超重力理論の R-R 場には自己双対条件に従う G_5 が含まれるために、作用を用いることはできない。そこで運動方程式を用いて議論しよう。

まず、IIA 型超重力理論の R-R 場の強さを次のように分解しよう。

$$G_{\text{even}} = g_{\text{even}} + g_{\text{odd}} \wedge \widetilde{dx}^9. \tag{15.222}$$

G_{even} に対する 10 次元での Hodge 双対は 9 次元において次のように分解される。

$$*^{10} G_{\text{even}} = e^{-\sigma} *^9 g_{\text{odd}} + e^{\sigma} *^9 g_{\text{even}} \wedge \widetilde{dx}^9. \tag{15.223}$$

これを用いて G_{even} に対する自己双対条件 (15.35) を 9 次元の場に対する関係式に読みかえると、次の式を得る。

$$e^{-\sigma} *^9 g_{\text{odd}} = -\mathcal{T} g_{\text{even}}, \quad e^{\sigma} *^9 g_{\text{even}} = \mathcal{T} g_{\text{odd}}. \tag{15.224}$$

ただし $\mathcal{T}$ は (15.36) で定義された「転置」演算子である。9 次元で 2 回 Hodge 双対を取ればマイナス符号が現れることに注意すれば、これら二つの式が同じものであることがわかる。(15.222) を運動方程式 (15.34) に代入し、$\widetilde{dx}^9$ を含む部分と含まない部分とに分けると、独立な二つの式を得ることができる。

$$dg_{\text{even}} = h_3 \wedge g_{\text{even}} + f_2 \wedge g_{\text{odd}}, \quad dg_{\text{odd}} = h_3 \wedge g_{\text{odd}} + h_2 \wedge g_{\text{even}} \tag{15.225}$$

これら二つの式は f_2 と h_2、g_{even} と g_{odd} の入れ替えに対して対称性を持っている。すなわち、IIB 型の R-R field G_{odd} を次のように組むことで、IIB 型理論の運動方程式 (15.171) および自己双対条件 (15.170) を再現することができる。

$$G'_{\text{odd}} = -g_{\text{odd}} + g_{\text{even}} \wedge \widehat{dx}^9. \tag{15.226}$$

念のため、形式和 g_{even} および g_{odd} を成分に分解するとどうなるかを書いておこう。それぞれ 9 次元の場で次のように表される。

$$\begin{aligned} g_{\text{even}} &= m + g_2 + g_4 + e^{-\sigma} *^9 g_3 - e^{-\sigma} *^9 g_1, & (15.227)\\ g_{\text{odd}} &= g_1 + g_3 + e^{\sigma} *^9 g_4 - e^{\sigma} *^9 g_2 + e^{\sigma} *^9 m. & (15.228)\end{aligned}$$

これらの場と IIA 型超重力理論の R-R 場の強さの関係は、

$$G_4 = g_4 + g_3 \wedge \widetilde{dx}^9, \quad G_2 = g_2 + g_1 \wedge \widetilde{dx}^9. \tag{15.229}$$

また IIB 型理論の R-R 場の強さと 9 次元の場の関係は

$$G'_1 = -g_1 + m\widehat{dx}^9, \quad G'_3 = -g_3 + g_2\widehat{dx}^9, \quad G'_5 = -e^{\sigma} *^9 g_4 + g_4\widehat{dx}^9. \tag{15.230}$$

R-R ポテンシャルについては、IIA 理論の C_{odd} と IIB 理論の C'_{even} は次のように関係している。

$$C_{\text{odd}} = c_{\text{odd}} + c_{\text{even}} \wedge dx^9, \quad C'_{\text{even}} = -c_{\text{even}} + c_{\text{odd}} \wedge dx^9. \tag{15.231}$$

場の強さの場合とは異なり、$\widetilde{dx}^9$ や $\widehat{dx}^9$ ではなく dx^9 が用いられていることに注意すること。これは、ここで用いているポテンシャルが B_2 のゲージ変換のもとで変換される $C^{(1)}$ を用いているからである。このことは T-双対性変換をとおして、ポテンシャルが x^9 をシフトする座標変換のもとで不変にはなっていないことを意味しており、ちょうど上記のように分解して得られる 9 次元のポテンシャルはそのような変換性を示す。この関係式が場の強さに対して (15.222) と (15.226) を再現することは簡単に確認できる。

この節の最初に R-R 場を 0 と置いたときに NS-NS 場の作用が T-双対性を通して一致することを見たが、NS-NS 場の運動方程式は R-R 場を含んでいるので、R-R 場が 0 で無いときにはそれらが T-双対性変換で移りあうことをもう一度確認しておく必要がある。まず、IIA 理論の H_3 に対する運動方程式 (15.51) をコンパクト化すると、

$$\begin{aligned} d(e^{-2\varphi} * h_3) &= (\mathcal{T} g_{\mathrm{odd}} \wedge g_{\mathrm{even}})_7, &(15.232)\\ d(e^{-2\varphi-2\sigma} * h_2) &= e^{-2\varphi} * h_3 \wedge f_2 + \frac{1}{2}(\mathcal{T} g_{\mathrm{even}} \wedge g_{\mathrm{even}})_8. &(15.233)\end{aligned}$$

一方 IIB 型理論の運動方程式 (15.172) からは

$$\begin{aligned} d(e^{-2\varphi'} * h_3) &= (\mathcal{T} g_{\mathrm{odd}} \wedge g_{\mathrm{even}})_7, &(15.234)\\ d(e^{-2\varphi'-2\sigma'} * f_2) &= e^{-2\varphi'} * h_3 \wedge h_2 + \frac{1}{2}(\mathcal{T} g_{\mathrm{odd}} \wedge g_{\mathrm{odd}})_8. &(15.235)\end{aligned}$$

これらを比較すると、IIA 型理論の h_3 に対する運動方程式と IIB 型理論の h'_3 に対する運動方程式は確かに一致している。

h_2 と h'_2 に対しては T-双対性を通してそれぞれ f'_2 と f_2 に対応しているはずである。IIA 型理論の計量についての運動方程式は 10 次元では次のように与えられる。

$$\frac{1}{e^{2\phi}}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = \frac{2}{e^{2\phi}}(g_{\mu\nu}\nabla^2\phi - g_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - \nabla_\mu\partial_\nu\phi) + \frac{1}{2}T^{\mathrm{IIA}}_{\mu\nu} \tag{15.236}$$

ただし、反対称テンソル場に対するエネルギー運動量テンソルが次のように定義される。

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{IIA}}_{\mu\nu} &= \frac{1}{e^{2\phi}}\left(\frac{1}{2}H_{\mu\alpha\beta}H_\nu{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\cdot 3!}g_{\mu\nu}H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma}\right)\\ &+ \left(G_{\mu\alpha}G_\nu{}^\alpha - \frac{1}{2\cdot 2}g_{\mu\nu}G_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta}\right)\\ &+ \left(\frac{1}{3!}G_{\mu\alpha\beta\gamma}G_\nu{}^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2\cdot 4!}g_{\mu\nu}G_{\alpha\beta\gamma\delta}G^{\alpha\beta\gamma\delta}\right) &(15.237)\end{aligned}$$

この運動方程式の添え字を $\widehat{a}$ と $\widehat{9}$ にとり、9 次元の言葉で書きなおせば、

$$\nabla^{\widehat{b}}(e^{-2\varphi+2\sigma}f_{\widehat{a}\widehat{b}}) = -e^\sigma g_{\widehat{a}\widehat{b}}g^{\widehat{b}} - \frac{1}{3!}e^\sigma g_{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}\widehat{d}}g^{\widehat{b}\widehat{c}\widehat{d}} + \frac{1}{2}e^{-2\phi+\sigma}h_{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}}h^{\widehat{b}\widehat{c}}. \tag{15.238}$$

さらにこの式は外微分形式を用いれば次のように与えられる。

$$d(e^{-2\varphi+2\sigma} *^9 f_2) = -g_3(e^\sigma *^9 g_4) - g_1(e^\sigma *^9 g_2) + h_2(e^{-2\phi+\sigma} *^9 h_3). \tag{15.239}$$

これは確かに IIB 側で得られる h'_2 に対する運動方程式と一致する。同様にして IIA 型理論の h_2 に対する運動方程式と IIB 型理論の f'_2 に対する運動方程式が一致することも確かめられる。

ここでは省略するが、同様にして 9 次元の計量に対するアインシュタイン方程式やスカラー場に対する方程式も、T-双対性を通して一致することが示される。

次に、フェルミオンの関係について見てみよう。10 次元の γ 行列を γ^M、9 次元の γ 行列を γ^μ と表すことにし、それらの関係を次のように設定しておく。

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \gamma^\mu \\ \gamma^\mu & \end{pmatrix}, \quad \gamma^{\widehat{9}} = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^{\widehat{11}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \tag{15.240}$$

このとき、10 次元の荷電共役行列 C は 9 次元のもの c によって次のように表すことができる。

$$C = \begin{pmatrix} & c \\ -c & \end{pmatrix} \tag{15.241}$$

9 次元の γ 行列に対して次の式が成り立つ。

$$c\gamma_i = \gamma_i^T c \tag{15.242}$$

9 次元マヨラナスピノルは次の条件によって定義される。

$$\overline{\psi} = \psi^T c \tag{15.243}$$

η と ξ を 9 次元のマヨラナスピノルとするとき、次のように組めば 10 次元のマヨラナスピノルになる。

$$\psi = \begin{pmatrix} \eta \\ i\xi \end{pmatrix} \tag{15.244}$$

虚数単位 i が現れることに注意。9 次元のマヨラナスピノルに対して次の式が成り立つ。

$$\psi_1\gamma^i\psi_2 = (\psi_2\gamma^i\psi_1)^\dagger = -(\psi_2\gamma^i\psi_1) \tag{15.245}$$

IIA 型超重力理論と IIB 型超重力理論の超対称変換がコンパクト化を通して関係していることを見ておこう。そのために、超対称変換 (15.20) と (15.21) を 9 次元の言葉で書きなおす必要がある。計量は (15.210) によって分解する。また、10 次元での共変微分を 9 次元の量で書きなおす時には次の公式を用いるとよい。

$$D_{\hat{9}}\xi = \left(-\frac{e^\sigma}{8}f_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\partial_\alpha\sigma)\gamma^\alpha\gamma^{\hat{9}}\right)\xi, \quad D_\mu\xi = D_\mu\xi + \frac{e^\sigma}{4}f_{\mu\alpha}\gamma^\alpha\gamma^{\hat{9}}\xi. \tag{15.246}$$

これを用いて変換則を書きなおし、カイラリティごとに分けて書く。すると、グラビティーノとディラティーノそれぞれがカイラリティの異なる二つの部分に分かれる。その片方について x^9 方向のパリティ変換を行い、グラビティーノと変換パラメータ左巻き、ディラティーノは右巻きのカイラリティを持つようにそろえ、同じカイラリティのスピノル場を二つずつ次のようにまとめて書くことにする。

$$\xi' = \begin{pmatrix} \xi^L \\ \gamma^{\hat{9}}\xi^R \end{pmatrix}, \quad \psi'_{\hat{i}} = \begin{pmatrix} \psi^L_{\hat{i}} \\ \gamma^{\hat{9}}\psi^R_{\hat{i}} \end{pmatrix}, \quad \psi'_{\hat{9}} = \begin{pmatrix} -\psi^L_{\hat{9}} \\ \gamma^{\hat{9}}\psi^R_{\hat{9}} \end{pmatrix}, \quad \lambda' = \begin{pmatrix} \lambda^R - 2\gamma_{\hat{9}}\psi^L_{\hat{9}} \\ -\gamma^{\hat{9}}(\lambda^L - 2\gamma_{\hat{9}}\psi^R_{\hat{9}}) \end{pmatrix}. \tag{15.247}$$

すると、変換則を次のようにまとめて書くことができる。これは IIB 型超重力理論のフェルミオンの変換則にほかならない。

$$\delta\psi'_\mu = D_\mu\xi' + \frac{1}{8}H'_{\mu\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\sigma_z\xi' + \frac{e^{\phi'}}{8}\not{G}^{\mathrm{IIB}}\gamma_\mu\xi', \tag{15.248}$$

$$\delta\lambda' = (\not{\partial}\phi')\xi' + \frac{1}{2}\not{H}'_3\sigma_z\xi' + \frac{e^{\phi'}}{8}\gamma^\mu\not{G}^{\mathrm{IIB}}\gamma_\mu\xi'. \tag{15.249}$$

この変形は比較的簡単に行うことができるが、グラビティーノの変換則に含まれる R-R 場がどのように関係しているかについてだけ簡単に説明しておこう。まず、IIA 型超重力理論の (15.229) は 9 次元の場を用いて次のように書くこともできる。

$$\not{G}_{2n} = \frac{i}{e^\sigma}\not{g}_{2n-1} \otimes \sigma_z + \not{g}_{2n} \otimes \mathbf{1}. \tag{15.250}$$

ただし、$\not{g}_n$ は 9 次元の γ 行列を用いて定義される。従って、全ての R-R 場についての和を取ると、$\not{G}$ は次のように与えられる。

$$\not{G}^{\mathrm{IIA}} = -m\mathbf{1} + \frac{i}{e^\sigma}\not{g}_1 \otimes \mathbf{1} + \not{g}_2 \otimes \sigma_z - \frac{i}{e^\sigma}\not{g}_3 \otimes \sigma_z - \not{g}_4 \otimes \mathbf{1}. \tag{15.251}$$

Soryushiron Kenkyu

この行列のそれぞれのカイラリティのブロックは次のように与えられる。

$$-\not{G}^{LL}\gamma^{\hat{9}} = -im - \frac{1}{e^{\sigma}}\not{\vartheta}_1 + i\not{\vartheta}_2 + \frac{1}{e^{\sigma}}\not{\vartheta}_3 - i\not{\vartheta}_4, \tag{15.252}$$

$$\gamma^{\hat{9}}\not{G}^{RR} = im + \frac{1}{e^{\sigma}}\not{\vartheta}_1 + i\not{\vartheta}_2 + \frac{1}{e^{\sigma}}\not{\vartheta}_3 + i\not{\vartheta}_4. \tag{15.253}$$

ただし、γ^9 を右または左から掛ける事によって L-R 成分のみを持つようにした。これらの、L-R 成分のみを持つ行列を二つまとめると、IIB 型超重力理論において定義された $\not{G}$ が再現される。

$$\begin{pmatrix} & -\not{G}^{LL}\gamma^9 \\ \gamma^9\not{G}^{RR} & \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{\sigma}}\not{G}^{\mathrm{IIB}} \tag{15.254}$$

R-R ポテンシャルの変換則についても見ておこう。変換則に現れる θ について、次の関係が成り立つことはフェルミオンやディラトンなどの T-双対性のもとでの関係式を用いて示すことができる。

$$\theta_{\mathrm{odd}} = \vartheta_{\mathrm{odd}} + \vartheta_{\mathrm{even}} \wedge \widetilde{dx}^9, \quad \theta'_{\mathrm{even}} = -\vartheta_{\mathrm{even}} + \vartheta_{\mathrm{odd}} \wedge \widehat{dx}^9. \tag{15.255}$$

ここで、dx^9 ではなく $\widetilde{dx}^9$ と $\widehat{dx}^9$ が現れることに注意。この関係式を用いれば IIA 理論と IIB 理論の R-R ポテンシャルの超対称変換が互いに移りあうことを示すことができる。例として IIB 型超重力理論の C_{mn} の変換則が正しく IIA 型の変換則から得られることを示しておこう。ポテンシャルの間の関係 (15.231) より、C'_{mn} は T-双対性によって C_{mn9} に移る。従ってその超対称変換は

$$\begin{aligned}
\delta C'_{mn} &= -\delta C_{mn9} \\
&= -\theta_{mn9} + B_{mn}\theta_9 + B_{n9}\theta_m - B_{m9}\theta_n \\
&= -\vartheta_{mn} + (b_{mn} + b_m v_n - b_n v_m)\vartheta + b_n(\vartheta_m + v_m\vartheta) - b_m(\vartheta_n + v_n\vartheta) \\
&= -\vartheta_{mn} + b_{mn}\vartheta + b_n\vartheta_m - b_m\vartheta_n \\
&= (-\vartheta_{mn} + \vartheta_m v'_n - \vartheta_n v'_m) + B'_{mn}\vartheta \\
&= \theta'_{mn} - B'_{mn}\theta'
\end{aligned} \tag{15.256}$$

となり、正しく IIB 型超重力理論の変換則が再現されている。途中で $b_{mn} = b'_{mn} + b'_m v'_n - b'_n v'_m = B'_{mn}$ を用いた。形式和を用いれば、全ての R-R ポテンシャルについて同様の関係が成り立つことをまとめて示すことができる。

15.9 II 型超重力理論のブレーン

反対称テンソル場はそれぞれ異なる種類のブレーンに結合しているが、反対称テンソル場が従う運動方程式やビアンキ恒等式から、それらのブレーンについての重要な情報を引き出すことができる。そのためにまず運動方程式に次のようにブレーンを表すソース項を導入する。まず最初に IIA

型理論について考えよう。

$$
\begin{aligned}
dH_3 &= J_4^{\mathrm{NS5}}, &(15.257)\\
d(e^{-2\phi}*H_3) &= J_8^{\mathrm{F1}} - m*G_2 - *G_4\wedge G_2 + \frac{1}{2}G_4\wedge G_4, &(15.258)\\
dm &= J_1^{\mathrm{D8}}, &(15.259)\\
dG_2 &= J_3^{\mathrm{D6}} + mH_3, &(15.260)\\
dG_4 &= J_5^{\mathrm{D4}} + H_3\wedge G_2, &(15.261)\\
d*G_4 &= J_7^{\mathrm{D2}} + H_3\wedge G_4, &(15.262)\\
d*G_2 &= J_9^{\mathrm{D0}} - H_3\wedge *G_4. &(15.263)
\end{aligned}
$$

どのような反対称テンソル場があるかを見ることにより、どのような種類のブレーンが存在するかを知ることができる。上で行ったソース項の導入の際にはすでにこの事を利用した。これらの式の両辺を微分すれば、次のカレント保存則が得られる。

$$
\begin{aligned}
dJ_4^{\mathrm{NS5}} &= 0, &(15.264)\\
dJ_8^{\mathrm{F1}} &= mJ_9^{\mathrm{D0}} + G_2\wedge J_7^{\mathrm{D2}} - G_4\wedge J_5^{\mathrm{D4}} + *G_4\wedge J_3^{\mathrm{D6}} + *G_2\wedge J_1^{\mathrm{D8}}, &(15.265)\\
dJ_1^{\mathrm{D8}} &= 0, &(15.266)\\
dJ_3^{\mathrm{D6}} &= H_3\wedge J_1^{\mathrm{D8}} - mJ_4^{\mathrm{NS5}}, &(15.267)\\
dJ_5^{\mathrm{D4}} &= H_3\wedge J_3^{\mathrm{D6}} - G_2\wedge J_4^{\mathrm{NS5}}, &(15.268)\\
dJ_7^{\mathrm{D2}} &= H_3\wedge J_5^{\mathrm{D4}} - G_4\wedge J_4^{\mathrm{NS5}}, &(15.269)\\
dJ_9^{\mathrm{D0}} &= -H_3\wedge J_7^{\mathrm{D2}} + *G_4\wedge J_4^{\mathrm{NS5}}. &(15.270)
\end{aligned}
$$

これらの式から、どのブレーンがどのブレーンに端を持つことができるかを読み取ることができる。たとえば、F1-ブレーンの境界を表す dJ_8^{F1} は (15.265) において J_9^{D0} から J_1^{D8} まですべての種類の D-ブレーンのカレントの線形結合として書けている。これは F1-ブレーンがすべての種類の D-ブレーンにくっつくことができることを意味している。逆に、M-ブレーンについて行ったのと同様な議論により、すべての D-ブレーンの上には F1-ブレーンの端点と結合する 1-形式ゲージ場が存在していなければならない。同様な考察を全てのブレーンに対して行うと、あるブレーンがくっつくことができるブレーンと、それぞれのブレーンの上に存在するゲージ場が表 15.2 のように決定される。

同様の考察を IIB 型超重力理論についても行ってみよう。まず次のようにソース項を導入する。

$$
\begin{aligned}
dH_3 &= J_4^{\mathrm{NS5}}, &(15.271)\\
d(e^{-2\phi}*H_3) &= J_8^{\mathrm{F1}} - G_3\wedge G_5 + G_1\wedge *G_3, &(15.272)\\
dG_1 &= J_2^{\mathrm{D7}}, &(15.273)\\
dG_3 &= J_4^{\mathrm{D5}} + H_3\wedge G_1, &(15.274)\\
dG_5 &= J_6^{\mathrm{D3}} + H_3\wedge G_3, &(15.275)\\
d*G_3 &= J_8^{\mathrm{D1}} + H_3\wedge G_5, &(15.276)\\
d*G_1 &= J_{10}^{\mathrm{D-1}} - H_3\wedge *G_3. &(15.277)
\end{aligned}
$$

Soryushiron Kenkyu

表 15.2: IIA 型理論に存在するそれぞれのブレーン上に端を持てるブレーンと、その端点に結合するブレーン上のゲージ場

カレント	ブレーン (略称)	端を持てるブレーン	ブレーン上のゲージ場
J_8^{F1}	fundamental string (F1)	なし	なし
J_4^{NS5}	NS5-brane (NS5)	D0, D2, D4, D6	0-form, 2-form, 4-form, 6-form
J_9^{D0}	D0-brane (D0)	F1	1-form
J_7^{D2}	D2-brane (D2)	F1, D0	1-form, 0-form
J_5^{D4}	D4-brane (D4)	F1, D2	1-form, 2-form
J_3^{D6}	D6-brane (D6)	F1, D4	1-form, 4-form
J_1^{D8}	D8-brane (D8)	F1, D6	1-form, 6-form

この両辺を微分すれば、

$$
\begin{aligned}
dJ_4^{\mathrm{NS5}} &= 0, & (15.278)\\
dJ_8^{\mathrm{F1}} &= G_1 \wedge J_8^{\mathrm{D1}} - G_3 \wedge J_6^{\mathrm{D3}} + G_5 \wedge J_4^{\mathrm{D5}} - *G_3 \wedge J_2^{\mathrm{D7}}, & (15.279)\\
dJ_2^{\mathrm{D7}} &= 0, & (15.280)\\
dJ_4^{\mathrm{D5}} &= H_3 \wedge J_2^{\mathrm{D7}} - G_1 \wedge J_4^{\mathrm{NS5}}, & (15.281)\\
dJ_6^{\mathrm{D3}} &= +H_3 \wedge J_4^{\mathrm{D5}} - G_3 \wedge J_4^{\mathrm{NS5}}, & (15.282)\\
dJ_8^{\mathrm{D1}} &= H_3 \wedge J_6^{\mathrm{D3}} - G_5 \wedge J_4^{\mathrm{NS5}}. & (15.283)
\end{aligned}
$$

（運動方程式 (15.277) を微分すると 11-形式になってしまうのでいかなる関係式も得ることはできない。）これらのカレントの間の関係式から、表 15.3 のような事実がわかる。

表 15.3: IIB 型理論に存在するそれぞれのブレーン上に端を持てるブレーンと、その端点に結合するブレーン上のゲージ場

カレント	ブレーン (略称)	端を持てるブレーン	ブレーン上のゲージ場
J_8^{F1}	fundamental string (F1)	なし	なし
J_4^{NS5}	NS5-brane (NS5)	D1, D3, D5	1-form, 3-form, 5-form
J_8^{D1}	D1-brane (D1)	F1	1-form
J_6^{D3}	D3-brane (D3)	F1, D1	1-form, 1-form
J_4^{D5}	D5-brane (D5)	F1, D3	1-form, 3-form
J_2^{D7}	D7-brane (D7)	F1, D5	1-form, 5-form

15.10 M-ブレーンと IIA-ブレーン

既に述べたように、11 次元超重力理論には M2-ブレーンと M5-ブレーンの 2 種類のブレーンが存在する。この理論をコンパクト化すると、それらのブレーンがコンパクト化した方向に巻き付くかどうかによって、4 種類のブレーンが得られる。次元の比較から、これらは IIA 型超重力理論

Soryushiron Kenkyu

のブレーンと表 15.4 のような対応関係にあると考えられる。この対応関係を用いれば、M-ブレー

表 15.4:

M-theory		type IIA
wrapped M2-brane	$\to$	fundamental string
unwrapped M2-brane	$\to$	D2-brane
wrapped M5-brane	$\to$	D4-brane
unwrapped M5-brane	$\to$	NS5-brane

ンの性質から IIA-ブレーンの性質についての情報を得ることができる。

そのような考察を行う前に、11 次元の次元を持った物理量と 10 次元の次元をもった物理量の関係を与える際に必要なそれぞれの理論での単位長さの関係を与えておこう。11 次元超重力理論においてはプランク長さを $2\pi l_p = 1$ ととる単位系を用いていた。一方、10 次元の理論の計量は弦計量を用いるのが便利である。これは 11 次元のものと $(e_\mu^{\widehat{m}})_{10\mathrm{dim}} = e^{\phi/3}(e_\mu^{\widehat{m}})_{11\mathrm{dim}}$ の関係にある。従って、この計量を用いて長さを計算すると 11 次元の計量を用いて計算したものの $e^{\phi/3}$ 倍になる。これは、10 次元の弦計量での単位長さを $2\pi l_s = 1$ とした時に、二つの長さ l_s と l_p が次のように関係していることを意味する。

$$(2\pi l_p) = (2\pi l_s)e^{\phi/3} \tag{15.284}$$

以前に 11 次元の超重力理論のコンパクト化によって IIA 型超重力理論を得た際に、x^{11} 方向のコンパクト化の周期を 1、計量を $e_{11}^{\widehat{11}} = e^\rho = e^{(2/3)\phi}$ と取った。従って、コンパクト化した $\mathbf{S}^1$ の周の長さは

$$L = (2\pi l_p)e^\rho = (2\pi l_s)e^\phi, \tag{15.285}$$

である。

このことを踏まえて 10 次元のブレーンの張力は次のように求めることができる。IIA 型超重力理論の弦は 11 次元超重力理論の M2-ブレーンが $\mathbf{S}^1$ に巻きついたものと解釈される。したがって弦の張力は M2-ブレーンの張力にコンパクト化の周期 L を掛けたものである。一方 D2-ブレーンは $\mathbf{S}^1$ に巻きついていない M2-ブレーンと解釈されるから、M2-ブレーンの張力がそのまま D2-ブレーンの張力になる。すなわち、次の式が成り立つ。

$$T_{\mathrm{str}} = LT_{M2} = \frac{2\pi}{(2\pi l_s)^2}, \quad T_{D2} = T_{M2} = \frac{2\pi}{(2\pi l_s)^3 e^\phi}. \tag{15.286}$$

同様に、M5-ブレーンが $\mathbf{S}^1$ に巻き付いたものが D4-ブレーンであり、巻き付いていない M5-ブレーンが NS5-ブレーンであるから、それらの張力は次のように得られる。

$$T_{D4} = LT_{M5} = \frac{2\pi}{(2\pi l_s)^5 e^\phi}, \quad T_{NS5} = T_{M5} = \frac{2\pi}{(2\pi l_s)^6 e^{2\phi}}. \tag{15.287}$$

張力は、ブレーンの作用の中でブレーン上の場が 0 においたときの、ブレーンの体積だけによって決まる部分であるが、ブレーン上の場が 0 でない一般の場合に対する作用もコンパクト化によって求めることができる。M2-ブレーンの上にはその形状を決定するスカラー場のみが存在するから、その作用は次の南部-後藤作用で与えられる。

$$\frac{S}{2\pi} = -\int d^3\sigma\sqrt{-\det\widetilde{G}} + \int A_3 \tag{15.288}$$

$\widetilde{G}_{\alpha\beta}$ は M2-ブレーン上の誘導計量であり、背景時空の計量 $G_{\mu\nu}$ から次のように得られる。

$$\widetilde{G}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu} = \eta_{\widehat{A}\widehat{B}} V_\alpha^{\widehat{A}} V_\beta^{\widehat{B}}. \tag{15.289}$$

ただし、$V_\alpha^{\widehat{A}}$ は次のように定義される。

$$V_\alpha^{\widehat{A}} = E_M^{\widehat{A}} \partial_\alpha X^M \tag{15.290}$$

まず、もっとも簡単な弦の作用を求めてみよう。弦の上には弦の形状を決定するスカラー場のみがあるから、その作用は上で求めた張力の寄与だけである。そのことを具体的にチェックしておこう。M2-ブレーンが x^{11} 方向に巻きついている場合には $\sigma_2 = x^{11}$ と取ることができる。このとき σ^2 による微分が x^{11} 以外は 0 であることを用いれば、$V_\alpha^{\widehat{M}}$ は次のように分解される。

$$\begin{pmatrix} V_\alpha^{\widehat{m}} & V_\alpha^{\widehat{11}} \\ V_2^{\widehat{m}} & V_2^{\widehat{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_\mu^{\widehat{m}} \partial_\alpha X^\mu & e^\rho C_\mu \partial_\alpha X^\mu \\ 0 & e^\rho \end{pmatrix} \tag{15.291}$$

従って、誘導計量の行列式は次のように与えられる。

$$\det \widetilde{G}_{MN} = e^{2\rho} \det \widetilde{g}_{\mu\nu}. \tag{15.292}$$

これを M2-ブレーンの作用に代入すると、σ^2 方向の積分は単に 1 を与えるだけであり、次の作用を得る。

$$\frac{S}{2\pi} = -\int d^2\sigma e^\rho \sqrt{-\det \widetilde{g}} + \int B_2 \tag{15.293}$$

ここで、さらにワイル変換を行って弦計量に移ると次の弦の作用を得る。

$$\frac{S}{2\pi} = -\int d^2\sigma \sqrt{-\det \widetilde{g}} + \int B_2 \tag{15.294}$$

一方、D2-ブレーンに対応した x^{11} 方向に巻き付いていない M2-ブレーンの場合には $X^{11} = \sigma$ とおいて、

$$V_\alpha^{\widehat{m}} = e_\mu^{\widehat{m}} \partial_\alpha X^\mu, \quad V_\alpha^{\widehat{11}} = e^\rho h_\alpha, \quad h_\alpha = \partial_\alpha \sigma + C_\mu \partial_\alpha X^\mu, \tag{15.295}$$

従って、M2-ブレーン上の計量は次のように書ける。

$$\widetilde{G}_{\alpha\beta} = \widetilde{g}_{\alpha\beta} + e^{2\rho} h_\alpha h_\beta, \quad \det \widetilde{G}_{\alpha\beta} = (1 + e^{2\rho} h_\alpha \widetilde{g}^{\alpha\beta} h_\beta) \det \widetilde{g}_{\alpha\beta} \tag{15.296}$$

ただし、ワイル変換を行う前の 10 次元の計量を次のようにおいた。

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\widehat{m}\widehat{n}} V_\alpha^{\widehat{m}} V_\beta^{\widehat{n}}. \tag{15.297}$$

また、A_3 は次のように書ける。

$$A_3 = C_3 + B_2 \wedge h_1 \tag{15.298}$$

従って、M2-ブレーンの作用を次のように書きかえることができる。

$$\frac{S}{2\pi} = -\int d^3\sigma \sqrt{-\det \widetilde{g}_{\alpha\beta}} \sqrt{1 + e^{2\rho} h_\alpha \widetilde{g}^{\alpha\beta} h_\beta} + \int (C_3 + B_2 \wedge h_1). \tag{15.299}$$

さらに、ワイル変換を行い弦計量へ移り、$\rho = (2/3)\phi$ としておくと、

$$\frac{S}{2\pi} = -\int d^3\sigma \sqrt{-\det \widetilde{g}_{\alpha\beta}} \sqrt{e^{-2\phi} + h_\alpha \widetilde{g}^{\alpha\beta} h_\beta} + \int (C_3 + B_2 \wedge h_1). \tag{15.300}$$

これを D2-ブレーンの作用として採用することもできるが、これとは別の形に書きかえることもできる。3 次元ではスカラー場 σ はゲージ場の双対場であると考えることができるので、σ をゲージ場 A_1 によって表すこともできる。[35] そのためには h_1 を独立変数とみなし、次のように変形する。

$$\frac{S}{2\pi}=-\int d^3\sigma\sqrt{-\det\widetilde{g}_{\alpha\beta}}\sqrt{e^{-2\phi}+h_\alpha\widetilde{g}^{\alpha\beta}h_\beta}+\int(C_3+B_2\wedge h_1)+\int(h_1-C_1)\wedge dA_1. \quad (15.301)$$

A_1 について積分すれば $d(h_1-C_1)=0$ となり、$h_1=d\phi+C_1$ と置くことができる。これを上記の作用に代入すればもとの作用を得る。その代わり、h_1 についての運動方程式を解いてみよう。

$$\sqrt{-\det(\widetilde{g}_{\alpha\beta})}\frac{\widetilde{g}^{\alpha\beta}h_\beta}{\sqrt{e^{-2\phi}+h_\alpha\widetilde{g}^{\alpha\beta}h_\beta}}=\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(F_{\beta\gamma}+B_{\beta\gamma}) \quad (15.302)$$

これをもとの作用に代入して h_1 を消去すれば、

$$\frac{S}{2\pi}=-\int d^3\sigma\sqrt{-\det\widetilde{g}_{\alpha\beta}}\frac{1}{e^\phi}\sqrt{1+\frac{1}{2}(F_{\beta\gamma}+B_{\beta\gamma})^2}+\int(C_3-C_1\wedge dA_1) \quad (15.303)$$

さらに、3 次元では次のように行列式の形に書きなおすことができる。

$$\frac{S}{2\pi}=-\int d^3\sigma\frac{1}{e^\phi}\sqrt{-\det(\widetilde{g}_{\alpha\beta}+F_{\alpha\beta}+B_{\alpha\beta})}+\int(C_3-C_1\wedge dA_1) \quad (15.304)$$

上で導入したゲージ場の規格化が、われわれが用いているものになっていることを確かめておこう。双対な表現へ移る前のスカラー場 σ は周期が 1 の S^1 上にあったから、その場の強さ h_1 は次の量子化条件を満足している。

$$\oint h_1\in\mathbf{Z}. \quad (15.305)$$

さらに、$F_2=dA_1$ は作用の変分 $\delta S/(2\pi)=\int\delta h_1\wedge F_2$ を用いて定義することができ、§12.3.5 で用いた双対場の定義と一致している。したがって双対場 F_2 は量子化条件 $\int F_2\in\mathbf{Z}$ を満足する。

同様にして M5-ブレーンの作用から D4-ブレーンや NS5-ブレーンの作用も得ることができると期待されるが、M5-ブレーン上には自己双対場が存在するためにかなり複雑である。そこでここでは省略する。

IIA 型弦理論におけるブレーンと超対称性の破れの関係も、11 次元の M-ブレーンの場合と同様に超対称電荷と中心電荷の代数関係から出発して求めることができる。その結果は次のように与えられる。ただし、$S^{\mu_0\cdots\mu_p}$ であらわされる反対称テンソルは 10 次元時空の中での p ブレーンの向きを表すものである。ただし、次のように規格化されているものとする。

$$\frac{1}{(p+1)!}S_{\mu_0\cdots\mu_p}S^{\mu_0\cdots\mu_p}=-1. \quad (15.306)$$

Dp-ブレーンについての条件は

$$\frac{1}{(p+1)!}S_{\mu_0\cdots\mu_p}\gamma^{\mu_0\cdots\mu_p}X\eta=\pm\eta. \quad (15.307)$$

ただし、$p=2,6$ のときは $X=1$ であり、$p=0,4,8$ のときは $X=\gamma^{11}$ である。これは左辺の行列の 2 乗が $+1$ になるように γ^{11} を挿入すると覚えておけばよい。弦と NS5-ブレーンの場合は次のとおりである。

$$\frac{1}{2}S_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{11}\eta=\pm\eta, \quad \frac{1}{6!}S_{\mu_0\cdots\mu_5}\gamma^{\mu_0\cdots\mu_5}\eta=\pm\eta. \quad (15.308)$$

Soryushiron Kenkyu

ここで γ^{11} が入っているかどうかは、対応するブレーンが M-理論の立場で見たときに x^{11} 方向に巻きついているかどうかを考えてみればよい。この判定条件は D2-ブレーンと D4-ブレーンについても適用することができる。

IIB 型弦理論については、超対称性の交換関係の右辺は次のように与えられる。

$$\{Q,\overline{Q}\}=\gamma_\mu(P^\mu+\sigma_x Z^\mu_{\mathrm{D1}}+\sigma_z Z^\mu_{\mathrm{F1}})+\frac{1}{3!}\gamma_{\mu\nu\rho}\epsilon Z^{\mu\nu\rho}_{\mathrm{D3}}+\frac{1}{5!}\gamma_{\mu_1\cdots\mu_5}(Z^{\mu_1\cdots\mu_5}_{\mathrm{KKM}}+\sigma_x Z^{\mu_1\cdots\mu_5}_{\mathrm{D5}}+\sigma_z Z^{\mu_1\cdots\mu_5}_{\mathrm{NS5}}) \tag{15.309}$$

したがってブレーンによる超対称性の破れは次のように決めることができる。

$$\text{D1-brane} \quad : \quad \frac{1}{2}S_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\sigma_x\eta=\pm\eta, \tag{15.310}$$

$$\text{F1-brane} \quad : \quad \frac{1}{2}S_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\sigma_z\eta=\pm\eta, \tag{15.311}$$

$$\text{D3-brane} \quad : \quad \frac{1}{4!}S_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon\eta=\pm\eta, \tag{15.312}$$

$$\text{D5-brane} \quad : \quad \frac{1}{6!}S_{\mu_0\cdots\mu_5}\gamma^{\mu_0\cdots\mu_5}\sigma_x\eta=\pm\eta, \tag{15.313}$$

$$\text{NS5-brane} \quad : \quad \frac{1}{6!}S_{\mu_0\cdots\mu_5}\gamma^{\mu_0\cdots\mu_5}\sigma_z\eta=\pm\eta, \tag{15.314}$$

$$\text{D7-brane} \quad : \quad \frac{1}{8!}S_{\mu_0\cdots\mu_7}\gamma^{\mu_0\cdots\mu_7}\epsilon\eta=\pm\eta. \tag{15.315}$$

15.11 D-ブレーンの作用とその T-双対性

D-ブレーンは R-R 場に結合するという性質によって特徴付けられるブレーンである。すなわち、IIA 型および IIB 型超重力理論の D-ブレーンはそれぞれその作用中に R-R 場との結合を表す次の項を持っている。

$$\frac{S_{\mathrm{IIA}}}{2\pi}=\int_{M_{2n-1}}C_{\mathrm{odd}},\quad \frac{S_{\mathrm{IIB}}}{2\pi}=\int_{M'_{2n}}C'_{\mathrm{even}}. \tag{15.316}$$

ただし、M_{2n-1} は IIA 型超重力理論における $2n-2$ ブレーンの worldvolume を、M'_{2n} は IIB 型超重力理論における $2n-1$ ブレーンの worldvolume を表す。

すでにわれわれは R-R 場 C_{odd} と C'_{even} が T-双対性変換のもとでどのように変換されるかを知っている。まずはもっとも簡単な場合として背景の B 場や計量の非対角成分が 0 である場合について考えよう。この場合、9 次元の場 c_{odd} と c_{even} を用いて互いに次のように関係している。

$$C_{\mathrm{odd}}=c_{\mathrm{odd}}+c_{\mathrm{even}}\wedge dx^9,\quad C'_{\mathrm{even}}=-c_{\mathrm{even}}+c_{\mathrm{odd}}\wedge dx^9. \tag{15.317}$$

R-R 場に対するこの変換を通して 二つの作用 (15.316) が互いに移り合うことを要求すれば、二つのブレーンの world volume M と M' の間の関係を決定することができる。

まず、IIA 型理論側の D-ブレーンの world volume が x^9 方向には巻きついていないとし、その x^9 座標は定数であるとしよう。この場合、world volume は $M_{2n-1}=M^9_{2n-1}\times P$ と表すことができる。ここで M^9_{2n-1} はコンパクト化されたあとの 9 次元時空上でのブレーンの world volume を表し、P は x^9 方向の $\mathbf{S}^1$ 上のある一点を表す。このときブレーンの作用 (15.316) は次のように書くことができる。

$$\frac{S_{\mathrm{IIA}}}{2\pi}=\int_{M^9_{2n-1}\times P}(c_{\mathrm{odd}}+c_{\mathrm{even}}\wedge dx^9)=\int_{M^9_{2n-1}}c_{\mathrm{odd}}. \tag{15.318}$$

ここで、積分領域が x^9 方向には伸びていないために dx^9 を含む項が積分に寄与しないことを用いた。

IIB 型理論の側でこれと等価な結果を得るためには、D-ブレーンが x^9 方向に巻きついている、すなわちその world volume が $M'_{2n} = M^9_{2n-1} \times \mathbf{S}^1$ と与えられるとすればよい。今度は積分領域が $\mathbf{S}^1$ 因子を含むために dx^9 を含む項だけが積分に寄与し、先ほどと同じ結果を与える。

$$\frac{S_{\text{IIB}}}{2\pi} = \int_{M^9_{2n-1}\times\mathbf{S}^1} (-c_{\text{even}} + c_{\text{odd}} \wedge dx^9) = \int_{M^9_{2n-1}} c_{\text{odd}} \tag{15.319}$$

このことから、T-双対性は $\mathbf{S}^1$ に巻き付いているブレーンと巻き付いていないブレーンを入れ替えることがわかる。

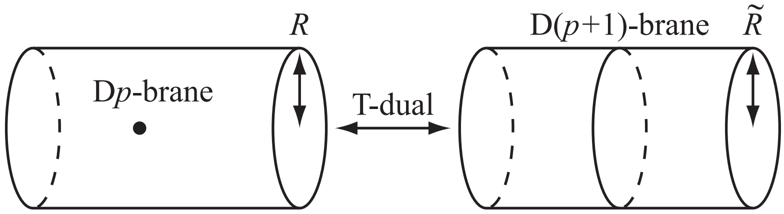

図 15.3: 巻き付いていない Dp-ブレーンは T-双対性によって巻き付いた D$(p+1)$-ブレーンへ移る

ブレーンの作用は先ほどの R-R 場との結合を表す部分のほかに、ブレーンの張力をあらわす南部-後藤作用と呼ばれる部分がある。上と同じ単純化した設定（すなわち、B 場や計量の非対角成分などが 0 である）でその T-双対性に対する不変性を調べてみよう。IIA 型理論においては、ブレーンの world volume は $M_{2n-1} = M^9_{2n-1} \times P$ であるから、その面積は 9 次元でのブレーン、すなわち M^9_{2n-1} の面積に等しい。その作用は次のように与えられる。

$$\frac{S^{\text{IIA}}}{2\pi} = -T_{2n-1} A(M^9_{2n-1}). \tag{15.320}$$

ただし、T_{2n-1} はブレーンの張力であり、$A(M^9_{2n-1})$ は（計量の寄与まで含めたプロパーな）世界面の面積を表している。T-双対性がブレーンに対しても成り立つためには、これが IIB 型理論のブレーンの作用と一致しなければならない。IIB 型ブレーンの作用は次のように与えられる。

$$\frac{S^{\text{IIB}}}{2\pi} = -T'_{2n} A(M^9_{2n-1} \times \mathbf{S}^1) = -T'_{2n} A(M^9_{2n-1}) \sqrt{G'_{99}}. \tag{15.321}$$

T'_{2n} は IIB 型超重力理論における D$2n-1$ ブレーンの張力である。(15.320) と (15.321) とを比較すると、$A(M^9_{2n-1})$ は共通であるから、張力の間に次の関係が成り立たなければならない。

$$T_{2n-1} = T'_{2n} \sqrt{G'_{99}}. \tag{15.322}$$

ブレーンの張力はその周りの環境に依存する。つまり、そのブレーンが存在する時空の背景にある場の値に依存すると考えられる。(15.322) を満足する為には、ブレーンの張力が次のようなディラトン場の関数であるとすればよい。

$$T_{2n-1} = \frac{N}{e^{\phi}}, \quad T'_{2n} = \frac{N}{e^{\phi'}}. \tag{15.323}$$

N はブレーンの「枚数」に相当する定数である。R-R 電荷に対するディラックの量子化条件などを用いることにより、実際にこの値が整数でありブレーンの枚数を表すことが示される。ここでは

$N=1$ に取る。こうして、次のブレーンの作用が得られた。

$$\frac{S^{\mathrm{IIA}}}{2\pi} = -\int_{M_{2n-1}} d^{2n-1}x \frac{1}{e^{\phi}}\sqrt{-\det G^*_{ij}} + \int_{M_{2n-1}} C_{\mathrm{odd}}, \tag{15.324}$$

$$\frac{S_{\mathrm{IIB}}}{2\pi} = -\int_{M'_{2n}} d^{2n-1}x \frac{1}{e^{\phi'}}\sqrt{-\det G'^*_{ij}} + \int_{M'_{2n}} C'_{\mathrm{even}}. \tag{15.325}$$

これらの作用は上で考えた単純化された（すなわち B_2 やブレーンの x^9 座標などが 0 とする）設定の下では T-双対性に矛盾しない。

一般の場合には、巻き付いていない D-ブレーンの x^9 座標はブレーン上の座標の任意の関数でよい。T-双対性変換によって巻きついたブレーンになると、この位置情報はブレーン上のゲージ場の x^9 方向の成分へと変換される。巻き付いていないブレーンの x^9 座標を表す関数を $y(x^\mu)$ とする。T-双対性により、この関数は巻きついたブレーン上の A_9 へと移る。ここでは IIA 型理論側で巻き付いていないブレーンが、IIB 型理論側で巻きついたブレーンがあるものとして、IIB 型理論の変数には “′” をつけることにする。

ブレーン上の場の T-双対性

ブレーン上の場の T-双対性による変換は次のように与えられる。

$$A'_\mu = A_\mu, \quad A'_9 = Y. \tag{15.326}$$

あるいはこの式は次のように書くこともできる。

$$A'_1 = A_1 + Y dx^9. \tag{15.327}$$

この変換性の為に、一般の場合に T-双対性変換と矛盾しないブレーンの作用はゲージ場を含む必要がある。答えは次のように与えられる。

ブレーンの低エネルギー有効作用

南部-後藤の作用は、B_2 や F_2 を含む次の Born-Infeld 作用へと拡張される。

$$\frac{S_{\mathrm{BI}}}{2\pi} = -\int d^{p+1}\sigma \frac{1}{e^{\phi}}\sqrt{-\det[C^*_{ij}+F_{ij}]} \tag{15.328}$$

ただし $C_{MN}=g_{MN}+B_{MN}$ を導入した。C^*_{ij} は C_{MN} のブレーン上への引き戻しを表す。この形は IIA 型超重力理論においても IIB 型超重力理論においても同じである。R-R 場との結合を表す Chern-Simons 項は次のように与えられる。

$$\frac{S^{\mathrm{IIA}}_{\mathrm{CS}}}{2\pi} = \int_{2n-1} C^{(1)}_{\mathrm{odd}} e^{-F_2^{\mathrm{IIA}}}, \quad \frac{S^{\mathrm{IIB}}_{\mathrm{CS}}}{2\pi} = \int_{2n} C'^{(1)}_{\mathrm{even}} e^{-F_2^{\mathrm{IIB}}}. \tag{15.329}$$

以下でこれが実際に T-双対変換と矛盾しないことを示そう。

まず、Born-Infeld 作用からはじめよう。IIA 型超重力理論において Y 方向に巻きついていない Dp-ブレーンを考える。Dp-ブレーン上のスカラー場のうち x^9 方向の座標に対応するスカラー場を Y とする。この場合、C_{MN} のブレーン上への引き戻し C^*_{ij} は次のように与えられる。

$$C^*_{ij} = C_{ij} + C_{i9}\frac{\partial Y}{\partial x^j} + C_{9j}\frac{\partial Y}{\partial x^i} + C_{99}\frac{\partial Y}{\partial x^i}\frac{\partial Y}{\partial x^j}. \tag{15.330}$$

背景の場 $C_{MN}=G_{MN}+B_{MN}$ に対して y 方向への T-双対性変換はすでに (15.221) に与えられている。。ここでは (15.221) の逆変換を用いるほうが便利であるが、逆変換は次のようにもとの変

Soryushiron Kenkyu

換と全く同じ形をしている。

$$C_{\mu\nu} = C'_{\mu\nu} - \frac{C'_{\mu y} C'_{y\nu}}{C'_{yy}}, \quad C_{y\nu} = -\frac{C'_{y\nu}}{C'_{yy}}, \quad C_{\mu y} = \frac{C'_{\mu y}}{C'_{yy}}, \quad C_{yy} = \frac{1}{C'_{yy}}. \tag{15.331}$$

(15.330) と (15.331) を組み合わせれば、(15.328) の行列式の中身を次のように書きかえることができる。

$$\begin{aligned} C^*_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} &= C_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} + (\partial_\mu Y) C_{y\nu} + (\partial_\nu Y) C_{\mu y} + (\partial_\mu Y)(\partial_\nu Y) C_{yy} \\ &= C'_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} - \frac{1}{C'_{yy}} (C'_{\mu y} + \partial_\mu Y)(C'_{y\nu} - \partial_\nu Y) \end{aligned} \tag{15.332}$$

ただし、$C^*_{\mu\nu}$ は C_{MN} のブレーン上への引き戻しである。この式の両辺はサイズが $p+1$ の正方行列である。この式の両辺の行列式を取ろう。すると、右辺の行列式は次のようにサイズが $p+2$ の行列の行列式として表すことができる。

$$\det(C^*_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}) = \frac{1}{C'_{yy}} \det \begin{pmatrix} C'_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} & C'_{\mu y} + \partial_\mu Y \\ C'_{y\nu} - \partial_\nu Y & C'_{yy} \end{pmatrix}. \tag{15.333}$$

ここで、任意の行列

$$X_{MN} = \begin{pmatrix} X_{\beta\gamma} & X_{\beta y} \\ X_{y\gamma} & X_{yy} \end{pmatrix} \tag{15.334}$$

について成り立つ次の恒等式を用いた。

$$\det X_{MN} = X_{yy} \det \left(X_{\mu\nu} - \frac{X_{\mu y} X_{y\nu}}{X_{yy}} \right). \tag{15.335}$$

この式は、次の恒等式の両辺の行列式を取ることによって得ることができる。

$$\begin{pmatrix} \delta_\alpha{}^\beta & -X_{\alpha y}/X_{yy} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\beta\gamma} & X_{\beta y} \\ X_{y\gamma} & X_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\alpha\gamma} - X_{\alpha y} X_{y\gamma}/X_{yy} & 0 \\ X_{y\gamma} & X_{yy} \end{pmatrix} \tag{15.336}$$

さらに (15.326) または (15.327) より IIB 型理論における巻きついた $p+1$ ブレーン上のゲージ場の強さが次のように与えられることを用いる。

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}, \quad F'_{\mu 9} = -F'_{9\mu} = \partial_\mu Y. \tag{15.337}$$

このゲージ場を用いれば、次のように書ける。

$$\det(C^*_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}) = \frac{1}{g'_{99}} \det(C'_{MN} + F'_{MN}) \tag{15.338}$$

さらに、ディラトン場の間の関係式

$$\frac{1}{e^\phi} = \frac{\sqrt{g'_{99}}}{e^{\phi'}} \tag{15.339}$$

を用いると、次の式が示される。

$$\frac{1}{e^\phi} \sqrt{-\det(C^*_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} = \frac{1}{e^{\phi'}} \sqrt{-\det(C'_{MN} + F'_{MN})} \tag{15.340}$$

つまり、期待されたとおり、IIB 型 D-ブレーンの Born-Infeld 作用が得られる。

次に、Chern-Simons 項について考えよう。ブレーンの world volume のトポロジーが単純で、ある多様体の境界としてあらわすことができる場合を考えよう。この場合それぞれの作用が次のように書きかえられる。

$$\frac{S_{\rm IIA}}{2\pi} = \int_{2n} G_{\rm even} e^{-\mathcal{F}_2^{\rm IIA}}, \quad \frac{S_{\rm IIB}}{2\pi} = \int_{2n+1} G_{\rm odd} e^{-\mathcal{F}_2^{\rm IIB}}. \tag{15.341}$$

ただし、次の量を定義した。

$$\mathcal{F}_2 = F_2 + B_2. \tag{15.342}$$

コンパクト化の際の B_2 やゲージ場 A_1 の分解を次のように行う。

$$B_2 = b_2 + b_1 \widetilde{dx}^9, \quad B_2' = b_2' + v_1 \widehat{dx}^9. \tag{15.343}$$

$$A_1 = a_1, \quad A_1' = a_1 + Y dx^9. \tag{15.344}$$

$b_2' = b_2 + b_1 \wedge v_1$ であることに注意すれば、二つの $\mathcal{F}_2$ の間に次の関係が成り立つことを示すことができる。

$$\mathcal{F}_2' = \mathcal{F}_2 + \widetilde{dY} \wedge \widehat{dx}^9. \tag{15.345}$$

T 双対性の下での R-R 場の場の強さの変換性は (15.222) と (15.226) を見ればわかる。すなわち、9 次元の場 $g_{\rm even}$ と $g_{\rm odd}$ を用いて次のように表される。

$$G_{\rm even} = g_{\rm even} + g_{\rm odd} \wedge \widetilde{dx}^9, \quad G_{\rm odd}' = -g_{\rm odd} + g_{\rm even} \wedge \widehat{dx}^9. \tag{15.346}$$

これらを用いると、巻き付いていない IIA 型理論のブレーンの Chern-Simons 項が次のように書ける。

$$\frac{S_{\rm IIA}}{2\pi} = \int_{2n} (g_{\rm even} + g_{\rm odd} \wedge \widetilde{dY}) e^{-\mathcal{F}_2}. \tag{15.347}$$

ここで、この積分を IIB 型の理論の積分と解釈するために $\int dx^9 = 1$ を掛け、次のように書きかえる。

$$\begin{aligned} \frac{S}{2\pi} &= \int_{2n+1} (g_{\rm even} + g_{\rm odd} \wedge \widetilde{dY}) e^{-\mathcal{F}_2} \widehat{dx}^9 \\ &= \int_{2n+1} (g_{\rm even} \wedge \widehat{dx}^9 + g_{\rm odd} \wedge \widetilde{dY} \wedge \widehat{dx}^9) e^{-\mathcal{F}_2} \end{aligned} \tag{15.348}$$

さらに、積分が dx^9 を含まないか、あるいは二つ以上含む項の積分が 0 になることを用いれば、次のように書きかえることができる。

$$\begin{aligned} \frac{S}{2\pi} &= \int_{2n+1} (g_{\rm even} \widehat{dx}^9 - g_{\rm odd}) e^{-\mathcal{F}_2 - \widetilde{dY} \wedge \widehat{dx}^9} \\ &= \int_{2n+1} G_{\rm odd}' e^{-\mathcal{F}_2'} \end{aligned} \tag{15.349}$$

これは IIB 型超重力理論における D-ブレーンの作用である。こうして Chern-Simons 項も T-双対性変換によって正しく変換されることが示された。

逆に、巻き付いた IIA 型の D-ブレーンと巻きついていない IIB 型の D-ブレーンの関係を見る場合には、D-ブレーン上のゲージ場の間の関係を次のようにおく。

$$A_1 = a_1 + Y dx^9, \quad A_1' = a_1. \tag{15.350}$$

すると、それぞれの D-ブレーン上の $\mathcal{F}_2$ の関係は次のように得られる。

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2' + \widehat{dY} \wedge \widetilde{dx}^9. \tag{15.351}$$

これを用いれば、やはり上記の二つの作用が互いに移り合うことを示すことができる。

上で与えた D-ブレーン作用について注意しなければならない点をひとつ述べておこう。IIA 型超重力理論の D$(2n-2)$-ブレーンの作用のうち、Chern-Simons 項は次のように書ける。

$$\frac{S_{\rm IIA}}{2\pi} = \int_{2n-1} C^{(2)}_{\rm odd} e^{-\mathcal{F}_2}. \tag{15.352}$$

D4-ブレーン以上の高い次元のブレーンに対しては、この作用は互いに双対な関係にある R-R ポテンシャルを同時に含む。(たとえば C_3 と C_5 など。)このような双対なポテンシャルが同時に定義できるためには、場の強さがビアンキ恒等式と運動方程式の両方を満足していることが必要である。従って、上記の作用は背景の R-R 場が運動方程式を満足していることを前提としている。このことは、上記の作用が、与えられた背景上を運動する、背景に影響を与えないブレーンに対してその上の場 X^μ や A_μ の運動方程式を決定するためには用いることができるが、R-R 場のソースを与える項として R-R 場の運動方程式を導出するために用いてはならないことを意味している。

ただ、このようなことを何も考えずに、上記の作用を $C^{(2)}_{\rm odd}$ の成分がすべて独立であるとして変分したものは正しく運動方程式中のソース項を与えることが知られている。このソース項を得るために上記の作用を次のように書き換えよう。

$$\frac{S_{\rm IIA}}{2\pi} = \int_{10} C^{(2)}_{\rm odd} \wedge \mathcal{T} J_{\rm odd}. \tag{15.353}$$

ただし、$J_{\rm odd}$ は次のように定義される。

$$J_{\rm odd} = e^{+\mathcal{F}_2} \wedge \delta_{\rm odd}, \quad \delta_{\rm odd} = \sum_n \delta_{11-2n}. \tag{15.354}$$

$J_{\rm odd}$ には R-R 場が含まれていない。従って、このカレントについては上で述べたような定義の問題は存在しない。このように定義されたカレントの寄与を含めた次の運動方程式は無矛盾性条件を満足する。

$$dG_{\rm even} - H_3 \wedge G_{\rm even} + J_{\rm odd} = 0. \tag{15.355}$$

両辺を微分し、さらに運動方程式を用いれば、

$$(d\delta_{\rm odd} + dF_2 \wedge \delta_{\rm odd}) \wedge e^{\mathcal{F}_2} - dH_3 \wedge G_{\rm even} = 0. \tag{15.356}$$

$dH_3 = -J_4$ は NS5-ブレーンの電荷を表すが、これは通常の D-ブレーンによっては運ばれないので 0 と置こう。すると、次の式が成り立つ。

$$d\delta_{\rm odd} + dF_2 \wedge \delta_{\rm odd} = 0. \tag{15.357}$$

この式は、D-ブレーン上のゲージ場のビアンキ恒等式である。ただし第 1 項が存在するために、D-ブレーンはそれより次元が 2 だけ高い別の D-ブレーン上に端を持つことができ、その端点はゲージ場に対して磁荷を持っていることを意味している。

IIB 型超重力理論に対しても全く同様である。ブレーンの作用は次のように書くことができる。

$$\frac{S_{\rm IIB}}{2\pi} = \int_{2n} C_{\rm even} e^{-\mathcal{F}_2} = \int_{10} C_{\rm even} \wedge \mathcal{T} J_{\rm even}. \tag{15.358}$$

J_{even} の定義は IIA 型のばあいと同様である。

$$J_{\mathrm{even}} = e^{+\mathcal{F}_2} \wedge \delta_{\mathrm{even}}, \quad \delta_{\mathrm{even}} = \sum_n \delta_{10-2n}. \tag{15.359}$$

このとき、R-R 場の運動方程式は

$$dG_{\mathrm{odd}} - H_3 \wedge G_{\mathrm{odd}} + J_{\mathrm{even}} = 0. \tag{15.360}$$

両辺を微分すれば、

$$(d\delta_{\mathrm{even}} + dF_2 \wedge \delta_{\mathrm{even}}) \wedge e^{+\mathcal{F}_2} - dH_3 \wedge G_{\mathrm{odd}} = 0. \tag{15.361}$$

再び NS5-ブレーンのカレントを無視すれば、IIA 型の場合と全く同じ次の関係式を得る。

$$d\delta_{\mathrm{even}} + dF_2 \wedge \delta_{\mathrm{even}} = 0. \tag{15.362}$$

15.12 IIB-ブレーンの SL(2, **Z**) 対称性

ソース項の入った運動方程式は、次のように SL(2, **Z**) 対称性が明らかな形で書くことができる。

$$\begin{aligned} dH_3^I &= J_4^I, & (15.363)\\ d(\mathcal{M}_{JK} *^E H_3^K) &= J_{8,I} + \epsilon_{IJ} H_3^J \wedge G_5, & (15.364)\\ dG_5 &= J_6^{\mathrm{D3}} - \frac{1}{2}\epsilon_{IJ} H_3^I \wedge H_3^J. & (15.365)\end{aligned}$$

ただし、Hodge 双対の操作が計量に依存することに注意。ここではアインシュタイン計量を用いている。上記の運動方程式の中のカレントは次のように定義されている。

$$(J_{8,1}, J_{8,2}) = (J_8^{\mathrm{D1}}, J_8^{\mathrm{F1}} - C_0 J_8^{\mathrm{D1}}), \quad (J_4^1, J_4^2) = (J_4^{\mathrm{D5}} + C_0 J_4^{\mathrm{NS5}}, J_4^{\mathrm{NS5}}). \tag{15.366}$$

この式は、ブレーンの電荷がどのように SL(2, **Z**) 変換のもとで振舞うかを表している。ブレーンの作用を用いて SL(2, **Z**) の変換性を見てみよう。まず 1-ブレーンについて考えよう。基本的弦は、その上にあるボゾン場はその振動をあらわすスカラー場だけであり、Nambu-Goto の作用によって表される。

$$\frac{S}{2\pi} = -\int d^2\sigma e^{\phi/2}\sqrt{-\det G_{ab}} + \int B_2. \tag{15.367}$$

一方、D1-ブレーン上にはゲージ場が存在し、次の作用で表される。

$$\frac{S}{2\pi} = -\int d^2\sigma \frac{1}{e^{\phi/2}}\sqrt{-\det(G_{ab} + e^{-\phi/2}\mathcal{F}_{ab})} + \int(-\chi\mathcal{F}_2 + C_2). \tag{15.368}$$

ただし、どちらもアインシュタイン計量を用いて書かれている。ゲージ場に対する運動量を μ としよう。つまり、次のように μ を定義する。

$$\mu = \frac{\delta S/2\pi}{\delta F_{01}} = \frac{e^{-(3/2)\phi}\mathcal{F}_{01}}{\sqrt{-\det(G_{ab} + e^{-\phi/2}\mathcal{F}_{ab})}} - \chi. \tag{15.369}$$

運動方程式より、この運動量は定数である。変数を F_{01} から μ に置きかえるために、次のルジャンドル変換を行う。

$$\frac{S'}{2\pi} = \frac{S}{2\pi} - \int d^2\sigma \mu F_{01} = -\int d^2\sigma T\sqrt{-\det G_{ab}} + \int(C_2 + \mu B_2). \tag{15.370}$$

後ろの項は、このブレーンの電荷が $(q_1, q_2) = (1, \mu)$ であることを意味している。T は ϕ と χ および μ に依存する次の関数であり、ブレーンの張力をあらわしている。

$$T = \sqrt{\frac{1}{e^\phi} + e^\phi(\mu+\chi)^2} = |\epsilon^{IJ} q_I P^m_J| \tag{15.371}$$

この張力はブレーンの電荷 q_I を用いて SL(2, $\mathbf{Z}$) 共変に書けている。

次に、D3-ブレーンについてみてみよう。ここではボゾン部分についてのみ考える。[36] 超対称性を持った作用については [37] を参照されたい。SL(2, $\mathbf{Z}$) 対称性をはっきりさせるために、$C_2^{(2)}$ と $C_4^{(3)}$ を用いる。そして、$G_{MN} \to e^{\phi/2} G_{MN}$ によってアインシュタイン計量に移ると、D3-ブレーンの作用は次のように与えられる。

$$\frac{S}{2\pi} = -\int \sqrt{-\det(G_{mn} + e^{-\phi/2}\mathcal{F}_{mn})} + \int \left((C_4^{(3)} + \frac{1}{2} B_2 \wedge C_2^{(2)} - C_2^{(2)} \wedge \mathcal{F}_2 + \frac{1}{2}\chi \mathcal{F}_2 \wedge \mathcal{F}_2 \right) \tag{15.372}$$

この作用が表す系が SL(2, $\mathbf{Z}$) にたいして不変であることを示そう。まずは、場の強さが SL(2, $\mathbf{Z}$) のもとでどのように変換されるかを決めることが必要である。F_2 はビアンキ恒等式 $dF_2 = 0$ を満足する。F_2 に対して双対な場として、F_2 の運動方程式が $dP_2 = 0$ と表されるような場 P_2 を定義しよう。すなわち、上記の作用の F_2 による変分を次のようにおく。

$$\frac{\delta S}{2\pi} = \int P_2 \wedge \delta F_2. \tag{15.373}$$

F_2 と P_2 は次のように SL(2, $\mathbf{Z}$) の二重項をなす。

$$(F_2^1, F_2^2) = (P_2, F_2). \tag{15.374}$$

ゲージ場に対するビアンキ恒等式、運動方程式は次のようにまとめて書くことができる。

$$dF_2^I = 0. \tag{15.375}$$

この式の SL(2, $\mathbf{Z}$) 不変性は明らかである。残された問題は、(15.373) の定義から得られる P_2 と F_2 の間の関係が SL(2, $\mathbf{Z}$) 不変な形に書けるかどうかということである。そのことを示すために、次の場の強さを定義するのが便利である。

$$(\widehat{P}_2, \widehat{F}_2) = \widehat{F}_2^m = (F_2^I + B_2^I) P_I{}^m. \tag{15.376}$$

$\widehat{P}_2$ と $\widehat{F}_2$ も、作用のうちの Born-Infeld 部分の変分を用いて次のように定義することができる。

$$\frac{\delta S_{\mathrm{BI}}}{2\pi} = \widehat{P}_2 \wedge \delta \widehat{F}_2. \tag{15.377}$$

このように定義された 2-形式 $\widehat{F}_2$ と $\widehat{P}_2$ の間の関係が局所的 SO(2) 変換のもとで不変であることを示せばよい。場の強さで表された作用は（場の強さの定義に含まれるものを除き）微分を含まないから、局所ローレンツ座標を取って調べれば十分である。局所的にローレンツ座標系をとり、$\widehat{F}_{mn}$ および $\widehat{P}_{mn}$ を次のようにおこう。

$$\widehat{F}_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{P}_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{E}_x & \widetilde{E}_y & \widetilde{E}_z \\ -\widetilde{E}_x & 0 & \widetilde{B}_z & -\widetilde{B}_y \\ -\widetilde{E}_y & -\widetilde{B}_z & 0 & \widetilde{B}_x \\ -\widetilde{E}_z & \widetilde{B}_y & -\widetilde{B}_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{15.378}$$

すると、Born-Infeld 作用は次のように書くことができる。

$$\frac{S_{\rm BI}}{2\pi}=-\sqrt{1-E^2+B^2-(E\cdot B)^2}. \tag{15.379}$$

$\widehat{P}_2$ と $\widehat{F}_2$ の関係を成分で表すと

$$\widetilde{E}=\frac{\delta S_{\rm BI}/2\pi}{\delta B}=\frac{-B+(E\cdot B)E}{\sqrt{1-E^2+B^2-(E\cdot B)^2}},\quad \widetilde{B}=\frac{\delta S_{\rm BI}/2\pi}{\delta E}=\frac{E+(E\cdot B)B}{\sqrt{1-E^2+B^2-(E\cdot B)^2}}. \tag{15.380}$$

このとき、次の関係が成り立つ。

$$E\cdot B+\widetilde{E}\cdot\widetilde{B}=0. \tag{15.381}$$

(15.380) が SO(2) 対称性を満足していることを確かめたいのであるが、そのためには次の無限小変換について考えれば十分である。

$$\delta\widetilde{E}=-\epsilon E,\quad \delta E=\epsilon\widetilde{E},\quad \delta\widetilde{B}=-\epsilon B,\quad \delta B=\epsilon\widetilde{B}. \tag{15.382}$$

式 (15.380) がこの変換に対する不変性を持っていることを示すには、(15.380) によって E と B によってあらわした $\widetilde{E}$ と $\widetilde{B}$ にたいして (15.382) の変換を行った場合に、正しく $\widetilde{E}$ と $\widetilde{B}$ の変換を再現することを見ればよい。これは (15.380) と (15.381) を組み合わせれば簡単に示すことができる。たとえば $\widetilde{E}$ については次のように示すことができる。

$$\begin{aligned}\delta\widetilde{E}(E,B) &= \epsilon\left(\widetilde{E}\cdot\frac{\delta}{\delta E}+\widetilde{B}\cdot\frac{\delta}{\delta B}\right)\widetilde{E}=\epsilon\left(\frac{\delta S/2\pi}{\delta B}\cdot\frac{\delta}{\delta E}+\frac{\delta S/2\pi}{\delta E}\cdot\frac{\delta}{\delta B}\right)\frac{\delta S/2\pi}{\delta B}\\ &= \epsilon\frac{\delta}{\delta B}\left(\frac{\delta S/2\pi}{\delta B}\cdot\frac{\delta S/2\pi}{\delta E}\right)=\epsilon\frac{\delta}{\delta B}(\widetilde{E}\cdot\widetilde{B})=\epsilon\frac{\delta}{\delta B}(-E\cdot B)=-\epsilon E.\end{aligned} \tag{15.383}$$

$\delta\widetilde{B}(E,B)$ についても同様である。

15.13 D-ブレーン解

II 型超重力理論の古典解については [38] [39] [40] [41] [42] などを参照すること。

超対称性が半分破れずに残るという条件を用いれば、Dp-ブレーンを表す超重力理論の解を簡単に求めることができる。Dp-ブレーンの広がっている方向を y^i $(i=0,\ldots,p)$ とおき、ブレーンからの距離を表す座標を r、ブレーンを囲む $\mathbf{S}^{8-p}$ 上の座標を θ^a と置こう。Dp-ブレーン解を構成する際に考慮すべき場は計量、ディラトン、そしてブレーンに結合する R-R 場である。y^a 方向についての $p+1$ 次元ポアンカレ対称性と θ^a 方向の回転対称性を仮定すれば、Dp-ブレーン解の古典解を次のように置くことができる。

$$ds^2=a^2(r)\eta_{ij}dy^idy^j+b^2(r)(dr^2+r^2d\Omega_{8-p}^2). \tag{15.384}$$

計量、R-R 場、ディラトン以外の場を無視すれば、II 型超重力理論のフェルミオンの変換則は次のように与えられる。

$$\delta\psi_\mu=D_\mu\xi+\frac{e^\phi}{8}\not{G}\gamma_\mu\xi,\quad \delta\lambda=(\not{\partial}\phi)\xi+\frac{e^\phi}{8}\gamma^\mu\not{G}\gamma_\mu\xi. \tag{15.385}$$

$\not{G}$ は以前に定義されたものであり、この中で考えている Dp-ブレーンに結合する場だけが値を持つ。もし R-R 場が電気的に結合している場合には場の強さの成分のうち 0 でないのは $G_{01\cdots pr}$ だ

けであり、磁気的に結合している場合には $G_{\theta_1\cdots\theta_{8-p}}$ だけである。従って $\not{G}$ は $\gamma_{\hat{i}\hat{r}}$ とは可換であり、$\gamma_{\hat{a}\hat{r}}$ とは反可換である。この事実と、上記の計量を用いれば、グラビティーノとディラティーノの変換則は次の 4 つの式で表される。

$$\delta\psi_{\hat{i}} = \frac{1}{2b}\gamma_{\hat{i}\hat{r}}\left(\frac{a'}{a}+\frac{1}{4}be^{\phi}\not{G}\gamma_{\hat{r}}\right)\xi, \tag{15.386}$$

$$\delta\psi_{\hat{r}} = \frac{1}{b}\left(\frac{s'}{s}+\frac{1}{8}be^{\phi}\not{G}\gamma_{\hat{r}}\right)\xi, \tag{15.387}$$

$$\delta\psi_{\hat{a}} = \frac{1}{2b}\gamma_{\hat{a}\hat{r}}\left(\frac{b'}{b}-\frac{1}{4}be^{\phi}\not{G}\gamma_{\hat{r}}\right)\xi, \tag{15.388}$$

$$\delta\lambda = \frac{1}{b}\gamma_{\hat{r}}\left(\phi'+\frac{p-3}{4}be^{\phi}\not{G}\gamma_{\hat{r}}\xi\right)\xi. \tag{15.389}$$

ただし、ξ の r 依存性を関数 $s(r)$ によって表した、すなわち、$\xi(r,\theta^a)=s(r)\xi_0(\theta^a)$ のように置いた。破れていない超対称性が存在するということは、これら全てを満足するスピノル場 ξ が存在することを意味する。これらの条件はどれも ξ が $\not{G}\gamma_{\hat{r}}$ の固有スピノルであることを要求する。上の 4 つの式は次の式が成り立てば同時に解を持つ。

$$be^{\phi}\not{G}\gamma_{\hat{r}} : \frac{a'}{a} : \frac{s'}{s} : \frac{b'}{b} : \phi' = 1 : -\frac{1}{4} : -\frac{1}{8} : \frac{1}{4} : \frac{3-p}{4}. \tag{15.390}$$

ただしここでは $\not{G}\gamma_{\hat{r}}$ をそのまま固有値の意味で用いた。この式から、未知の関数 a、b、s、ϕ、$\not{G}\gamma_{\hat{r}}$ は単一の関数 $H(r)$ を用いて次のように与えられることがわかる。

$$be^{\phi}\not{G}\gamma_{\hat{r}} = \frac{H'}{H}, \quad a=H^{-1/4}, \quad s=H^{-1/8}, \quad b=H^{1/4}, \quad e^{\phi}=g_{\mathrm{str}}H^{(3-p)/4}. \tag{15.391}$$

関数 $H(r)$ を用いるには、R-R 場に対するフラックスの保存則を用いる。$\mathbf{S}^{8-p}$ 上でのフラックスの積分が N になるとすると、次の式が成り立たなければならない。

$$\not{G}\gamma_{\hat{r}} = -\frac{N}{\Omega_{8-p}r^{8-p}b^{8-p}} \tag{15.392}$$

これを (15.391) の最初の式に代入すれば、関数 H についての微分方程式を得ることができ、次の解を得る。

$$H = 1+\frac{g_{\mathrm{str}}N}{(7-p)\Omega_{8-p}r^{7-p}}. \tag{15.393}$$

ここで用いられる H はブレーンに垂直な方向の $9-p$ 次元空間における次の方程式の解として得ることができる。

$$\Delta H = g_{\mathrm{str}}N\delta^{9-p}(x) \tag{15.394}$$

実は、この式の $N\delta^{9-p}(x)$ を任意の密度関数に置きかえることにより、平行なブレーンが任意の位置に配置されたような状況を表す古典解を構成することができる。この調和関数を用いて、計量とディラトン場は次のようにあらわすことができる。

$$ds^2_{\mathrm{str}} = H^{-1/2}\eta_{ij}dx^idx^j + H^{1/2}\delta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}, \quad e^{\phi}=g_{\mathrm{str}}H^{(3-p)/4}, \tag{15.395}$$

磁気的に結合している R-R 場の場に強さは、ガウスの定理を用いてブレーンの密度関数から決定することができる。電気的に結合している場合は、まず磁気的な R-R 場について解き、双対変換を行うことによって求めることができるが、その結果、次のように与えられることが示される。

$$G_{0\cdots pr} = \pm\partial_r\frac{1}{g_{\mathrm{str}}H}. \tag{15.396}$$

すなわち、R-R ポテンシャルは調和関数の逆数に比例する。

Soryushiron Kenkyu

地平面近傍 M5-ブレーンや M2-ブレーンについては、その地平面近傍は AdS 空間と球面の直積の構造をしていた。一般の D-ブレーンに対しては、ディラトンが r に依存した期待値を取るためにそのような単純な構造を持たない。しかし $p=3$ の場合には、(15.395) からわかるようにディラトン場の真空期待値は場所に依存しないので、地平面近傍において M-ブレーンと同様な構造を持つ。

重なった N 枚の D3-ブレーンを表す古典解は次のように与えられる。

$$ds^2 = H^{-1/2}(r)\eta_{ij}dx^i dx^j + H^{1/2}(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad H(r) = 1 + \frac{r_0^4}{r^4}. \tag{15.397}$$

x^i は D3-ブレーンが広がっている 4 つの方向を、r は解の半径方向を、Ω_5 は D3-ブレーンを囲む $\mathbf{S}^5$ 上の角変数を表す座標である。。定数 r_0 は解のスケールを決めるパラメータで D3-ブレーンの枚数 N を与えると次のように決まる。

$$r_0 = (4\pi N g_{\rm str})^{1/4} l_s. \tag{15.398}$$

解 (15.397) の地平面近傍、すなわち $r \ll r_0$ の領域に注目しよう。この場合 $H(r) = r_0^4/r^4$ と近似されるので、計量は次のようになる。

$$ds^2 = \left[\frac{r^2}{r_0^2}dx^2 + \frac{r_0^2}{r^2}dr^2\right] + r_0^2 d\Omega_5^2. \tag{15.399}$$

これは二つの空間の直積を表している。最後の項はは言うまでもなく半径 r_0 の 5 次元球 $\mathbf{S}^5$ の計量である。一方その前の二つの項の和は半径 r_0 の Anti-de Sitter 空間 $\mathbf{AdS}_5$ の計量になっている。

したがって、D3-ブレーンの近傍では時空は大きな対称性 $\mathrm{SO}(2,4)\times\mathrm{SO}(6)$ を持っている。さらに、M-ブレーン近傍でそうであったように、D3-ブレーン解全体を考えた場合よりも多くの超対称性が回復している。これらのことは実際にキリングスピノルを計算することで確かめることができるが、M5-ブレーンの場合とほとんど同じなので省略する。

15.14 基本的弦の解

II 型超重力理論における基本的弦を表す古典解を構成しよう。弦に平行な座標を y^i $(i=0,1)$、半径方向を r、弦を囲む $\mathbf{S}^7$ 上の座標を θ^a とする。このとき y^i 方向のポアンカレ対称性と θ^a 方向の回転対称性より計量を次のように置くことができる。

$$ds^2 = a^2(r)\eta_{ij}dy^i dy^j + b^2(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_7^2). \tag{15.400}$$

基本的弦を表す解を構成する際に考慮すべきなのは重力、ディラトン、$B_{\mu\nu}$、すなわち NS-NS 場のみである。R-R 場を全て 0 であるとすれば、グラビティーノとディラティーノの変換則は次のように与えられる。

$$\delta\psi_\mu = D_\mu\xi + \frac{1}{4\cdot 2}H_{\mu\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\gamma\xi, \quad \delta\lambda = (\partial\!\!\!/\phi)\xi + \frac{1}{2}H\!\!\!/_3\gamma\xi. \tag{15.401}$$

IIA 型理論では $\gamma = \gamma^{\widehat{11}}$、IIB 型理論では $\gamma = \sigma_z$ である。これらの変換則に上記の計量を代入すれば、$\delta\psi_\mu = \delta\lambda = 0$ という条件は以下の 4 つの独立な条件を与える。

$$\gamma^i\delta\psi_i = \frac{a'}{2ab}2\gamma_{\hat{r}}\xi + \frac{2}{4}\not{H}_3\gamma\xi = 0, \tag{15.402}$$

$$\gamma^r\delta\psi_r = \frac{s'}{sb}\gamma_{\hat{r}}\xi + \frac{1}{4}\not{H}_3\gamma\xi = 0, \tag{15.403}$$

$$\gamma^a\delta\psi_a = \frac{b'}{2b^2}7\gamma_{\hat{r}}\xi = 0, \tag{15.404}$$

$$\delta\lambda = \frac{\phi'}{b}\gamma_{\hat{r}}\xi + \frac{1}{2}\not{H}_3\gamma\xi = 0. \tag{15.405}$$

これらの式はどれも ξ が $\gamma_{\hat{r}}\not{H}_3\gamma$ の固有スピノルでなければならないことを表している。また、全ての式が同時に成り立つためには次の関係式が成り立つ必要がある。

$$b\gamma_{\hat{r}}\not{H}_3\gamma : \frac{a'}{a} : \frac{s'}{s} : \frac{b'}{b} : \phi' = 1 : -\frac{1}{2} : -\frac{1}{4} : 0 : -\frac{1}{2}. \tag{15.406}$$

ただし、$\gamma_{\hat{r}}\not{H}_3\gamma$ はここでは ξ に属する固有値の意味で用いた。この関係式から、未知関数 $\gamma_{\hat{r}}\not{H}_3\gamma$、$a$、$b$、$s$、$\phi$ は唯一つの関数 $H(r)$ を用いて次のように書くことができる。

$$b\gamma_{\hat{r}}\not{H}_3\gamma = \frac{H'}{H}, \quad s = H^{-1/4}, \quad a = H^{-1/2}, \quad b = 1, \quad e^\phi = g_{\mathrm{str}}H^{-1/2}. \tag{15.407}$$

関数 $H(r)$ を決定するためにはフラックス $*H_3$ の保存則を用いればよい。すなわち、$\oint_{\mathbf{S}^7} *H_3 = N$ という式から次の方程式を得る。

$$\gamma_{\hat{r}}\not{H}_3\gamma = -e^{2\phi}\frac{N}{\Omega_7 b^7 r^7}. \tag{15.408}$$

(15.407) に代入すれば、H に対する微分方程式を得ることができ、その解は次のように与えられる。

$$H = 1 + \frac{g_{\mathrm{str}}^2 N}{6\Omega_7 r^6} \tag{15.409}$$

この調和関数を用いれば、(15.407) の関係式を用いて計量は次のように表される。[43]

$$ds^2 = H^{-1}\eta_{ij}dy^i dy^j + (dr^2 + r^2 d\Omega_7^2). \tag{15.410}$$

B_2 は次のように単純な形になる。

$$B_2 = \pm\frac{1}{H}dx^0 \wedge dx^1. \tag{15.411}$$

15.15 NS5-ブレーン解

II 型超重力理論における NS5-ブレーンを表す古典解を構成しよう。ブレーンに平行な座標を y^i $(i = 0, \ldots, 5)$、半径方向を r、ブレーンを囲む $\mathbf{S}^3$ 上の座標を θ^a とする。このとき y^i 方向のポアンカレ対称性と θ^a 方向の回転対称性より計量を次のように置くことができる。

$$ds^2 = a^2(r)\eta_{ij}dy^i dy^j + b^2(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_7^2). \tag{15.412}$$

NS5-ブレーンを表す解を構成する際に考慮すべきなのは重力、ディラトン、$B_{\mu\nu}$、すなわち NS-NS 場のみである。R-R 場を全て 0 であるとすれば、グラビティーノとディラティーノの変換則は次のように与えられる。

$$\delta\psi_\mu = D_\mu\xi + \frac{1}{4\cdot 2}H_{\mu\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\gamma\xi, \quad \delta\lambda = (\not{\partial}\phi)\xi + \frac{1}{2}\not{H}_3\gamma\xi. \tag{15.413}$$

IIA 型理論では $\gamma = \gamma^{\widehat{11}}$、IIB 型理論では $\gamma = \sigma_z$ である。これらの変換則に上記の計量を代入すれば、$\delta\psi_\mu = \delta\lambda = 0$ という条件は以下の 4 つの独立な条件を与える。

$$\begin{aligned} \delta^i\delta\psi_i &= \frac{a'}{2ab}6\gamma_{\hat{r}}\xi, &(15.414)\\ \delta^r\delta\psi_r &= \frac{s'}{sb}\gamma_{\hat{r}}\xi, &(15.415)\\ \delta^a\delta\psi_a &= \frac{b'}{2b^2}3\gamma_{\hat{r}}\xi + \frac{3}{4}\not{H}_3\gamma\xi, &(15.416)\\ \delta\lambda &= \frac{\phi'}{b}\gamma_{\hat{r}}\xi + \frac{1}{2}\not{H}_3\gamma\xi. &(15.417)\end{aligned}$$

これらの式はどれも ξ が $\gamma_{\hat{r}}\not{H}_3\gamma$ の固有スピノルでならなければならないことを意味している。さらに、全ての式が同時に成り立つためには次の比例関係が成り立つ必要がある。

$$b\gamma_{\hat{r}}\not{H}_3\gamma : \frac{a'}{a} : \frac{s'}{s} : \frac{b'}{b} : \phi' = -1 : 0 : 0 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}. \tag{15.418}$$

ただし、$\gamma_{\hat{r}}\not{H}_3\gamma$ はここでは ξ に属する固有値の意味で用いた。この関係式から、未知関数 $\gamma_{\hat{r}}\not{H}_3\gamma$、$a$、$b$、$s$、$\phi$ は唯一つの関数 $H(r)$ を用いて次のように書くことができる。

$$b\gamma_{\hat{r}}\not{H}_3\gamma = -\frac{H'}{H}, \quad s = 1, \quad a = 1, \quad b = H^{1/2}, \quad e^\phi = g_{\rm str}H^{1/2}. \tag{15.419}$$

関数 $H(r)$ を求めるにはフラックスの保存則を用いることができる。すなわち、$\oint_{\mathbf{S}^3} H_3 = N$ と置くと、次の関係式を得ることができる。

$$\gamma_{\hat{r}}\not{H}_3\gamma = \frac{N}{\Omega_3 b^3 r^3}. \tag{15.420}$$

これを (15.419) に代入すれば、関数 H に対する微分方程式が得られ、その解は次のように与えられる。

$$H = 1 + \frac{N}{2\Omega_3 r^2} \tag{15.421}$$

NS5-ブレーンの解はこの調和関数を用いて次のように与えられる。[44]

$$ds^2 = \eta_{ij}dy^i dy^j + H(dr^2 + r^2 d\Omega_7^2). \tag{15.422}$$

15.16 IIB 型超重力理論における 1 および 5-ブレーン解

IIB 型超重力理論においては、1-ブレーンの電荷と 5-ブレーンの電荷が 2 種類ずつ存在している。従ってこれらのブレーンに対しては、電荷を表す二つのパラメータによって指定されるさまざまなブレーンが存在する。SL$(2,\mathbf{Z})$ 変換に対して H_3^I と同様に変換される 1-ブレーンおよび 5-ブレーンの電荷を次のように定義しよう。

$$Q_5^A = \oint_{\mathbf{S}^3} H_3^A, \quad Q_1^A = \oint_{\mathbf{S}^7} \epsilon^{AB}\mathcal{M}_{BC} * H_3^C. \tag{15.423}$$

基本的弦および D5-ブレーンが N 枚重なったものはそれぞれ $(Q_1^1, Q_1^2) = (N,0)$ と $(Q_5^1, Q_5^2) = (N,0)$ に対応している。1-ブレーンと 5 ブレーンはほとんど平行に議論することができるので、以下ではそれらを区別しない場合には 1 あるいは 5 という添え字を書かないことにする。

任意の電荷 Q^I が与えられたとき、次の SL(2, **Z**) 変換を行うことによって $Q'^2 = 0$ であるような電荷 Q'^I に移ることができる。

$$Q'^I = M^I{}_J Q^J, \quad M^I{}_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Q^2/Q^1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15.424}$$

$Q^1 = 0$ である場合にはこの変換を定義することができないが、最終的に得られる解は極限 $Q^1 \to 0$ に対して何ら特異性をもたないので、その極限によって $Q^1 = 0$ の解を得ることができる。複素ス

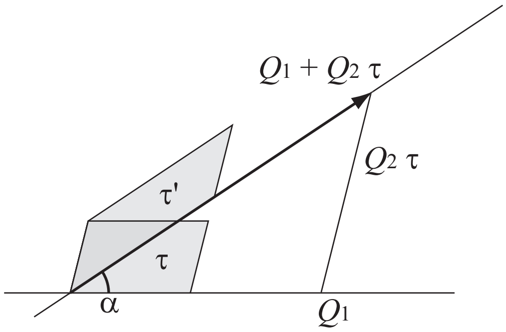

図 15.4: ブレーンの電荷を $Q'^2 = 0$ に取るための SL(2, **Z**) 変換の Z-平面上での様子

カラー場 τ はブレーンの周りでは座標に依存するが、十分遠方では定数になっていると考えられる。この値を τ_0 と置く。τ_0 は上記の SL(2, **Z**) 変換によって次のように変換される。

$$\tau_0' = \frac{Q^1}{Q_c}\tau_0. \tag{15.425}$$

ただし複素電荷 $Q_c = Q^1 - Q^2\tau_0$ を定義した。この式の虚部からは SL(2, **R**) 変換によって結合定数がどのように変換されるかを表す次の関係が得られる。

$$g'_{\mathrm{str}} = \left|\frac{Q_c}{Q^1}\right|^2 g_{\mathrm{str}}. \tag{15.426}$$

以上の操作によってブレーンの電荷が $Q'^2 = 0$ の場合に帰着させることができた。

次にスカラー場の期待値が τ_0' であるような背景上で $(Q^1, 0)$-ブレーンをを構成する必要があるが、これはすでに与えられていて、弦計量では次のようになる。

$$\begin{array}{ll} \text{D5-brane} & \text{F-string} \\ ds^2 = H^{-1/2}dx_\parallel^2 + H^{1/2}dx_\perp^2, & ds^2 = H^{-1}dx_\parallel^2 + dx_\perp^2, \\ \tau' = \chi_0' + \dfrac{i}{g'_{\mathrm{str}}}H^{1/2}, & \tau' = \chi_0' + \dfrac{i}{g'_{\mathrm{str}}}H^{1/2}, \\ \xi' \propto H^{-1/8}\xi_0', & \xi' = H^{-1/4}\xi_0', \\ H = 1 + \dfrac{g'_{\mathrm{str}}Q_5^1}{4\pi^2 r^2}, & H = 1 + \dfrac{g'^2_{\mathrm{str}}Q_1^1}{6\Omega_7 r^6}. \end{array} \tag{15.427}$$

ただし、ξ_0' は次の条件を満足する定数スピノルである。

$$\begin{array}{ll} \text{D5-brane} & \text{F-string} \\ \gamma_{\theta\theta\theta r}\sigma_x\xi_0 = \pm\xi_0, & \gamma_{01}\sigma_z\xi_0 = \pm\xi_0. \end{array} \tag{15.428}$$

Soryushiron Kenkyu

ゲージ場については、次のフラックス保存則から簡単に決定することができる。

$$\begin{array}{ll} \text{D5-brane} & \text{F-string} \\ \oint H_3^1 = Q_5^1, & \oint H_7^1 = Q_1^1. \end{array} \tag{15.429}$$

$\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ 変換を行うためにアインシュタイン計量へ移る必要がある。$g_{\mu\nu}^{\mathrm{str}} = e^{\phi'/2} g_{\mu\nu}^{\mathrm{Einstein}}$ および $\xi'^{\mathrm{str}} = e^{\phi'/8}\xi'^{\mathrm{Einstein}}$ というワイル変換を行えば、

$$\begin{array}{ll} \text{D5-brane} & \text{F-string} \\ ds^2 = g_{\mathrm{str}}'^{-1/2}(H^{-1/4}dx_\parallel^2 + H^{3/4}dx_\perp^2), & ds^2 = g_{\mathrm{str}}'^{-1/2}(H^{-3/4}dx_\parallel^2 + H^{1/4}dx_\perp^2), \\ \xi' \propto H^{-1/16}\xi_0', & \xi \propto \xi = H^{-3/16}. \end{array} \tag{15.430}$$

(15.430) の計量中の $g_{\mathrm{str}}'^{-1/2}$ という因子を取り除くために座標変換 $x \to g_{\mathrm{str}}^{1/4} x$ を行うと、計量の中の g'_{str} が消えると同時に調和関数が次のように書きかえられる。

$$\begin{array}{ll} \text{D5-brane} & \text{F-string} \\ ds^2 = H^{-1/4}dx_\parallel^2 + H^{3/4}dx_\perp^2, & ds^2 = H^{-3/4}dx_\parallel^2 + H^{1/4}dx_\perp^2), \\ H = 1 + \dfrac{g_{\mathrm{str}}^{1/2}|Q_c|}{4\pi^2 r^2}, & H = 1 + \dfrac{g_{\mathrm{str}}^{1/2}|Q_c|}{6\Omega_7 r^6}. \end{array} \tag{15.431}$$

ただし、式中の g'_{str} を g_{str} で表すために (15.426) を用いた。

この解に対して $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ の逆変換を行えば、(Q^1, Q^2) ブレーン解を得る。計量は $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ 変換のもとで不変であるから変更する必要はない。(15.429) に対して変換を行えば、ほしい電荷の値を表すフラックス (15.423) が得られる。スカラー場については、1-ブレーンと 5 ブレーン両方について共通に τ の形で次のように書ける。

$$\tau = \frac{\tau_0 + Q^1\Delta}{1 + Q^2\Delta}, \quad \Delta = \frac{i}{g_{\mathrm{str}}Q_c}(H^{1/2} - 1). \tag{15.432}$$

行列 $P_I{}^m$ に対しては、この $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ 変換は次のように作用する。

$$P_I{}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r & 1 \end{pmatrix} P_I'{}^m \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{15.433}$$

ただし、$P_2{}^1 = 0$ ゲージを保つようにするには右から作用する局所的 $\mathrm{SO}(2)$ 変換を同時に行う必要があり、そのパラメータ α は次の式によって決定される座標 r に依存する角度である。

$$\alpha(r) = \arg(Q^1 - Q^2\tau^*(r)). \tag{15.434}$$

この $\mathrm{SO}(2)$ 変換のせいで、キリングスピノルも次のように回転する。

$$\xi = \exp\left(\frac{i\alpha(r)}{2}\sigma_y\right)\xi'. \tag{15.435}$$

15.17 IIB 7-ブレーン解

IIB 型超重力理論の D7-ブレーンは、前に構成した Dp-ブレーン解にすでに含まれている。しかしその解には以下で述べるように問題がある。調和関数 H の満足すべき微分方程式は

$$H' = -\frac{g_{\mathrm{str}}N}{2\pi r}, \tag{15.436}$$

であり、その解は

$$H = \text{constant} - \frac{g_{\text{str}}N}{2\pi}\log r, \tag{15.437}$$

である。計量は $H(r)$ の分数べきで与えられるから、$H(r)$ は常に正でなければならない。しかしこの関数は積分定数をどのように取ったとしても r が大きいところで $H(r)$ の正定値性を満足することができない。従って、上記の調和関数によって得られる解は D7-ブレーンの近傍での様子を近似的にあらわしていると解釈しなければならない。r が大きいところで解が特異になってしまうのはわれわれが Dp-ブレーン解を求めるときに仮定した回転対称性に問題がある。一般に、磁荷をもった物体の周りのゲージ場は、場の強さが球対称性を満足している場合にもポテンシャルは見かけ上球対称性を満足しない。しかし通常は回転によるポテンシャルの変化をゲージ変換で打ち消すことができるので、問題はない。しかし、D7-ブレーンが結合しているゲージ場はアクシオンであり、これはゲージ変換によって変化しない。従ってポテンシャルの値そのものが意味を持ち、回転対称性は物理的に破れている。そこで、回転対称性の仮定を課さずに解を探してみると、遠方でも定義された解を構成することができる。[45, 46]

実際に超重力理論の運動方程式の解として 7-ブレーン解を求めてみよう。D7-ブレーンは H_3^I や G_5 に結合しない。これらの場は運動方程式やビアンキ恒等式に矛盾せずに 0 に置くことができる。その結果得られる理論は自己双対な場を含まないために、ラグランジアンを用いて記述することができる。アインシュタイン計量を取ると、重力場、ディラトン、アクシオンの振る舞いを決めるラグランジアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = R - \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}e^{2\phi}(\partial_\mu\chi)^2. \tag{15.438}$$

複素場 $\tau = \chi + ie^{-\phi}$ を導入すれば、この作用は次のように書くことができる。

$$\mathcal{L} = R - \frac{1}{2}\frac{\partial_\mu\tau\partial^\mu\tau^*}{(\operatorname{Im}\tau)^2} \tag{15.439}$$

7-ブレーンが伸びている方向を x^0 から x^7 に取り、それに垂直な二つの方向については複素座標 z と $\overline{z}$ を用いることにしよう。二次元曲面上には常にコンフォーマル座標を取ることができるので、ここでもそうすることにする。さらに、全ての場の値がブレーンに平行な x^i 方向に依存しないとしよう。すると、計量と複素スカラー場を次のように置くことができる。

$$ds^2 = dx_\parallel^2 + 2b^2(z,z^*)dzdz^*, \quad \tau = \tau(z,z^*). \tag{15.440}$$

従って 7-ブレーン解を決めるためには二つの複素関数 b と τ を決定すればよい。τ が満足すべき運動方程式は、次のように与えられる。

$$\partial_z\partial_{z^*}\tau - 2\frac{\partial_z\tau\partial_{z^*}\tau}{\tau-\tau^*} = 0 \tag{15.441}$$

この式の中には関数 b が含まれていない。従って、まず b は忘れて τ を決定することに集中することができる。これは非線型の微分方程式であるが、簡単に見つかる解がある。それは τ が z あるいは z^* のみに依存しているような解である。ここでは τ が正則関数、すなわち z にのみ依存するとしよう。

$$\tau = \tau(z). \tag{15.442}$$

正則関数としてどのようなものを選ぶべきかは、境界条件を用いて決める。

次に、関数 b を決定しよう。そのためにはアインシュタイン方程式を解けばよい。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = \frac{1}{4(\operatorname{Im}\tau)^2}(\partial_\mu\tau\partial_\nu\tau^* + \partial_\nu\tau\partial_\mu\tau^* - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\tau\partial^\alpha\tau^*) \tag{15.443}$$

Soryushiron Kenkyu

右辺は複素スカラー場のエネルギー運動量テンソルである。添え字をどちらもブレーンに沿った向きに取れば、次の関係式を得る。

$$R_{zz^*} = -\partial_{z^*}\partial_z \log \operatorname{Im}\tau \tag{15.444}$$

この式の右辺はエネルギー密度を表している。z 平面上のある領域でこの式の両辺を積分すれば、右辺はその内部のエネルギーを、左辺はガウス・ボンネの定理より欠損角を与える。そのことから、余次元が 2 の時空上での欠損角とエネルギーの間のよく知られた関係を得る。2 次元複素平面上のリッチテンソルは $R_{zz^*} = -\partial_z\partial_{z^*} \log g_{zz^*}$ と与えられる。従って、計量 g_{zz^*} は次のように与えられる。

$$g_{zz^*} = |f(z)|^2 \operatorname{Im}\tau(z) \tag{15.445}$$

$f(z)$ は任意の正則関数であり、境界条件によって決定される。$f(z) = \partial z'/\partial z$ によって定義される座標系 z' に移れば、そこでは $f'(z') = 1$ となるが、必ずしもそのような座標系が便利とは限らない。

このように、7-ブレーン解は二つの正則関数 $\tau(z)$ および $f(z)$ を与えることによって決定される。これらは次の境界条件を満足しなければならない。まず、τ の虚部は $e^{-\phi}$ であるから、いたるところで正でなければならない。

$$\operatorname{Im}\tau > 0. \tag{15.446}$$

次に、τ の実部はアクシオン χ を表しているが D7-ブレーンはアクシオン χ に対して磁気的に結合している。従って z 平面上で D7-ブレーンを N 枚囲むような経路 C に対して次のフラックスと電荷の関係を満足しなければならない。

$$\int_C dx^\mu \partial_\mu \chi = N \tag{15.447}$$

これは、経路を 1 周したときに、$\tau \to \tau + N$ のように τ が変化することを表している。このような事が許されるのは、τ の値は $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 変換を行って移り合えるものは同一視されるという性質があるためである。τ と $\tau + N$ も $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 変換で互いに移り合うことができるので、これらは物理的には等価である。これら二つの条件は関数 τ の形をほとんど決定してしまう。

ブレーンの周りを一周したときに受ける $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 変換のことを、モノドロミーと呼ぶ。すなわち、あるスタート地点から出発してあるブレーンの周りを反時計回りに一周し戻ってきたときに、最初と最後のスカラー場の関係が次のように与えられたとき、7-ブレーンのモノドロミーは Q であるという。

$$\tau(\mathrm{end}) = Q\tau(\mathrm{start}), \quad Q \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}). \tag{15.448}$$

N 枚の D7-ブレーンに対しては、モノドロミーを 2×2 の行列で表せば

$$Q^I{}_J = \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15.449}$$

となる。IIB 型超重力理論にはこれだけではなく、さまざまなモノドロミーを持った 7-ブレーンが存在する。それらは一枚の D7-ブレーンから $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 変換によって得ることができる「素な」7-ブレーンを組み合わせることによって構成することができる。1 枚の D7-ブレーンに対するモノドロミーに対して $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 変換を行ってみると、

$$Q_{[p,q]} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-pq & p^2 \\ -q^2 & 1+pq \end{pmatrix}. \tag{15.450}$$

Soryushiron Kenkyu

（$ps-qr=1$ を用いた。）従って、素な 7-ブレーンは 1 ブレーンや 5-ブレーン同様二つの互いに素な整数によってラベルすることができ、$[p,q]$ 7-ブレーンと呼ばれる。D7-ブレーンは $[1,0]$ 7-ブレーンに対応する。ただし、7-ブレーンに対する $[p,q]$ というラベルは 1-ブレーンや 5-ブレーンの場合とは異なり、加法的な電荷を表しているわけではなく、系全体の電荷はそれぞれのモノドロミーの積によって与えられる。一般にモノドロミーは可換でないため、モノドロミーをどのような順序で掛け合わせるべきかは、ブレーンの配置の仕方によって決定される。

15.18 D6-ブレーンとカルツァ・クラインモノポール

IIA 型超重力理論の F1、D2、D4、NS5 の 4 種類のブレーンは 11 次元超重力理論のブレーンに対応していた。ここでは残りの二つ、D0-ブレーンと D6-ブレーンについて考えよう。これらはそれぞれ R-R 1 形式 C_1 と電気的、および磁気的に結合するブレーンである。これらを 11 次元の観点から解釈しなおすためにこれらのブレーンに結合するゲージ場 C_μ の起源を考えてみればよい。§15.5 で見たように、これは計量の非対角成分 $g_{\mu,11}$ に対応している。従って対応する保存量はエネルギー運動量テンソルの $T^{0,11}$ 成分であり、これはカルツァ・クラインモードの x^{11} 方向の運動量を表している。すなわち、D0-ブレーンは 11 次元超重力理論を $\mathbf{S}^1$ コンパクト化した際に現れるカルツァ・クラインモードに対応している。[47] コンパクト化の周期を L とすればカルツァ・クラインモードの運動量は n を整数として $P=2\pi n/L$ のように量子化される。さらに、11 次元の超重力理論に含まれる場が零質量であることからエネルギーも同じ値を取る。すなわちカルツァ・クラインモードは 10 次元でみれば質量 $M=2\pi n/L$ の粒子として観測される。(15.285) に与えた関係式を用いれば、この質量が n 個の D0-ブレーンの質量 $n/l_s e^\phi$ に一致していることが確認できる。

D6-ブレーンについて考える前に D0-ブレーンと D6-ブレーンの電荷（磁荷）を符号も含めて定義しておこう。まず、D0-ブレーンの電荷は、C_1 と D0-ブレーンの世界線の結合の係数として次のように定義する。

$$\frac{S_{\rm cur}^{\rm D0}}{2\pi}=Q_{\rm D0}\int C_1. \tag{15.451}$$

次に、D6-ブレーンの電荷は次のようにフラックスの積分として定義する。

$$Q_{\rm D6}=\oint_{\mathbf{S}^2}G_2. \tag{15.452}$$

このようなフラックスを与える $\mathbf{S}^2$ 上のゲージ場は例えば次のように取ることができる。

$$C_\theta=0,\quad C_\phi=\frac{Q_{\rm D6}}{4\pi}\cos\theta. \tag{15.453}$$

ゲージ場 C_μ に磁気的に結合した D6-ブレーンの対応物を見るためには、D6-ブレーンを古典解として表すのがよい。10 次元の立場で D6-ブレーンに垂直な 3 次元部分で考えれば D6-ブレーンはゲージ場 C_μ に対するディラックモノポールとみなすことができる。このような、コンパクト化によって生じた U(1) ゲージ場に対するディラックモノポールをカルツァ・クラインモノポールと呼ぶ。

D6-ブレーンの古典解からコンパクト化の手続きを逆にたどることによって 11 次元での対応物が何になるかを見てみよう。弦計量（$2\pi l_s=1$）での D6-ブレーンの解は次のように与えられる。

$$ds_{\rm str}^2=H^{-1/2}\eta_{ij}dx^idx^j+H^{1/2}(dr^2+r^2d\Omega_2^2),\quad e^\phi=g_{\rm str}H^{-3/4}. \tag{15.454}$$

表 15.5: IIA 型超重力理論における D0-ブレーン、D6-ブレーンの 11 次元超重力理論における対応物

M-theory		type IIA
Kaluza-Klein mode	$\to$	D-particle
Kaluza-Klein monopole	$\to$	D6-brane

ただし、H は次の調和関数である。

$$H = 1 + \frac{Q_{\rm D6} g_{\rm str}}{4\pi r}. \tag{15.455}$$

この解から出発して、11 次元での計量を決めることができる。10 次元の弦計量と 11 次元の計量の間の関係は、(15.122)、(15.124)、(15.139) を組み合わせることで次のように与えられる。

$$ds_{11}^2 = e^{-(2/3)\phi} ds_{\rm str}^2 + e^{(4/3)\phi}(dx^{11} + C_\mu dx^\mu)^2. \tag{15.456}$$

これを用いれば、先ほどの D6-ブレーン解に対応する 11 次元の計量が次のように決まる。

$$ds_{11}^2 = g_{\rm str}^{-(2/3)}(\eta_{ij} dx^i dx^j + H(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2)) + g_{\rm str}^{(4/3)} H^{-1}(dx^{11} + C_\mu dx^\mu)^2 \tag{15.457}$$

ここで、次の座標変換を行う。

$$x^i \to \frac{Q_{\rm D6} g_{\rm str}}{4\pi} x^i, \quad r \to \frac{Q_{\rm D6} g_{\rm str}}{4\pi} r, \quad x^{11} \to \frac{Q_{\rm D6}}{4\pi}\psi. \tag{15.458}$$

新しい座標を用いると、11 次元の計量は次のように与えられる。

$$ds_{11}^2 = B^2\Big[\eta_{ij} dx^i dx^j + H(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2) + H^{-1}(d\psi + \cos\theta d\phi)^2\Big]. \tag{15.459}$$

調和関数 H とスケール因子 B は次のように与えられる。

$$H = 1 + \frac{1}{r}, \quad B = \frac{Q_{\rm D6} g_{\rm str}^{2/3}}{4\pi}. \tag{15.460}$$

この解は、二つのパラメータ B と $Q_{\rm D6}$ に依存している。B は計量のスケール因子として現れている。ψ の周期は $Q_{\rm D6}$ を用いて次のように表される。

$$\psi + \frac{4\pi}{Q_{\rm D6}} \sim \psi. \tag{15.461}$$

従って、任意の $Q_{\rm D6}$ に対応する解は $Q_{\rm D6} = 1$ の解を ψ 方向のシフト $\psi \to \psi + 4\pi/Q_{\rm D6}$ によって生成される $\mathbf{Z}_{Q_{\rm D6}}$ によって割ることで得ることができる。

(15.459) のように、D6-ブレーンは純粋に 11 次元の超重力理論の場だけで書けている。従って 11 次元の超重力理論から出発して D6-ブレーンの作用を決定することができるはずである。D6-ブレーンの作用は Born-Infeld 作用と Chern-Simons 作用の和として書けるが、これらの作用は高次の微分項を含んでいる。しかし 11 次元の超重力理論には微分を二つ含む項だけが存在するから、D6-ブレーンの作用のうち、微分の数が二つ以下の項についてが 11 次元超重力理論から再現されると考えられる。ここでは実際に、11 次元超重力理論の A_3 の作用から D6-ブレーン上のゲージ

Soryushiron Kenkyu

場の作用が得られることを示そう。[48] D6-ブレーン上のゲージ場の作用で、微分が二つ以下の項は次のように与えられる。

$$S=\int_{D6}\left(-\frac{1}{2g_{\rm str}}F_2'\wedge *^7F_2'+C_5\wedge F_2'+\frac{1}{2}C_3\wedge F_2'\wedge F_2'\right). \tag{15.462}$$

ただし $F_2'=dV_1+B_2$ である。ここでの目標は、11 次元超重力理論からこの作用を導くことである。

まず、Taub-NUT 空間上のキリング 1-形式 ζ_1 と調和 2 形式 $\zeta_2=d\zeta_1$ を用いて次のように表される A_3 のモードに注目しよう。

$$A_3=c*^4\zeta_1+V_1\wedge d\zeta_1+b_2\wedge\zeta_1+c_3. \tag{15.463}$$

c、V_1、b_2、c_3 はすべて D6-ブレーンに平行な方向の成分のみを持つ 0、1、2、3 形式である。これらの場は x^{11} には依存しないが、ブレーンに平行な方向 x^i とブレーンに垂直な方向 x^μ、の両方に依存しているとする。ただしわれわれは Taub-NUT 空間の典型的な大きさ R が問題としている長さのスケールよりも重分小さい場合にそれが D6-ブレーンの作用を再現することを見ようとしているのであるから、c、V_1、ζ_1、b_2 は x^μ の非常に滑らかな関数であり、R 程度の範囲ではほとんど変化しないものとする。これらの場が 10 次元時空においてどのような意味を持つかを見るためには、r が大きいところでの様子を見るのが良い。Taub-NUT 空間の中心から十分遠方では、ζ_1 は dx^{11} に比例した定数である。従って、c と c_3 は R-R 3 形式場の成分 $C_{\mu\nu\rho}$ と C_{ijk} に、b_2 は B_{ij} に対応している。一方 $V_1\wedge d\zeta_1$ は D6-ブレーンから離れたところでは 0 になってしまうから、V_1 を D6-ブレーン上のゲージ場であると解釈することができる。そこで、V_1 は以後 x^μ に依存しないとしよう。（依存性を残しておいても最終結果には影響しない。）二つの場 V_1 と b_2 に対する次のゲージ変換を考えることができる。

$$\delta V_1=-\lambda_1,\quad \delta b_2=d\lambda_1. \tag{15.464}$$

この変換は、A_3 に対するゲージ変換 $\delta A_3=d(\lambda_1\wedge d\zeta_1)$ に帰着する。従って、V_1 は D6-ブレーン上のゲージ場、B_2 はバルクの 2-形式場とみなすことができる。このゲージ変換でゲージ不変な場の強さを $F_2'=dV_1+b_2$ と置いておこう。

(15.463) で定義された D6-ブレーン上のゲージ場 V_1 と D6-ブレーンの上に端を持つ弦との結合は、11 次元の立場では Taub-NUT 空間の非コンパクト 2-サイクルに巻きついた M2-ブレーンと A_3 との結合から再現することができる。実際、D6-ブレーン上の開弦の端点を表す世界線を L、

図 15.5: D6-ブレーンに端を持つ開弦は、11 次元超重力理論においては Taub-NUT 空間の非コンパクト 2-サイクルに巻きついた M2-ブレーンとして表される。

Taub-NUT 空間上の非コンパクト 2-サイクルを C とし、M2-ブレーンの張る 3 次元空間を $L\times C$ とすれば、上記のように与えられた A_3 との結合は

$$\frac{S}{2\pi}=\int_{C\times L}V_1\wedge\zeta_2=\int_L V_1\times\int_C\zeta_2=\int_L V_1 \tag{15.465}$$

となるから、ゲージ場 V_1 は正しく規格化されていることがわかる。

(15.463) から、場の強さ K_4 は次のように与えられる。

$$K_4 = dc \wedge *^4\zeta_1 + F_2' \wedge \zeta_2 + db_2 \wedge \zeta_1 + dc_3, \tag{15.466}$$

これを 11 次元超重力理論の運動項に代入してみよう。それぞれの項の二乗から、次のような作用を得る。F_2' を含む項からは、D6-ブレーン上のゲージ場の運動項が得られる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\int_{11} K_4 \wedge *^{11} K_4 \\
&= \frac{1}{2}\int_{11} (dc \wedge *^7 dc) \wedge (\zeta_1 \wedge *^4\zeta_1) + (dc_3 \wedge *^7 dc_3) \wedge d\Omega_4 \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{11} (db_2 \wedge *^7 db_2) \wedge (\zeta_1 \wedge *^4 \zeta_1) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{11} (F_2' \wedge *^7 F_2') \wedge (\zeta_2 \wedge \zeta_2) \\
&\quad + \int_{11} (*^7 dc \wedge \zeta_1) \wedge (F_2' \wedge \zeta_2)
\end{aligned} \tag{15.467}$$

最後の項については c の双対場を $*^7 dc = dc_5$ と書きなおし、部分積分を行うと、

$$\int_{11} (*^7 dc \wedge \zeta_1) \wedge (F_2' \wedge \zeta_2) = \int_{11} (c_5 \wedge F_2') \wedge (\zeta_2 \wedge \zeta_2) \tag{15.468}$$

Taub-NUT 上での積分については、次の式を用いることができる。

$$\int_{\mathrm{TN}} d\Omega_4 = (2\pi R)\int_3, \quad \int_{\mathrm{TN}} (\zeta_1 \wedge *^4 \zeta_1) = \frac{1}{2\pi R}\int_3, \quad \int_{\mathrm{TN}} (\zeta_2 \wedge \zeta_2) = 1. \tag{15.469}$$

すると、上記の作用は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\int_{10} \left(\frac{1}{2\pi R}(dc \wedge *^7 dc) + (2\pi R)(dc_3 \wedge *^7 dc_3) + \frac{1}{2\pi R}(db_2 \wedge *^7 db_2) \right) \\
&\quad + \int_7 \left(\frac{1}{2} F_2' \wedge *^7 F_2' + c_5 \wedge F_2' \right)
\end{aligned} \tag{15.470}$$

ここで、$2\pi R = g_{\mathrm{str}}^{2/3}$ を用いて書きなおし、ワイル変換 $g_{\mu\nu} \to g^{-2/3} g_{\mu\nu}$ を行えば、次のように 10 次元時空のゲージ場 H_3 と G_4 に対する運動項と、D6-ブレーン上のゲージ場 A_μ に対する運動項を得ることができる。

$$\mathcal{L} = \int_7 \left(\frac{1}{2g_{\mathrm{str}}} F_2' \wedge *^7 F_2' + c_5 \wedge F_2' \right) + \frac{1}{2}\int_{10} \left(\frac{1}{g_{\mathrm{str}}^2} H_3 \wedge *H_3 + G_4 \wedge *G_4 \right). \tag{15.471}$$

今度はさきほどの分解を Chern-Simons 項に代入すれば、次の項を得る。

$$\frac{1}{3!}\int A_3 \wedge K_4 \wedge K_4 = \frac{1}{2}\int_7 C_3 \wedge F_2' \wedge F_2'. \tag{15.472}$$

これは Chern-Simons 項の中の F_2' について 2 次の項を与えている。これらを合わせれば、(15.462) にある項がすべて再現されることがわかる。

15.19 Kaluza-Klein mode

$\mathbf{S}^1$ に巻きついた F1 の解を T-dual 変換することで、Kaluza-Klein mode に対応する古典解を作ってみよう。まず、次の F1 古典解から出発する。

$$ds^2 = H^{-1}(-dt^2 + dy^2) + dx_8^2, \quad B_2 = H^{-1} dt \wedge dy, \quad e^\phi = g_{\mathrm{str}} H^{-1/2} \tag{15.473}$$

ここで、H は次のように定義される調和関数である。

$$H = 1 + K = 1 + \frac{g_{\rm str}^2 N}{6\Omega_7 r^6}, \quad r = |x|. \tag{15.474}$$

あとで便利なように、H の定数部分を除いた K も定義しておいた。y 方向が $y \sim y+1$ によってコンパクト化されているとしよう。

この解を y 方向に T-duality 変換してみよう。

T-dual 変換

一般に、$x^9 \sim x^9 + 1$ によって $\mathbf{S}^1$ コンパクト化された時空の計量と B_2 が

$$ds^2 = g^{(9)}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2\sigma}(dx^9 + v_1), \quad B_2 = b_2^{(9)} + b_1 \wedge (dx^9 + v_1). \tag{15.475}$$

と与えられたとき、その T-dual は $\mathbf{S}^1$ の半径を反転し、計量の g_{i9} 成分と B_2 の B_{i9} 成分を入れ替えることで与えられる。すなわち、変換後の計量と B_2 は、

$$ds'^2 = g^{(9)}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{-2\sigma}(dx^9 + b_1), \quad B'_2 = b_2^{(9)} + v_1 \wedge (dx^9 + b_1). \tag{15.476}$$

と与えられる。さらに、ディラトン場は次のように変換される。

$$e^{\phi'} = e^{\phi - \sigma} \tag{15.477}$$

R-R 場については、ここで用いられている convention に従えば、T-dual 変換を行う方向の足を左から付け加えたり、取り除いたりすればよい。

$$G_{\rm even} = g_{\rm even} + dx^9 \wedge g_{\rm odd}, \quad G_{\rm odd} = g_{\rm odd} + dx^9 \wedge g_{\rm even}. \tag{15.478}$$

この変換側を適用すると、次の計量が得られる。もともと計量が対角的であったので、変換後の B_2 は 0 になる。

$$ds^2 = -H^{-1}dt^2 + H(dy + H^{-1}dt)^2 + dx_8^2 \tag{15.479}$$

ここで、遠方で直交座標に漸近するように、$y_{\rm old} = y_{\rm new} - t$ という座標変換を行おう。これは、T-dual 変換を行う前に B_2 を定数シフトすることに相当する。その結果、計量は次のように与えられる。

$$ds^2 = -dt^2 + dy^2 + K(x)(dt - dy)^2 + dx_8^2. \tag{15.480}$$

T-dual 変換を行った後のディラトン場は

$$e^\phi = g_{\rm str}. \tag{15.481}$$

となり、定数である。従って、ここで与えた解は Einstein 重力理論の古典解とみなすことができる。

この解は y 方向に零質量粒子が運動している状態を古典解として表したものと解釈できる。

T-dual 変換を行う前の弦の本数 N は運動量密度に変換される。この二つの間の関係を求め、調和関数に含まれる N を T-dual をとった後の量子数で表すことを考えよう。議論をわかりやすくするためにここでは一旦 1 においていた長さ $2\pi l_s$ を復活させよう。T-dual 変換を行うために、便宜上周期 $2\pi l_s$、すなわち半径 l_s でコンパクト化を行い、変換すると、変換後には半径 l_s でコンパクト化された空間上に運動量 N_{F1}/l_s を得る。ここで、covering space を考えることで一旦コンパクト化されていない古典解に移り、改めて周期 L' でコンパクト化すると、全運動量は

$(N_{F1}/l_s)\times(L'/(2\pi l_s)) = N_{F1}L'/(2\pi l_s^2)$ となる。一方、運動量の最小単位は $2\pi/L'$ であるから、この何倍かという量子数を n とすれば、

$$n = \frac{N_{F1}L'/(2\pi l_s^2)}{2\pi/L'} = \frac{N_{F1}L'^2}{(2\pi l_s)^2} \tag{15.482}$$

となる。従って、調和関数 K は n を用いて次のように与えられる。（再び $2\pi l_s = 1$ の単位系に戻った。）

$$K = \frac{g_{\rm str}^2 n/L^2}{6\Omega_7 r^6} \tag{15.483}$$

light-cone 座標 $u = t+y$、$v = t-y$ を用いて次のように書いておくと便利である。

$$ds^2 = -dudv + K(x)dv^2 + dx_8^2. \tag{15.484}$$

ここで、$K(x)$ は v にも依存するように一般化することができる。実際、曲率テンソルのうち、次の成分だけが 0 ではないことが簡単に示される。

$$R_{ivjv} = -\frac{1}{2}\partial_i\partial_j K(x,v) \tag{15.485}$$

従って運動方程式は

$$R_{vv} = -\frac{1}{2}\Delta_x K(x,v) = 0. \tag{15.486}$$

となる。つまり、x 座標に対して調和関数であれば、v 座標への依存性は任意である。これは、y 軸上で一様でない運動量密度が y 方向に光速で伝播しているような状況を表している。

ここでは II 型超重力理論で y 方向に運動量を持った Kaluza-Klein モードの古典解を与えたが、上で述べたように計量以外の場は非自明な振る舞いをしていないので、11 次元超重力理論にもほとんど同じ解が存在する。

$$ds^2 = -dt^2 + dy^2 + K(dt-dy)^2 + dx_9^2, \quad K = \frac{n/L^2}{7\Omega_8 r^7} \tag{15.487}$$

ここで、y 方向を x^{11} だと思って対応する IIA 型超重力理論の古典解を計算すると、D0-brane の古典解が得られる。

15.20 marginal bound states

ブラックホールエントロピーの問題に関連した幾つかの marginal bound state の古典解が [49] で解説されている。

15.20.1 D1-D5 系

Dp-D$(p+4)$-brane 系（$p = 0,1,2,3,4$）を考えよう。ここでは話を簡単にするために $p=1$ の場合、すなわち D1-D5 系に限って話をするが、他の場合もほとんど同様に議論できる。$x^{i'}$ 方向に広がった D1-brane と $x^{i'}$ 方向および $x^{i''}$ 方向に広がった D5-brane から成る系を考えよう。ただし $i' = 0,1$、$i'' = 2,3,4,5$ である。さらに $x^{i'}$ および $x^{i''}$ に直交する 4 個の座標を y^m とする。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D1	○	○	−	−	−	−				
D5	○	○	○	○	○	○				

(15.488)

Soryushiron Kenkyu

ここでは D1-brane も D5-brane も $x^{i'}=0$ に存在するものとし、D1-brane は $x^{i''}$ 方向には一様に分布しているとする。この方向には体積 V_4 でコンパクト化されているとする。それぞれのブレーンの密度が次のように与えられるとする。

$$\rho_1 = \frac{N_1}{V_4}\delta^{5-p}(y^m)d^4y, \quad \rho_5 = N_5\delta^{5-p}(y^m)d^4y. \tag{15.489}$$

N_1 は $x^{i''}$ 方向のある体積 V_4 あたりの D1-brane の本数を表し、N_5 は D5-brane の枚数を表す。極座標 $dy^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_{4-p}^2$ を導入し、計量の形を次のように仮定する。

$$ds^2 = a_1^2\eta_{i'j'}dx^{i'}dx^{j'} + a_2^2\delta_{i''j''}dx^{i''}dx^{j''} + b^2(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2). \tag{15.490}$$

G_3 の成分は次のものが 0 ではない。

$$G_{\widehat{01r}} = G_{\widehat{3456\theta_1}\widehat{\theta_2}\widehat{\theta_3}} = \frac{N_1/V_4}{\Omega_3(br)^3a_2^4}, \quad G_{\widehat{\theta_1}\widehat{\theta_2}\widehat{\theta_3}} = \frac{N_5}{\Omega_3(br)^3}. \tag{15.491}$$

これらをそれぞれ $G^{(1)}$ および $G^{(5)}$ と表すことにする。さらに次の記号を導入しておく。

$$\not{g}^{(1)} = be^{\phi}\not{G}^{(1)}\gamma_{\widehat{r}}, \quad \not{g}^{(5)} = be^{\phi}\not{G}^{(5)}\gamma_{\widehat{r}}. \tag{15.492}$$

これらをフェルミオンの変換則に代入すると、次の式を得る。単一の Dp-ブレーンの場合とほとんど同じであるが、R-R 場が二種類あり、それらの相対符号が一定ではないことが重要である。

$$\begin{aligned}
\delta\psi_{\widehat{i'}} &= \frac{1}{2b}\gamma_{\widehat{i'}\widehat{r}}\left(\frac{a_1'}{a_1} + \frac{1}{4}\not{g}^{(1)} + \frac{1}{4}\not{g}^{(5)}\right)\xi, && (15.493)\\
\delta\psi_{\widehat{i''}} &= \frac{1}{2b}\gamma_{\widehat{i''}\widehat{r}}\left(\frac{a_2'}{a_2} - \frac{1}{4}\not{g}^{(1)} + \frac{1}{4}\not{g}^{(5)}\right)\xi, && (15.494)\\
\delta\psi_{\widehat{r}} &= \frac{1}{b}\left(\frac{s'}{s} + \frac{1}{8}\not{g}^{(1)} + \frac{1}{8}\not{g}^{(5)}\right)\xi, && (15.495)\\
\delta\psi_{\widehat{a}} &= \frac{1}{2b}\gamma_{\widehat{a}\widehat{r}}\left(\frac{b'}{b} - \frac{1}{4}\not{g}^{(1)} - \frac{1}{4}\not{g}^{(5)}\right)\xi, && (15.496)\\
\delta\lambda &= \frac{1}{b}\gamma_{\widehat{r}}\left(\phi' - \frac{1}{2}\not{g}^{(1)} + \frac{1}{4}\not{g}^{(5)}\right)\xi. && (15.497)
\end{aligned}$$

これらの式より、関数 a_i、b、s、ϕ は二つの関数を用いて表せることがいえる。その二つの関数としては次のように定義される H_1 と H_5 を用いる。

$$\not{g}^{(1)} = \frac{H_1'}{H_1}, \quad \not{g}^{(5)} = \frac{H_5'}{H_5}. \tag{15.498}$$

すると直ちに、それぞれの関数を次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
&a_1 = H_1^{-1/4}H_5^{-1/4}, \quad a_2 = H_1^{1/4}H_5^{-1/4}, \quad b = H_1^{1/4}H_5^{1/4},\\
&s = H_1^{-1/8}H_5^{-1/8}, \quad e^{\phi} = g_{\mathrm{str}}H_1^{1/2}H_5^{-1/2}. && (15.499)
\end{aligned}$$

フラックス保存則から決まる (15.491) と定義式 (15.492) および (15.498) を用いることで、調和関数が次のように決定される。

$$H_1 = 1 + \frac{g_{\mathrm{str}}N_1/V_4}{2\Omega_3 r^2}, \quad H_5 = 1 + \frac{g_{\mathrm{str}}N_5}{2\Omega_3 r^2}. \tag{15.500}$$

Soryushiron Kenkyu

これらの調和関数を用いれば計量は次のように与えられる。

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H_1 H_5}}(-dt^2 + dx^2) + \sqrt{\frac{H_1}{H_5}}dx_4^2 + \sqrt{H_1 H_5}(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2) \tag{15.501}$$

この解で $H_1 = 1$ とすれば D5-brane の解を、$H_5 = 1$ とすれば D1-brane の解を得る。逆に、D1-brane と D5-brane の解が与えられると、それらの前の係数を掛け合わせるだけで D1-D5 系の計量が得られる。それぞれの方向について調和関数のべきを見てみると、調和関数に対応するブレーンが広がっている方向ではべきが $-1/2$、広がっていない方向ではべきが $+1/2$ になっている。このようなルールは他の種類のブレーンからなる marginal bound state にも適用することができ、しばしば harmonic function rule と呼ばれる。

15.20.2 D1-P 系

Harmonic function rule があれば、様々な marginal bound state を簡単に作ることができる。ここでは少し様子が異なる marginal bound state として、D1-P 系、すなわち、運動量を持つ D1-brane について見てみよう。

その様な系は、F1-D0 系に対して T-dual 変換を行うことで得ることができる。10 次元時空の座標を t、y、x^i $(i = 1, \ldots, 8)$ とし、y 軸上に存在する F1-D0 系の古典解を与えよう。

$$\begin{array}{c|ccccc} & t & y & x_1 & \cdots & x_8 \\ \hline D0 & \circ & - & & & \\ F1 & \circ & \circ & & & \end{array} \tag{15.502}$$

F1 の本数を N_{F1} とし、D0 の密度を N_{D0}/L とする。L は y 軸方向の長さであり、D0 は y 軸上に一様に分布しているものとする。すなわち、D0 と F1 のブレーン密度は次のように与えられる。

$$\rho_0 = \frac{N_{D0}}{L}\delta^8(x) d^8x \wedge dy, \quad \rho_1 = N_{F1}\delta^4(x) d^8x. \tag{15.503}$$

D0-brane あるいは F1-brane の片方が存在する場合と同様にこれらを源とする調和関数を次のように定義する。

$$H_0 = 1 + \frac{g_{\rm str} N_{D0}/L}{6\Omega_7 r^6}, \quad H_1 = 1 + K = 1 + \frac{g_{\rm str}^2 N_{F1}}{6\Omega_7 r^6}. \tag{15.504}$$

これらの調和関数を用いて、D0-F1 系の古典解は次のように与えられる。

$$ds^2 = -H_1^{-1} H_0^{-1/2} dt^2 + H_1^{-1} H_0^{1/2} dy^2 + H_0^{1/2} dx_i^2 \tag{15.505}$$

$$e^\phi = g_{\rm str} H_1^{-1/2} H_0^{3/4}. \tag{15.506}$$

さらに、fundamental string があることにより発生する NS-NS 2-form field は F1 が単独で存在する場合と同様に次のように与えられる。

$$B_2 = \frac{1}{H_1} dt \wedge dy \tag{15.507}$$

この F1-D0 解を y 方向に T-dual 変換することによって D1-P 系、すなわち、D1-brane と、その上に励起した運動量を表す古典解を構成しよう。T-dual 変換を行うために $y \sim y + 1$ とコンパクト化しよう。そして T-dual 変換を行うと、もともと D0-brane だったものは y 方向へ巻きついた D1-brane に変換される。このとき、D0-brane の密度 N_{D0}/L と D1-brane の本数 N_{D1}

の関係は $N_{D1} = N_{D0}/L$ である。もともとあった N_{F1} 本の fundamental string は Kaluza-Klein mode へ変換される。もともとあった N_{F1} 本の fundamental string は §15.19 で述べた関係に従って Kaluza-Klein mode へ変換される。T-duality による量子数の関係をまとめておくと、

$$\frac{N_{D0}}{L} = N_{D1}, \quad N_{F1} = \frac{n}{L'^2}. \tag{15.508}$$

この関係を用いて調和関数を書き直しておくと、次のようになる。

$$H_1 = 1 + \frac{g_{\rm str} N_1}{6\Omega_7 r^6}, \quad K = \frac{g_{\rm str}^2 n/L^2}{6\Omega_7 r^6}. \tag{15.509}$$

ただし以前 H_0 と書いていたものをここでは H_1 と書いた。また、上で L' と書いた長さを単に L と書いた。

D0-F1 系の計量 (15.505) と B 場 (15.507) に対して T-dual 変換を行い、さらに y を $y - t$ で置き換える座標変換を行うことにより、次の計量を得る。

$$ds^2 = H_1^{-1/2}[-dt^2 + dy^2 + K(dy - dt)^2] + H_1^{1/2} dx_i^2 \tag{15.510}$$

また、dilaton 場も簡単に次のように得られる。

$$e^{\phi} = g_{\rm str} H_1^{1/2} \tag{15.511}$$

これらは、D1-brane の古典解において次の置き換えを行ったものになっている。

$$-dt^2 + dy^2 \quad \to \quad -dt^2 + dy^2 + K(dy - dt)^2. \tag{15.512}$$

これが momentum に対する重ね合わせのルールである。momentum だけの場合と同様に、今度も K を light-cone 座標 $v = t - y$ の任意の関数とすることができる。

15.21 supertubes

1/4 BPS の sugra の古典解で supertube を与えるものは [50] で与えられた。

15.21.1 waving D1-brane

ここでは、y 方向に伸びた弦がそれとは垂直な x 方向に振動している様子を表すような古典解を与える。その準備として、弦が直線状の形状を保ちながら平行移動しているような古典解を作ることから始めよう。具体的には、ある時刻の弦の形状が $x^i = \alpha^i y$ で与えられ、これが y 方向に光速で運動しているような状況を表す古典解を考える。（図 15.6）このような古典解は以前に得られた D1 解をローレンツ変換することで簡単に作ることができる。

まず、次のエネルギー運動量テンソルで与えられる D1-brane から出発しよう。y 方向に光速で運動しているといっても、弦の垂直方向の速さは光速より小さいので、エネルギーは有限である。実際、エネルギー運動量テンソルを計算してみよう．ローレンツ変換を行う前は

$$T_{\mu\nu} = \delta(x)\delta^7(x_7)\,\mathrm{diag}(T_{\rm D1}, -T_{\rm D1}\delta_{ij}, 0) \tag{15.513}$$

となる。ただし、行列部分は (t, x^i, y) の順序で 10×10 行列として表されている。

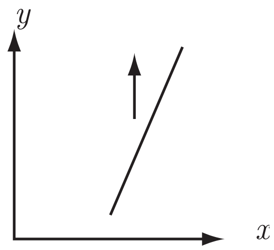

図 15.6: 光速で y 方向に並進運動する直線的な D1-brane

ここで、次のローレンツ変換を実行しよう。

$$x^i_{\rm old} = x^i_{\rm new} + \alpha^i v_{\rm new}, \quad u_{\rm old} = u_{\rm new} + 2\alpha^i x^i_{\rm new} + \alpha^2 v_{\rm new}, \quad v_{\rm old} = v_{\rm new} \tag{15.514}$$

これにより、もともと $x=0$ にあった string は $x^i = \alpha_i(y-t)$ のように、一定速度で運動する弦になる。ここで、light-cone 座標

$$u = t+y, \quad v = t-y, \tag{15.515}$$

を用いてローレンツ変換を表した。

このローレンツ変換の結果、エネルギー運動量テンソルは次のように変換される。

$$T_{\mu\nu} = \delta^8(x^i - \alpha^i(y-t))T_{\rm str} \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha^i & -\alpha^2 \\ \alpha^i & 0 & -\alpha^i \\ -\alpha^2 & -\alpha^i & -1+\alpha^2 \end{pmatrix} \tag{15.516}$$

したがって、y 方向の長さ dy の範囲に含まれるエネルギーおよび運動量が次のように得られる。

$$dE = dyT_{\rm D1}(1+\alpha^2), \quad dP_{x^i} = -dyT_{\rm D1}\alpha^i, \quad dP_y = dyT_{\rm D1}\alpha^2. \tag{15.517}$$

この式は、より一般の形状の弦

$$x^i = F^i(y) \tag{15.518}$$

に拡張できる。この場合は、上記の関係式の α^i を dF^i/dy に置き換えればよい。このときエネル

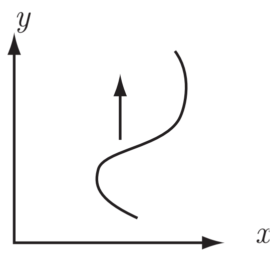

図 15.7: 任意の形状を保ちながら光速で y 方向に並進運動する弦

ギーと運動量は、次のように与えられる。

$$dE = dyT_{\rm D1}\left(1+\left(\frac{dF^i}{dy}\right)^2\right), \quad dP_{x^i} = -T_{\rm D1}dF^i, \quad dP_y = dyT_{\rm D1}\left(\frac{dF^i}{dy}\right)^2. \tag{15.519}$$

もし弦が閉じている場合、たとえば y 方向がコンパクト化されていて、y 方向を一周したときに弦がもとの点に戻るような場合には、$\int dP_{x^i} = 0$ である。しかし x^i 空間での角運動量は 0 でない値を取ることが出来て、次のように与えられる。

$$J_{ij} = -T_{\rm D1}(F^i dF^j - F^j dF^i). \tag{15.520}$$

すなわち、i-j 平面上の角運動量は、弦のその平面への射影が囲む面積に比例する。エネルギーは y 方向の長さを L とすると

$$E = LT_{\rm D1} + P_y \tag{15.521}$$

と表され、marginal boundstate であることを表している。

弦が常に N 本のまとまりでいる場合を考えよう。つまり、tension が effective に $NT_{\rm D1}$ であるような場合である。y 方向のまきつき数を N_y とすると、弦の束は N_y/N 回巻いているので、弦の束の長さ l_y は

$$l_y = \frac{N_y}{N}L_y \tag{15.522}$$

と与えられる。ただし L_y は y 方向のコンパクト化の周期である。x 空間での長さを l_x とすれば、$dF/dy \sim l_x/l_y$ であるので、

$$P_y = NT_{\rm D1}\frac{l_x^2}{l_y^2}l_y = NT_{\rm D1}l_x^2\frac{N}{N_y L_y} \tag{15.523}$$

一方角運動量の最大値は

$$J_{\rm max} = \frac{1}{2\pi}NT_{\rm D1}l_x^2 = \frac{n_y N_y}{N}, \quad n_y = \frac{L_y P_y}{2\pi} \tag{15.524}$$

となる。

上記のように、ローレンツ変換によって運動する直線的な弦を作り、それを一般の形状に拡張するという手順を踏んで古典解を作ってみよう。まず、D1 解は次のように与えられる。

$$ds^2 = -\frac{1}{H^{1/2}}dudv + H^{1/2}dx^2, \quad e^\phi = g_{\rm str}H^{1/2}. \tag{15.525}$$

ただし、調和関数 H は次のように与えられる。

$$H = 1 + h = 1 + \frac{g_{\rm str}N}{6\Omega_7|x_i|^6} \tag{15.526}$$

R-R 場は

$$C_2 = -\frac{1}{2g_{\rm str}H}du\wedge dv. \tag{15.527}$$

ローレンツ変換後の新しい座標での計量は次のように与えられる。

$$ds^2 = \frac{1}{H^{1/2}}(-dudv + Kdv^2 + 2A_i dx^i dv) + H^{1/2}dx_i^2 \tag{15.528}$$

ここで、A_i と K は新たに導入した次の関数である。

$$h = \frac{g_s N}{6\Omega_7|x^i + \alpha^i v|^6}, \quad H = 1 + h, \quad K = \alpha^2 h, \quad A_i = h\alpha_i \tag{15.529}$$

R-R 場は次のように変更される。

$$C_2 = -\frac{1}{g_{\rm str}H}\left(\frac{du\wedge dv}{2} + \alpha^i dx^i\wedge dv\right) \sim \frac{1}{g_{\rm str}H}\left(-\frac{du\wedge dv}{2} + A\wedge dv\right) \tag{15.530}$$

ここで、"∼" は、ゲージ変換によって自由に取ることが出来る定数部分を除いて等しい、という意味である。

弦の位置は、$x^i = -\alpha^i v$ という関数で与えられるが、実はこの関数を一般の関数 $x^i = F^i(v)$ で置き換えてもそのまま古典解になっていることが示される。つまり、(15.528) の形はそのままで、(15.529) の関数系を次のように一般化することで、一般の形状の弦の古典解を与えることができる。[51, 52]

$$h = \frac{g_s N}{6\Omega_7 |x^i - F^i(v)|^6}, \quad H = 1 + h, \quad A_i = -h\dot{F}_i, \quad K = h\dot{F}^2. \tag{15.531}$$

これらは $F^i = -\alpha^i v$ のとき (15.529) に帰着する。R-R 場については、(15.530) にある、ゲージ変換でつながる二つの表式は、このような一般化の後にはもはやゲージ同値ではなくなってしまう。正しい選択は、弦の運動の影響が遠方で小さくなる後者である。まとめると、新たな古典解は次のように与えられる。

$$ds^2 = \frac{1}{H^{1/2}}(-dudv + Kdv^2 + 2A_i dx^i dv) + H^{1/2} dx_i^2, \tag{15.532}$$

$$C_2 = \frac{1}{g_{\mathrm{str}} H}\left(-\frac{du \wedge dv}{2} + A \wedge dv\right), \tag{15.533}$$

$$e^\phi = g_{\mathrm{str}} H^{1/2}. \tag{15.534}$$

あとで y 方向への T-dual 変換を行うが、その場合には計量の t-y 成分を次のように書き換えておくのが便利である。

$$-dudv + Kdv^2 + 2A_i dx^i dv = -\frac{1}{1+K}\widetilde{dt}^2 + (1+K)\widetilde{dy}^2 \tag{15.535}$$

ただし、$\widetilde{dt}$ と $\widetilde{dy}$ は以下のように定義した。

$$\widetilde{dt} = dt - A_1, \quad \widetilde{dy} = dy - dt + \frac{dt - A_1}{1+K}. \tag{15.536}$$

運動量密度 dP_y/dy を一定に保ちながら $F \to 0$ の極限を取ることができる。たとえば、

$$\vec{F}_\theta(y) = (\rho\cos(\omega y), \rho\sin(\omega y), 0, 0, 0, 0, 0, 0) \tag{15.537}$$

と置いてみよう。このとき $dP_y/dy = T_{\mathrm{D1}}\rho^2\omega^2$ である。従って、ρ を小さくすると同時に $\rho\omega$ を一定に保つように ω を発散させれば、運動量を一定に保つことができる。A_i は非常に激しく振動するから、平均をとれば 0 である。このとき K は

$$K \to \rho^2\omega^2 h = \frac{1}{NT_{\mathrm{D1}}}\frac{dP_y}{dy}\frac{g_{\mathrm{str}}N}{6\Omega_7|x_i|^6} = \frac{1}{2\pi}\frac{dP_y}{dy}\frac{g_{\mathrm{str}}^2 N}{6\Omega_7|x_i|^6} \tag{15.538}$$

これは D1-P 系の古典解で現れた調和関数 (15.509) に一致する。

このように、弦上の微小な振動を加えることで、dP_x の値を変化させること無く dP_y を増加させることができる。ただし、次の不等式が成り立つ。

$$|dP_x|^2 \geq T_{D1} dy dP_y \tag{15.539}$$

ここでは直線状の弦に微小振動を加えたが、より一般の形状の弦に微小振動を加えることもできる。

15.21.2 D2-supertubes

上記の解を y 方向に T-dual 変換することで supertube 解を作ることができる。T-dual 変換の準備として、y 方向の依存性を無くそう。そのために、調和関数を y 方向に平均する。

$$h(x)=\frac{1}{L_y}\int h(x,y)dy,\quad A(x)=\frac{1}{L_y}\int A(x,y)dy,\quad K(x)=\frac{1}{L_y}\int K(x,y)dy. \tag{15.540}$$

ここで、この積分を x_i 空間での弦上の積分に直しておくのが便利である。x_i 空間での線素を $dl=|dF_i|$ とする。すると $h(x)$ は次のように表される。

$$h(x)=\int\frac{g_{\rm str}(dw/dl)}{6\Omega_7|x-F(l)|^6}dl,\quad K(x)=\int\frac{g_{\rm str}^2(dn_y/dl)/L_y^2}{6\Omega_7|x-F(l)|^6}dl. \tag{15.541}$$

ただし、

$$\frac{dw_y}{dl}=\frac{N}{L_y}\frac{dy}{dl},\quad \frac{dn_y}{dl}=\frac{L_yN}{g_{\rm str}}\frac{dl}{dy}. \tag{15.542}$$

は dl あたりの y 方向への D1 の巻きつき数および y 方向への運動量の密度を表す。これらは次の式を満足する。

$$\frac{dw_y}{dl}\frac{dn_y}{L^2dl}=\frac{(N/L)^2}{g_{\rm str}}. \tag{15.543}$$

A は次のように表される。

$$A_i(x)=\int\frac{g_{\rm str}N/L_y}{6\Omega_7|x-F(l)|^6}dF_i, \tag{15.544}$$

これらの関数により、先ほどの waving D1 解は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\widetilde{dt}^2}{H^{1/2}J}+\frac{J}{H^{1/2}}\widetilde{dy}^2+H^{1/2}dx_i^2, && (15.545)\\ G_3 &= \frac{1}{g_{\rm str}}\left[\frac{1}{HJ}dA\wedge(dt-A_1)+d(\frac{dt-A}{H})\wedge\widetilde{dy}\right], && (15.546)\\ e^\phi &= g_{\rm str}H^{1/2}. && (15.547)\end{aligned}$$

計量の t-y 方向の成分は (15.535) の形で表した。また、T-dual 変換を行いやすいように反対称テンソル場についても dy ではなく $\widetilde{dy}$ を用いて表した。

T-dual 変換を行えば直ちに次の結果が得られる。ここで、$J=1+K$ を定義した。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{(dt-A)^2}{H^{1/2}J}+\frac{H^{1/2}}{J}dy^2+H^{1/2}dx_i^2, && (15.548)\\ B_2 &= -\frac{Kdt+A}{J}\wedge dy=\frac{dt-A}{J}\wedge dy-dt\wedge dy, && (15.549)\\ G_{\rm ele} &= \frac{1}{g_{\rm str}}d\left(\frac{dt-A-A\wedge dt\wedge dy}{H}\right)\wedge e^{B_2}, && (15.550)\\ e^\phi &= g_{\rm str}\frac{H^{3/4}}{J^{1/2}}. && (15.551)\end{aligned}$$

ここでは B_2 が遠方で 0 になるゲージを取ったが、そうでなくて良いのであれば、反対称テンソル場の形をさらに少し簡単にできる。

$$B_2=\frac{dt-A}{J}\wedge dy,\quad G_{\rm ele}=\frac{1}{g_{\rm str}}d\left(\frac{dt-A}{H}\right)\wedge e^{B_2}. \tag{15.552}$$

Soryushiron Kenkyu

T-duality を行ったことにより、それぞれのパラメータの物理的意味が変化する。それにあわせて $w \to N_{D0}/L_y$、$n_y/L_y^2 \to N_{F1}$、$N/L_y \to N_{D2}$ の置き換えを行えば、

$$h(x) = \int \frac{g_{\rm str}(dN_{D0}/dl)/L_y}{6\Omega_7|x-F(l)|^6}dl, \quad K(x) = \int \frac{g_{\rm str}^2(dN_{F1}/dl)}{6\Omega_7|x-F(l)|^6}dl, \quad A_i(x) = \int \frac{g_{\rm str}N_{D2}}{6\Omega_7|x-F(l)|^6}dF_i. \tag{15.553}$$

15.21.3 resolved D1-D5

§15.21.2 で得られた supertube 解から T-duality および S-duality 変換を行うことで、幾つかの興味深い解が得られる。

まず一つ目は、D1-D5 charge を持つ解 [53] である。これは次のようにして得られる。

$$(D0, F1_y) \stackrel{T_{123}}{\to} (D3_{123}, F1_y) \stackrel{S}{\to} (D3_{123}, D1_y) \stackrel{T_{4y}}{\to} (D5_{y1234}, D1_4). \tag{15.554}$$

先ほどの D2-supertube 解の簡単なほうから出発する。NS-NS field は次のように与えられる。

$$ds^2 = -\frac{\widetilde{dt}^2}{H^{1/2}J} + \frac{H^{1/2}}{J}dy^2 + H^{1/2}dx_i^2, \quad B_2 = \frac{\widetilde{dt}\wedge dy}{J}, \quad e^\phi = g_{\rm str}\frac{H^{3/4}}{J^{1/2}}. \tag{15.555}$$

T^4 コンパクト化するので、T^4 に巻きついていないブレーンの枚数はブレーンの密度に置き換える。その結果、調和関数は次のように与えられる。

$$h(x) = \int \frac{g_{\rm str}(dN_{D0}/dl)/(L_yL^4)}{2\Omega_3|x-F(l)|^2}dl, \tag{15.556}$$

$$K(x) = \int \frac{g_{\rm str}^2(dN_{F1}/dl)/L^4}{2\Omega_3|x-F(l)|^2}dl, \tag{15.557}$$

$$A_i(x) = \int \frac{g_{\rm str}N_{D2}/L^4}{2\Omega_3|x-F(l)|^2}dF_i. \tag{15.558}$$

ただし

$$J = 1+K, \quad \widetilde{dt} = dt - dA. \tag{15.559}$$

である。上で与えた B_2 の場の強さも含め、反対称テンソル場の場の強さは次のように与えられる。

$$H_3 = (dJ^{-1}\wedge\widetilde{dt} - J^{-1}F_2)\wedge dy, \tag{15.560}$$

$$G_{\rm ele} = \frac{1}{g_{\rm str}}(dH^{-1}\wedge\widetilde{dt} - H^{-1}F_2)\wedge e^{B_2},$$

$$G_{\rm mag} = \frac{1}{g_{\rm str}}(dy\wedge\widehat{*}_4dH + \widehat{*}_4F_2)\wedge d^4z\wedge e^{B_2}. \tag{15.561}$$

ただし $G_{\rm mag} = -\mathcal{T}*G_{\rm ele}$ である。

z_1、z_2、z_3 の順に T-dual 変換を行うと、

$$ds^2 = -\frac{\widetilde{dt}^2}{H^{1/2}J} + \frac{H^{1/2}}{J}dy^2 + H^{1/2}dx_i^2 + \frac{dz_1^2+dz_2^2+dz_3^3}{H^{1/2}} + H^{1/2}dz_4^2. \tag{15.562}$$

$$e^\phi = g_{\rm str}\frac{1}{J^{1/2}}. \tag{15.563}$$

H_3 はそのままである。G に対しては左からルールを用いて

$$\begin{aligned} H_3 &= (dJ^{-1} \wedge \widetilde{dt} - J^{-1}F_2) \wedge dy, &(15.564)\\ G_3 &= \frac{1}{g_{\rm str}}(\widehat{*}_4 F_2) \wedge dz_4, &(15.565)\\ G_5 &= \frac{1}{g_{\rm str}}(-dH^{-1} \wedge \widetilde{dt} + H^{-1}F_2) \wedge (dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3), \\ &\quad + \frac{1}{g_{\rm str}}(dy \wedge \widehat{*}_4 dH + \widehat{*}_4 F_2 \wedge B_2) \wedge dz_4 &(15.566)\\ G_7 &= \frac{1}{g_{\rm str}} H^{-1} F_2 \wedge (dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3) \wedge B_2. &(15.567) \end{aligned}$$

調和関数に含まれるブレーンの枚数は、T-dual 変換において適当に書き換える必要がある。この時点で、調和関数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} h(x) &= \int \frac{g_{\rm str}(dN_{D3}/dl)/(L_y L)}{2\Omega_3 |x - F(l)|^2} dl, &(15.568)\\ K(x) &= \int \frac{g_{\rm str}^2(dN_{F1}/dl)/L^4}{2\Omega_3 |x - F(l)|^2} dl, &(15.569)\\ A_i(x) &= \int \frac{g_{\rm str} N_{D5}/L}{2\Omega_3 |x - F(l)|^2} dF_i. &(15.570) \end{aligned}$$

この解に対して S-dual 変換を行おう。ゲージ場の強さに対しては $H_3^{\rm new} = G_3^{\rm old}$、$G_3^{\rm new} = -H_3^{\rm old}$ という置き換えを行う。結合定数も $g_{\rm str}^{\rm new} = 1/g_{\rm str}^{\rm old}$ のように再定義する。計量がワイル変換されるために、そのままだと計量に $g_{\rm str}$ の因子がかかるので、それを取り除くために次の座標変換を行う。

$$X^M_{\rm old} = \frac{1}{g_{\rm str}^{1/2}} X^M_{\rm new}. \tag{15.571}$$

これに伴い調和関数中の $g_{\rm str}$ のべきが変化する。たとえば、A_i について見てみると、$g_{\rm str}$ を $1/g_{\rm str}$ で置き換えた時点で $g_{\rm str}$ の -1 乗に比例するが、さらに上記の座標変換を行うと、A_i の定義式が長さの -2 上に比例しているから、座標変換から新たに $g_{\rm str}$ の 1 乗の因子が現れる。この結果、A_i は $g_{\rm str}$ に依存しなくなる。このようにして、それぞれの調和関数が次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} h(x) &= \int \frac{g_{\rm str}(dN_{D3}/dl)/(L_y L)}{2\Omega_3 |x - F(l)|^2} dl, &(15.572)\\ K(x) &= \int \frac{g_{\rm str}(dN_{D1}/dl)/L^4}{2\Omega_3 |x - F(l)|^2} dl, &(15.573)\\ A_i(x) &= \int \frac{N_{NS5}/L}{2\Omega_3 |x - F(l)|^2} dF_i. &(15.574) \end{aligned}$$

ただし、1-form $A_1 = A_i dx_i$ はさらに dx_i という因子を含むので、そこから余分に $1/g_{\rm str}^{1/2}$ という因子が現れることに注意。

S-dual 変換と、座標変換の結果、古典解が次のように得られる。

$$\begin{aligned} H_3 &= (\widehat{*}_4 F_2) \wedge dz_4, &(15.575)\\ G_3 &= \frac{1}{g_{\rm str}}(-dJ^{-1} \wedge \widetilde{dt} + J^{-1}F_2) \wedge dy, &(15.576)\\ G_5 &= \frac{1}{g_{\rm str}}(dy \wedge \widehat{*}_4 dH + J^{-1}\widehat{*}_4 F_2 \wedge dt \wedge dy) \wedge dz_4 \\ &\quad + \frac{1}{g_{\rm str}}(-dH^{-1} \wedge \widetilde{dt} + H^{-1}F_2) \wedge (dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3). &(15.577) \end{aligned}$$

$$e^{\phi} = g_{\rm str} J^{1/2}. \tag{15.578}$$

$$ds^2 = -\frac{\widetilde{dt}^2}{(HJ)^{1/2}} + \frac{H^{1/2}}{J^{1/2}}dy^2 + (HJ)^{1/2}dx_i^2 + \frac{J^{1/2}}{H^{1/2}}(dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^3) + (HJ)^{1/2}dz_4^2. \tag{15.579}$$

$$B_2 = A_1^* \wedge dz_4 \tag{15.580}$$

最後に y z_4 方向に T-dual 変換を行い、D1-D5 系に移ろう。調和関数は次のようになる。

$$h(x) = \int \frac{g_{\rm str}(dN_{D5}/dl)}{2\Omega_3|x-F(l)|^2}dl, \tag{15.581}$$

$$K(x) = \int \frac{g_{\rm str}(dN_{D1}/dl)/(L_yL^3)}{2\Omega_3|x-F(l)|^2}dl, \tag{15.582}$$

$$A_i(x) = \int \frac{N_{TN}}{2\Omega_3|x-F(l)|^2}dF_i. \tag{15.583}$$

ここで、次の関係が成り立つ。

$$\left(\frac{dN_{D5}}{dl}\right)\left(\frac{1}{V_4}\frac{dN_{D5}}{dl}\right) = N_{\rm TN}^2. \tag{15.584}$$

すなわち、D1 の密度と D5 の密度は反比例している。

古典解は次のように与えられる。

$$ds^2 = \frac{1}{(HJ)^{1/2}}(-\widetilde{dt}^2 + \widetilde{dz_4}^2) + (HJ)^{1/2}dx_i^2 + \frac{J^{1/2}}{H^{1/2}}(dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^3 + dy^2). \tag{15.585}$$

$$\widetilde{dt} = dt - A_1, \quad \widetilde{dz}^4 = dz^4 + A_1^*. \tag{15.586}$$

ディラトン場は

$$e^{\phi} = g_{\rm str}\frac{J^{1/2}}{H^{1/2}}. \tag{15.587}$$

R-R 場については 3-form とその双対である 7-form のみが残る。y z_4 の順序で T-dual 変換を行えば、

$$G_3 = \frac{1}{g_{\rm str}}(d(-J^{-1}\wedge \widetilde{dt}\wedge\widetilde{dz_4}) - \widehat{*}_4 dH). \tag{15.588}$$

15.22 Klebanov-Strassler 解

Klebanov-Strassler 解は AdS/CFT 対応を通してある $\mathcal{N}=1$ ゲージ理論と関係していると期待される IIB 型超重力理論の解である。ここでは簡単な解を少しずつ変形していくことでこの解を構成する。

15.22.1 D3-ブレーン

まず、平坦な 10 次元時空におかれた D3-ブレーンの解を復習しておこう。D3-ブレーンの枚数を N とすると、ゲージ場が次のように与えられる。

$$G_5 = N(\omega_5 + *\omega_5) \tag{15.589}$$

Soryushiron Kenkyu

ω_5 は単位半径の $\mathbf{S}^5$ の体積形式であり、$\mathbf{S}^5$ 上の積分によって 1 を与えるものとする。解が BPS であるという条件より、計量が次の形になることが示される。

$$ds^2 = H^{-1/2}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2). \tag{15.590}$$

ここで、$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ がブレーンに平行な方向の座標であり、ブレーンに垂直な 6 次元方向については極座標を用いた。これと同時に関数 $H(r)$ に対する次の微分方程式が得られる。

$$\frac{dH}{dr} = -\frac{Ng_{\mathrm{str}}}{V_5 r^5} \tag{15.591}$$

積分すれば関数 $H(r)$ が次のように決定される。

$$H = 1 + \frac{r_0^4}{r^4}, \quad r_0^4 = \frac{Ng_{\mathrm{str}}(2\pi l_s)^4}{4V_5} \tag{15.592}$$

ここでこれまで 1 と置いていた長さ $2\pi l_s$ をあらわに書いた。

ディラトン場を定数においてよいのは、運動方程式

$$4(\partial_M\phi)^2 - 4\nabla^2\phi = \frac{e^{2\phi}}{12}G_3^2 - \frac{1}{12}H_3^2 \tag{15.593}$$

の右辺が 0 であるからである。

15.22.2 conifold

D3-ブレーンの背景時空として、conifold と呼ばれる 6 次元多様体 M と $\mathbf{R}^4$ の積を考える。M は次のような計量によって表される。

$$ds_{\mathrm{con}}^2 = dr^2 + r^2 ds_5^2 \tag{15.594}$$

ds_5^2 はコンパクトな 5 次元多様体の計量で、半径座標 r を含まないものとする。ds_5^2 によって表される 5 次元多様体を X とおこう。ds_{con}^2 が Richi 平坦であるためには X が $R_{ij} = 4g_{ij}$ を満足するアインシュタイン空間である必要がある。もし X として半径 1 の $\mathbf{S}^5$ を取れば、$\mathcal{M}$ は $\mathbf{R}^6$ に等しい。ここではその代わりに $T^{1,1}$ と呼ばれる空間を取る。T^{11} は $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2$ 上の $\mathbf{S}^1$ ファイバー束であり、それぞれの $\mathbf{S}^2$ 上での第 1 チャーンクラスがどちらも 1 であるようなものである。$\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2$ 上の座標を (θ_i, ϕ_i) $(i = 1, 2)$、$\mathbf{S}^1$ ファイバー上の座標を $0 \le \psi < 4\pi$ としよう。この多様体の計量を表すのに、まず次の 1-form を定義しておくと便利である。

$$\begin{aligned} e^1 &= -\sin\theta_1 d\phi_1, \quad e^2 = d\theta_1, \\ e^3 &= \sin\theta_2 d\phi_2, \quad e^4 = d\theta_2, \\ e^5 &= d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2. \end{aligned} \tag{15.595}$$

二つの $\mathbf{S}^2$ の計量は、それぞれの半径を r_1 および r_2 とすれば $r_1^2[(e^1)^2 + (e^2)^2]$ および $r_2^2[(e^3)^2 + (e^4)^2]$ と表すことができる。また、$\mathbf{S}^1$ ファイバーはその半径を $2a$ とすれば $a^2(e^5)^2$ である。上で述べたように多様体 M がアインシュタイン方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ を満足するためには多様体 X が $R_{ij} = 4g_{ij}$ を満足する必要があるが、この条件によって半径が $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{6}$、$a = 1/3$ と固定される。すなわち $T^{1,1}$ 全体の計量は次のように表される。

$$ds_{T11}^2 = \frac{1}{9}(e^5)^2 + \frac{1}{6}[(e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 + (e^4)^2] \tag{15.596}$$

Soryushiron Kenkyu

この多様体 M はリッチ平坦であるだけではなく、超対称性を 1/4 残す。対応する変換パラメータについての条件を決めるために、スピン接続のうちの 3 つの方向 θ_1, θ_2, ψ の方向についてのスピン接続を計算してみると、次のようになる。

$$\omega_{\theta_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}(J_{2r} + J_{15}), \quad \omega_{\theta_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(J_{4r} - J_{35}), \quad \omega_{\psi} = \frac{1}{3}(J_{5r} + J_{12} - J_{34}). \tag{15.597}$$

ここで、J_{mn} は局所 SO(6) 回転の生成子で、m-n 成分が +1、n-m 成分が +1 である行列を表す。敗れずに残る超対称性の変換パラメータを与えるスピノルは、多様体上の任意の閉曲線にそって平行移動して元の位置に戻ったときに、出発したときと同じ値を取らなければならない。閉曲線としてそれぞれの S^2 の赤道を考えると、はじめの二つのスピン接続はスピノルを回転させてはならない。そのような条件は次のスピノルによって満足される。

$$\gamma^{5r}\xi = \gamma^{12}\xi = -\gamma^{34}\xi. \tag{15.598}$$

また、ψ 方向のスピン接続は上記の条件を満足するスピノルを回転させるが、ψ 方向に一周するとスピノルも丁度一周して元に戻ることがわかる。このことは、ファイバーをシフトする U(1) 対称性が超対称性の変換パラメータを回転させる R-対称性であることを意味している。これに対しそれぞれの $\mathbf{S}^2$ を回転させる SU(2) はキリングスピノルを回転させない。これらの対称性を以下では $\mathrm{SU}(2)_A$ および $\mathrm{SU}(2)_B$ と書くことにする。

15.22.3 conifold 上の D3-ブレーン

conifold の頂点上に D3-brane が N 枚重なっている状況を考え、これを表す古典解を構成しよう。

D3-brane の存在によって G_5 が現れるが、これは次のように置くのが適当であろう。

$$G_5 = N(1+*)\omega_2 \wedge \omega_3 \tag{15.599}$$

ただし ω_2 と ω_3 はそれぞれ $\mathbf{S}^2$ サイクルと $\mathbf{S}^3$ サイクル上で積分して 1 を与える $T^{1,1}$ 上の閉形式である。

あとは conifold 上に存在した超対称性のうち半分が残るという条件を用いれば、平坦な空間上の D3-brane について行ったものと次の結果を得る。まず、計量は次の形を取る。

$$ds^2 = H^{-1/2}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + H^{1/2}ds^2_{\mathrm{con}}, \quad H = 1 + \frac{r_0^4}{r^4}. \tag{15.600}$$

ただし今度は V_5 として $\mathbf{S}^5$ の体積 π^3 ではなく、(15.596) の体積 $(16/27)\pi^3$ を用いる必要がある。従って、AdS の半径 r_0 は次のように与えられる。

$$r_0^4 = \frac{Ng_{\mathrm{str}}}{4V_5} = \frac{27Ng_{\mathrm{str}}(2\pi l_s)^4}{64\pi^3} \tag{15.601}$$

地平面近傍では $AdS_5 \times T^{1,1}$ を表す計量に帰着する、

15.22.4 フラックスの導入

$\mathbf{S}^2$ にまき付いた D5-brane に相当するフラックスを導入し、古典解がどのように変形されるかを見てみよう。ここで与える解は backreaction を無視した近似的な形が [54] で与えられ、その後 [55] において厳密な形で得られた。

[56] にならって vielbein を次のように定義しておく。e^3 と e^4 の定義が前に用いた (15.595) と異なることに注意。

$$
\begin{aligned}
&e^1 = -\sin\theta_1 d\phi_1, \quad e^2 = d\theta_1, \\
&e^3 = \cos\psi\sin\theta_2 d\phi_2 - \sin\psi d\theta_2, \quad e^4 = \sin\psi\sin\theta_2 d\phi_2 + \cos\psi d\theta_2, \\
&e^5 = d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2.
\end{aligned}
\tag{15.602}
$$

さらに次のように組み替えておく。

$$
g^1 = \frac{e^1 - e^3}{\sqrt{2}}, \quad g^2 = \frac{e^2 - e^4}{\sqrt{2}}, \quad g^3 = \frac{e^1 + e^3}{\sqrt{2}}, \quad g^4 = \frac{e^2 + e^4}{\sqrt{2}}, \quad g^5 = e^5. \tag{15.603}
$$

以前に与えた $T^{1,1}$ の計量は次のように与えられる。

$$
ds^2_{T11} = \frac{1}{6}[(g^1)^2 + (g^2)^2 + (g^3)^2 + (g^4)^2] + \frac{1}{9}(g^5)^2 \tag{15.604}
$$

$T^{1,1}$ を $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2$ 上の $\mathbf{S}^1$ ファイバー束とみなせば、$(g^1)^2 + (g^2)^2$ と $(g^3)^2 + (g^4)^2$ が二つの $\mathbf{S}^2$ の計量を、$(g^5)^2$ が $\mathbf{S}^1$ ファイバーの計量を表している。

$T^{1,1}$ の 2-サイクルと 3-サイクルそれぞれで積分して 1 になる閉形式は次のように与えられる。

$$
\omega_2 = \frac{1}{8\pi}(g^1 \wedge g^2 + g^3 \wedge g^4), \quad \omega_3 = \frac{1}{2\pi} g_5 \wedge \omega_2. \tag{15.605}
$$

実際に積分を行うには $\mathbf{S}^2$ と $\mathbf{S}^3$ のサイクルを具体的に与える必要がある。$\mathbf{S}^2$ はたとえば $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, $\phi_1 = -\phi_2 = \phi$ という埋め込みによって与えられる。このとき (15.602) に与えられている e^5 の後ろ二つの項が相殺するので、S^1 ファイバーのねじれを拾わずに曲面を閉じることができる。$\mathbf{S}^3$ は (θ_1, ϕ_1) あるいは (θ_2, ϕ_2) を固定して得られる曲面を用いればよい。

まず、$\mathbf{S}^2$ にまき付いた M 枚の D5-ブレーンは次の RR フラックスの導入によって表される。

$$
G_3 = M\omega_3 \tag{15.606}
$$

もともと $T^{1,1}$ は SU(2) × SU(2) × U(1) の連続的対称性と、二つの $\mathbf{S}^2$ を入れ替える $\mathbf{Z}_2$ 対称性を持っていた。この系に対してフラックス (15.606) を導入したときにどのように解が変形されるかを見たいわけであるが、(15.606) はこれらの対称性を破っていない。そこで変形された解も同じ対称性を持っていると仮定することにしよう。G_3 の導入によって、NS-NS 2-form field は定数ではありえないので、

$$
B_2 = b(r)\omega_2 \tag{15.607}
$$

とおく。G_5 の運動方程式 $dG_5 = H_3 \wedge G_3 = d(B_2 \wedge G_3)$ は次のように解くことができる。

$$
G_5 = N(r)(1 + *)\omega_2 \wedge \omega_3 \tag{15.608}
$$

ただし、$N(r)$ は次のように与えられる。

$$
N(r) = Mb(r) + N_0. \tag{15.609}
$$

N_0 は積分定数である。G_3 と H_3 が 0 ではないために、(15.593) を通してディラトン場 ϕ も一般には誘起される。しかしここでは解を複雑にしないために 3-form 場 H_3 と G_3 に対して次の「自己双対条件」を課しておくことにする。

$$
g_{\mathrm{str}} G_3 = *_6 H_3. \tag{15.610}
$$

Soryushiron Kenkyu

すると (15.593) の右辺の二つの項が互いに相殺し、ディラトンを定数としておくことができる。
計量については次の形を仮定する。

$$ds^2 = H^{-1/2}(r)dx^2 + H^{1/2}(r)ds^2_{\text{con}}. \tag{15.611}$$

この計量の上で、自己双対条件は次のように書くことができる。

$$\frac{db(r)}{dr} = \frac{3Mg_{\text{str}}}{2\pi r}. \tag{15.612}$$

そして H は (15.591) によって決まる。しかし今度は G_5 の積分 N は定数ではなく、半径の関数である。

$$\frac{dH(r)}{dr} = -\frac{N(r)g_{\text{str}}}{V_5 r^5} \tag{15.613}$$

これら 2 つの微分方程式と、(15.609) を用いれば、簡単に関数 $H(r)$、$N(r)$、$b(r)$ が決定される。

$$b(r) = \frac{3Mg_{\text{str}}}{2\pi}\log\frac{r}{r_0}, \tag{15.614}$$

$$N(r) = M\frac{3Mg_{\text{str}}}{2\pi}\log\frac{r}{r_0} + N_0, \tag{15.615}$$

$$H(r) = \frac{g_{\text{str}}}{4V_5 r^4}\left[M\frac{3Mg_{\text{str}}}{2\pi}\left(\log\frac{r}{r_0}+\frac{1}{4}\right)+N_0\right]+H_0. \tag{15.616}$$

r_0、N_0、H_0 が積分定数である。積分定数のうち r_0 と N_0 は、解の中心部における境界条件で決めるべきものであるが、この解は中心が裸の特異点になっており、意味のある境界条件を設定することができない。この問題点は後に与える Klebanov-Strassler 解では解決する。

15.22.5 deformed conifold

先ほどの解が中心部に裸の特異点を持ってしまった理由の一つは G_3 のフラックスが一定であるにもかかわらず、それがまき付いた $\mathbf{S}^3$ の大きさが中心部で 0 になってしまうためである。この問題を解消するために、D3-brane を導入する前の段階で conifold を $\mathbf{S}^3$ が有限のサイズでとどまるように変形しておこう。そのような多様体は deformed conifold と呼ばれる。deformed conifold の計量は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} ds^2_{\text{def}} &= \frac{1}{2}\epsilon^{4/3}K(\tau)\Big[\frac{1}{3K^3(\tau)}(d\tau^2+(g^5)^2) \\ &\quad + \sinh^2\left(\frac{\tau}{2}\right)[(g^1)^2+(g^2)^2] + \cosh^2\left(\frac{\tau}{2}\right)[(g^3)^2+(g^4)^2]\Big] \end{aligned} \tag{15.617}$$

ただし関数 $K(\tau)$ は次のように定義される。

$$K(\tau) = \frac{(\sinh(2\tau)-2\tau)^{1/3}}{2^{1/3}\sinh\tau} \tag{15.618}$$

ϵ は deformation のスケールを表すパラメータである。τ が大きいところで変形されていない conifold に漸近することを見るためには半径座標を τ から固有長として定義された座標 r に変換し、r が大きい極限を取ればよい。τ と r の関係は次のように与えられる。

$$dr = \frac{\epsilon^{2/3}}{\sqrt{6}K(\tau)}d\tau. \tag{15.619}$$

$\tau = 0$ において、計量は次のように S^3 になる。

$$ds^2 = \frac{1}{2}\epsilon^{4/3}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}\left[\frac{1}{2}(g^5)^2+(g^3)^2+(g^4)^2\right] \tag{15.620}$$

($(1/2)(g^5)^2+(g^3)^2+(g^4)^2$ は半径が 1 の $\mathbf{S}^3$ である。)

Soryushiron Kenkyu

15.22.6 Klebanov-Strassler 解

deformed conifold を用いて、古典解が次の形を取ることを仮定しよう。

$$ds^2 = H^{-1/2}(\tau)dxdx + H^{1/2}(\tau)ds^2_{\rm def}. \tag{15.621}$$

$\tau = 0$ では $\mathbf{S}^2$ がつぶれ、$\mathbf{S}^3$ だけが有限の半径で残るから、G_3 は $\tau = 0$ で $(M/8\pi^2)g^5 \wedge g^3 \wedge g^4$ と与えられるのが自然である。一方 τ が大きいところでは以前と同じ (15.606) によって与えられると考えられる。そこでこの二つをつなぐように $F(0) = 0$、$F(\infty) = 1/2$ を満足する関数 $F(\tau)$ を用いて (15.606) を次のように一般化しておく。

$$G_3 = \frac{M}{8\pi^2}\{g^5 \wedge g^3 \wedge g^4 + d[F(\tau)(g^1 \wedge g^3 + g^2 \wedge g^4)]\} \tag{15.622}$$

B_2 については、$\mathrm{U}(1)_R$ 対称性が無いために (15.607) の二つの項の係数が等しいという保障は無くなる。そこでそれぞれの項の係数に別の関数 $b_1(\tau)$ と $b_2(\tau)$ を用いて次のようにおく。

$$B_2 = \frac{1}{8\pi}(b_1(\tau)g^1 \wedge g^2 + b_2(\tau)g^3 \wedge g^4) \tag{15.623}$$

そして G_5 については以前と同様に次のようにおく。

$$G_5 = (1 + *)N(r)\omega_2 \wedge \omega_3 \tag{15.624}$$

まず、G_3 と H_3 に対する自己双対条件より、b_1、b_2、F の間に次の関係が成り立つことがわかる。

$$b_1' = \frac{g_{\rm str}M}{\pi}(1 - F)\tanh^2\frac{\tau}{2}, \quad b_2' = \frac{g_{\rm str}M}{\pi}F\coth^2\frac{\tau}{2}, \quad F' = \frac{\pi}{2g_{\rm str}M}(b_2 - b_1). \tag{15.625}$$

これらは、関数 $H(\tau)$ および $N(\tau)$ を含まず、$b_1(\tau)$、$b_2(\tau)$、$F(\tau)$ の中で閉じている。しかも解析的に解くことができて、次の解を得る。

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \frac{\sinh\tau - \tau}{2\sinh\tau}, & (15.626)\\ b_1(\tau) &= \frac{g_{\rm str}M}{\pi}\frac{\tau\coth\tau - 1}{2\sinh\tau}(\cosh\tau - 1), & (15.627)\\ b_2(\tau) &= \frac{g_{\rm str}M}{\pi}\frac{\tau\coth\tau - 1}{2\sinh\tau}(\cosh\tau + 1). & (15.628)\end{aligned}$$

G_5 についての運動方程式 $dG_5 = H_3 \wedge G_3$ は簡単に解くことができて、関数 $N(\tau)$ は次のように与えられる。

$$N(\tau) = M[(1 - F(\tau))b_1(\tau) + F(\tau)b_2(\tau)]. \tag{15.629}$$

$H(\tau)$ は以前と同様に (15.613) を用いて決定することができる。ただしここで使用している座標 τ は以前に使用していた座標とは異なるために適当に読み替えてやる必要がある。まず、(15.619) によって (15.613) 左辺の r 微分を τ 微分に書き換える。右辺の V_5r^5 は r が一定の面の体積を与えているが、計量 (15.617) からこの体積を読み取ると、次のように置き換えればよいことがわかる。

$$V_5r^5 = \frac{4\pi^3}{\sqrt{6}}\epsilon^{10/3}K(\tau)\sinh^2\tau \tag{15.630}$$

これらの置き換えによって (15.613) は次のように書き換えることができる。

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} = -\frac{N(\tau)g_{\rm str}}{4\pi^3\epsilon^{8/3}K^2(\tau)\sinh^2\tau} = -\frac{2^{2/3}g_{\rm str}^2M^2}{(2\pi)^4\epsilon^{8/3}}\frac{(\tau\coth\tau - 1)(\sinh(2\tau) - 2\tau)^{1/3}}{\sinh^2\tau} \tag{15.631}$$

この式の右辺はすでに τ の関数として与えられているから、それを積分すれば $H(\tau)$ を決定することができる。残念ながらこの積分を解析的に実行することはできないが、定性的な性質は読み取ることができる。右辺は $\tau=0$ では 0 であり、τ を大きくしていくと一旦減少して負になったあと、増加して指数関数的に 0 に漸近する。従って $H(\tau)$ は $\tau\to\infty$ である一定値に漸近する単調減少関数である。

Near horizon limit をとる場合には、$\tau\to\infty$ で 0 になるようにすればよい。$H^{1/2}ds^2_{\rm def}$ という組み合わせの中では $ds^2_{\rm def}$ に含まれるパラメータ ϵ は $H^{1/2}$ に含まれるものと相殺される。

15.23 非 BPS な D-ブレーン解

これまでは、超対称性が部分的に残る BPS な解についてのみ議論してきたが、非 BPS な解もしばしば重要である。そのような解の上には大域的な超対称性が存在しないので、キリングスピノルの存在する条件から解を決定してきたこれまでの方法は用いることができない。そのため、作用から得られる運動方程式を直接解く必要がある。たとえば、10 次元の Dp-ブレーンの解を得るには、次の作用から出発する。

$$\frac{S}{2\pi}=\int d^{10}x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{e^{2\phi}}(R+4\partial\phi)^2-\frac{1}{2(8-p)!}G_{8-p}^2\right] \tag{15.632}$$

ただし、G_{8-p} は Dp-ブレーンに磁気的に結合する R-R 場の強さである。空間方向の回転対称性、並進対称性と、時間方向の並進対称性を課したブレーンの解を求めるためには、対称性を満足する最も一般的な解をいくつかの関数を用いて表し、それを運動方程式に代入して、得られた半径座標 r についての二階微分方程式を解くことにより未知関数を決定するという手順を踏む。

背景のディラトンの期待値が $e^\phi=g_{\rm str}$ で表されるときの N 枚の Dp-ブレーンを表す解を求めることを考えよう。つまり、われわれがほしい解の境界条件は次のように与えられる。

$$\oint G_{8-p}=N,\quad \lim_{r\to\infty}g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu},\quad \lim_{r\to\infty}e^\phi=g_{\rm str}. \tag{15.633}$$

作用全体の係数は運動方程式には影響しないので、$g_{\rm str}$ のべきをくくりだして次のように置くことができる。

$$g_{\rm str}^2\frac{S}{2\pi}=\int d^{10}x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{e^{2\phi'}}(R+4\partial\phi)^2-\frac{1}{2(8-p)!}G'^2_{8-p}\right] \tag{15.634}$$

ただし、ϕ' と G'_{8-p} は次のように定義される。

$$e^\phi=g_{\rm str}e^{\phi'},\quad G_{8-p}=\frac{1}{g_{\rm str}}G'_{8-p}. \tag{15.635}$$

これらの場についての境界条件は

$$\oint G'_{8-p}=Ng_{\rm str},\quad \lim_{r\to\infty}g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu},\quad \lim_{r\to\infty}e^{\phi'}=1. \tag{15.636}$$

従って、ϕ' と G'_{8-p} による表示では、N と $g_{\rm str}$ という二つのパラメータはその積の形でのみ解の中に現れる。

ここでは導出方法は省き、すでに知られている次の解 [57] から出発する。

$$ds^2=-f_+f_-^{-\frac{1}{2}}dt^2+f_-^{\frac{1}{2}}dx_i^2+f_-^{\frac{2}{7-p}}\left[f_+^{-1}f_-^{-\frac{3}{2}}dr^2+f_-^{-\frac{1}{2}}r^2d\Omega_{8-p}^2\right],\quad e^\phi=g_{\rm str}f_-^{\frac{p-3}{4}}. \tag{15.637}$$

Soryushiron Kenkyu

G_{8-p} については、(15.633) の最初の式から直ちに決定される。関数 $f_\pm(r)$ は次のように定義される。

$$f_\pm(r) = 1 - \frac{r_\pm^{7-p}}{r^{7-p}}. \tag{15.638}$$

$r_\pm$ はこのブレーン解を決定する二つのパラメータであり、ブレーンの電荷と質量の関数になっている。$r_0 = \sqrt{r_+ r_-}$ と定義すれば、このパラメータはブレーンの電荷 N とは次のように関係している。

$$r_0^{7-p} = \frac{N g_{\rm str}}{(7-p)\Omega_{8-p}}. \tag{15.639}$$

上で述べたように N と $g_{\rm str}$ は積の形で現れている。

ブレーンのエネルギー密度 E および張力 Π と二つのパラメータ $r_\pm$ との関係は、この解をアインシュタイン計量で表して遠方での振る舞いを調べることによって次のように決定される。

$$\frac{r_+^{7-p}}{r_0^{7-p}} = \frac{(6-p)E + \Pi}{(7-p)T_p}, \quad \frac{r_-^{7-p}}{r_0^{7-p}} = \frac{-E + (8-p)\Pi}{(7-p)T_p}, \quad T_p = \frac{2\pi N}{g_{\rm str}}. \tag{15.640}$$

これらの関係式を用いれば、エネルギー密度と圧力の間の関係を決定することができる。これはブレーン上の理論の状態方程式を与える。

$r_+ = r_- = r_0$ の場合が BPS なブレーンであり、計量は次のようになる。

$$ds^2 = -f^{\frac{1}{2}}(-dt^2 + dx_i^2) + f^{\frac{2}{7-p}}\left[f^{-\frac{5}{2}}dr^2 + f^{-\frac{1}{2}}r^2 d\Omega_{8-p}^2\right]. \tag{15.641}$$

次の関係式を満足する半径座標 ρ を導入するのが便利である。

$$r^{7-p} = r_0^{7-p} + \rho^{7-p}, \quad f(r) = H^{-1}(\rho) = \frac{\rho^{7-p}}{r^{7-p}}, \quad \frac{dr}{r} = f(r)\frac{d\rho}{\rho}. \tag{15.642}$$

ρ を用いて計量を書きなおすと、次のように以前に求めた BPS p-ブレーンの計量に帰着する。

$$ds^2 = H^{-\frac{1}{2}}(-dt^2 + dx_i^2) + H^{\frac{1}{2}}(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{8-p}^2). \tag{15.643}$$

第16章　超場形式によるII 型超重力理論

16.1　IIA 型超重力理論

IIA 型超重力理論における多脚場とグラビティーノに対する変換則 (15.22) と (15.20) 、および IIB 型超重力理論における変換則 (15.181) と (15.177) は (4.89) で仮定した変換則と同じ形をしており、§§4.2.1 で述べたことをそのまま用いることができる。

II 型超重力理論においては、K_μ は次のように与えられる。

$$K_\mu = \frac{1}{4}\langle \not{H}_3 \gamma_\mu \rangle_2 \gamma^{11} + \frac{e^\phi}{8} \not{G} \gamma_\mu \quad \text{(IIA)}, \quad K_\mu = \frac{1}{4}\langle \not{H}_3 \gamma_\mu \rangle_2 \sigma_z + \frac{e^\phi}{8} \not{G} \gamma_\mu \quad \text{(IIB)}. \tag{16.1}$$

$\not{G}$ の定義は IIA 型と IIB 型で異なるので注意すること。また、スピノル添え字についても、IIA 型は 32 成分マヨラナスピノルの添え字であるが、IIB 型は 16 成分マヨラナワイルスピノルを二つ並べたものであることに注意すること。これらの行列が 11 次元超重力理論の場合と同様に (4.117) を満足することは簡単に示される。従って、曲率、捩率、グラビティーノの場の強さの超共変化に対しては §4.2.2 で与えた公式がそのまま使用できる。

超場形式の IIA 型超重力理論 [58] を与える前に、以前に成分場で与えた変換則を超共変性が明らかな形で書き直しておくのが便利である。そのためにまず超共変的な場の強さを定義しておこう。

B_2 の超対称変換は $\delta B_2 = \theta_2^{\rm NS}$ と与えられる。ただし、$\theta_2^{\rm NS}$ は IIA 型、および IIB 型超重力理論において次のように与えられる。

$$\text{IIA} \quad : \quad \theta_2^{\rm NS} = -\frac{1}{4}(\psi_{[1]} \wedge \gamma_{[1]} \gamma_{11} \xi), \tag{16.2}$$

$$\text{IIB} \quad : \quad \theta_2^{\rm NS} = -\frac{1}{4}(\psi_{[1]} \wedge \gamma_{[1]} \sigma_z \xi). \tag{16.3}$$

ここでは IIA 型について考えよう。IIB 型の場合についての式を得たければ、γ_{11} をで置き換えればよい。場の強さ H_3 の超対称変換の中で、変換パラメータの微分 $d\xi$ を含むのは次の項である。

$$\delta H_3 = d\theta_2^{\rm NS} = -\frac{1}{4}(\psi_{[1]} \wedge \gamma_{[1]} \wedge \gamma_{11} d\xi) + \cdots \tag{16.4}$$

このような、$d\xi$ 項が現れないようにするためには H_3 とその超共変化 $\widetilde{H}_3$ の関係を次のように与えておけばよい。

$$H_3 = \widetilde{H}_3 - \frac{1}{8}(\psi_{[1]} \wedge \gamma_{[1]} \wedge \gamma_{11} \psi_{[1]}) \tag{16.5}$$

あるいは次のようにも書ける。

$$\widetilde{H}_3 = H_3 + \frac{1}{8}\psi_\mu \langle \gamma^\mu \gamma_3 \gamma^\nu \rangle_1 \gamma^{11} \psi_\nu. \tag{16.6}$$

一方、すべての添え字を局所ローレンツ系のものにとった超空間上の場 $H_3(z)$ の添え字を超空間

上の多脚場を用いて接空間の添え時に直したものは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} H_3 &= H_3(\theta=0) \\ &= \frac{1}{6}e^{\widehat{m}}\wedge e^{\widehat{n}}\wedge e^{\widehat{p}}H_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}(\theta=0)-\frac{1}{2}e^{\widehat{m}}\wedge\psi^{\widehat{\alpha}}\wedge\psi^{\widehat{\beta}}H_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}(\theta=0) \\ &= \widetilde{H}_3-\frac{1}{2}e^{\widehat{m}}\wedge\psi^{\widehat{\alpha}}\wedge\psi^{\widehat{\beta}}H_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}(\theta=0) \end{aligned} \tag{16.7}$$

超共変化された場の強さ $\widetilde{H}_3$ は、ボゾン的局所ローレンツ添え字を持つ超場の成分に相当することを念頭において (16.5) と (16.7) を比較すると、次の式が得られる。

$$H_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}}(\theta=0)=\widetilde{H}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}},\quad H_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}(\theta=0)=\frac{1}{4}(\gamma_{\widehat{m}}\gamma_{11})_{\alpha\beta}. \tag{16.8}$$

H_3 の双対場 H_7 に対しては、超共変化は次のように与えられる。

$$\widetilde{H}_7=H_7-\frac{1}{8e^{2\phi}}(\psi_\mu\langle\gamma^\nu\gamma_7\gamma^\mu\rangle_5\psi_\nu-2\lambda\langle\gamma^\mu\gamma_7\rangle_6\psi_\mu). \tag{16.9}$$

この、超共変的な場の強さを用いれば、双対関係は次のようになる。

$$e^{2\phi}*\widetilde{H}_7-\widetilde{H}_3=\frac{1}{8}(\lambda\gamma_3\gamma^{11}\lambda). \tag{16.10}$$

ここにグラビティーノが含まれていないことが重要である。もしグラビティーノを含めば、超空間上で共変ではなくなる。

同様なことを R-R 場についても行おう。R-R 場の変換則は $\delta C^{(1)}=e^{-B_2}\wedge\theta^{\mathrm{RR}}$ によって与えられる。θ^{RR} は IIA 型、および IIB 型超重力理論それぞれで次のように与えられる。

$$\mathrm{IIA}\ :\ \theta^{\mathrm{RR}}_{2n+1}=-\frac{1}{8e^\phi}(2\psi_{[1]}\wedge\gamma_{[2n]}+\lambda\gamma_{[2n+1]})(\gamma^{11})^{n+1}\xi, \tag{16.11}$$

$$\mathrm{IIB}\ :\ \theta^{\mathrm{RR}}_{2n}=\frac{1}{8e^\phi}(2\psi_{[1]}\wedge\gamma_{[2n-1]}+\lambda\gamma_{[2n]})(\sigma_x\sigma_z^{n+1})\xi. \tag{16.12}$$

これらをまとめて次のように書いておく。

$$\theta^{\mathrm{RR}}_n=(-)^n\frac{1}{8e^\phi}(2\psi_{[1]}\wedge\gamma_{[n-1]}+\lambda\gamma_{[n]})\mathcal{P}\xi. \tag{16.13}$$

ただし、$\mathcal{P}$ はそれぞれの θ^{RR} に対して次のように定義される。

$$\mathcal{P}=(\gamma^{11})^{n+1}\ \text{for}\ \theta^{\mathrm{RR}}_{2n+1},\quad \mathcal{P}=(\sigma_x\sigma_z^{n+1})\ \text{for}\ \theta^{\mathrm{RR}}_{2n}. \tag{16.14}$$

場の強さの超対称変換のうち、変換パラメータの微分を含むのは次の項である。

$$\delta G=d\theta^{\mathrm{RR}}+(\text{no}\ d\xi)=\frac{1}{8e^\phi}(2\psi_{[1]}\wedge\gamma_{[n-1]}+\lambda\gamma_{[n]})\mathcal{P}d\xi. \tag{16.15}$$

これを用いれば、G と $\widetilde{G}$ の関係が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= \widetilde{G}_{n+1}+\frac{1}{8e^\phi}(\psi_{[1]}\wedge\gamma_{[n-1]}\wedge\mathcal{P}\psi_{[1]}+\lambda\gamma_{[n]}\wedge\mathcal{P}\psi) \\ &= \widetilde{G}_{n+1}-(e^{\widehat{m}_1\cdots\widehat{m}_n}\wedge\psi^{\widehat{\alpha}})\frac{1}{8e^\phi}\frac{1}{n!}[\lambda\gamma_{\widehat{m}_1\cdots\widehat{m}_n}\mathcal{P}]_{\widehat{\alpha}} \\ &\quad -(\psi^{\widehat{\alpha}}\wedge e^{\widehat{m}_1\cdots\widehat{m}_{n-1}}\wedge\psi^{\widehat{\beta}})\frac{1}{4e^\phi}\frac{1}{2\cdot(n-1)!}[\gamma_{\widehat{m}_1\cdots\widehat{m}_{n-1}}\mathcal{P}]_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}. \end{aligned} \tag{16.16}$$

この関係を超空間上での多脚場を用いた添え字の付け替えだと思えば、超場 $G(\theta)$ の成分が次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
G_{\widehat{m}_1\widehat{m}_2\cdots\widehat{m}_{n+1}}(\theta=0) &= \widetilde{G}_{\widehat{m}_1\widehat{m}_2\cdots\widehat{m}_{n+1}}, && (16.17)\\
G_{\widehat{m}_1\widehat{m}_2\cdots\widehat{m}_n\widehat{\beta}}(\theta=0) &= -\frac{1}{8e^{\phi}}[\lambda\gamma_{\widehat{m}_1\cdots\widehat{m}_n}\mathcal{P}]_{\widehat{\alpha}}, && (16.18)\\
G_{\widehat{\alpha}\widehat{m}_1\widehat{m}_2\cdots\widehat{m}_{n-1}\widehat{\beta}}(\theta=0) &= \frac{1}{4e^{\phi}}[\gamma_{\widehat{m}_1\cdots\widehat{m}_{n-1}}\mathcal{P}]_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}. && (16.19)
\end{aligned}$$

さらに、ディラトン場の微分の超共変化は IIA および IIB ともに次のようになる。

$$\partial_m\phi = \widetilde{D}_m\phi - \frac{1}{8}\psi_m^{\widehat{\alpha}}\lambda_{\widehat{\alpha}} \tag{16.20}$$

これは超空間上のディラトン超場の微分についての次の式と比較すべきものである。

$$\partial_m\phi = e_m^{\widehat{m}}\partial_{\widehat{m}}\phi + \psi_m^{\widehat{\alpha}}\partial_{\widehat{\alpha}}\phi \tag{16.21}$$

従って、次のような関係がある。

$$\partial_{\widehat{\alpha}}\Phi(\theta=0) = -\frac{1}{8}\Lambda_{\widehat{\alpha}} \tag{16.22}$$

平坦な超空間の場合には

$$\Pi^{\widehat{m}} = dx^m + \frac{1}{8}d\theta^\alpha\gamma^m_{\alpha\beta}\theta^\beta, \quad \Pi^{\widehat{\alpha}} = d\theta^\alpha \tag{16.23}$$

$$G_{2n+2}(\theta) = \frac{1}{8e^{\phi}}d\theta\wedge\gamma_{[2n]}(\gamma^{11})^{n+1}\wedge d\theta + \mathcal{O}(\theta^4) \tag{16.24}$$

$$C_{2n+1}(\theta) = \frac{1}{8e^{\phi}}\theta\gamma_{[2n]}(\gamma^{11})^{n+1}\wedge d\theta + \mathcal{O}(\theta^4) \tag{16.25}$$

双対関係も見ておこう。超共変化された場の強さを次のように書くことにする。

$$\widetilde{G}_{2n} = G_{2n} + \zeta_{2n}, \tag{16.26}$$

ただし、ζ_{2n} は次のように定義されるフェルミオンの二次形式である。

$$\zeta_{[2n]} = \frac{1}{8e^{\phi}}(\psi_\mu\langle\gamma^\nu\gamma_{[2n]}\gamma^\mu\rangle_{2n-2}(\gamma^{11})^n\psi_\nu + \lambda\langle\gamma^\mu\gamma_{[2n]}\rangle_{2n-1}(\gamma^{11})^n\psi_\mu). \tag{16.27}$$

これらは以前に与えた κ_{2n} と次の関係にある。

$$\begin{aligned}
*\zeta_6 + \zeta_4 &= -\kappa_4 - \frac{1}{16e^{\phi}}\lambda\gamma_4\lambda, && (16.28)\\
*\,\zeta_8 - \zeta_2 &= \kappa_2 - \frac{1}{16e^{\phi}}\lambda\gamma_2\gamma^{11}\lambda, && (16.29)\\
*\,\zeta_{10} &= -\kappa_0 - \frac{1}{16e^{\phi}}\lambda\lambda. && (16.30)
\end{aligned}$$

これらの関係式を用いれば、超共変的な R-R 場の強さの自己双対条件が次のように得られる。

$$\begin{aligned}
*\widetilde{G}_{10} + m &= -\frac{1}{16e^{\phi}}\lambda\lambda, && (16.31)\\
*\,\widetilde{G}_8 - \widetilde{G}_2 &= -\frac{1}{16e^{\phi}}\lambda\gamma_2\gamma^{11}\lambda, && (16.32)\\
*\,\widetilde{G}_6 + \widetilde{G}_4 &= -\frac{1}{16e^{\phi}}\lambda\gamma_4\lambda. && (16.33)
\end{aligned}$$

Soryushiron Kenkyu

ここでも双対関係にはグラビティーノが現れない。$\widetilde{G}_{\rm even}$ の定義の中に $\lambda\gamma\lambda$ 項を導入することによって (16.33) の右辺を 0 にすることができるが、ここでは上記の定義を採用しておく。

最後に、ディラトン場の微分は次のように超共変化できる。

$$\widetilde{D}_\mu\phi=\partial_\mu\phi-\frac{1}{8}\lambda\psi_\mu. \tag{16.34}$$

これまでに与えた超共変化された場の形から、超場に課されるべき拘束条件は以下のように推定される。

IIA 型超重力理論の拘束条件

IIA 型超重力理論は $E_M{}^{\widehat{A}}$ 以外に超場 H_3、G_{2n}、Φ、Λ を含み、捩率の拘束条件のほかに以下の条件を課す必要がある。

$$\begin{aligned} H_{mn\alpha} &= 0, &(16.35)\\ H_{m\alpha\beta} &= \frac{1}{4}(\gamma_m\gamma^{11})_{\alpha\beta}. &(16.36)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{\mu_1\cdots\mu_{2n-1}\alpha} &= -\frac{1}{8e^\Phi}[\Lambda\gamma_{\mu_1\cdots\mu_{2n-1}}(\gamma^{11})^n]_\alpha, &(16.37)\\ G_{\mu_1\cdots\mu_{2n-2}\alpha\beta} &= \frac{1}{4e^\Phi}[\gamma_{\mu_1\cdots\mu_{2n-2}}(\gamma^{11})^n]_{\alpha\beta}, &(16.38)\\ G_{A_1\cdots A_{2n-3}\alpha\beta\gamma} &= 0. &(16.39)\end{aligned}$$

$$D_\alpha\Phi=-\frac{1}{8}\Lambda_\alpha. \tag{16.40}$$

超場形式での IIA 型超重力理論についてより詳しくは [58] に与えられている。ただし、ここで用いた場の定義は [58] とは大きく異なる。IIB 型超重力理論 [59] や I 型超重力理論 [60, 61] についても同様の定式化ができることが知られている。

16.1.1 Dp-ブレーン作用

IIA 型超重力理論の D2n-ブレーンの作用を超場形式で与えよう。背景は平坦であるとする。ただしゲージ場の成分の中には拘束条件の為に非自明な値を持つものがある。ゲージ場の強さにも 0 でない成分が存在している。R-R 場は外微分形式の形で次のような値を持つ。

$$G_{\rm even}(z)=-\frac{1}{8g_{\rm str}}\sum_n[\gamma_{[2n-2]}(\gamma^{11})^n]_{\alpha\beta}\wedge d\theta^\alpha\wedge d\theta^\beta+\mathcal{O}(\theta^4). \tag{16.41}$$

NS-NS 場 H_3 に対しては

$$H_{\widehat{m}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}=\frac{1}{4}(\gamma_{\widehat{m}}\gamma^{11})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} \tag{16.42}$$

である。H_3 については対応するポテンシャル B_2 を決定しておこう。(16.42) を接空間の添え字で書き直すと、次のように二つの成分が 0 ではない。

$$\begin{aligned} H_{\mu\alpha\beta} &= \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma^{11})_{\alpha\beta}, &(16.43)\\ H_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{32}\gamma^{\widehat{m}}_{\alpha\delta}\theta^\delta(\gamma_{\widehat{m}}\gamma^{11})_{\beta\gamma}+2(\alpha\beta\gamma). &(16.44)\end{aligned}$$

Soryushiron Kenkyu

一つ目の成分 (16.43) は次のポテンシャル成分から得ることができる。

$$B_{\alpha\mu} = \frac{1}{8}(\gamma_\mu \gamma^{11})_{\alpha\beta}\theta^\beta. \tag{16.45}$$

二つ目の成分を与えるポテンシャルを決定するには、添え字のカイラリティによって場合わけしてみるとよい。カイラリティの違いを上線と下線によって区別すると、次のものだけが 0 ではない。

$$H_{\overline{\alpha}\overline{\beta}\underline{\gamma}} = \frac{1}{32}\gamma^{\widehat{m}}_{\underline{\gamma}\underline{\delta}}\theta^{\underline{\delta}}(\gamma_{\widehat{m}})_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}, \quad H_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\overline{\gamma}} = -\frac{1}{32}\gamma^{\widehat{m}}_{\overline{\gamma}\overline{\delta}}\theta^{\overline{\delta}}(\gamma_{\widehat{m}})_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}. \tag{16.46}$$

ただし、カイラリティの取り方は $(\gamma^{11}\gamma)^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = +\gamma^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ が成り立つように取った。すべての添え字が同じカイラリティを持つ成分は次の恒等式によって 0 になる。

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma_m)_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}(\gamma^m)_{\underline{\gamma}\underline{\delta}} + (\gamma_m)_{\underline{\alpha}\underline{\gamma}}(\gamma^m)_{\underline{\delta}\underline{\beta}} + (\gamma_m)_{\underline{\alpha}\underline{\delta}}(\gamma^m)_{\underline{\beta}\underline{\gamma}} \\ &= (\gamma_m)_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\gamma^m)_{\overline{\gamma}\overline{\delta}} + (\gamma_m)_{\overline{\alpha}\overline{\gamma}}(\gamma^m)_{\overline{\delta}\overline{\beta}} + (\gamma_m)_{\overline{\alpha}\overline{\delta}}(\gamma^m)_{\overline{\beta}\overline{\gamma}}. \end{aligned} \tag{16.47}$$

これは 10 次元超対称 Yang-Mills 理論の超対称性のチェックでも現れるよく知られた式である。場の強さ (16.46) はポテンシャルの次の成分によって与えることが可能である。

$$B_{\overline{\beta}\underline{\gamma}} = -\frac{1}{64}\gamma^{\widehat{m}}_{\underline{\gamma}\underline{\delta}}\theta^{\underline{\delta}}(\gamma_{\widehat{m}})_{\overline{\beta}\overline{\alpha}}\theta^{\overline{\alpha}} \tag{16.48}$$

これはカイラリティを区別しない添え字に対して次のように書くこともできる。

$$B_{\beta\gamma} = -\frac{1}{64}\gamma^{\widehat{m}}_{\{\gamma\delta}\theta^\delta(\gamma_{\widehat{m}}\gamma^{11})_{\beta\}\alpha}\theta^\alpha \tag{16.49}$$

$B_{\alpha\beta}$ の二つの添え字を同じカイラリティにとった場合には θ の反可換性によって自動的に 0 になる。微分形式の形で書けば、

$$B_2 = \frac{1}{8}(d\theta\gamma_\mu\gamma^{11}\theta) \wedge \left(dx^\mu + \frac{1}{16}d\theta\gamma^\mu\theta\right) \tag{16.50}$$

すでに知っているボゾンの部分の作用を再現するには次の作用を採用すればよい。[62, 63, 64]

$$S = -\int d^{p+1}\sigma\frac{1}{e^\Phi}\sqrt{-\det(G_{ij}+\mathcal{F}_{ij})} + \int C^{(2)} \wedge e^{\mathcal{F}}_2. \tag{16.51}$$

ただしこの式の中の R-R ポテンシャルには二番目の定義を採用した。また、G_{ij} と $\mathcal{F}_{ij}$ は次のように定義される。

$$G_{ij} = \Pi^{\widehat{m}}_i\Pi^{\widehat{n}}_j\eta_{\widehat{m}\widehat{n}}, \quad \mathcal{F} = F_2 + B_{MN}dz^M \wedge dz^N \tag{16.52}$$

この作用のボゾンの部分からは $\mathcal{N}=4$ のベクトル多重項に含まれるボゾンが現れる。従って、フェルミオン部分からは 16 個の成分を持ったスピノル場が現れると期待される。このことを、平坦な背景上にあるブレーンの作用をフェルミオンについてべき展開することで見てみよう。

Born-Infeld 項からは (14.143) にあるフェルミオンの運動項を与えているが、それだけでは 32 個の成分を持っている。次に Wess-Zumino 作用も見てみよう。(16.41) を上記の作用の Wess-Zumino 項に代入すると、

$$S_{\rm WZ} = \int_{2n+2} G_{\rm even}e^{\mathcal{F}_2} = \frac{1}{8g_{\rm str}}\int_{2n+1}(\theta\gamma_{[2n]}(\gamma^{11})^{n+1} \wedge d\theta) + \mathcal{O}(\theta^4). \tag{16.53}$$

さらに、ブレーン上の γ 行列 $\widetilde{\gamma}_i$ を用いて書き換えると、上記の作用は次のように書く事ができる。

$$S_{\rm WZ} = -\frac{1}{8g_{\rm str}}\int d^{2n+1}\sigma(\theta\widetilde{\gamma}^i\partial_i\Gamma\theta) + \mathcal{O}(\theta^4). \tag{16.54}$$

ただし、Γ は次のように定義する。

$$\Gamma\epsilon_{i_1\cdots i_{2n+1}} = (-)^n \widetilde{\gamma}_{i_1\cdots i_{2n+1}}(\gamma^{11})^{n+1}. \tag{16.55}$$

この行列は次の性質を満足する。

$$\Gamma^2 = 1. \tag{16.56}$$

したがって和をとると、フェルミオンについて二次の項は次のように与えられる。

$$S_{\text{fermion}} = -\frac{1}{4g_{\text{str}}}\int d^{2n+1}\sigma(\theta\widetilde{\gamma}^i\partial_i\frac{1+\Gamma}{2}\theta). \tag{16.57}$$

(16.57) は κ-変換と呼ばれる次のゲージ変換のもとで不変である。

$$\delta\theta = \frac{1}{2}(1-\Gamma)\kappa. \tag{16.58}$$

このゲージ対称性のおかげで θ の成分のうちの半分がゲージ自由度となる。

第17章 I 型超重力理論

17.1 重力部分

II 型超重力理論は以下に挙げるようないくつかの $\mathbf{Z}_2$ 対称性を持っている。これらの $\mathbf{Z}_2$ 対称性に対して不変な場のみを残し、それ以外の場を 0 に置くことで、超対称性を一つだけ持つような 10 次元超重力理論を構成することができる。

まず、IIA 型理論において、全ての R-R 場の符号を反転しそれ以外のボゾン場はそのままに保つ $\mathbf{Z}_2$ 対称性を考えることができる。IIA 型超重力理論は 11 次元超重力理論の $\mathbf{S}^1$ コンパクト化として得られることは既に見たが、この $\mathbf{Z}_2$ 変換は x^{11} 方向の反転と解釈することもできる。このことから超対称変換のパラメータも含め、スピノル場についての変換性も決めることができる。まとめると、それぞれの場に対して $\mathbf{Z}_2$ 変換は次のように作用する。

$$G_{\text{even}} \to -G_{\text{even}}, \quad \psi_\mu \to \gamma^{11}\psi_\mu, \quad \lambda \to -\gamma^{11}\lambda, \quad \xi \to \gamma^{11}\xi. \tag{17.1}$$

このようにして得られた理論はヘテロ型 $E_8 \times E_8$ 超弦理論の低エネルギー有効理論として得られる超重力理論（の重力多重項部分）と同じであることが知られている。そこでこの超重力理論をヘテロ型超重力理論と呼ぶことにしよう。対応する。

IIB 型超重力理論においても、全ての R-R 場の符号を反転する $\mathbf{Z}_2$ 対称性が存在する。

$$G_{\text{odd}} \to -G_{\text{odd}}, \quad \xi \to \sigma_z\xi, \quad \psi_\mu \to \sigma_z\psi_\mu, \quad \lambda \to \sigma_z\lambda. \tag{17.2}$$

IIB 型超重力理論の on-shell の自由度は表現 $(\mathbf{8_v} + \mathbf{8_s}) \times (\mathbf{8_v} + \mathbf{8_s})$ によって分類されるが、この $\mathbf{Z}_2$ 変換は最後の $\mathbf{8_s}$ 表現の符号を反転することに対応している。この $\mathbf{Z}_2$ 変換に対して不変な場のみを残して得られる超重力理論はヘテロ型 SO(32) 超弦理論の重力多重項部分に対応することが知られている。そこでこの理論もヘテロ型弦理論と呼ぶことにする。IIA 型と IIB 型のそれぞれから得られたヘテロ型超重力理論は重力多重項の部分は全く同じ物であるので区別する必要はない。

IIB 型理論においては、別の $\mathbf{Z}_2$ 対称性も存在する。それは on-shell の自由度を分類する表現の二つの $(\mathbf{8_v} + \mathbf{8_s})$ 因子を入れかえる対称性である。IIB 型の超弦理論においては、この変換は弦の向きを逆転することを表しており、$\mathbf{Z}_2$ 不変な状態を残すことで向き付けの無い I 型弦理論を得ることができる。IIB 型超重力理論の場に対してはこの変換は次のように作用する。

$$G_1 \to -G_1, \quad H_3 \to -H_3, \quad G_5 \to -G_5, \quad \xi \to \sigma_x\xi, \quad \psi_\mu \to \sigma_x\psi_\mu, \quad \lambda \to \sigma_x\lambda. \tag{17.3}$$

この変換で不変な場のみを残して得られる超重力理論を I 型超重力理論と呼ぶことにする。

このように、$\mathcal{N} = 1$ の超重力理論にはいくつかの構成法があるが、ここでは IIA 型の超重力理論から出発する一番目の方法を用いよう。IIA 型超重力理論についてはすでに作用も変換則も知っているから、その中から $\mathbf{Z}_2$ 不変でない量を消去することにより直ちに次の作用と変換則を得る。

ヘテロ型超重力理論の作用と変換則（弦計量）

ボゾン場の作用は次のように与えられる。

$$\frac{\mathcal{L}_b}{2\pi} = \frac{e}{e^{2\phi}}[R + 4(\partial_\mu\phi)^2] - \frac{e}{e^{2\phi}}\frac{1}{2\cdot 3!}H^2_{\mu\nu\rho}, \tag{17.4}$$

ただし、ゲージ場の強さはポテンシャル B_2 によって $H_3 = dB_2$ と書ける。フェルミオンの運動項は次のように与えられる。

$$\frac{\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} = \frac{e}{2e^{2\phi}}(\psi_\mu \not{D}^{(\omega)}\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu - \psi_\mu \not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\lambda - \lambda\not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\psi_\mu + \lambda\not{D}^{(\omega)}\lambda). \tag{17.5}$$

あと、三点結合項が含まれる。

$$\frac{\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi} = \frac{e}{8e^{2\phi}}(-\psi_m\gamma^{[m}\not{H}_3\gamma^{n]}\psi_n + 2\psi_m\langle\gamma^m\not{H}_3\rangle_4\lambda + \lambda\not{H}_3\lambda), \tag{17.6}$$

フェルミオンの変換則は、

$$\delta\psi_\mu = D^{(\omega)}_\mu\xi + \frac{1}{4\cdot 2}H_{\mu\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\xi \tag{17.7}$$

$$\delta\lambda = (\not{\partial}\phi)\xi + \frac{1}{2}\not{H}_3\xi. \tag{17.8}$$

ボゾン場の変換則は

$$\delta e^\mu_{\widehat{m}} = \frac{1}{4}(\psi_{\widehat{m}}\gamma^\mu\xi), \quad \delta\phi = \frac{1}{8}(\lambda\xi), \quad \delta B_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(-\psi_\mu\gamma_\nu\xi + \psi_\nu\gamma_\mu\xi). \tag{17.9}$$

ここで与えた作用がここで与えた超対称変換のもとで不変であるという計算は §15.4.1 で行った計算とまったく同じになる。IIB 型の R-R 場を消去する 2 番目の構成法を用いた場合にも、全く同

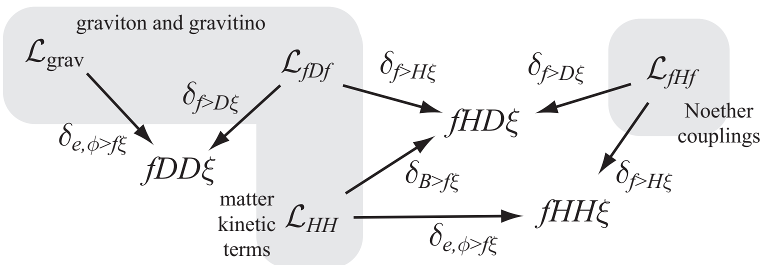

図 17.1: ヘテロ型超重力理論の作用の超対称変換による変分の相殺。スピノルについて 4 次以上の項は無視している。

じ結果を得る。

IIB 型超重力理論は $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ の対称性を持っているが、実は上で述べた IIB 型超重力理論の二つの $\mathbf{Z}_2$ 対称性は次の $\mathrm{U}(1)$ 変換を伴う $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ 変換によって互いに結びついている。

$$P^{(h)m}_I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} P^{(I)m}_I e^{-(\pi i/2)\sigma_y}. \tag{17.10}$$

したがってこの変換を行うことによりたった今求めたヘテロ型超重力理論の作用と変換則から、I 型超重力理論の作用と変換則を得ることができる。これらは変数変換で結びついているわけであるから、どちらを用いても物理的結論は同じになるが、上記の変数変換で I 型超重力理論に移ったほうが作用がやや簡単になる。

まず、SL(2, **Z**) 変換を行うために (15.62) から (15.64) までの変換を行ってアインシュタイン計量に移ろう。この結果、次のラグランジアンを得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathcal{L}_b}{2\pi e} &= R - \frac{1}{2}(\partial_m\phi)(\partial^m\phi) - \frac{e^{-\phi}}{12}H_{mnp}H^{mnp} \\
\frac{\mathcal{L}_f}{2\pi e} &= \frac{1}{2}\psi_m\gamma^{mnp}D_n^{(\omega)}\psi_p + \frac{1}{16}\lambda\gamma^m D_m^{(\omega)}\lambda - \frac{1}{8}(\partial_n\phi)\lambda\gamma^m\gamma^n\psi_m. && (17.11) \\
\frac{\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi e} &= \frac{e^{-\phi/2}}{16}\left(-\psi^m\gamma_m \not{H}_3\gamma_n\psi^n + \psi^m\gamma_n\not{H}_3\gamma_m\psi^n + \lambda\gamma^m\not{H}_3\psi_m\right) && (17.12)
\end{aligned}
$$

変換 (17.10) はそれぞれの場に対して次のように作用する。

$$\phi^{(h)} = -\phi^{(I)}, \quad \lambda^{(h)} = -\lambda^{(I)}, \quad H_3^{(h)} \to -G_3^{(I)}. \tag{17.13}$$

作用、変換則に対してこの変換を行い、さらに先ほどとは逆のワイル変換を行って再び弦計量に移れば、次の作用、変換則を得ることができる。

I 型超重力理論の作用と変換則（弦計量）

ボゾン場の作用は次のように与えられる。

$$\frac{\mathcal{L}_b}{2\pi} = \frac{e}{e^{2\phi}}[R + 4(\partial_\mu\phi)^2] - \frac{e}{2\cdot 3!}G^2_{\mu\nu\rho}, \tag{17.14}$$

反対称テンソル場の強さは $H_3 = dB_2$ と与えられる。フェルミオンの運動項は

$$\frac{\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} = \frac{e}{2e^{2\phi}}(\psi_\mu\not{D}^{(\omega)}\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu - \psi_\mu\not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\lambda - \lambda\not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\psi_\mu + \lambda\not{D}^{(\omega)}\lambda). \tag{17.15}$$

三点結合項は次のように与えられる。

$$\frac{\mathcal{L}_{fGf}}{2\pi} = -\frac{e}{16e^\phi}\left(2\psi_m\gamma^{[n}\not{G}_3\gamma^{m]}\psi_n + 2\psi_m\gamma^m\not{G}_3\lambda + \lambda\not{G}_3\lambda\right) \tag{17.16}$$

フェルミオンの変換則は

$$\delta\psi_\mu = D_\mu^{(\omega)}\xi - \frac{e^\phi}{8}\not{G}_3\gamma_\mu\xi, \quad \delta\lambda = (\not{\partial}\phi)\xi + \frac{e^\phi}{2}\not{G}_3\xi. \tag{17.17}$$

ボゾンの変換則は

$$\delta e_\mu^{\widehat{m}} = \frac{1}{4}\xi\gamma^{\widehat{m}}\psi_\mu, \quad \delta\phi = \frac{1}{8}(\xi\lambda), \quad \delta C_{\mu\nu} = -\frac{1}{8e^\phi}(2\psi_\alpha\langle\gamma_{\mu\nu}\gamma^\alpha\rangle_1\xi - \lambda\gamma_{\mu\nu}\xi). \tag{17.18}$$

超対称代数は (15.156) から $\mathbf{Z}_2$ 変換で残る部分だけを抜き出せば、次のように与えられる。

$$[\delta_{\xi_2}, \delta_{\xi_1}] = -\frac{1}{4}(\xi_2\gamma^\mu\xi_1)\partial_\mu. \tag{17.19}$$

17.2 10 次元超対称 Yang-Mills 理論

10 次元は超対称 Yang-Mills 理論が存在できる最高の次元である。この理論から出発して次元簡約を行うことにより、より小さな次元のさまざまな理論を構成することができる。

ここではゲージ場についてはエルミートな約束を用いることにする。すなわち、共変微分は $\partial_\mu - iA_\mu$ である。この理論はゲージ場 A_μ^a とゲージーノ χ^a を含む。ゲージーノ χ^a と超対称性変換のパラメータ ξ はどちらも同じカイラリティを持つマヨラナワイルスピノルである。つまり、

Soryushiron Kenkyu

表 17.1: 10 次元 SYM の field contents

fields	ξ	A^a_μ	χ^a
SO(1,9)	$\mathbf{16_L}$	$\mathbf{10}$	$\mathbf{16_L}$

ローレンツ回転群 SO(1,9) のもとでそれぞれ次のような表現に属している。作用と変換則について調べよう。まず作用は次のゲージ場とフェルミオンの運動項の和として与えられる。

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_\chi = -\frac{1}{2}\overline{\chi}^a\gamma^\mu D^{(G)}_\mu \chi^a, \tag{17.20}$$

共変微分は次のように定義される。

$$D^{(G)}_\mu \chi^a = \partial_\mu \chi_a - A^b_\mu f_{abc}\chi^c. \tag{17.21}$$

そして超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta_\chi \chi^a = \frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}^a_2\xi, \quad \delta_A A^a_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\overline{\chi}^a\gamma_\mu\xi). \tag{17.22}$$

作用の変分を求めてみよう。次の二つの変分が相殺することはすぐにわかる。

$$\delta_\chi \mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2\sqrt{2}}F^a_{\alpha\beta}D^{(G)\alpha}(\overline{\chi}^a\gamma^\beta\xi), \quad \delta_A\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}F^a_{\mu\nu}D^{(G)\mu}(\overline{\chi}^a\gamma^\nu\xi). \tag{17.23}$$

あと考慮すべきなのは、ゲージーノの作用の共変微分に含まれるゲージ場の変分から現われる次の項である。

$$\delta_A\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2}(\overline{\chi}^a\gamma^\mu f_{abc}\chi^c)\delta A^b_\mu = \frac{1}{4\sqrt{2}}f_{abc}(\overline{\chi}^a\gamma^\mu\chi^c)(\overline{\chi}^b\gamma_\mu\xi). \tag{17.24}$$

これが実際に 0 になることは次のようにしてわかる。まず、同じカイラリティを持った二つのワイルスピノル ψ_1 と ψ_2 に対するフィルツ変換は次のように与えられる。

$$\psi_1\overline{\psi}_2 = \frac{1}{16}\left[-(\overline{\psi}_2\gamma^\alpha\psi_1)\gamma_\alpha + \frac{1}{3!}(\overline{\psi}_2\gamma^{\alpha\beta\gamma}\psi_1)\gamma_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{5!}(\overline{\psi}_2\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}\psi_1)\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}\right] \tag{17.25}$$

これを (17.24) に適用してみよう。$\overline{\chi}^c\gamma^{\alpha\beta\gamma}\chi^b$ は二つのスピノルの入れ替えに対して対称で、構造定数との縮約で落ちる。したがって残るのは、

$$f_{abc}(\overline{\chi}^a\gamma^\mu\chi^b)(\overline{\chi}^c\gamma_\mu\xi) = \frac{1}{16}f_{abc}\left[-(\overline{\chi}^c\gamma^\alpha\chi^b)(\overline{\chi}^a\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu\xi) - \frac{1}{5!}(\overline{\chi}^c\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}\chi^b)(\overline{\chi}^a\gamma^\mu\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}\gamma_\mu\xi)\right] \tag{17.26}$$

である。さらに、D 次元 γ-行列の積に対して次の公式を用いる。

$$\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu = -(D-2)\gamma_\alpha, \quad \gamma^\mu\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}\gamma_\mu = -(D-10)\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}. \tag{17.27}$$

これにより、(17.26) の右辺の第 2 項は 0 になるから、次の式が得られる。

$$f_{abc}(\overline{\chi}^a\gamma^\mu\chi^b)(\overline{\chi}^c\gamma_\mu\xi) = -\frac{1}{2}f_{abc}(\overline{\chi}^a\gamma^\alpha\chi^b)(\overline{\chi}^c\gamma_\alpha\xi) \tag{17.28}$$

この式は、両辺ともに 0 であることを意味している。

超対称カレントは、変換パラメータ ξ を座標に依存するとして作用の変分を計算することにより、得られる。

$$\delta_{\mathrm{local}}S = \int d^{10}xJ^\mu D_\mu\xi, \quad J^\mu = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\chi^a\gamma^\mu\not{F}^a. \tag{17.29}$$

さらにもう一度変分してみよう。ここではフェルミオンの高次の項を無視してフェルミオン χ の変分にのみ注目する。

$$\delta J^\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi \not{F}^a \gamma^\mu \not{F}^a = \frac{1}{8\sqrt{2}}\xi\gamma^{\mu\alpha\beta\gamma\delta}F^a_{\alpha\beta}F^a_{\gamma\delta} + \frac{1}{\sqrt{2}}T^{\mu\nu}\xi\gamma_\nu. \tag{17.30}$$

ただし、$T_{\mu\nu}$ はゲージ場のエネルギー運動量テンソルで、次のように定義される。

$$\delta_{g_{\mu\nu}}\frac{S_{\text{gauge}}}{2\pi} = \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu} = F^a_{\mu\alpha}F^{a\alpha}_\nu - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F^a_{\alpha\beta}F^{a\alpha\beta}. \tag{17.31}$$

このように、超対称カレントの変分にエネルギー運動量テンソルが現れるということは、超対称性を局所化した場合の対応するゲージ場であるグラビティーノがグラビトンの超対称パートナーであることを意味している。さらに上の式にはインスタンタントン数密度 $F_2\wedge F_2$ に比例する項があるが、これは 10 次元の超重力理論に、インスタンタントンが荷電オブジェクトとして結合するようなゲージ場を含まなければならないことを意味している。

超対称代数を調べてみよう。

$$[\delta_{\xi_2},\delta_{\xi_1}]A_\mu = F_{\mu\nu}\epsilon^\nu = -\epsilon^\nu\partial_\nu A^a_\mu + D^{(G)}_\mu(A_\nu\epsilon^\nu). \tag{17.32}$$

ただし、ϵ^μ は次のように定義されるベクトルである。

$$\epsilon^\nu = \frac{1}{4}(\xi_2\gamma^\nu\xi_1). \tag{17.33}$$

(17.32) はベクトル ϵ^μ 分だけの平行移動とパラメータ $A^a_\mu\epsilon^\mu$ によるゲージ変換の組み合わせとみなすことができる。ゲージ変換の部分を無視しておくと、超対称代数は次のようにあらわすことができる。

$$[\delta_{\xi_2},\delta_{\xi_1}] = \delta_\epsilon \tag{17.34}$$

17.3 ゲージ場との結合

10 次元時空において $\mathcal{N}=1$ の超対称性を持つ理論には、以前に調べた Yang-Mills 理論がある。そこではゲージ場とフェルミオンの運動項の和として与えられる作用が global な超対称性のもとで不変であることをみた。ここでは超重力理論にゲージ場の多重項を結合させせることを考えてみよう。

ゲージ場とゲージーノの超対称変換は §17.2 で調べた 10 次元 Yang-Mills 理論の超対称変換をそのまま用いよう。

$$\delta\chi^a = \frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}^a_2\xi, \quad \delta A^a_\mu = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\chi^a\gamma_\mu\xi). \tag{17.35}$$

超重力理論はスカラー場 ϕ を含むため、ゲージ結合定数はその関数とすることができ、一般座標変換に対する共変性からはその関数形は決定することができない。そこで、ディラトンの関数 $f(\phi)$ を導入し、作用を次のように置こう。

$$\frac{\mathcal{L}_{\text{gauge}}}{2\pi} = ef(\phi)\,\mathrm{tr}\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\chi\gamma^\mu D^{(G,\omega)}_\mu\chi\right]. \tag{17.36}$$

出発点として考える作用はこの作用と以前に与えたヘテロ型超重力理論の作用の和 $\mathcal{L}_{\text{gravity}}+\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ である。まずこの作用に対して上記の超対称変換を行ったときにどのような変分が得られるかを考えてみよう。重力部分の変分は当然 0 である。共変化されたゲージ場の作用 $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ は、もし変換

Soryushiron Kenkyu

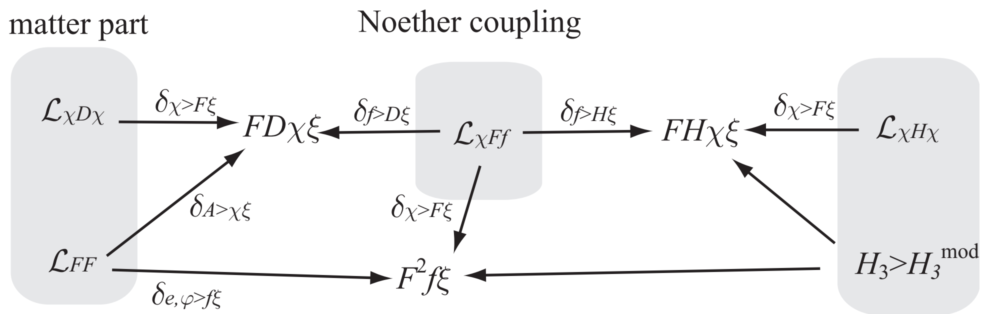

図 17.2: 重力に結合した 10 次元ベクトル多重項の超対称変換による変分の相殺。スピノルについて 4 次以上の項は無視している。$F^2 f\xi$ および $FH\chi\xi$ の形をした変分を相殺するには、反対称テンソル場の場の強さを H_3^{mod} に置きかえることが必要である。

パラメータおよび関数 f が定数の場合には A と χ による変分は 0 を与える。従って、一般の場合の変分は $\partial_\mu f$ や $D_\mu\xi$ に比例するはずである。実際に計算してみると、次の変分が得られる。

$$\frac{\delta_{A,\chi}\mathcal{L}}{2\pi} = -\frac{e}{2\sqrt{2}}(J^\mu D_\mu^{(\omega)}\xi) - \frac{e}{4\sqrt{2}}\frac{\partial_\mu f}{f}(J\gamma^\mu\xi). \tag{17.37}$$

J^μ と J は次のように与えられる超対称カレントである。

$$J^\mu = f\,\mathrm{tr}\,\chi\gamma^\mu\not{F}_2, \quad J = f\,\mathrm{tr}\,\chi\not{F}_2. \tag{17.38}$$

変分 (17.37) は、ネーター手続きの一般論により、カレント J^μ および J と、対応するゲージ場との結合を導入すればそのゲージ場の変換から得られる変分と相殺することができる。そのためには次のものを加えればよい。

$$\frac{\mathcal{L}_{J\psi}}{2\pi} = \frac{e}{2\sqrt{2}}(J^\mu\psi_\mu), \quad \frac{\mathcal{L}_{J\lambda}}{2\pi} = \frac{e}{4\sqrt{2}}\frac{f'}{f}J\lambda'. \tag{17.39}$$

さらに、S_{gauge} には多脚場とディラトンが含まれており、それらの超対称変換は次の変分を与える。

$$\frac{\delta_{e,\phi}\mathcal{L}_{\mathrm{gauge}}}{2\pi} = eT^{\mu\widehat{m}}\delta e_{\mu\widehat{m}} + \frac{f'}{f}\frac{\mathcal{L}_{\mathrm{gauge}}}{2\pi}\delta\phi \tag{17.40}$$

今度はエネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{tr}\left(F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right), \tag{17.41}$$

と、作用そのものに比例する項が得られる。これらは実はカレント J^μ および J の超対称パートナーとみなすことができ、先ほど導入したネーター結合項中のカレントの超対称変換による変分でちょうど相殺することができる。フェルミオンの高次の項を無視すれば、カレントの超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta J^\mu = -\frac{f}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{tr}\,\xi\not{F}_2\gamma^\mu\not{F}_2 = -\frac{1}{8\sqrt{2}}f\,\mathrm{tr}\,\xi\gamma^{\mu\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} - \frac{1}{\sqrt{2}}T^{\mu\nu}\xi\gamma_\nu, \tag{17.42}$$

$$\delta J = -\frac{f}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{tr}\,\xi\not{F}_2\not{F}_2 = -\frac{1}{8\sqrt{2}}f\,\mathrm{tr}\,\xi\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathcal{L}_{\mathrm{gauge}}}{2\pi e}\xi \tag{17.43}$$

これを用いてネーター結合項の二つの項それぞれの超対称変換を計算すると、次のようになる。

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{J\psi}}{2\pi} = \frac{e}{2\sqrt{2}}(J^\mu D^{(\omega)}_\mu\xi) + \frac{e}{8\sqrt{2}}(J^\mu\langle \not{H}_3\gamma_\mu\rangle_2\xi) - \frac{e}{32}f\xi\gamma^{\mu\alpha\beta\gamma\delta}\psi_\mu \operatorname{tr} F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} - eT^{\mu\widehat{m}}\delta e_{\mu\widehat{m}}, \quad (17.44)$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{J\lambda}}{2\pi} = \frac{e}{4\sqrt{2}}\frac{f'}{f}J(\not{\partial}\phi)\xi + \frac{e}{8\sqrt{2}}\frac{f'}{f}J\not{H}_3\xi - \frac{e}{64}f'\xi\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda' \operatorname{tr} F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} - \frac{f'}{f}\frac{\mathcal{L}_{\text{gauge}}}{2\pi}\delta\phi. \quad (17.45)$$

このそれぞれの変分の第 1 項は (17.37) を、第 4 項は (17.40) をそれぞれ相殺し、残るのは第 2、第 3 項である。第 2 項の和を $\delta\mathcal{L}_A$、第 3 項の和を $\delta\mathcal{L}_B$ と置くと、次のようになる。

$$\frac{\delta\mathcal{L}_A}{2\pi} = \frac{e}{8\sqrt{2}}(J^\mu\langle \not{H}_3\gamma_\mu\rangle_2\xi) + \frac{e}{8\sqrt{2}}\frac{f'}{f}J\not{H}_3\xi, \quad (17.46)$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_B}{2\pi} = -\frac{e}{32}f\xi\gamma^{\mu\alpha\beta\gamma\delta}\psi_\mu \operatorname{tr} F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} - \frac{e}{64}f'\xi\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda' \operatorname{tr} F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} \quad (17.47)$$

ここまでは $f(\phi)$ は任意の関数として進めてきたが、ここでようやく関数形を決めることにする。もし $f' = -2f$、すなわち $f = Ne^{-2\phi}$ であれば、これらは次のようにまとまることがわかる。N は定数である。

$$\frac{\delta\mathcal{L}_A}{2\pi} = \frac{e}{4e^{2\phi}}N \operatorname{tr}(\chi\not{H}_3\delta\chi) + \frac{e}{2e^{2\phi}}N \operatorname{tr}\delta A_m F_{pq}H^{mpq}, \quad \frac{\delta\mathcal{L}_B}{2\pi} = -\frac{e}{8}N \operatorname{tr}\theta^{pqrs}F_{pq}F_{rs}. \quad (17.48)$$

ただし、θ^{pqrs} は IIA 型超重力理論において (15.92) で定義されたものである。まず、$\delta\mathcal{L}_A$ の第 1 項を相殺するのは簡単である。これは作用に次の項を加えておけば相殺できる。

$$\frac{\mathcal{L}}{2\pi} = -\frac{e}{8e^{2\phi}}N \operatorname{tr}(\chi\not{H}_3\chi) \quad (17.49)$$

この項の χ の超対称変換によって、$\mathcal{L}_A$ の第 1 項を相殺する項が得られる。H_3 の変換はフェルミオンについて高次の項を与えるので今は無視することができる。

残る二つの項であるが、これらは重力部分の作用と変換則を変更することによって相殺することができる。このためには、ゲージ場を含まないヘテロ型超重力理論の作用のそれぞれの項がどのように互いに相殺するかを見ておく必要があるが、ここではそれを行う必要は無い。すでに IIA 型超重力理論の変分計算は §15.4 で行っており、(17.1) で不変でない場を 0 と置けば §15.4.1 での計算がそのままヘテロ型超重力理論の変分計算になるからである。そこでの計算を参照すると、$\delta\mathcal{L}_B$ は H_3 のビアンキ方程式が次のように変更されれば相殺される。

$$dH_3 = \frac{1}{2}N \operatorname{tr} F_2 \wedge F_2. \quad (17.50)$$

$\delta\mathcal{L}_A$ の第 2 項は H_3 の変換則に次のような項が加われば、H_3 の運動項の変分と相殺する。

$$\delta H_3 = (\delta H_3)_0 + N \operatorname{tr}\delta A_1 \wedge F_2 \quad (17.51)$$

$(\delta H_3)_0$ は、ゲージ場と結合していないヘテロ型超重力理論における H_3 の超対称変換を表す。フェルミオンの 2 次までの範囲では、この変換則の修正は $\delta\mathcal{L}_1$ に影響を与えない。これらの二つの条件は、作用の中の全ての H_3 を次のものに置きかえ、満足される。

$$H_3^{\text{mod}} = dB_2 + \omega_3, \quad \omega_3 = N \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}A_1 \wedge dA_1 - \frac{i}{3}A_1 \wedge A_1 \wedge A_1\right), \quad (17.52)$$

さらに B_2 の変換則に次の項を付け加えることによって実現される。

$$\delta B_2 = (\delta B_2)_0 + \frac{1}{2}N \operatorname{tr} A_1 \wedge \delta A_1 \quad (17.53)$$

Soryushiron Kenkyu

$(\delta B_2)_0$ はゲージ場に結合していないヘテロ型超重力理論における変換を意味する。フェルミオンの高次の項を無視している場合には、これらの変更は他の部分に何も影響を及ぼさないことがわかる。

こうして、次の作用、変換則が得られた。

ヘテロ型超重力理論のベクトル多重項の作用と変換則

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}}{2\pi} &= \frac{\mathcal{L}_{\mathrm{gravity}}(H_3 \to H_3^{\mathrm{mod}})}{2\pi} + \frac{e}{e^{2\phi}} N \operatorname{tr}\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\chi\gamma^\mu D_\mu^{(G,\omega)}\chi\right] \\ &\quad + \frac{e}{2\sqrt{2}e^{2\phi}} N \operatorname{tr}(\chi\gamma^\mu \not{F}_2 \psi_\mu) - \frac{e}{2\sqrt{2}e^{2\phi}} N \operatorname{tr} \chi \not{F}_2 \lambda' - \frac{e}{8e^{2\phi}} N \operatorname{tr}(\chi \not{H}_3^{\mathrm{mod}} \chi)\end{aligned} \tag{17.54}$$

$$H_3^{\mathrm{mod}} = dB_2 + \omega_3, \quad \omega_3 = N \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}A_1 \wedge dA_1 - \frac{i}{3}A_1 \wedge A_1 \wedge A_1\right). \tag{17.55}$$

$$\delta\chi^a = \frac{1}{2\sqrt{2}} \not{F}_2^a \xi, \quad \delta A_\mu^a = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\chi^a \gamma_\mu \xi). \tag{17.56}$$

$$\delta^{\mathrm{mod}} B_2 = \delta B_2 + \frac{1}{2} N \operatorname{tr} A_1 \wedge \delta A_1. \tag{17.57}$$

- E.Bergshoeff *et al.* [65] (sugra + U(1) gauge)

  この論文では、つぎの約束が用いられている。

$$F_4 = 6dA_3, \quad F_3 = \frac{1}{3}dA_2, \quad F_2 = dA_1. \tag{17.58}$$

  論文中の作用を再現するには、次の置き換えを行えば良い。

$$\frac{(2\pi L)^8}{8} \to 2\kappa^2, \quad e^\phi \to \phi^{-3/2}, \tag{17.59}$$

$$(2\pi L)^2 H_3 \to 3\sqrt{2}\kappa F_3, \quad (2\pi L)^2 B_2 \to \sqrt{2}\kappa A_2, \tag{17.60}$$

$$(2\pi L)F_2 \to \sqrt{2}\kappa F_2, \quad (2\pi L)A_1 \to \sqrt{2}\kappa A_1. \tag{17.61}$$

  Ref. [66] にも同じ作用が与えられている。

17.4 5-ブレーン解

ヘテロ型超重力理論には反対称テンソル場 B_2 が含まれているから、この場に電気的に結合する 1-ブレーンと、磁気的に結合する 5-ブレーンが存在する。1-ブレーンについては II 型超重力理論と全く同じ解になるのでここでは省略し、5-ブレーンについてのみ古典解を構成しよう。

ここでも超対称性が一部破れずにのこるという事から、フェルミオンの超対称変換が 0 になるという条件を用いる。ディラティーノとグラビティーノについては II 型超重力理論の NS5-ブレーンの場合と全く同じであることがわかる。従って、解はある関数 H を使って次のようにおけるはずである。

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + H(r)\delta_{ij}(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2), \quad e^\phi = g_{\mathrm{str}} H^{1/2}(r), \tag{17.62}$$

ただし、関数 H は H_3 のフラックスと次の関係にある。

$$\frac{dH}{dr} = -\frac{1}{\Omega_3 r^3} \oint H_3. \tag{17.63}$$

ただし、$\oint H_3$ は半径 r の $\mathbf{S}^3$ 上での H_3 の積分をあらわす。もしフラックス H_3 が保存していてこの積分が単に NS5-ブレーンの枚数を与えるとすれば、これは簡単に解けて II 型理論の場合とまったく同じ解を与える。しかし、今考えているヘテロ型理論では、$H_3 = dB_2 + \omega_3$ は修正されたビアンキ恒等式に従うために保存しない。この関数形を決めるには、まだ使っていないゲージーノの変換則

$$\delta\chi = \frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}_2\xi, \tag{17.64}$$

を用いることができる。ここで、ξ は γ^{012345} の固有スピノルであり、5-ブレーンに直交する 4 次元空間上で片方のカイラリティだけを持っている。そのため、上記の変換が 0 になるためには F_2 が（反）自己双対であればよい。この条件には上記の計量に含まれる関数 H がまったく影響を与えないことを考慮すれば、このインスタントン解は平坦な 4 次元空間で求めたものと全く同じになるはずである。

インスタントン解が与えられれば、ω_3 の関数形が決まる。それを (17.63) に代入すれば、関数 $H(r)$ も得ることができる。球対称な 1-インスタントン解の重ね合わせ（これは大きなゲージ群に含まれる独立した SU(2) 部分群を用いて構成した 1-インスタントン解を重ね合わせることで与えられる。）に対しては、

$$\oint \omega_3 = n\frac{r^4(r^2+3a^2)}{(r^2+a^2)^3} \tag{17.65}$$

（ただし、重ね合わせたインスタントンのサイズをあらわすパラメータ a はすべてのインスタントンに対して共通であると仮定した。）であり、これを (17.63) に代入して関数 $H(r)$ について解けば、次の結果を得る。

$$H(r) = 1 + \frac{n}{4\pi^2}\frac{r^2+2a^2}{(r^2+a^2)^2}. \tag{17.66}$$

ただし、遠方で $H \to 1$ と仮定して積分定数を固定した。パラメータを適当にとって関数 $H(r)$ およびインスタントン密度 $\oint \omega_3/r^3$ をグラフにしてみると図 17.3 のようになる。

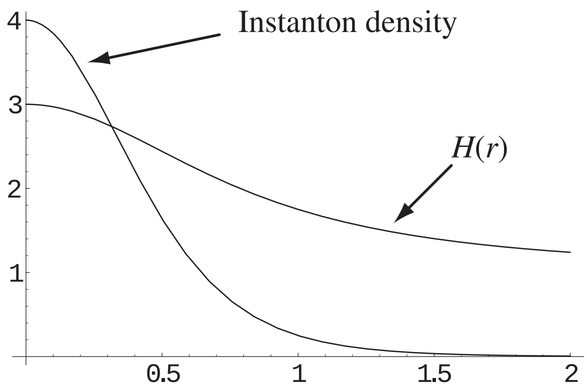

図 17.3: 5-ブレーン解のインスタントン密度 $F \wedge F$ と関数 $H(r)$

第18章　7次元超重力理論

18.1　スピノルと γ 行列

ここでは、後に 11 次元をコンパクト化するときに必要となるので、11 次元のスピノルとの関係をまとめておこう。11 次元の γ 行列を大文字の Γ を用いて、4 次元および 7 次元の γ 行列は小文字の γ を用いて書くことにしよう。11 次元の γ 行列は次のように分解することができる。

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \gamma^5, \quad \Gamma^\alpha = \mathbf{1} \otimes \gamma^\alpha. \tag{18.1}$$

スピノル ψ の 11 次元でのディラック共役を $\widetilde{\psi}$、7 次元でのディラック共役を $\overline{\psi}$ のように書くことにすれば、これらはそれぞれ次のように定義される。

$$\overline{\psi} = i\psi^\dagger\gamma^0, \quad \widetilde{\psi} = i\psi^\dagger\Gamma^0 = \overline{\psi}\gamma^5. \tag{18.2}$$

この定義を用いた場合には、フェルミオンの 2 次形式は次のようにエルミート共役に対してマイナス符号が現れない。

$$(\overline{\psi}_1\psi_2)^\dagger = (\overline{\psi}_2\psi_1). \tag{18.3}$$

γ-行列が間に挟まると次のように符号を出す。

$$(\overline{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2)^\dagger = -(\overline{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1), \quad (\overline{\psi}_1\gamma^\alpha\psi_2)^\dagger = (\overline{\psi}_2\gamma^\alpha\psi_1), \quad (\overline{\psi}_1\gamma^5\psi_2)^\dagger = (\overline{\psi}_2\gamma^5\psi_1). \tag{18.4}$$

荷電共役行列については次の関係式が成り立つ。

$$C_{11} = C_7 \otimes C_4. \tag{18.5}$$

それぞれの荷電共役演算子は次の式を満足する。

$$C_{11}^T = -C_{11}, \quad C_7^T = C_7, \quad C_4^T = -C_4. \tag{18.6}$$

γ 行列の転置公式は次のように与えられる。

$$C_{11}\Gamma_M^T = -\Gamma_M C_{11}, \quad C_7\gamma_\mu^T = -\gamma_\mu C_7, \quad C_4\gamma_\alpha^T = -\gamma_\alpha C_4, \quad C_4\gamma_5^T = \gamma_5 C_4. \tag{18.7}$$

7 次元のシンプレクティックマヨラナ共役については、11 次元のマヨラナ共役の定義をそのまま利用する。すなわち、スピノル ψ の（擬）マヨラナ共役を ψ_c と書けば、これは次のように与えられる。

$$\psi_c = C_{11}\widetilde{\psi}^T = C_7 J\overline{\psi}^T, \quad J \equiv \gamma^5 C_4. \tag{18.8}$$

このように、シンプレクティックマヨラナ共役の定義には C_4 ではなく J が現れるために、γ^α の転置を行う際には (18.7) ではなく次の公式を用いる。

$$J\gamma_\alpha^T = \gamma_\alpha J, \quad J\gamma_5^T = \gamma_5 J. \tag{18.9}$$

Soryushiron Kenkyu

もともと 4 次元では J と C_4 のどちらも荷電共役行列として採用することができ、通常は $(d_-, d_+) = (1,3)$ のミンコフスキー空間でマヨラナスピノルを定義することができる C_4 のほうを用いるのであるが、11 次元からのコンパクト化を考える際には J のほうを用いたほうがよい。

これらの式を用いると、スピノルの 2 次形式に対して次の公式を示すことができる。フェルミオンの 2 次形式は荷電共役的な転置に対して対称である。

$$(\overline{\psi}_1\psi_2^c) = (\overline{\psi}_2\psi_1^c), \tag{18.10}$$

γ-行列が間に挟まると、次のような符号が現れる。

$$(\overline{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2^c) = -(\overline{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1^c a), \quad (\overline{\psi}_1\gamma^\alpha\psi_2^c) = (\overline{\psi}_2\gamma^\alpha\psi_1^c), \quad (\overline{\psi}_1\gamma^5\psi_2^c) = (\overline{\psi}_2\gamma^5\psi_1^c). \tag{18.11}$$

11 次元では Γ^M はすべて荷電共役の意味で反対称行列であった。しかし (18.11) にあるように γ^i は荷電共役の意味で対称になる。これは次のように対応している。たとえば $\widetilde{\psi}_1\Gamma^\mu\Gamma^\alpha\psi_2$ という 2 次形式を考えよう。11 次元の意味で転置公式を用いれば Γ^μ と Γ^α の両方から負号が出て $\widetilde{\psi}_2(-\Gamma^\alpha)(-\Gamma^\mu)\psi_1$ に等しいことがわかる。これを 7 次元の言葉で次のようにいいかえることができる。まず、与えられた 2 次形式を 7 次元の言葉で書きなおせば、$\overline{\psi}_1\gamma_5\cdot\gamma_5\gamma^\mu\cdot\gamma^\alpha\cdot\psi_2$ となる。7 次元の転置公式を用いると、γ^μ だけから負号が出て $\overline{\psi}_2\gamma^\alpha(-\gamma_5\gamma^\mu)\gamma_5\psi_1$ になるが、ψ_1 の左の γ_5 を $\overline{\psi}_2$ の右側まで移動させれば、γ^α を通過する際に負号を一つ出し、$\overline{\psi}_2\gamma_5(-\gamma^\alpha)(-\gamma_5\gamma^\mu)\psi_1$ となる。このように、ディラック共役が常に γ_5 を伴うように γ_5 を移動させ、その際に現れる負号まで含めれば、11 次元と 7 次元の転置公式は同じになる。

11 次元の完全反対称テンソルは次のように定義する。

$$\epsilon_{M_1\cdots M_{11}} = \frac{\mathrm{tr}}{32}(\Gamma_{M_1}\cdots\Gamma_{M_{11}}) \tag{18.12}$$

一方、4 次元や 7 次元の完全反対称テンソルを次のように定義する。

$$\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_7} = \frac{\mathrm{tr}}{8}(\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_7}), \tag{18.13}$$

$$\epsilon_{i_1\cdots i_4} = \frac{\mathrm{tr}}{4}(\gamma_{\alpha_1}\cdots\gamma_{\alpha_4}\gamma^5), \tag{18.14}$$

$$\tag{18.15}$$

このとき次の式が成り立つ。

$$\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_7\alpha_1\cdots\alpha_4} = \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_7}\epsilon_{\alpha_1\cdots\alpha_4} \tag{18.16}$$

18.2 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論

7 次元におけるスピノル表現は 8 次元表現である。この表現は実負であるためにマヨラナ条件を課すことはできないが、もしその他の対称性の実負表現に属していれば全体として実正の表現になるためにマヨラナ条件を課す事ができる。

従って、7 次元における超対称理論は R 対称性 $\mathrm{Sp}(\mathcal{N})_R$ を持つ。実で数えた超対称電荷の成分の数が 32 を超えないという条件から、$\mathcal{N}$ としては 1 または 2 が許される。

まず $\mathcal{N}=1$ の理論について詳しく見てみよう。この理論には重力多重項、ベクトル多重項、そして $\mathcal{N}=2$ の理論を構成する際に用いることができるグラビティーノ多重項が存在する。それぞれの多重項に含まれる場をまとめたのが表 18.1 である。これらの多重項は、$\mathcal{N}=2$ の理論の重力多重項を $\mathrm{Sp}(1)_B$ に対する表現で分解することによっても得ることができる。つまり、$\mathcal{N}=2$ 重

表 18.1: 7 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論の多重項。グラビティーノはシンプレクティックマヨラナスピノルであるために、表中のものが単独で現れることはなく、常に偶数個が対になって表れる。/2 というのはそのような意味である。

multiplet	field	little group	$\mathrm{Sp}(1)_R$	d.o.f.
gravity multiplet	$g_{\mu\nu}$	14	1	14
	$B_{\mu\nu}$	10	1	10
	ϕ	1	1	1
	ψ_μ	16	2	32
	ψ	4	2	8
	A_μ	5	3	15
gravitino multiplet /2	ψ_μ^L	16	1	16
	$B_{\mu\nu}$	10	2	20
	A_μ	5	2	10
	ψ	4	$1+3$	16
	ϕ	1	2	2
vector multiplet	A_μ	5	1	5
	ψ	4	2	8
	ϕ	1	3	3

力多重項は $\mathrm{Sp}(1)_B$ の表現として分解すると、1 表現に属する重力多重項、2 表現に属するグラビティーノ多重項、3 表現に属するベクトル多重項になる。(表 18.2 を参照) そこで一重項に属する場のみを残し、その他の場を全て 0 にすれば、$\mathcal{N}=1$ の重力多重項のみからなる理論が得られる。

$\mathrm{Sp}(1)_B$ の中心 $\mathbf{Z}_2$ に注目し、$\mathbf{Z}_2$ 不変な場のみを残すことによってもグラビティーノ多重項を排除し $\mathbf{N}=1$ の理論を構成することができる。この場合にはベクトル多重項を 3 つ含む $\mathcal{N}=1$ 理論が得られる。

このような方法とは別に、$\mathbf{T}^4$ のかわりに K3 多様体を用いることによっても $\mathcal{N}=1$ の超重力理論を得ることができる。この場合にはゼロモードの数を数えることで 7 次元で現れる場の個数を決定することができる。その結果、19 個のベクトル多重項を含む 7 次元超重力理論が得られることがわかる。

18.2.1 B_2 形式

[67] [68]

$\mathcal{N}=1$ 7 次元超重力理論を構成するひとつの方法は、10 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論を $\mathbf{T}^3$ でコンパクト化することである。ベクトル多重項を含まない 10 次元ヘテロ型超重力理論をコンパクト化すると、U(1) のベクトル多重項を 3 つ含む 7 次元超重力理論を得ることができる。この理論からは超対称性に矛盾しないようにベクトル多重項を取り除くことができる。その結果、次の作用および変換則を得る。

Soryushiron Kenkyu

B_2 形式の 7 次元超重力理論

フェルミオンの 4 次以上の項を無視すれば、作用は次のように与えられる。

$$\frac{S_B}{2\pi} = \int d^7x \frac{e}{e^{2\varphi}}\Big[(R+4(\partial\varphi)^2) - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{2}F^A_{\mu\nu}F^{A,\mu\nu}\Big], \tag{18.17}$$

$$\frac{S_{fDf}}{2\pi} = \int d^7x \frac{e}{2e^{2\varphi}}\Big[\psi_\mu \not{D}^{(\omega)}\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu - \psi_\mu \not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\lambda - \lambda\not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\psi_\mu + \lambda\not{D}^{(\omega)}\lambda\Big], \tag{18.18}$$

$$\frac{S_Y}{2\pi} = \int d^7x \frac{e}{e^{2\varphi}}\Big[\frac{1}{6}H_{\mu\nu\rho}\kappa^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2}F^{A,\mu\nu}\kappa^A_{\mu\nu}\Big]. \tag{18.19}$$

ただし、場の強さ F_2^A 及び H_3 は次のように与えられる。

$$F_2^A = dV_1^A, \quad H_3 = dB_2 - V_1^A \wedge F_2^A. \tag{18.20}$$

添え字 A は $\mathrm{SU}(2)_R$ の随伴表現の添え字であり、σ^A は $\mathrm{SU}(2)_R$ の基本表現に作用するパウリ行列である。κ_3 および κ_2^A は次のように定義されるフェルミオンの二次形式である。

$$\kappa_3 = \frac{1}{8}\Big[-\overline{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^{[\mu}\gamma_3\gamma^{\nu]}\psi_\nu + \overline{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^\mu\gamma_3\lambda - \overline{\psi}_\mu\gamma_5\gamma_3\gamma^\mu\lambda + \overline{\lambda}\gamma_5\gamma_3\lambda\Big], \tag{18.21}$$

$$\kappa_2^A = \frac{i}{4}\Big[\overline{\psi}_\mu\sigma^A\gamma^{[\mu}\gamma_2\gamma^{\nu]}\psi_\nu - \overline{\psi}_\mu\sigma^A\gamma^\mu\gamma_2\lambda - \overline{\psi}_\mu\sigma^A\gamma_2\gamma^\mu\lambda - \overline{\lambda}\sigma^A\gamma_2\lambda\Big]. \tag{18.22}$$

それぞれの場に対する変換則は次のように与えられる。

$$\delta e_\mu^{\widehat{m}} = -\frac{1}{4}(\psi_\mu\gamma^{\widehat{m}}\xi), \tag{18.23}$$

$$\delta\varphi = \frac{1}{8}(\overline{\lambda}\xi), \tag{18.24}$$

$$\delta V_\mu^A = -\frac{i}{4}(\psi_\mu\sigma^A\xi), \tag{18.25}$$

$$\delta B_2 = \frac{1}{4}(\psi_\mu\langle\gamma_2\gamma^\mu\rangle_1\xi) - V_1^A\wedge\delta V_1^A, \tag{18.26}$$

$$\delta\lambda = (\not{\partial}\varphi)\xi + \frac{1}{2}\not{H}_3\xi + \frac{i}{2}\not{F}_2^A\sigma^A\xi, \tag{18.27}$$

$$\delta\psi_\mu = D_\mu^{(\omega)}\xi + \frac{1}{8}\{\gamma_\mu, \not{H}_3\}\xi + \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \not{F}_2^A]\sigma^A\xi, \tag{18.28}$$

この作用が超対称変換のもとで不変であることを示そう。この作用は、ベクトル場の部分を除けばヘテロ型超重力理論と全く同じ形をしている。したがって、作用からベクトル場を含む項を取り除き、変換則からもベクトル場の寄与を省けば作用は不変になっている。そこにベクトル場を追加したときにどのような変更を受けるか考えてみよう。まず、ゲージ場の強さ H_3 がベクトル場を含むことから、H_3 に対するビアンキ恒等式と超対称変換が次のように変更される。

$$\delta H_3 = \delta_0 H_3 - 2\delta V_1^A\wedge F_2^A, \quad dH_3 = -F_2^A\wedge F_2^A. \tag{18.29}$$

このため、重力部分の変分計算を IIA 型超重力理論と同様に行った場合にビアンキ恒等式に比例する (15.91) の第 1 項が消えずに次の変分が残る。

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{2\pi} = \frac{e}{3!}\theta^{\mu\nu\rho\sigma}D_\mu^{(\omega)}H_{\nu\rho\sigma} = -\frac{e}{4}\theta^{\mu\nu\rho\sigma}F^A_{\mu\nu}F^A_{\rho\sigma}. \tag{18.30}$$

また、H_3 の変換則の変化により、H_3 の運動項の変分から新たに次の項が現れる。

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{2\pi} = -\frac{e}{6e^{2\varphi}}H^{\mu\nu\rho}\delta' H_{\mu\nu\rho} = \frac{e}{e^{2\varphi}}H^{\mu\nu\rho}\delta V_\mu^A F^A_{\nu\rho}. \tag{18.31}$$

ただし、θ_4 は (15.92) と同様に次のように定義されている。

$$\theta_4 = \frac{1}{4e^{2\varphi}}[-\psi_\mu\langle\gamma_4\gamma^\mu\rangle_5\xi - \lambda\gamma_4\xi] \tag{18.32}$$

以下、δ_0、δ_H、δ_F はフェルミオンの変換則中で、H_3 も F_2 も含まない部分、H_3 を含む部分、F_2 を含む部分をそれぞれ意味するものとする。すなわち

$$\delta_0\lambda = (\partial\!\!\!/\phi)\xi, \quad \delta_H\lambda = \frac{1}{2}H\!\!\!/_3\xi, \quad \delta_F\lambda = \frac{i}{2}F\!\!\!/_2^A\sigma^A\xi, \tag{18.33}$$

$$\delta_0\psi_\mu = D_\mu^{(\omega)}\xi, \quad \delta_H\psi_\mu = \frac{1}{8}\{\gamma_\mu, H\!\!\!/_3\}\xi, \quad \delta_F\psi_\mu = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, F\!\!\!/_2^A]\sigma^A\xi. \tag{18.34}$$

次に、$\mathcal{L}_{fDf}+\mathcal{L}_{\rm vector}$ は、フェルミオンの高次の項を無視する近似においては 10 次元のベクトル多重項に類似した大域的超対称性を持っていることを知っておくと便利である。すなわち、$\delta_F\mathcal{L}_{fDf}$ と $\delta_V\mathcal{L}_{\rm vector}$ は $D_\mu\xi$ や $\partial_\mu\varphi$ に比例した部分を除き相殺する。まずこのことの確認からはじめよう。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_F\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} &= \frac{ie}{2e^{2\varphi}}(\psi_\mu\langle D\!\!\!/^{(\omega)}F\!\!\!/_2^A\gamma^\mu\rangle_{4,0}\sigma^A\xi) - \frac{ie}{2e^{2\varphi}}(\lambda\langle D\!\!\!/^{(\omega)}F\!\!\!/_2^A\rangle_3\sigma^A\xi) \qquad (D_\mu\to F_2^A,\xi)\\
&\quad + \frac{ie}{2e^{2\varphi}}(\psi_\mu\gamma^\mu F\!\!\!/_2^A(\partial\!\!\!/\phi)\sigma^A\xi) + \frac{ie}{4e^{2\varphi}}(\psi_\mu(\partial\!\!\!/\phi)\gamma^\mu F\!\!\!/_2^A\sigma^A\xi) - \frac{ie}{4e^{2\varphi}}(\psi_\mu(\partial\!\!\!/\phi)F\!\!\!/_2^A\gamma^\mu\sigma^A\xi)\\
&\quad + \frac{ie}{2e^{2\varphi}}(\lambda F\!\!\!/_2^A(\partial\!\!\!/\phi)\sigma^A\xi),
\end{aligned} \tag{18.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_V\mathcal{L}_{\rm vector}}{2\pi} &= -\frac{ie}{2e^{2\varphi}}(\psi_\mu\langle D\!\!\!/^{(\omega)}F\!\!\!/_2^A\gamma^\mu\rangle_0\sigma^A\xi) \qquad (D_\mu\to F_2^A)\\
&\quad + \frac{ie}{e^{2\varphi}}(\psi_\mu\langle(\partial\!\!\!/\varphi)F\!\!\!/_2^A\gamma^\mu\rangle_0\sigma^A\xi)
\end{aligned} \tag{18.36}$$

これらの式中にある $D_\mu\to\cdots$ というのは、その行の共変微分が何に作用しているかを表している。これらを加え、F_2^A に対するビアンキ恒等式を用いれば ξ または φ の微分を含む項だけが残る。これは次のようにフェルミオンの δ_0 による変換則に比例している。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_F\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} + \frac{\delta_V\mathcal{L}_{\rm vector}}{2\pi} &= \frac{ie}{2e^{2\varphi}}(\psi_\mu\langle\gamma^\nu F\!\!\!/_2^A\gamma^\mu\rangle_{4,0}\sigma^A\delta_0\psi_\nu) - \frac{ie}{2e^{2\varphi}}(\lambda\langle\gamma^\mu F\!\!\!/_2^A\rangle_3\sigma^A\delta_0\psi_\mu)\\
&\quad + \frac{ie}{2e^{2\varphi}}(\psi_\mu\langle\gamma^\mu F\!\!\!/_2^A\rangle_3\sigma^A\delta_0\lambda) + \frac{ie}{2e^{2\varphi}}(\lambda F\!\!\!/_2^A\sigma^A\delta_0\lambda)
\end{aligned} \tag{18.37}$$

これらの変分は、10 次元のヘテロ型超重力理論にベクトル多重項を結合させたときのようにカレント相互作用の導入によって相殺することができる。ただ、カレント自身がグラビティーノやディラティーノを含んでいるので単純に $J^\mu\psi_\mu$ のような相互作用では書けない。実際には上記の変分は $\mathcal{L}_{fFf}$ の δ_0 による変分で相殺されることがわかる。

あとは三点結合項のフェルミオンに対してゲージ場を含む変分を計算する必要がある。ただし、$\delta_H\mathcal{L}_{fHf}$ に対しては既に重力部分の計算に含まれているので改めて計算する必要はない。$\delta_F\mathcal{L}_{fFf}$ からは次のように F_2^A に対して 2 次の項が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_F\mathcal{L}_{fFf}}{2\pi} &= \frac{e}{4e^{2\varphi}}\Big[-(\psi_\mu\langle F\!\!\!/_2\gamma^\mu F\!\!\!/_2\rangle_5\xi) - (\lambda\langle F\!\!\!/_2F\!\!\!/_2\rangle_4\xi)\\
&\qquad + (\psi_\mu\langle F\!\!\!/_2\gamma^\mu F\!\!\!/_2\rangle_1\xi) + (\lambda\langle F\!\!\!/_2F\!\!\!/_2\rangle_0\xi)\Big]\\
&= \frac{ie}{4}\theta^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^AF_{\rho\sigma}^A + e\delta e^{\mu\widehat{m}}T_{\mu\widehat{m}}[F_2^A] + 2\delta\varphi\frac{\mathcal{L}_{FF}}{2\pi}
\end{aligned} \tag{18.38}$$

ただし、$T_{\mu\nu}[F_2^A]$ は次のエネルギー運動量テンソルである。

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{e^{2\varphi}}\left(F_{\mu\rho}^AF^A{}_\nu{}^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}^AF^{A,\rho\sigma}\right). \tag{18.39}$$

途中で公式 (12.64) を用いた。この変分のうち、1 行目は $F_2^A\wedge F_2^A$ を含む項であり、ゲージ場の導入による H_3 のビアンキ恒等式の変形によって重力部分から現れる変分 (18.30) とちょうど相殺する。2 項目は、エネルギー運動量テンソルを含み、F_2^A の運動項の多脚場による変分と相殺する。3 項目は F_2^A 運動項のディラトンの変分と相殺する。

F_2 と H_3 を両方含む変分は次のように与えられる。

$$\frac{\delta_H\mathcal{L}_{fFf}}{2\pi} = \frac{-ie}{32e^{2\varphi}}\left[\psi_\mu \not{F}_2\gamma^\mu\not{H}_3\xi+\psi_\mu\gamma^\nu\not{F}_2\gamma^\mu\not{H}_3\gamma_\nu\xi-\lambda\not{F}_2\not{H}_3\xi-\lambda\gamma^\mu\not{F}_2\not{H}_3\gamma_\mu\xi\right] \tag{18.40}$$

$$\frac{\delta_F\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi} = \frac{-ie}{32e^{2\varphi}}\left[\psi_\mu \not{H}_3\gamma^\mu\not{F}_2\xi+\psi_\mu\gamma^\nu\not{H}_3\gamma^\mu\not{F}_2\gamma_\nu\xi+\lambda\not{H}_3\not{F}_2\xi+\lambda\gamma^\mu\not{H}_3\not{F}_2\gamma_\mu\xi\right] \tag{18.41}$$

これら二つの和はほとんど相殺し、次の項だけが残る。

$$\frac{\delta_H\mathcal{L}_{fFf}}{2\pi}+\frac{\delta_F\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi}=i\frac{ie}{2e^{2\varphi}}(\psi_\mu\langle\not{F}_2\gamma^\mu\not{H}_3\rangle_0\xi)=-\frac{e}{e^{2\varphi}}H^{\mu\nu\rho}\delta V_\mu^A F_{\nu\rho}^A. \tag{18.42}$$

これは、ゲージ場が加わったことによって新たに現れる H_3 の変分 (18.29) によって H_3 の運動項を変分して得られる項 (18.31) と相殺する。

こうして（ここでは無視しているフェルミオンの高次の項を除き）すべての変分が相殺することが示された。

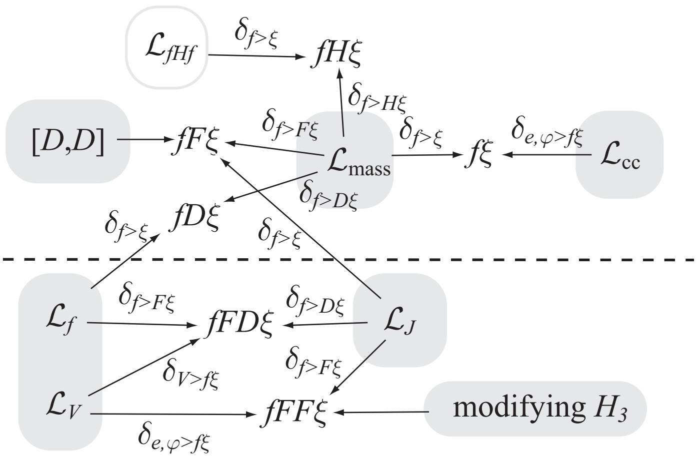

図 18.1: B_2 形式の 7 次元超重力理論の変分の相殺。

18.2.2　R-対称性のゲージ化

7 次元の超重力理論においては $\mathcal{N}=1$ であっても $\mathcal{N}=2$ であっても重力多重項はベクトル場を含んでいる。これらは R-対称性（$\mathcal{N}=1$ であれば $\mathrm{Sp}(1)_R$、$\mathcal{N}=2$ であれば $\mathrm{Sp}(2)_R$）の随伴表現に属している。これらはいずれも U(1) のゲージ場であるが、新たな相互作用項を導入することによって非アーベル群 $\mathrm{Sp}(k)_R$ のゲージ場であるとみなすこともできる。

作用、変換則中のすべての微分をゲージ場 V_μ^A に対して次のように共変微分化することによって、R-対称性をゲージ化することを考えよう。

$$D_\mu^{(g)}=\partial_\mu-ig_RV_\mu^A\sigma^A \tag{18.43}$$

$\cdots$ は重力についての接続を表す部分である。これと同時に (18.20) の場の強さの定義を次のように変更する。

$$F_2^A = dV_1^A + g_R\epsilon_{ABC}V_1^B\wedge V_1^C,\quad H_3 = dB_2 - \omega_3. \tag{18.44}$$

ただし、ω_3 はチャーン・サイモン 3 形式であり、SU(2) ゲージ場に対しては次のように定義される。

$$\omega_3 = V_1^A\wedge dV_1^A + \frac{2}{3}g_R\epsilon_{ABC}V^A\wedge V^B\wedge V^C. \tag{18.45}$$

g_R はゲージ結合定数であり、これを 0 にすればゲージ化されていない理論に戻る。この変更が先ほど与えた作用の不変性の証明にどのような影響を与えるかを調べてみると、フェルミオンの変分 (15.77) に含まれる共変微分の交換関係から新たに次の項が現れることがわかる。

$$[D_\mu^{(G,\omega)}, D_\nu^{(G,\omega)}] = \cdots - ig_RF_{\mu\nu}^A\sigma^A. \tag{18.46}$$

その結果、新たに次の変分が発生する。

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{2\pi} = \frac{ieg_R}{e^{2\varphi}}\left[(\psi_\mu\langle\gamma^\mu \not{F}_2\rangle_3\xi) + (\lambda\not{F}_2\xi)\right] \tag{18.47}$$

この変分を相殺するためには、フェルミオンの質量項を導入する必要がある。フェルミオンの質量項を $\lambda\lambda$、$\psi_\mu\gamma^\mu\lambda$、$\psi_\mu\psi^\mu$、$\psi_\mu\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu$ の線形結合として導入すれば、ゲージ場 F_2^A および H_3 を含む項が次の 6 種類現れる。

$$\psi_\mu\gamma^\mu\not{F}_2\xi,\quad \psi_\mu\not{F}_2\gamma^\mu\xi,\quad \lambda\not{F}_2\xi,\quad \psi_\mu\gamma^\mu\not{H}_3\xi,\quad \psi_\mu\not{H}_3\gamma^\mu\xi,\quad \lambda\not{H}_3\xi. \tag{18.48}$$

またこれらの項は、フェルミオンに対する新たな変分 $\delta\lambda\sim\xi$ や $\delta\psi_\mu\sim\gamma_\mu\xi$ を導入することによっても、既にある三点結合項の変分から現れる。フェルミオンの質量項が 4 つ、フェルミオンの新たな変分が 2 つあり、それらの係数 6 個を決める必要があるが、これは上記の 6 個の変分がちょうど (18.47) を相殺するという条件から決めることができる。この結果、次の質量項 $\mathcal{L}_{\rm mass}$ と $\delta'\lambda$ を同時に導入する必要があることがわかる。

$$\frac{\mathcal{L}_{\rm mass}}{2\pi} = \frac{eg_R}{2e^{2\varphi}}((\lambda\lambda) + 2(\psi_\mu\gamma^\mu\lambda) - (\psi_\mu\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu)). \tag{18.49}$$

$$\delta'\lambda = g_R\xi. \tag{18.50}$$

これらの項で同時に $fD\xi$ の形の項も相殺する必要があるがこれは自動的に成り立っていることが示される。最後に残されたのは、つぎの変分である。

$$\frac{\delta'\mathcal{L}_{\rm mass}}{2\pi} = \frac{eg_R^2}{e^{2\varphi}}[(\lambda\xi) + (\psi_\mu\gamma^\mu\xi)] \tag{18.51}$$

この変分は、次の宇宙項を導入すると、その多脚場およびディラトンの変分によって相殺することができる。

$$\frac{\mathcal{L}_{\rm cc}}{2\pi} = \frac{4g_R^2e}{e^{2\varphi}}. \tag{18.52}$$

18.2.3 B_3 形式

7 次元では、2-形式ゲージ場は双対変換によって 3-形式ゲージ場へ移る。このあとで 7 次元超重力理論の変形を考えるが、その場合には B_3 形式のほうが便利である。B_2 形式から B_3 形式へ移るために、場の強さ H_3 を独立変数とみなし、(18.29) のビアンキ方程式を与えるためのラグラ

Soryushiron Kenkyu

ンジュ未定係数として補助場 B_3 を導入する。すると、先ほど与えた作用の B_2 を含む部分は次のように書き換えることができる。

$$\frac{S}{2\pi}=\int\left[\frac{1}{2e^{2\varphi}}H_3\wedge *H_3-\frac{1}{e^{2\varphi}}H_3\wedge *\kappa_3+B_3\wedge(dH_3+F_2^A\wedge F_2^A)\right]. \tag{18.53}$$

B_3 についての運動方程式を解けばビアンキ方程式が得られ、もとの作用に戻る。そのかわり H_3 についての運動方程式を解けば、次の関係式を得る。

$$H_3=e^{2\varphi}*H_4+\kappa_3. \tag{18.54}$$

ただし、$H_4=dB_3$ である。この解を上記の作用に代入すると、双対場 B_3 に対する作用が得られる。

$$\frac{S}{2\pi}=\int\left[\frac{e^{2\varphi}}{2}H_4\wedge *H_4+H_4\wedge\kappa_3+B_3\wedge F_2^A\wedge F_2^A\right]. \tag{18.55}$$

こうして、次の作用、変換則が得られる。

B_3 形式の 7 次元超重力理論

フェルミオンの 4 次以上の項を無視すれば、作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{S^{(7)}}{2\pi} &= \int d^7x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{e^{2\varphi}}\left(R+4(\partial\varphi)^2-\frac{1}{2}F^A_{\mu\nu}F^{A,\mu\nu}\right)-\frac{e^{2\varphi}}{48}H_{\mu\nu\rho\sigma}H^{\mu\nu\rho\sigma}\right]\\ &\quad+\int B_3\wedge F_2^A\wedge F_2^A, &(18.56)\\ \frac{S_{fDf}}{2\pi} &= \int d^7x\frac{e}{2e^{2\varphi}}\left[\psi_\mu \not{D}^{(\omega)}\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu-\psi_\mu\not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\lambda-\lambda\not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\psi_\mu+\lambda\not{D}^{(\omega)}\lambda\right], &(18.57)\\ \frac{S_Y}{2\pi} &= \int H_4\wedge\kappa_3+\int d^7x\frac{e}{2e^{2\varphi}}F^{A,\mu\nu}\kappa^A_{\mu\nu}. &(18.58)\end{aligned}$$

場の強さ H_4 および F_2^A は次のように与えられる。

$$H_4=dB_3,\quad F_2^A=dV_1^A. \tag{18.59}$$

また、κ_3 および κ_2^A は (18.21) と (18.22) に与えられているものを用いる。それぞれの場に対する変換則は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\delta\lambda &= (\not{\partial}\varphi)\xi-\frac{e^{2\varphi}}{2}\not{H}_4\xi+\frac{i}{2}\not{F}_2^A\sigma^A\xi, &(18.60)\\ \delta\psi_\mu &= D_\mu^{(\omega)}\xi-\frac{e^{2\varphi}}{8}\{\gamma_\mu,\not{H}_4\}\xi+\frac{i}{4}[\gamma_\mu,\not{F}_2^A]\sigma^A\xi, &(18.61)\\ \delta e_\mu^{\widehat{m}} &= -\frac{1}{4}(\psi_\mu\gamma^{\widehat{m}}\xi), &(18.62)\\ \delta\varphi &= \frac{1}{8}(\overline{\lambda}\xi), &(18.63)\\ \delta V_\mu^A &= -\frac{i}{4}(\psi_\mu\sigma^A\xi), &(18.64)\\ \delta B_{\mu\nu\rho} &= -\frac{1}{4e^{2\varphi}}[(\psi_\mu\gamma_{\nu\rho}\xi)+(\psi_\nu\gamma_{\rho\mu}\xi)+(\psi_\rho\gamma_{\mu\nu}\xi)]-\frac{1}{4e^{2\varphi}}(\lambda\gamma_{\mu\nu\rho}\xi). &(18.65)\end{aligned}$$

双対場 B_3 に対する変換則は、11 次元超重力理論において A_3 の双対場 A_6 を決定したのと同じ方法で決定することができる。ここでは上記のようにとっておけば作用が超対称変換のもとで不変

Soryushiron Kenkyu

になることを示すにとどめよう。B_2 形式と B_3 形式の作用を比較すると、異なるのは次の部分である。

$$\frac{S[B_2]}{2\pi} = \int d^7x - \frac{e}{12e^{2\varphi}} H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}, \tag{18.66}$$

$$\frac{S[B_3]}{2\pi} = \int d^7x - \frac{ee^{2\varphi}}{48} H_{\mu\nu\rho\sigma}H^{\mu\nu\rho\sigma} + \int B_3 \wedge F_2^A \wedge F_2^A. \tag{18.67}$$

H_3 と H_2 は互いに $e^{2\varphi} * H_4 = H_3$ の関係にある。正確にはフェルミオンによる補正があるが、それはフェルミオンの高次の項を与えるだけなのでここでは無視する。それぞれの多脚場やディラトンによる変分は等しくなる。B_2 や B_3 による変分は次のようになる。

$$\frac{\delta S[B_2]}{2\pi} = \int (\theta_2 \wedge dH_4 + 2\delta V_1^A \wedge F_2^A \wedge H_4), \tag{18.68}$$

$$\frac{\delta S[B_3]}{2\pi} = \int (\theta_3 \wedge (dH_3 + F_2^A \wedge F_2^A) + 2\delta V_1^A \wedge F_2^A \wedge H_4). \tag{18.69}$$

ここで、$S[B_2]$ の変分には H_3 のビアンキ恒等式を用いることはできるが、H_4 のビアンキ恒等式を用いることはできず、$S[B_3]$ についてはその逆であることに注意しよう。それぞれで使用することができるビアンキ恒等式を用いれば、どちらも次のような形に変形することができる。

$$\frac{\delta S[B_2]}{2\pi} = \frac{\delta S[B_3]}{2\pi} = \int (\theta_2 \wedge dH_4 + \theta_3 \wedge (dH_3 + F_2^A \wedge F_2^A) + 2\delta V_1^A \wedge F_2^A \wedge H_4). \tag{18.70}$$

従って、B_2 形式の作用の変分が相殺することから、B_3 形式の作用の変分の相殺も結論することができる。

18.2.4 R-対称性のゲージ化と位相項の導入

ベクトル多重項を含まない 7 次元の単純超重力理論は、二つのパラメータによって変形できることが知られている。ひとつは $\mathrm{SU}(2)_R$ のゲージ結合係数 g_R である。すなわち、作用、変換則中のすべての微分をゲージ場 V_μ^A に対して次のように共変微分化することによって、R-対称性をゲージ化することができる。

$$D_\mu^{(G)} = \partial_\mu - ig_R V_\mu^A \sigma^A \tag{18.71}$$

g_R はゲージ結合定数であり、これを 0 にすればゲージ化されていない理論に戻る。$\cdots$ は重力についての接続を表す部分である。ただ、この変更の結果、作用の超対称変換から相殺されない新たな項が現れる。これは、フェルミオンの変分 (15.77) に含まれる共変微分の交換関係に、曲率テンソルだけではなくゲージ場 F_2^A に比例した次の項が現れるためである。

$$[D_\mu^{(G,\omega)}, D_\nu^{(G,\omega)}] = \cdots - ig_R F_{\mu\nu}^A \sigma^A. \tag{18.72}$$

この結果、新たに次の変分が発生する。

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{2\pi} = \frac{ieg_R}{e^{2\varphi}} \left[(\psi_\mu \langle \gamma^\mu \not{F}_2 \rangle_3 \xi) + (\lambda \not{F}_2 \xi) \right] \tag{18.73}$$

さらに、B_3 形式の 7 次元超重力理論には、すでにある $B_3F_2F_2$ 項以外に次の位相項を導入することができる。[69]

$$\frac{S_{\mathrm{top}}}{2\pi} = \frac{\zeta}{2} \int B_3 \wedge dB_3. \tag{18.74}$$

Soryushiron Kenkyu

ζ は任意の実数パラメータである。この項の超対称変換は次の変分を与える。

$$\frac{S_{\rm top}}{2\pi}=\zeta\int\theta_3\wedge H_4=\int d^7xe\left[\frac{\zeta}{4e^{2\varphi}}(\psi_\sigma\langle \not{H}_4\gamma^\sigma\rangle_5\xi)+\frac{\zeta}{4e^{2\varphi}}(\lambda\not{H}_4\xi)\right]. \tag{18.75}$$

g_R や ζ が 0 でない場合にもこれら二つの変分を相殺するために、作用と変換則を修正しよう。このような形の変分を相殺する方法はいくつか考えられる。たとえば、$e^{-4\varphi}(\psi\psi)$ の形の質量項を導入すると、その変分から上記の形の項が現れる。また、フェルミオンの変換則に $\delta\psi\sim e^{-2\varphi}\xi$ の形の項を付け加えても同様の項を得ることができる。

まず、フェルミオンの変換則を次のように変更してみよう。

$$\delta'\psi_\mu=\alpha\gamma_\mu\xi,\quad \delta'\lambda=\beta\lambda. \tag{18.76}$$

この新たな変換により、次の新たな変分が得られる。

$$\frac{\delta'\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi} = \frac{e}{8}\Big[(5\alpha-\beta)\overline{\psi}_\mu\gamma^\mu\not{H}_4\xi+(-\alpha+\beta)\overline{\psi}_\mu\not{H}_4\gamma^\mu\xi+(8\alpha-2\beta)\lambda\not{H}_4\xi\Big], \tag{18.77}$$

$$\frac{\delta'\mathcal{L}_{fFf}}{2\pi} = \frac{-ie}{4e^{2\varphi}}\Big[(-5\alpha+\beta)\overline{\psi}_\mu\gamma^\mu\not{F}_2\xi+(-3\alpha+\beta)\overline{\psi}_\mu\not{F}_2\gamma^\mu\xi+(-10\alpha+2\beta)\lambda\not{F}_2\xi\Big], \tag{18.78}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta'\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} &= \frac{e}{e^{2\varphi}}\Big[(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu}D^{(G,\omega)}_\nu(-5\alpha+\beta)\xi)+(\lambda\not{D}^{(G,\omega)}(-6\alpha+\beta)\xi)\\ &\quad+(5\alpha-\beta)(\psi_\mu\gamma^\mu(\not{\partial}\phi)\xi)+\alpha(\psi_\mu(\not{\partial}\phi)\gamma^\mu\xi)+(-5\alpha-\beta)(\lambda(\not{\partial}\phi)\xi)\Big]\end{aligned} \tag{18.79}$$

ここで、(18.79) の右辺一行目の微分は ξ だけではなく α や β にも作用することに注意。

次に、フェルミオンの質量項を導入してみよう。グラビティーノとディラティーノを用いれば、4 通りのローレンツ不変な二次形式を構成することができる。

$$\frac{\mathcal{L}_{\rm mass}}{2\pi}=e\Big[p(\psi_\mu\psi^\mu)+q(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu)+r(\psi_\mu\gamma^\mu\lambda)+s(\lambda\lambda)\Big]. \tag{18.80}$$

すると、この変分が次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\delta_H\mathcal{L}_{\rm mass}}{2\pi} &= \frac{ee^{2\varphi}}{8}\Big[(-2p-10q-4r)(\psi_\mu\gamma^\mu\not{H}_4\xi)+(-2p+2q)(\psi_\mu\not{H}_4\gamma^\mu\xi)\\ &\quad+(6r-8s)(\lambda\not{H}_4\xi)\Big],\end{aligned} \tag{18.81}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta_F\mathcal{L}_{\rm mass}}{2\pi} &= \frac{-ie}{4}\Big[(-2p-6q-2r)(\psi_\mu\gamma^\mu\not{F}_2\xi)+(2p-2q)(\psi_\mu\not{F}_2\gamma^\mu\xi)\\ &\quad+(4r-4s)(\lambda\not{F}_2\xi)\Big],\end{aligned} \tag{18.82}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta_0\mathcal{L}_{\rm mass}}{2\pi} &= e\Big[2p(\psi_\mu D^{(G,\omega)\mu}\xi)+2q(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu}D^{(G,\omega)}_\nu\xi)-r(\lambda\not{D}^{(G,\omega)}\xi)+r(\psi_\mu\gamma^\mu(\not{\partial}\phi)\xi)\\ &\quad+2s(\lambda(\not{\partial}\phi)\xi)\Big].\end{aligned} \tag{18.83}$$

未定係数は α、β、p、q、r、s の 6 個である。これらの変分が相殺するという条件は、変数の数よりも多いが、条件を満足する解がひとつだけ存在することがわかる。この解は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}&\alpha=-\frac{\zeta}{4e^{2\varphi}},\quad \beta=g_R-\frac{\zeta}{e^{2\varphi}},\\ &p=0,\quad q=-\frac{g_R}{2e^{2\varphi}}-\frac{\zeta}{8e^{4\varphi}},\quad r=\frac{g_R}{e^{2\varphi}}+\frac{\zeta}{2e^{4\varphi}},\quad s=\frac{g_R}{2e^{2\varphi}}+\frac{5\zeta}{8e^{4\varphi}}.\end{aligned} \tag{18.84}$$

$\mathcal{L}_{\rm mass}$ の δ' による変換はさらに次の変分を与える。

$$\frac{\delta'\mathcal{L}_{\rm mass}}{2\pi}=e\left(\frac{g_R^2}{e^{2\varphi}}+\frac{g_R\zeta}{e^{4\varphi}}-\frac{\zeta^2}{8e^{6\varphi}}\right)(\psi_\mu\gamma^\mu\xi)+e\left(\frac{g_R^2}{e^{2\varphi}}+\frac{2g_R\zeta}{e^{4\varphi}}-\frac{3\zeta^2}{8e^{6\varphi}}\right)(\lambda\xi). \tag{18.85}$$

この変分は、φ のある関数として与えられる宇宙項を用意しておけばその多脚場およびディラトン場の変分でちょうど相殺することができる。まとめると、

B_3 形式の 7 次元超重力理論の変形

7 次元超重力理論は微分の共変化

$$D_\mu^{(G)}=\partial_\mu-ig_RV_\mu^A\sigma^A. \tag{18.86}$$

によって R-対称性 $\mathrm{SU}(2)_R$ をゲージ化することができる。また、次の位相項を導入することができる。

$$\frac{S}{2\pi}=\frac{\zeta}{2}\int B_3\wedge dB_3. \tag{18.87}$$

二つのパラメータ g_R と ζ は任意の実数である。ただし、以下の修正が必要である。まず、上記の位相項のほかに、フェルミオンの質量項と宇宙項を作用に付け加える。

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}_{\rm mass}}{2\pi} &= \frac{eg_R}{e^{2\varphi}}\Big[-\frac{1}{2}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu)+(\psi_\mu\gamma^\mu\lambda)+\frac{1}{2}(\lambda\lambda)\Big]\\ &\quad+\frac{e\zeta}{e^{4\varphi}}\Big[-\frac{1}{8}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu)+\frac{1}{2}(\psi_\mu\gamma^\mu\lambda)+\frac{5}{8}(\lambda\lambda)\Big], \qquad (18.88)\\ \frac{\mathcal{L}_{\rm cc}}{2\pi} &= 4e\left(\frac{g_R^2}{e^{2\varphi}}+\frac{g_R\zeta}{e^{4\varphi}}-\frac{\zeta^2}{8e^{6\varphi}}\right). \qquad (18.89)\end{aligned}$$

さらに、フェルミオンの変換則に次の項を付け加える。

$$\delta'\psi_\mu=-\frac{\zeta}{4e^{2\varphi}}\gamma_\mu\xi,\quad \delta'\lambda=\left(g_R-\frac{\zeta}{e^{2\varphi}}\right)\xi. \tag{18.90}$$

B_2 形式でパラメータ ζ による変形が難しい理由について触れておこう。$\zeta\neq0$ である B_3 形式の理論から双対変換を逆にたどってみると、B_2 に対するゲージ場の強さを次のように定義すべきことがわかる。

$$H_3=dB_2-V_1^A\wedge F_2^A-\zeta B_3. \tag{18.91}$$

つまり、$\zeta\neq0$ の場合には、B_2 の場の強さの定義の中にその双対場 B_3 が現れてしまう。（これは 11 次元における双対場 A_6 の場の強さが A_3 を含んでいたのと似た状況である。）作用を定義するには B_2 か B_3 かどちらかを独立変数として選ぶ必要があるが、この理由によって $\zeta\neq0$ の場合には B_2 を独立変数として選ぶことができないのである。

ここで導入した二つのパラメータは、B_3 の規格化の変更を許せば、次の置き換えによってそれらのうちの一つを吸収することができる。

$$g_RV_1^A\to V_1^A,\quad \frac{1}{g_R^2}B_3\to B_3,\quad g_Re_\mu^{\widehat{m}}\to e_\mu^{\widehat{m}},\quad g_R^5e^{2\varphi}\to e^{2\varphi},\quad g_R^4\zeta\to m. \tag{18.92}$$

この結果、パラメータ m だけを含む次の作用が得られる。(ここではボゾン部分のみを書いておく。)

$$\begin{aligned}\frac{S}{2\pi} &= \int d^7xe\left[\frac{1}{e^{2\varphi}}\left(R+4(\partial\varphi)^2-\frac{1}{4}\mathrm{tr}_{\mathrm{fund}}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\right)-\frac{e^{2\varphi}}{48}H_{\mu\nu\rho\sigma}H^{\mu\nu\rho\sigma}\right]\\ &+\frac{1}{2}\int B_3\wedge\mathrm{tr}_{\mathrm{fund}}(F_2\wedge F_2)+\frac{m}{2}\int B_3\wedge H_4\\ &+\int d^7xe\left(\frac{4}{e^{2\varphi}}+\frac{4m}{e^{4\varphi}}-\frac{m^2}{2e^{6\varphi}}\right). \end{aligned} \tag{18.93}$$

18.3 11 次元超重力理論の $\mathbf{T}^4$ コンパクト化

11 次元の超重力理論を $\mathbf{T}^4$ でコンパクト化すると、$\mathcal{N}=2$ の超対称性をもつ理論が得られる。この理論は内部空間の回転を表す $\mathrm{SO}(4)=\mathrm{SU}(2)_1\times\mathrm{SU}(2)_2$ の対称性を持っている。(実際にはこの理論は対称性 SO(5) を持っており、この SO(4) はその部分群である。) この理論から、$\mathrm{Sp}(1)_2$ の一重項のみを残すことによって $\mathcal{N}=1$ の超重力理論のラグランジアン及び変換則を決定しよう。この理論は 3-形式テンソル場 B_3 を含んでいる。この形式は [70] において与えられた。

まずボゾン的場について考える。11 次元にあるボゾン的場は計量場 g_{MN} と三階反対称テンソル場 A_{MNP} である。$\mathrm{Sp}(1)'$ の一重項のみを残すと、これらの場は 7 次元の場を用いて次のように書くことができる。

$$ds_{11}^2=ds_7^2+e^{2\phi}\delta_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta,\quad A_3=B_3+V_1^A\wedge\eta_2^A. \tag{18.94}$$

ここで、η_2^A は 't Hooft の η 記号を用いて定義された次の 2-形式である。

$$\eta_2^A=\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}^A dx^\alpha\wedge dx^\beta. \tag{18.95}$$

$\eta_{\alpha\beta}^A$ は 't Hooft の記号であり、定数である。$\eta_{\hat{a}\hat{b}}^A$ は多脚場と $\eta_{\alpha\beta}^A$ から定義されるので定数ではないことに注意。場の強さ、およびその γ-行列との積については、次の式が成り立つ。

$$K_4=H_4+F_2^A\wedge\eta_2^A,\quad \not{K}_4=\not{H}_4+\frac{2i}{e^{2\phi}}\not{F}_2^A\sigma^A\frac{1+\gamma^5}{2}. \tag{18.96}$$

't Hooft の η 記号の定義、性質を次については A.6 に与えられている。これらの関係式を用いて 11 次元の超重力理論の作用 (13.12) のボゾン部分を全ての周期が 1 である $\mathbf{T}^4$ でコンパクト化した結果得られる作用を書き下してみよう。まず、ボゾンのみを含む項、すなわちボゾンの運動項とチャーンサイモン項からは次の作用が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{S^{(7)}}{2\pi} &= \int d^7x\sqrt{-g}\left[e^{4\phi}\left(R+12(\partial\phi)^2-\frac{1}{48}H_{\mu\nu\rho\sigma}H^{\mu\nu\rho\sigma}\right)-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^AF^{A,\mu\nu}\right]\\ &+\int B_3\wedge F_2^A\wedge F_2^A. \end{aligned} \tag{18.97}$$

公式 (A.137) を用いた。

次に、11 次元グラビティーノの運動項を見てみよう。11 次元スピン接続の 0 でない成分は二種類だけであり、公式 (A.128) と (A.132) より 7 次元の量を用いて次のように書く事ができる。

$$\Omega_{\hat{k}-\hat{m}\hat{n}}=\omega_{\hat{k}-\hat{m}\hat{n}},\quad \Omega_{\hat{a}-\hat{b}\hat{m}}=\delta_{\hat{a}\hat{b}}\partial_{\hat{m}}\phi. \tag{18.98}$$

これを用いれば、11 次元のグラビティーノの微分を 7 次元の場で書きかえることができる。まず、スピノルの微分は次のように書き換えられる。

$$D_\mu^{(11)}\xi=D_\mu\xi,\quad D_\alpha^{(11)}\xi=\frac{1}{2}\gamma_\alpha\gamma_5(\not{\partial}\phi)\xi. \tag{18.99}$$

Soryushiron Kenkyu

また、グラビティーノの微分については、x^μ による微分は、そのまま共変微分で表される。

$$D^{(11)}_\mu\psi_\nu = D_\mu\psi_\nu, \quad D^{(11)}_\mu\psi_\alpha = D_\mu\psi_\alpha. \tag{18.100}$$

x^α による微分は次のようにディラトンの微分を含む。

$$D^{(11)}_\alpha\psi_\mu = -(\partial_\mu\phi)\gamma^5\gamma_\alpha\lambda - \frac{1}{2}(\partial\!\!\!/\phi)\gamma^5\gamma_\alpha\psi_\mu, \quad D^{(11)}_\alpha\psi_\beta = g_{\alpha\beta}(\partial^\mu\phi)\psi_\mu + \frac{1}{2}(\partial\!\!\!/\phi)\gamma_\alpha\gamma_\beta\lambda. \tag{18.101}$$

フェルミオンは SO(4) に対して、スピノルの足が $(2,1)+(1,2)$ のように変換する。ベクトルの足が 7 次元方向を向いている場合、これらのうちの前者が残る。すなわち、11 次元の ψ_μ のうち ψ^a_μ が残る。ベクトルの足が SO(4) ベクトルの場合には $(1,2)+(2,1)+(3,2)+(2,3)$ となり、先頭の物だけが残る。7 次元のフェルミオンと 11 次元のフェルミオンの関係を次のように置く。

$$\psi^{(11)}_\mu = \psi'^{(7)}_\mu, \quad \psi^{(11)}_\alpha = \gamma_5\gamma_\alpha\lambda'^{(7)}. \tag{18.102}$$

これらの公式を用いて (13.12) のフェルミオンの運動項を書きなおすと次の作用を得る。

$$\frac{S}{2\pi} = -\frac{1}{2}\int d^{11}x\sqrt{-g}(\widetilde{\psi}_M\Gamma^{MNP}D_N\psi_P) = \frac{1}{2\pi}(S_{\rm kin} + S_{\partial\phi}), \tag{18.103}$$

ただし、$S_{\rm kin}$ は (18.100) を含む項を、$S_{\partial\phi}$ は (18.101) を含む項を表し次のようになる。

$$\frac{S_{\rm kin}}{2\pi} = -\frac{1}{2}\int d^7x\sqrt{-g}e^{4\phi}\left(\overline{\psi}'_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu\psi'_\rho - 4\overline{\psi}'_\mu\gamma^{\mu\nu}D_\nu\lambda' + 4\overline{\lambda}'\gamma^{\nu\rho}D_\nu\psi'_\rho - 12\overline{\lambda}'\gamma^\nu D_\nu\lambda'\right) \tag{18.104}$$

$$\frac{S_{\partial\phi}}{2\pi} = \int d^7x\sqrt{-g}e^{4\phi}\Big[2\overline{\psi}'_\mu\gamma^\mu(\partial^\nu\phi)\psi'_\nu + 2\overline{\psi}'_\mu\gamma^{\mu\nu}(\partial_\nu\phi)\lambda' + 6\overline{\psi}'_\mu(\partial^\mu\phi)\lambda'\Big]. \tag{18.105}$$

ここで次の変数変換を行う。

$$\psi'_\mu = \psi_\mu + 2\gamma_\mu\lambda', \quad \lambda' = -\frac{1}{6}\lambda, \tag{18.106}$$

この結果、上記の二つの作用は次のようになる。

$$\frac{S_{\rm kin}}{2\pi} = -\frac{1}{2}\int d^7x\sqrt{-g}e^{4\phi}\left(\overline{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu\psi_\rho - \overline{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}D_\nu\lambda + \overline{\lambda}\gamma^{\nu\rho}D_\nu\psi_\rho - \overline{\lambda}\gamma^\nu D_\nu\lambda\right), \tag{18.107}$$

$$\frac{S_{\partial\phi}}{2\pi} = \int d^7x\sqrt{-g}e^{4\phi}\Big[2\overline{\psi}_\mu\gamma^\mu(\partial^\nu\phi)\psi_\nu - \overline{\psi}_\mu\gamma^\mu(\partial\!\!\!/\phi)\lambda + 4\overline{\psi}_\mu(\partial^\mu\phi)\lambda\Big]. \tag{18.108}$$

最後に三点結合項であるが、$K_4 = H_4 + F_4$ を含む部分は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{S_{\rm Y}}{2\pi} &= \frac{ee^{4\phi}}{8}\Big[\overline{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^{[\mu}H\!\!\!/_4\gamma^{\nu]}\psi_\nu - \overline{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^\mu H\!\!\!/_4\lambda + \overline{\psi}_\mu\gamma_5H\!\!\!/_4\gamma^\mu\lambda - \overline{\lambda}\gamma_5H\!\!\!/_4\lambda\Big] \\ &+ \frac{ee^{2\phi}}{8}\Big[\overline{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^{[\mu}F\!\!\!/_4\gamma^{\nu]}\psi_\nu - \overline{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^\mu F\!\!\!/_4\lambda - \overline{\psi}_\mu\gamma_5F\!\!\!/_4\gamma^\mu\lambda - \overline{\lambda}\gamma_5F\!\!\!/_4\lambda\Big].\end{aligned} \tag{18.109}$$

次に、11 次元の変換則から出発して 7 次元における変換則を決定しよう。多脚場の変換則 (13.13) からは、7 次元の次の変換則を得ることができる。

$$\delta_{11}e^{\widehat{m}}_\mu = -\frac{1}{4}(\overline{\psi}_\mu\gamma^{\widehat{m}}\xi) - \frac{1}{12}(\lambda\gamma_\mu\gamma^{\widehat{m}}\xi), \quad \delta_{11}e^{\widehat{a}}_\alpha = \frac{1}{24}e^{\widehat{a}}_\alpha(\overline{\lambda}\xi) - \frac{1}{24}(\overline{\lambda}\gamma^{\widehat{a}}{}_{\widehat{b}}\xi)e^{\widehat{b}}_\alpha. \tag{18.110}$$

このうち二つ目の変換は $e^{\widehat{a}}_\alpha$ の非対角成分が 0 であるというゲージ固定条件を破ってしまうので、11 次元の超対称変換から得られる変換に加えてさらに 4 次元内部空間上の局所ローレンツ変換を行う必要がある。それに加えてさらに 7 次元部分に対しても次のように局所ローレンツ変換を行っておくと便利である。

$$\delta_{LL}e^{\widehat{a}}_\alpha = \frac{1}{24}(\overline{\lambda}\gamma^{\widehat{a}}{}_{\widehat{b}}\xi)e^{\widehat{b}}_\alpha, \quad \delta_{LL}e^{\widehat{m}}_\mu = -\frac{1}{24}(\overline{\lambda}\gamma^{\widehat{m}}{}_{\widehat{n}}\xi)e^{\widehat{n}}_\mu. \tag{18.111}$$

7 次元の超対称変換はこの二つの合成であり、$\delta_7 = \delta_{11} + \delta_{LL}$ で与えられる。この合成された超対称変換のもとで、ディラトン場および多脚場は次のように変換される。

$$\delta_7\phi = \frac{1}{24}(\overline{\lambda}\xi), \quad \delta_7 e_\mu^{\widehat{m}} = -\frac{1}{4}(\overline{\psi}_\mu\gamma^{\widehat{m}}\xi) - \frac{1}{12}(\lambda\xi)e_\mu^{\widehat{m}}. \tag{18.112}$$

この変換以外については、δ_{LL} はフェルミオンについて高次の項を与えるので無視することができる。

(13.15) に与えられているゲージ場 A_3 の変換則からは、7 次元のゲージ場についての次の二つの変換則を得ることができる。

$$\delta B_{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{4}[(\psi_\mu\gamma_{\nu\rho}\xi) + (\psi_\nu\gamma_{\rho\mu}\xi) + (\psi_\rho\gamma_{\mu\nu}\xi)] - \frac{1}{4}(\lambda\gamma_{\mu\nu\rho}\xi), \quad \delta V_\mu^A = -\frac{ie^{2\phi}}{4}(\psi_\mu\sigma^A\xi) \tag{18.113}$$

11 次元のフェルミオンの変換則は (13.13) に与えられているが、そこから 7 次元のフェルミオンの変換則を読み取ると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= 3(\not{\partial}\phi)\xi - \frac{1}{2}\not{H}_4\xi + \frac{1}{4}\not{F}_4\xi, & (18.114)\\ \delta\psi_\mu &= D_\mu\xi + \gamma_\mu(\not{\partial}\phi)\xi - \frac{1}{8}\{\gamma_\mu, \not{H}_4\}\xi + \frac{1}{8}[\gamma_\mu, \not{F}_4]\xi. & (18.115)\end{aligned}$$

さて、以上で 7 次元の超重力理論の作用と超対称変換が全て求まったわけであるが、さらに次のワイル変換を行っておくと式が簡単になる。

$$e_\mu^{\widehat{m}} \to e^{-2\phi}e_\mu^{\widehat{m}}, \quad \lambda \to e^{\phi}\lambda, \quad \psi_{\widehat{m}} \to e^{\phi}\psi_{\widehat{m}}, \quad \xi \to e^{-\phi}\xi. \tag{18.116}$$

この変換を作用、変換則に対して行うために便利な公式は、§A.8 に与えられている。これらの公式を用いて変換則と作用を書き直し、新しいディラトン場 φ を次の式によって導入すれば、前に与えた作用、変換則が得られる。

$$\varphi = 3\phi. \tag{18.117}$$

18.4　ヘテロ型超重力理論の $\mathbf{S}^3$ コンパクト化

18.4.1　SO(4) 一重項部分

ゲージ化された 7 次元の $\mathcal{N}=1$ 超重力理論は、10 次元のヘテロ型超重力理論を $\mathbf{S}^3$ でコンパクト化することによって構成することができる。[71, 72] 7 次元 $\mathcal{N}=1$ の超重力理論の R-対称性は SU(2) であるが、これは内部空間 $\mathbf{S}^3$ の対称性 $\mathrm{SO}(4) = \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$ の二つの SU(2) 因子のうちの片方からきている。ここでは $\mathrm{SU}(2)_R$ が 7 次元の R-対称性を表しているとしよう。この場合、もう片方の $\mathrm{SU}(2)_L$ に対しては一重項に属するモードのみを考えればよい。

ここではまず計算を簡単にするために、超対称性は考慮せずに $\mathrm{SU}(2)_R$ についても一重項であるセクターに注目しよう。この truncation は自動的に全てのフェルミオンを 0 にするので、明らかに超対称性は尊重されていない。このコンパクト化は §A.7.4 で例として挙げられているものと同じであるので、そこに与えられた公式を用いることができる。

SO(4) 不変性を用いると、$\mathbf{S}^3$ コンパクト化を表す計量は次のように置くことができる。

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(7)}dx^\mu dx^\nu + e^{2\rho}\widetilde{g}_{ij}dx^i dx^j. \tag{18.118}$$

ただし、$\mu,\nu = 0,\ldots,6$ はコンパクト化されていない 7 次元部分の、$i,j = 7,8,9$ は $\mathbf{S}^3$ 上の座標の添え字を表す。$\widetilde{g}_{ij}$ は半径が 1 の $\mathbf{S}^3$ 上の計量を表している。

反対称テンソル場に対しては、SO(4) 不変性より次のように置くことができる。

$$H_3^{(10)} = \frac{1}{6}H^{(7)}_{\mu\nu\rho}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho + \frac{N}{2\pi^2}\frac{1}{e^{3\rho}}e^{\hat{7}} \wedge e^{\hat{8}} \wedge e^{\hat{9}} \tag{18.119}$$

さらに SO(4) 不変性のためにディラトン場 ϕ は内部空間の座標 x^i に依らない。

§A.7.4 で説明されているように、半径の変動を表すモードは運動方程式と矛盾することなく定数 r_0 とおくことができる。そこでここでも $e^\rho = r_0$ のように定数におくことにしよう。$\mathbf{S}^3$ の半径 r_0 とフラックスの本数 N は公式 (A.146) で次のように与えられる。

$$N = 4\pi^2 r_0^2. \tag{18.120}$$

このように定義される r_0 は N 枚重なった NS5-ブレーンの地平面近傍での $\mathbf{S}^3$ の半径を与える。

このようにして、7 次元の理論は重力場 $g_{\mu\nu}$ と反対称テンソル場 $H^{(7)}_{\mu\nu\rho}$、そしてスカラー場 ϕ を含む理論を得る。その 7 次元での作用は次のようになる。

$$\frac{S}{2\pi} = \int d^7x \frac{e^{(7)}}{e^{2\varphi}}\left(R^{(7)} + 4(\partial\varphi)^2 + \frac{4}{r_0^2} - \frac{1}{12}H^2_{\mu\nu\rho}\right) \tag{18.121}$$

ただし 10 次元のディラトン場 ϕ の代わりに、7 次元での新たなディラトン場 φ を次の式によって定義した。

$$\frac{2\pi^2 r_0^3}{e^{2\phi}} = \frac{1}{e^{2\varphi}}. \tag{18.122}$$

作用 (18.121) は確かに 7 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論の B_2 形式での作用（(18.17) と (18.52) との和）の R-一重項部分に一致している。ただしパラメータ r_0 とゲージ結合定数 g_R の間の関係は

$$\frac{1}{r_0} = g_R \tag{18.123}$$

と与えられる。

18.4.2 左不変な群多様体によるコンパクト化

群多様体を内部空間とするコンパクト化を考えよう。$g \to gh_R$ をゲージ化すると、

$$\sigma = g^{-1}dg \to h_R^{-1}g^{-1}d(gh_R) = h_R^{-1}(\sigma + d)h_R \tag{18.124}$$

したがって、ゲージ場 A を導入し、その変換則を

$$A \to A' = h_R^{-1}(A + d)h_R \tag{18.125}$$

としておけば、共変化された σ として、σ^{cov} を次のように定義することができる。

$$\sigma^{\mathrm{cov}} = \sigma - A \tag{18.126}$$

変換則 (18.125) より共変微分 D、場の強さ F は次のように取るべきことがわかる。

$$D = d + A, \quad F = dA + A \wedge A. \tag{18.127}$$

場の強さを成分で書けば

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f_{abc}A^b_\mu A^c_\nu. \tag{18.128}$$

捩率を無視すればスピン接続は多脚場を用いて次のように表される。(1.110)

$$\omega_{\widehat{M}-\widehat{A}\widehat{B}}=\frac{1}{2}(-S^{\widehat{B}}_{\widehat{A}\widehat{M}}+S^{\widehat{A}}_{\widehat{B}\widehat{M}}-S^{\widehat{M}}_{\widehat{A}\widehat{B}}) \tag{18.129}$$

ただし、$S^{\widehat{A}}_{\widehat{M}\widehat{N}}$ は次のように定義される。

$$S^{\widehat{A}}_{\widehat{M}\widehat{N}}=e^M_{\widehat{M}}e^N_{\widehat{N}}(\partial_M e^{\widehat{A}}_N-\partial_N e^{\widehat{A}}_M). \tag{18.130}$$

まず、$X^{\widehat{A}}_{\widehat{M}\widehat{N}}$ の成分を計算してみよう。成分 $S^{\widehat{a}}_{\widehat{m}\widehat{n}}$ は (A.181) を用いれば次のように構造定数になることがわかる。

$$S^{\widehat{a}}_{\widehat{m}\widehat{n}}=-\frac{1}{k}f_{amn}. \tag{18.131}$$

次に、$S^{\widehat{a}}_{\mu\nu}$ を見てみよう。

$$S^{\widehat{a}}_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}=e^k_{\widehat{\mu}}e^l_{\widehat{\nu}}S^{\widehat{a}}_{kl}+e^\kappa_{\widehat{\mu}}e^\lambda_{\widehat{\nu}}S^{\widehat{a}}_{\kappa\lambda}=-kF^a_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} \tag{18.132}$$

となり、(18.128) のように定義されるゲージ場の強さに一致する。

$$S^{\widehat{a}}_{\widehat{\mu}\widehat{n}}=e^k_{\widehat{\mu}}e^l_{\widehat{n}}S^{\widehat{a}}_{kl}=-A^k_{\widehat{\mu}}f_{kna} \tag{18.133}$$

これら以外に 0 でない成分は、内部空間とは無関係な成分 $S^{\widehat{\alpha}}_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}$ である。

これらを用いれば、スピン接続の成分を簡単に計算することができる。まず、m 方向については

$$\omega_{\widehat{m}-\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}=\frac{k}{2}F^{\widehat{m}}_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}},\quad \omega_{\widehat{m}-\widehat{\alpha}\widehat{b}}=0,\quad \omega_{\widehat{m}-\widehat{a}\widehat{b}}=-\frac{1}{2k}f_{\widehat{m}\widehat{a}\widehat{b}}. \tag{18.134}$$

一方、μ 方向については

$$\omega_{\widehat{\mu}-\widehat{\alpha}\widehat{\beta}},\quad \omega_{\widehat{\mu}-\widehat{\alpha}\widehat{b}}=\frac{k}{2}F^{\widehat{b}}_{\widehat{\alpha}\widehat{\mu}},\quad \omega_{\widehat{\mu}-\widehat{a}\widehat{b}}=A^c_{\widehat{\mu}}f_{acb}. \tag{18.135}$$

これらの成分は全て内部空間の座標には依存しない。

最後に、これらを用いて曲率テンソルを計算しよう。曲率テンソルは次のように与えられる。

$$R_{\widehat{M}\widehat{N}-\widehat{A}\widehat{B}}=S^{\widehat{K}}_{\widehat{M}\widehat{N}}\omega_{\widehat{K}-\widehat{A}\widehat{B}}+\partial_{\widehat{M}}\omega_{\widehat{N}-\widehat{A}\widehat{B}}-\partial_{\widehat{N}}\omega_{\widehat{M}-\widehat{A}\widehat{B}}+\omega_{\widehat{M}-\widehat{A}\widehat{C}}\omega_{\widehat{N}-\widehat{C}\widehat{B}}-\omega_{\widehat{N}-\widehat{A}\widehat{C}}\omega_{\widehat{M}-\widehat{C}\widehat{B}} \tag{18.136}$$

この式中のスピン接続の微分は、全ての添え字が局所ローレンツ系のものを微分している。このテンソルが $\mathrm{SU}(2)_R$ ゲージ変換に対して共変量として振舞うことから、一つ、あるいは 3 つの 7 次元添え字を持つ成分は 0 になることがわかる。したがって独立なものは次の 3 つである。まず、全ての添え字が内部空間の方向を向いている場合には、(A.212) より、

$$R_{\widehat{m}\widehat{n}-\widehat{a}\widehat{b}}=\frac{1}{4k^2}f_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{k}}f_{\widehat{k}\widehat{a}\widehat{b}} \tag{18.137}$$

次に、内部空間の添え字とコンパクト化されていない方向の添え字が混ざった成分は次のように与えられる。

$$R_{\widehat{m}\widehat{\nu}-\widehat{a}\widehat{\beta}}=\frac{k^2}{4}F^a_{\widehat{\nu}\widehat{\gamma}}F^m_{\widehat{\gamma}\widehat{\beta}} \tag{18.138}$$

全ての添え字がコンパクト化されていない方向を向いている場合には

$$R_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}-\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}=R^0_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}-\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}+\frac{k^2}{2}F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F^a_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}-\frac{k^2}{4}F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\alpha}}F^a_{\widehat{\nu}\widehat{\beta}}+\frac{k^2}{4}F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\beta}}F^a_{\widehat{\nu}\widehat{\alpha}} \tag{18.139}$$

$R_{mn\alpha\beta}$ のような成分も 0 ではないが、ビアンキの第一恒等式を用いることで (18.138) で表すことができる。

これらを用いると、スカラー曲率は次のように与えられる。

$$R=R^0+\frac{1}{4k^2}f_{abc}f_{abc}-\frac{k^2}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \tag{18.140}$$

18.4.3 ゲージ場部分の導出

群多様体が $\mathbf{S}^3 = \mathrm{SU}(2)$ の場合を考えてみよう。生成子の規格化を次のように決めておく。

$$T_a^{\mathrm{fund}} = -\frac{i}{2}\tau_a, \quad f_{abc} = \epsilon_{abc} \tag{18.141}$$

群多様体上の座標を具体的に

$$g = e^{\phi T_z} e^{\theta T_x} e^{\psi T_z} \tag{18.142}$$

とおけば、σ_a は次のように与えられる。

$$\sigma_x = \sin\psi d\theta - \cos\psi \sin\theta d\phi, \quad \sigma_y = \cos\psi d\theta + \sin\psi \sin\theta d\phi, \quad \sigma_z = d\psi + \cos\theta d\phi. \tag{18.143}$$

場の強さは次のように与えられる。

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \epsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{18.144}$$

ここで用いている SU(2) ゲージ場は以前に用いていたものとは規格化が異なる。ここで用いる A^a_μ と以前に用いた V^a_μ は次の関係にある。

$$A^a_\mu = 2g_R V^a_\mu. \tag{18.145}$$

計量に対する anzats (18.118) は、$\mathrm{SU}(2)_R$ に対するゲージ不変性を要請すれば (18.126) を用いて次のように修正されなければならない。

$$ds^2 = g^{(7)}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{r_0^2}{4}\sum_{a=x,y,z}(\sigma_a - A^a)^2, \quad e^{\widehat{a}} = \frac{r_0}{2}\sigma_a - A^a. \tag{18.146}$$

すなわち、計量の非対角成分として SU(2) ゲージ場 A が現れる。これと同様に、H_3 についても変更しなければならないのであるが、その anzats をどのように置くべきかはすぐにはわからない。そこでまず SO(4) 1 重項のみが値を持つ背景上で 7 次元の超対称性がどのように現れるかを見てみよう。これを知っていると、超対称性が残るべしという条件を用いることで H_3 に対する anzats を決定することができる。

そういうわけで、まずはゲージ場 A が 0 である場合の $\mathbf{S}^3$ 上の Killing spinor 条件を調べよう。キリングスピノル方程式は

$$0 = \delta\psi_\mu = D_\mu\xi + \frac{1}{8}H_{\mu\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\xi = \partial_\mu\xi + \frac{1}{4}\left(\omega_{\mu-\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} + \frac{1}{2}H_{\mu\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\right)\gamma^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\xi. \tag{18.147}$$

であるが、(18.119) と (18.134) より

$$\omega_{\widehat{m}-\widehat{a}\widehat{b}} = -\frac{1}{r_0}\epsilon_{mab}, \quad H_3 = H_3^{(7)} + \frac{2}{r_0}e^{\widehat{x}} \wedge e^{\widehat{y}} \wedge e^{\widehat{z}}. \tag{18.148}$$

であり、これらを代入すると上記のスピン接続と反対称テンソル場の寄与がちょうど相殺することがわかる。したがって確かに超対称性が残っており、そのキリングスピノルはここで取っている局所ローレンツ座標系では定数スピノルとして与えられることが結論される。

ゲージ場が存在する場合には、スピン接続から新たな寄与 $\omega_{\widehat{m}-\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} = (k/2)F^m_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}$ が現れる。7 次元での超対称性が残るためには、Killing spinor 方程式 (18.147) 中でこの寄与を打ち消すように H_3 も変更する必要がある。そのためには、H_3 を次のように変更すればよい。

$$\begin{aligned} H_3^{(10)} &= H_3^{(7)} + \frac{2}{r_0}e^{\widehat{x}} \wedge e^{\widehat{y}} \wedge e^{\widehat{z}} - \frac{r_0}{2}e^{\widehat{a}} \wedge F_2^a \\ &= H_3^{(7)} + \frac{r_0^2}{4}\Big[\omega_3 + d(\sigma^a \wedge A^a) + \sigma_x \wedge \sigma_y \wedge \sigma_z\Big] \end{aligned} \tag{18.149}$$

Soryushiron Kenkyu

ただし ω_3 は次のように定義される Chern-Simons form である。

$$\omega_3 = A^a \wedge F_2^a - A^x \wedge A^y \wedge A^z = A^a \wedge dA^a + \frac{1}{3}\epsilon_{abc} A^a \wedge A^b \wedge A^c \tag{18.150}$$

このように与えられた $H_3^{(10)}$ はビアンキ恒等式 $dH_3^{(10)} = 0$ を満足していなければならない。このことから 7 次元の反対称テンソル場に対するビアンキ恒等式 $d[H_3^{(7)} + (r_0^2/4)\omega_3] = 0$ が得られ、$H_3^{(7)}$ はポテンシャル B_2 を用いて次のように与えられる。

$$H_3^{(7)} = dB_2 - \frac{r_0^2}{4}\omega_3. \tag{18.151}$$

対応関係 (18.123) や (18.145) を用いて書き換えるとこの $H_3^{(7)}$ は (18.44) に与えたものと同じであることがわかる。

こうして、計量および反対称テンソル場に対してどのような anzats を置けばよいかが決定した。あとはこれらを作用に代入すれば、7 次元の超重力理論のボゾン部分の作用を得ることができる。スカラー曲率と反対称テンソル場の運動項からはそれぞれ次の寄与が得られる。

$$R = R^{(7)} - \frac{r_0^2}{16}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{6}{r_0^2}, \quad -\frac{1}{12}(H_3^{(10)})^2 = -\frac{1}{12}(H_3^{(7)})^2 - \frac{r_0^2}{16}(F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{2}{r_0^2}. \tag{18.152}$$

したがって、7 次元の作用は次のように与えられる。

$$\frac{S}{2\pi} = \int d^7x \frac{e^{(7)}}{e^{2\varphi}} \left(R^{(7)} + 4(\partial\varphi)^2 + \frac{4}{r_0^2} - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}^2 - \frac{r_0^2}{8}(F_{\mu\nu}^a)^2 \right) \tag{18.153}$$

(18.123) や (18.145) をもちいて r_0 と A_μ^a を g_R と V_μ^a で書きなおせば、これは確かに以前に与えた 7 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論のボゾン部分（(18.17) と (18.52) との和）に一致している。

18.4.4　超対称性

10 次元の超対称変換が正しく 7 次元の超対称変換を再現することをフェルミオンの変換則について確認しておこう。R-対称性がゲージ化された 7 次元超重力理論の超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta\psi_\mu = D_\mu\xi + \frac{1}{8}H_{\mu\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\xi + \frac{ir_0}{4}F_{\mu\alpha}^a\gamma^\alpha\sigma^a\xi, \tag{18.154}$$

$$\delta\lambda = (\not{\partial}\varphi)\xi + \frac{1}{2}\not{H}_3 + \frac{ir_0}{4}\not{F}_2^a\sigma^a\xi + \frac{1}{r_0}\xi. \tag{18.155}$$

ただし、対応関係 (18.123) や (18.145) を用いて g_R や V_μ^a を r_0 と A_μ^a によって書きかえた。変換パラメータ ξ は $\mathrm{SU}(2)_R$ 二重項であるから、ψ_μ の変換則中の微分は重力と SU(2) ゲージ場の両方に対する共変微分である。ここでは SU(2) の生成子を (18.141) のようにとっているから共変微分は次のように与えられる。

$$D_\mu\xi = \partial_\mu\xi - \frac{i}{2}A_\mu^a\tau_a\xi + \frac{1}{4}\omega_{\mu-\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\gamma^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\xi. \tag{18.156}$$

10 次元の γ-行列 Γ^M を次のように 7 次元の γ 行列と内部空間の 3 次元の γ 行列を用いて分解しよう。

$$\Gamma^{\widehat{\mu}} = \tau_x \otimes \mathbf{1} \otimes \gamma^{\widehat{\mu}}, \quad \Gamma^{\widehat{a}} = -\tau_y \otimes \tau_a \otimes \mathbf{1}, \quad \Gamma^{\widehat{11}} = \tau_z \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \tag{18.157}$$

まず、10 次元における共変微分は

$$\begin{aligned} D^{(10)}_{\widehat{\mu}}\xi &= \partial_{\widehat{\mu}}\xi + \frac{1}{4}\omega_{\widehat{\mu}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\Gamma^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\xi + \frac{1}{4}\omega_{\widehat{\mu}\widehat{a}\widehat{b}}\Gamma^{\widehat{a}\widehat{b}}\xi + \frac{1}{2}\omega_{\widehat{\mu}\widehat{\alpha}\widehat{b}}\Gamma^{\widehat{\alpha}\widehat{b}}\xi \\ &= \partial_{\widehat{\mu}}\xi + \frac{1}{4}\omega_{\widehat{\mu}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\Gamma^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\xi - \frac{i}{2}A^{\widehat{c}}_{\widehat{\mu}}\tau_c\xi + \frac{ir_0}{8}F^b_{\widehat{\mu}\widehat{\alpha}}\gamma^{\widehat{\alpha}}\tau^b\xi \\ &= D^{(7)}_{\widehat{\mu}}\xi + \frac{ir_0}{8}F^b_{\widehat{\mu}\widehat{\alpha}}\gamma^{\widehat{\alpha}}\tau^b\xi. \end{aligned} \tag{18.158}$$

一方、$\cancel{H}^{(10)}_3$ の寄与は (18.149) を用いれば、

$$\frac{1}{8}H^{(10)}_{\widehat{\mu}\widehat{A}\widehat{B}}\Gamma^{\widehat{A}\widehat{B}}\xi = \left(\frac{1}{8}H^{(7)}_{\widehat{\mu}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\Gamma^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} - \frac{r_0}{8}F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}\Gamma^{\widehat{\nu}\widehat{a}}\right)\xi = \left(\frac{1}{8}H^{(7)}_{\widehat{\mu}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\gamma^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} + \frac{ir_0}{8}F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}\gamma^{\widehat{\nu}}\tau^a\right)\xi. \tag{18.159}$$

ただし、スピン接続に対する公式 (18.135) や、γ-行列に対する次の関係式を用いた。

$$\Gamma^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\xi = \gamma^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\xi, \quad \epsilon_{\widehat{c}\widehat{a}\widehat{b}}\Gamma^{\widehat{a}\widehat{b}}\xi = 2i\tau_c\xi, \quad \Gamma^{\widehat{\alpha}\widehat{b}}\xi = -i\gamma^{\widehat{\alpha}}\tau^b\xi \tag{18.160}$$

これらの式を加えると、7 次元の変換則が再現される。

ディラティーノについても同様である。(18.149) より次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cancel{H}^{(10)}_3\xi &= \left(\frac{1}{12}H^{(7)}_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\rho}}\Gamma^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\rho}} + \frac{1}{r_0}\Gamma^{\widehat{7}\widehat{8}\widehat{9}} - \frac{r_0}{8}F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}\Gamma^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}a}\right)\xi \\ &= \left(\frac{1}{2}\cancel{H}^{(7)}_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\rho}} + \frac{1}{r_0} + \frac{ir_0}{4}\cancel{F}^a_2\tau^a\right)\xi \end{aligned} \tag{18.161}$$

ここで、10 次元の γ 行列と 7 次元の γ 行列およびパウリ行列の間の次の関係式を用いた。

$$\Gamma^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\rho}} = \gamma^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\rho}}, \quad \Gamma^{\widehat{7}\widehat{8}\widehat{9}} = 1, \quad \Gamma^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}a} = -i\gamma^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}\tau^a. \tag{18.162}$$

これを用いれば、ディラティーノの変換則も正しく再現される。

18.5 古典解

18.5.1 線形ディラトン解

ここでは B_2 形式の $\mathcal{N}=1$ 超重力理論のいくつかの単純な古典解を、Killing spinor 条件を用いて求める。これらはどれも NS5-ブレーンの地平面近傍と解釈することもできる。まずはもっとも簡単な例として、ある 1 次元の座標 r にのみ場が依存しており、それ以外の座標については 6 次元のポアンカレ対称性が存在する場合を考えてみよう。この場合、次の anzats をおくことができる。

$$ds^2 = a^2(r)\eta_{ij}dx^i dx^j + dr^2, \quad \varphi = \varphi(r), \quad H_3 = F^a_2 = 0. \tag{18.163}$$

この場合、$\delta\psi_\mu$ が 0 になるという条件は $D_\mu\xi = 0$ と書けるが、ゲージ場が 0 であるから D_μ は通常の共変微分である。したがって、$D_\mu\xi = 0$ の解が存在するためには背景は平坦でなければならず、$a(r) = 1$ と決定される。ディラトン場 $\varphi(r)$ の関数形は $\delta\lambda = 0$ から得られる次の微分方程式を解くことで得られる。

$$\delta\lambda = \gamma^{\widehat{r}}(\partial_r\varphi)\xi + \frac{1}{r_0}\xi = 0. \tag{18.164}$$

Soryushiron Kenkyu

ここで、r の向きを適当に取ることによって $\gamma^{\hat{r}}\xi = xi$ を満足するようにしよう。これはこの解が 1/2 BPS であることを意味している。この式に非自明な解が存在するためにはディラトン場が次のように与えられなければならない。

$$\varphi(r) = -\frac{r}{r_0}. \tag{18.165}$$

この解を 10 次元へ持ち上げると、NS5-ブレーン解の地平面近傍の構造を表していることがわかる。

18.5.2 ディラックモノポール解

次に、$\mathrm{SU}(2)_R$ ゲージ場 F_2^a のうちのある U(1) 部分のみに注目し、ディラックモノポールを表す解を構成してみよう。規格化は (18.141) によって与えられているが、これによれば $\exp 4\pi T_3 = 1$ によって量子化条件が決定される。すなわち、ゲージ場は次の量子化条件を満足する。

$$\int F_2^3 = 4\pi Q, \quad Q \in \mathbf{Z}. \tag{18.166}$$

さらに、$\mathbf{S}^2$ 上でスピノルが定義されるためには接空間束のねじれとゲージ束の捩れが相殺される必要がある。これは $Q = \pm 1$ であることを要求する。Q の符号は SU(2) のゲージ変換を用いれば反転させることができるので、どちらかに固定することができる。ここでは $+1$ に取っておこう。anzats は次のようにおくことができる。

$$\begin{aligned} &ds^2 = a^2(r)\eta_{ij}dx^i dx^j + dr^2 + b^2(r)d\Omega_2^2, \quad \varphi = \varphi(r), \\ &F^z_{\widehat{\theta}\widehat{\phi}} = \frac{1}{b^2}, \quad F_2^x = F_2^y = H_3 = 0. \end{aligned} \tag{18.167}$$

$\delta\psi_i = 0$ と $\delta\psi_r = 0$ に注目すると、これらは x^i と r によって張られる 5 次元空間が平坦であることを要求している。従って、関数 a は $a(r) = 1$ と決定される。

具体的に $\mathbf{S}^2$ 上に次の座標を導入しよう。

$$d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \tag{18.168}$$

このとき、$\mathbf{S}^2$ 上のスピン接続とゲージ場は次のように書くことができる。

$$\omega_{\widehat{\phi}\widehat{\theta}} = \cos\theta d\phi, \quad A^3 = -\cos\theta d\phi \tag{18.169}$$

これらを用いて $\delta\psi_\theta$ と $\delta\psi_\phi$ をあらわに書き下すと、次の式を得る。

$$\delta\psi_\theta = \partial_\theta\xi + \frac{1}{2}\gamma^{\widehat{\theta}\widehat{r}}(b' + \frac{ir_0}{2b}\gamma^{\widehat{r}\widehat{\theta}\widehat{\phi}}\sigma_3)\xi, \tag{18.170}$$

$$\delta\psi_\phi = \partial_\phi\xi + \frac{1}{2}\cos\theta\gamma^{\widehat{\phi}\widehat{\theta}}(1 + i\gamma^{\widehat{\theta}\widehat{\phi}}\tau_3)\xi + \frac{1}{2}\sin\theta\gamma^{\widehat{\phi}\widehat{r}}(b' + \frac{ir_0}{2b}\gamma^{\widehat{r}\widehat{\theta}\widehat{\phi}}\sigma_3)\xi. \tag{18.171}$$

まず、$\delta\psi_\theta$ が消えるためには、ξ が定数であり、次の式が成り立てばよい。

$$(1 + i\gamma^{\widehat{\theta}\widehat{\phi}}\tau_3)\xi = 0, \tag{18.172}$$

さらにこのとき $\delta\psi_\phi$ が消えるには次の式が成り立つ必要がある。

$$(b' - \frac{r_0}{2b}\gamma^{\widehat{r}})\xi = 0 \tag{18.173}$$

したがって、ξ は $\gamma^{\hat{r}}$ の固有スピノルである必要があるが、この固有値をそのまま $\gamma^{\hat{r}}$ と書くと、関数 b は次のように与えられる。

$$b^2(r) = \gamma^{\hat{r}} r_0 r \tag{18.174}$$

ただし、r の原点をずらすことで積分定数を吸収した。b^2 は常に正でなければならないから、$\gamma^{\hat{r}}$ の値によって r が正の側か負の側の片方だけが許される。そこで、座標 r の向きを適当にとって r が正の側で $b^2 > 0$ となるようにしよう。これは $\gamma^{\hat{r}} = 1$ と取ることと等価である。このことと、先ほどの条件 (18.172) より、この解が 1/4 BPS であることがわかる。

さらに、ディラトン場について $\delta\lambda = 0$ より微分方程式

$$\delta\lambda = \partial_r \varphi - \frac{r_0}{4b^2} + \frac{1}{r_0} \tag{18.175}$$

が得られるから、積分すれば次の解を得る。

$$\varphi = \frac{1}{4}\log r - \frac{r}{r_0} + c. \tag{18.176}$$

ただし c は積分定数である。ここで得られた解はその中心部分 $r = 0$ において φ が発散し、計量も特異になっている。これはそもそもディラックモノポールを考えているのであるから当然の結論である。実際、A^3_μ 以外のゲージ場の成分を用いて、中心部分を 't Hooft Polyakov モノポールに置き換えればこれらの特異性は消滅する。

18.5.3 SU(2) モノポール解

次に、$\mathrm{SU}(2)_R$ ゲージ群をフルに使って 't Hooft-Polyakov モノポールの解を構成しよう。[73]

ゲージ群を U(1) から SU(2) に持ち上げて r が大きいところで先ほどの解に漸近する 't Hooft-Polyakov モノポールを表すためにゲージ場を次のようにおこう。

$$A^1 = g(r)d\theta, \quad A^2 = -g(r)\sin\theta d\phi, \quad A^3 = -\cos\theta d\phi. \tag{18.177}$$

対応する場の強さは次のように与えられる。

$$F^1 = g' dr \wedge d\theta, \quad F^2 = -g' \sin\theta dr \wedge d\phi, \quad F^3 = (1-g^2)\sin\theta d\theta \wedge d\phi. \tag{18.178}$$

計量と H_3 の形は次のように仮定する。

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r) d\Omega_2^2, \quad H_3 = 0. \tag{18.179}$$

これらを用いると、グラビティーノの変換則は次のように与えられる。

$$\delta\psi_r = \partial_r \xi + \frac{ir_0}{4}\frac{g'}{f}(\gamma^{\hat{\theta}}\tau_x - \gamma^{\hat{\phi}}\tau_y), \tag{18.180}$$

$$\begin{aligned}\delta\psi_\theta = {} & \partial_\theta \xi \\ & + \frac{1}{2}(-ig\tau_x\xi + f'\gamma^{\widehat{\theta r}}\xi) + \frac{ir_0}{4}\left(-g'\gamma^{\hat{r}}\tau_x\xi + \frac{1-g^2}{f}\gamma^{\hat{\phi}}\tau_z\xi\right),\end{aligned} \tag{18.181}$$

$$\begin{aligned}\delta\psi_\phi = {} & \partial_\phi \xi + \frac{1}{2}\cos\theta(i\tau_z\xi - \gamma^{\widehat{\theta\phi}}\xi) \\ & + \frac{1}{2}\sin\theta(ig\tau_y\xi - f'\gamma^{\widehat{r\phi}}\xi) + \frac{ir_0}{4}\sin\theta\left(g'\gamma^{\hat{r}}\tau_y\xi - \frac{1-g^2}{f}\gamma^{\hat{\theta}}\tau_z\xi\right).\end{aligned} \tag{18.182}$$

r が大きいところでは前に考えたディラックモノポール解に漸近すると仮定しているから、無限遠での Killing spinor ξ_0 は次の式を満足する定数スピノルである。

$$-i\gamma^{\widehat{\theta\phi}}\tau_z\xi_0=\xi_0,\quad \gamma^{\widehat{r}}\xi_0=\xi_0. \tag{18.183}$$

ここで考えている SU(2) モノポール解が 1/4 BPS 解であり、(18.183) 以上に超対称性を破らないことを仮定しよう。有限の r でのキリングスピノルは方程式 $\delta\psi_r=0$ を解くことにより、次のように与えられる。

$$\xi(r)=\exp\frac{-ih(r)}{2}(\gamma^{\widehat{\theta}}\tau_x-\gamma^{\widehat{\phi}}\tau_y)\xi_0=(\cos h-i\gamma^{\widehat{\theta}}\tau_x\sin h)\xi_0. \tag{18.184}$$

ここで関数 $h(r)$ を次のように定義した。

$$h'(r)=\frac{r_0g'}{2f},\quad h(\infty)=0. \tag{18.185}$$

キリングスピノル (18.184) を (18.181) と (18.182) に代入すれば、次の式を得る。

$$\delta\psi_\theta=-iA(r)\tau_x\xi_0+B(r)\gamma^{\widehat{\theta}}\xi_0,\quad \delta\psi_\phi=\sin\theta(iA(r)\tau_y\xi_0+B(r)\gamma^{\widehat{\phi}}\xi_0). \tag{18.186}$$

ただし $A(r)$ と $B(r)$ は次のように定義される。

$$A(r) = \left(\frac{1}{2}g+\frac{r_0}{4}g'\right)\cos h-\left(\frac{1}{2}f'+\frac{r_0}{4}\frac{1-g^2}{f}\right)\sin h, \tag{18.187}$$

$$B(r) = \left(-\frac{1}{2}g+\frac{r_0}{4}g'\right)\sin h+\left(\frac{1}{2}f'-\frac{r_0}{4}\frac{1-g^2}{f}\right)\cos h \tag{18.188}$$

(18.186) の二つの変分が 0 になるためには、$A(r)=B(r)=0$ である必要がある。この微分方程式を解くと次の解が得られる。[73]

$$f^2=r_0r\coth\frac{2r}{r_0}-\frac{r^2}{\sinh^2\frac{2r}{r_0}}-\frac{r_0^2}{4},\quad g=\frac{\frac{2r}{r_0}}{\sinh\frac{2r}{r_0}}. \tag{18.189}$$

ディラティーノの変換則を見てみよう。anzats を代入すると、次のように与えられる。

$$\delta\lambda=\gamma^{\widehat{r}}(\partial\varphi)\xi+\frac{ir_0}{4}\left(\frac{g'}{f}\gamma^{\widehat{r}\widehat{\theta}}\tau_x-\frac{g'}{f}\gamma^{\widehat{r}\widehat{\phi}}\tau_y+\frac{1-g^2}{f^2}\gamma^{\widehat{\theta}\widehat{\phi}}\tau_z\right)\xi+\frac{1}{r_0}\xi. \tag{18.190}$$

これに (18.184) を代入すれば、

$$\begin{aligned}\delta\lambda &= \left((\partial\varphi)\cos h+\frac{r_0}{2}\frac{g'}{f}\sin h-\frac{r_0}{4}\frac{1-g^2}{f^2}\cos h+\frac{1}{r_0}\cos h\right)\xi_0\\ &\quad +i\left((\partial\varphi)\sin h-\frac{r_0}{2}\frac{g'}{f}\cos h+\frac{r_0}{4}\frac{1-g^2}{f^2}\sin h-\frac{1}{r_0}\sin h\right)\gamma^{\widehat{\theta}}\tau_x\xi_0\end{aligned} \tag{18.191}$$

ここからは次の二つの式を得ることができる。

$$\partial_r\varphi=\left(\frac{r_0}{4}\frac{1-g^2}{f^2}-\frac{1}{r_0}\right)\cos(2h),\quad \frac{r_0}{2}\frac{g'}{f}=\left(\frac{r_0}{4}\frac{1-g^2}{f^2}-\frac{1}{r_0}\right)\sin(2h). \tag{18.192}$$

これらのうち二つ目は、$A(r)$ と $B(r)$ の線形結合であり、自動的に 0 になる。一つ目の式は次のように書き換えることができる。

$$\varphi'=h'\frac{\cos(2h)}{\sin(2h)}=\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\log(\sin(2h)) \tag{18.193}$$

したがって、積分すると次の式を得る。

$$e^{2\varphi} = e^{2\varphi_0} \sin(2h) \tag{18.194}$$

ここで与えられた解を、[71, 72] に与えられている 10 次元超重力理論と 7 次元超重力理論の関係を用いて 10 次元の解として考えると、$\mathbf{S}^2$ に巻きついた NS5-brane の近傍を表していると考えられる。[74]。

18.5.4 $\mathbf{AdS}_7$

今度は位相項を含む B_3 形式の 7 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論の $\mathbf{AdS}_7$ 古典解を求めよう。ここではゲージ場の成分は全て 0 であるとし、ディラトンの値は場所によらず一定であるとする。

$$\frac{\mathcal{L}}{2\pi} = \frac{1}{e^{2\varphi}}(R + 4(\partial\varphi)^2 + f(\varphi)) \tag{18.195}$$

ただし、宇宙項を表わす関数 $f(\varphi)$ は次のように与えられる。

$$f(\varphi) = 4\left(g_R^2 + \frac{g_R\zeta}{e^{2\varphi}} - \frac{\zeta^2}{8e^{4\varphi}}\right). \tag{18.196}$$

アインシュタイン方程式とディラトンの運動方程式は次のように与えられる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R+f) + 2\nabla_\mu\partial_\nu\varphi - 2g_{\mu\nu}\nabla^2\varphi + 2g_{\mu\nu}(\partial\varphi)^2 = 0, \tag{18.197}$$

$$R = 4(\partial\varphi)^2 - 4(\nabla^2\varphi) - f + \frac{1}{2}\frac{df}{d\varphi}. \tag{18.198}$$

ここで、ディラトンが一定であることを用いれば、次の式が得られる。

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\frac{df}{d\varphi}g_{\mu\nu}, \quad f + \frac{5}{4}\frac{df}{d\varphi} = 2\left(g_R - \frac{\zeta}{e^{2\varphi}}\right)\left(2g_R - \frac{\zeta}{e^{2\varphi}}\right) = 0. \tag{18.199}$$

二つ目の式より、取りうるディラトンの値には $e^{-2\varphi} = g_R/\zeta$ と $e^{-2\varphi} = 2g_R/\zeta$ の二つがあることがわかる。それぞれに対してリッチテンソルは $R_{\mu\nu} = -(3/2)g_R^2$ と $R_{\mu\nu} = -2g_R^2$ であり、$\mathbf{AdS}_7$ であるとすればその半径はそれぞれ $r_0 = 2/g_R$ と $r_0 = \sqrt{3}/g_R$ である。これらのうち、前者だけが超対称性を残す。このことは $\delta\lambda$ の変換則をみることによってわかる。

$$\delta\lambda = (\partial\!\!\!/\varphi)\xi + \left(g_R - \frac{\zeta}{e^{2\varphi}}\right)\xi. \tag{18.200}$$

ディラトン φ が定数であれば、右辺第 2 項が 0 でなければならないが、これから直ちに $e^{2\varphi} = \zeta/g_R$ を得る。また、グラビティーノの変換則は次のようになる。

$$\delta\psi_\mu = D_\mu\xi - \frac{1}{2r_0}\gamma_\mu\xi. \tag{18.201}$$

ただし、$r_0 = 2/g_R$ を用いた。背景が半径 r_0 の $\mathbf{AdS}_7$ であれば、この微分方程式は 8 個の独立な解を持つ。すなわち、この背景上では 8 個の大域的超対称性が破れずに残っている。

18.5.5 5-ブレーン解

次の anzats から出発しよう。

$$ds^2 = a^2(y)dx_6^2 + dy^2. \tag{18.202}$$

キリングスピノル方程式は

$$\frac{a'}{2a}\gamma_i\gamma_6\xi - \frac{\zeta}{4e^{2\varphi}}\gamma_i\xi = 0, \quad \varphi'\gamma_6\xi + \left(g_R - \frac{\zeta}{e^{2\varphi}}\right)\xi = 0. \tag{18.203}$$

ここで、$\gamma_6\xi = \xi$ の部分が大域的超対称性を表わすとしよう。このとき非自明な ξ に対する解が存在するためには次の条件が満足されることが必要である。

$$\frac{a'}{a} = \frac{\zeta}{2e^{2\varphi}}, \quad \varphi' = -\left(g_R - \frac{\zeta}{e^{2\varphi}}\right). \tag{18.204}$$

この解は次のように与えられる。

$$e^{2\varphi} = e^{-2g_R(y-y_0)} + \frac{\zeta}{g_R}, \quad a = a_0\left(g_R + \zeta e^{2g_R(y-y_0)}\right)^{1/4}. \tag{18.205}$$

y_0 と a_0 は積分定数である。まず、y_0 が実数の場合を考えると、座標変換によって次のように書く事ができる。

$$e^{2\varphi} = e^{-2g_R y} + \frac{\zeta}{g_R}, \quad ds^2 = \left(\frac{g_R}{\zeta} + e^{2g_R y}\right)^{1/2} dx_6^2 + dy^2. \tag{18.206}$$

この解は $e^{2g_R y}$ と g_R/ζ の大小関係で二つの領域に分けることができる。y が非常に大きいところでは次の解に漸近する。

$$e^{2\varphi} = \frac{\zeta}{g_R}, \quad ds^2 = e^{g_R y}dx_6^2 + dy^2. \tag{18.207}$$

これは半径 $r = 2/g_R$ の $\mathbf{AdS}_7$ を表わしており、M5-ブレーンの地平面近傍を表わしているとみなすことができる。一方、y が非常に小さい（負で絶対値が大きい）ところでは、解は次の形に漸近する。

$$\varphi = -g_R y, \quad ds^2 = dx_6^2 + dy^2. \tag{18.208}$$

これはディラトンが座標に線形に依存しており、NS5-ブレーンの地平面近傍を表わしているとみなすことができる。

18.6 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論

ここでは $\mathcal{N}=2$ の理論がもつ大域的対称性について考えよう。$\mathcal{N}=2$ の理論は 11 次元の超重力理論を $\mathbf{T}^4$ でコンパクト化するか、IIA 型超重力理論を $\mathbf{T}^3$ でコンパクト化することで構成することができる。IIA 型超重力理論は 11 次元超重力理論の $\mathbf{S}^1$ コンパクト化として構成することができるため、11 次元の超重力理論から出発したほうが対称性が見やすいと思うかもしれないが必ずしもそうではない。それは、IIA 型超重力理論は弦理論として解釈できるので、ローレンツ対称性 SO$(1,9)$ が右回り部分と左回り部分に作用する二つの群の積 SO$(1,9)^2$ の部分群として表されるからである。そこで以下ではこの両方の観点から 7 次元超重力理論の対称性をみてみよう。

まず、11 次元超重力理論を $\mathbf{T}^4$ コンパクト化したものとして 7 次元の理論を捕らえてみよう。この場合、内部空間の $\mathbf{T}^4$ の対称性として内部対称性 SO(4) が現れる。(図 18.2)

Soryushiron Kenkyu

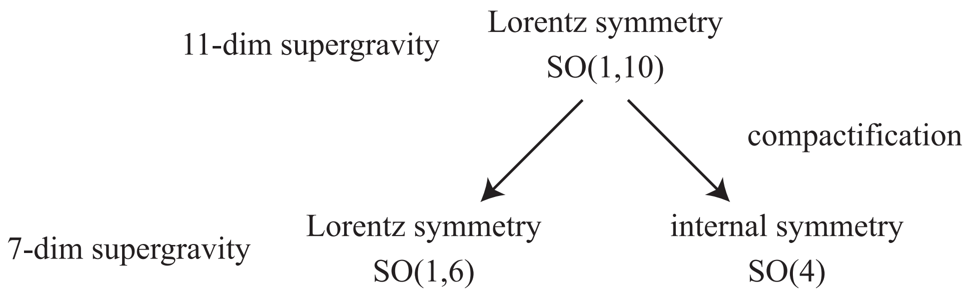

図 18.2: 11 次元超重力理論と 7 次元超重力理論の対称性の関係

次に 10 次元の IIA 型超重力理論から出発した場合を考えよう。この場合、一旦この理論を IIA 型の超弦理論として解釈すると便利である。これは閉弦の理論であり、ローレンツ対称性 $\mathrm{SO}(1,9)$ は弦上の場の左回り部分に作用するものと右回り成分に作用するものの二つに分けて考えることができるため、対称性は $\mathrm{SO}(1,9)^2$ となる。ただしこの対称性は外場の真空期待値によってその対角的部分群 $\mathrm{SO}(1,9)$ に破れている。時空を $\mathbf{T}^3$ でコンパクト化すると、それぞれの $\mathrm{SO}(1,9)$ 因子が $\mathrm{SO}(1,6)\times\mathrm{SO}(3)$ にわかれる。従って、7 次元超重力理論の内部対称性は先ほどと同じ $\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)\sim\mathrm{SO}(4)$ となる。（図 18.3）

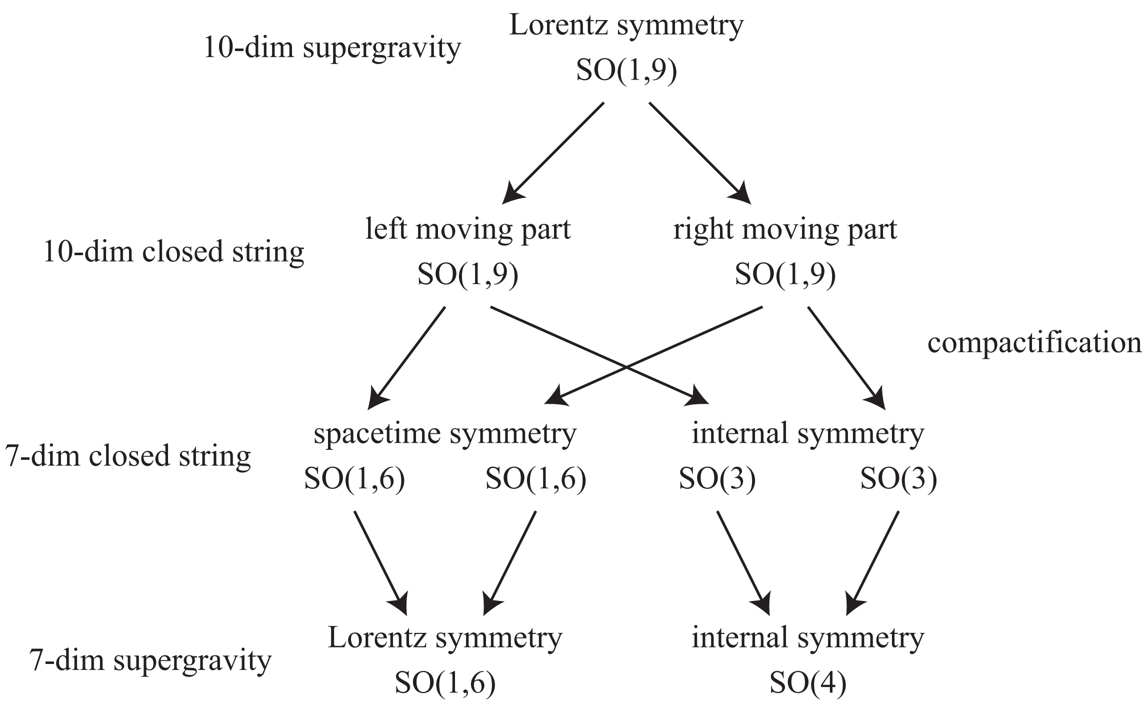

図 18.3: 10 次元超重力理論と 7 次元超重力理論の対称性の関係

このように、どちらのコンパクト化においても、内部対称性 $\mathrm{SO}(4)$ が明白になっている。しかし実はこの二つの $\mathrm{SO}(4)$ は同じものではなく、コンパクト化の過程ではあらわに見ることができない $\mathrm{Sp}(2)\sim\mathrm{SO}(5)$ 対称性の異なる部分群である。例えば、7 次元の 2-形式場を調べてみよう。11 次元超重力理論を $\mathbf{T}^4$ でコンパクト化した場合、$A_{\mu\nu\alpha}$ が 4 つ、双対変換によって 2-形式場となる $A_{\mu\nu\rho}$ が一つの、あわせて 5 つがある。ここで $\mathrm{SO}(4)$ のベクトル表現に属する $A_{\mu\nu\alpha}$ は 10

次元の IIA 型超重力理論の立場では R-R 3 形式場の $C_{\mu\nu\alpha}$ 成分と NS-NS 2 形式場 $B_{\mu\nu}$ である。そして R-R 3 形式場の $C_{\mu\nu\rho}$ が一重項に属する。一方、IIA 型超重力理論をコンパクト化して得られる SO(4) 対称性について考えると、この対称性は NS-NS 場と R-R 場を混ぜないから、R-R 3 形式場の $C_{\mu\nu\alpha}$ 成分と $C_{\mu\nu\rho}$ 成分がベクトル表現を成し、NS-NS 2 形式場 $B_{\mu\nu}$ が一重項を成す。このことから、7 次元超重力理論は実際には SO(5) の対称性を持ち、5 つの 2-形式場が 5 次元ベクトル表現に属すると結論することができる。

実際に 11 次元の超重力理論を 4 次元トーラス $\mathbf{T}^4$ を用いて 4 次元分コンパクト化することによって $\mathcal{N}=2$ の 7 次元超重力理論の多重項を構成してみよう。

超対称変換のパラメータは 11 次元ではマヨラナスピノルである。7 次元のスピノル表現は擬実である。従って、スピノルの最小単位はシンプレクティックマヨラナスピノル ξ^a $(a=1,2)$ であり、ξ^1 と ξ^2 はそれぞれ 8 成分ディラックスピノルである。11 次元のスピノルは、7 次元では二つのシンプレクティックマヨラナスピノル ξ^a と $\xi^{\dot{a}}$ とに分解される。内部空間の回転対称性を表す二つの Sp(1) 因子の二重項の添え字をそれぞれ点無し及び点付きの添え字を用いて表すことにする。

11 次元超重力理論には、グラビティーノ、重力、三階反対称テンソル場がある。これらの場が $\mathbf{T}^4$ コンパクト化によってどのように分解されるかをまとめたのが表 18.2 である。これらは、内

表 18.2: 11 次元超重力理論の $\mathbf{T}^4$ コンパクト化

11 dim	7 dim	SO(1,6)	$\mathrm{Sp}(1)_A \times \mathrm{Sp}(1)_B$	$\mathrm{Sp}(2)_R$
ψ_M	ψ^a_μ	gravitino	$(2,1)$	4
	$\psi^{\dot{a}}_\mu$	gravitino	$(1,2)$	
	ψ^a_α	fermion	$(1,2)+(3,2)$	16
	$\psi^{\dot{a}}_\alpha$	fermion	$(2,1)+(2,3)$	
g_{MN}	$g_{\mu\nu}$	gravity	$(1,1)$	1
	$g_{\mu\alpha}$	vector	$(2,2)$	10
	$g_{\alpha\beta}$	scalar	$(1,1)+(3,3)$	14
A_{MNP}	$A_{\mu\nu\rho}$	2-form	$(1,1)$	5
	$A_{\mu\nu\alpha}$	2-form	$(2,2)$	
	$A_{\mu\alpha\beta}$	vector	$(1,3)+(3,1)$	
	$A_{\alpha\beta\gamma}$	scalar	$(2,2)$	

部空間 $\mathbf{T}^4$ の回転対称性に相当する $\mathrm{Sp}(1)_A \times \mathrm{Sp}(1)_B$ の多重項に属している。しかし詳しく作用を調べてみると、この理論は Sp(2) の R-対称性を持っており、$\mathbf{T}^4$ の回転対称性として見えている $\mathrm{Sp}(1)_A \times \mathrm{Sp}(1)_B$ はその部分群であることがわかる。実際表 18.2 にもあるように、全ての場は Sp(2) の多重項にまとめることができる。

$\mathcal{N}=2$ の超重力理論にはここで得られた重力多重項のみが存在する。(表 18.3)従って、いくつかのパラメータを変更できるということを除き、理論はほぼ一意的に決まる。$\mathcal{N}=1$ の多重項に分解すれば、重力多重項を一つ、$\mathrm{Sp}(1)'$ の 2 重項に属するグラビティーノ多重項、$\mathrm{Sp}(1)'$ の三重項に属するベクトル多重項からなる。

スカラー場は SO(5) の **14** 表現、すなわちトレースが 0 である対称テンソルの表現に属している。実は、ここで考えている超重力理論は SU(5) の隠れた対称性を持っており、これらのスカラー

Soryushiron Kenkyu

表 18.3: 7 次元 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論の多重項。

multiplet	field	little group	$\mathrm{Sp}(2)_R$	d.o.f.
gravity multiplet	$g_{\mu\nu}$	14	1	14
	$B_{\mu\nu}$	10	5	50
	ϕ	1	14	14
	ψ_μ	16	4	64
	ψ	4	16	64
	A_μ	5	10	50

場は多様体 $\mathrm{SU}(5)/\mathrm{SO}(5)$ 上に値を取る。

$$(g_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta\gamma}) \to \phi_{\widetilde{ij}} \in \mathrm{SU}(5)/\mathrm{SO}(5). \tag{18.209}$$

第19章　6 次元超重力理論

19.1　スピノル、ディラック行列、外微分形式

6 次元でのスピノルおよび γ 行列の性質をまとめておこう。スピノルのディラック共役は次のように定義する。

$$\overline{\psi} = i\psi^\dagger\gamma^0. \tag{19.1}$$

6 次元の荷電共役行列 C_6 は次の関係式を満足する。

$$C_6^T = +C_6, \quad C_6(\gamma_6^\mu)^T = -\gamma_6^\mu C_6. \tag{19.2}$$

6 次元ではこの C_6 を用いて定義される荷電共役演算 $\psi \to C\overline{\psi}$ を二回続けて行うとマイナス符号が現れる。すなわち 6 次元のスピノル表現は擬実（実負）である。これはマヨラナスピノルを定義することができないことを意味している。しかし、スピノルをいくつか用意し、それらが別の群の擬実な表現に属していれば、全体として実の表現となり、実条件を課すことができる。そのような付加的な擬実表現として、Sp(k) の **2k** 表現を取る事ができる。**2k** 表現の添え字を $a, b, \ldots$ で表し、この表現に属するスピノルを ψ^a としよう。この場合、次のように荷電共役演算を定義する。

$$\psi_c^a = J^{ab}C\overline{\psi}_b. \tag{19.3}$$

ただし、J^{ab} は Sp(k) の反対称不変テンソルであり、次の性質を満足する。

$$J^{ab}J_{bc}^* = -\delta_c^a. \tag{19.4}$$

この性質のために、荷電共役演算 (19.3) を 2 回繰り返して行ったときに余分な -1 因子が現れ、全体としてもとに戻る。したがって、この荷電共役演算に対して不変であるという実条件を課すことができる。そのようにして定義されたスピノルをシンプレクティックマヨラナスピノルと呼ぶ。

スピノルの 2 次形式を作る場合、ディラック共役を用いて $\overline{\eta}\chi$ のように作る方法と荷電共役行列を用いて $\eta C^{T-1}\chi$ のように作る方法の二つがある。荷電共役行列を用いる場合、C はしばしば省略される。すなわち $\eta\chi \equiv \eta C^{T-1}\chi$ である。これらの 2 次形式は次の性質を満足する。

$$(\eta\chi) = \eta C_6^{T-1}\chi = -(\chi\eta), \quad (\overline{\eta}\chi)^\dagger = (\overline{\chi}\eta). \tag{19.5}$$

二つのフェルミオンの間に γ-行列を挟めば転置、エルミート共役どちらの場合にも γ-行列それぞれからマイナス符号が現れる。たとえば、γ-行列がひとつ挟まれている場合にはつぎの公式が成り立つ。

$$(\eta\gamma^\mu\chi) = (\chi\gamma^\mu\eta), \quad (\overline{\eta}\gamma^\mu\chi)^\dagger = -(\overline{\chi}\gamma^\mu\eta). \tag{19.6}$$

特に、スピノルがシンプレクティックマヨラナである場合を考えよう。Sp(k) の添え字を $a, b, \ldots$ とし、二つのシンプレクティックマヨラナスピノルを η^a および χ^b とする。実際には η^a に作用

する Sp 群と χ^b に作用する Sp 群は同じものでなくてもよいのであるが、ここでは特に区別しない。上で述べた 2 種類の 2 次形式は次のように関係している。

$$(\eta^a\chi^b) = J^{ac}(\overline{\eta}_c\chi^b) \tag{19.7}$$

この 2 次形式は次の性質を満足する。

$$(\eta^a\chi^b) = -(\chi^b\eta^a), \quad (\overline{\eta}_a\chi^b)^\dagger = (\overline{\chi}_b\eta^a). \tag{19.8}$$

さらに、(19.7) と (19.8) を組み合わせることによって 2 次形式が次の実条件を満足していることが示される。

$$(\eta^a\chi^b)^* = J^*_{ac}J^*_{bd}(\eta^c\chi^d) \tag{19.9}$$

さらに次のように二つの添え字が縮約されている場合には 2 次形式は実になる。

$$(\overline{\eta}_a\chi^a)^* = (\overline{\eta}_a\chi^a) \tag{19.10}$$

(19.8) の関係式とは異なり、(19.9) や (19.10) の両辺の相対符号は J の符号の定義に依存する。

フィルツ変換は次のように与えられる。以下の公式中のスピノルはすべて（シンプレクティックマヨラナではない）ワイルスピノルである。

$$\chi^L\overline{\eta}^R = -\frac{1}{4}\left[(\overline{\eta}^R\chi^L)\mathbf{1}_4 - \frac{1}{2}(\overline{\eta}^R\gamma_{\mu\nu}\chi^L)\gamma^{\mu\nu}\right]^L{}_L, \tag{19.11}$$

$$\chi^L\overline{\eta}^L = -\frac{1}{4}\left[(\overline{\eta}^L\gamma_\mu\chi^L)\gamma^\mu - \frac{1}{6}(\overline{\eta}^L\gamma_{\mu\nu\rho}\chi^L)\gamma^{\mu\nu\rho}\right]^L{}_R. \tag{19.12}$$

L と R をすべて入れ替えた同様の式も成り立つ。(19.12) を用いれば、次の式も成り立つ。

$$(\overline{\phi}^L\gamma^\alpha\chi^L)(\overline{\eta}^L\gamma_\alpha\psi^L) = (\overline{\eta}^L\gamma^\alpha\chi^L)(\overline{\phi}^L\gamma_\alpha\psi^L). \tag{19.13}$$

さらに、スピノルがシンプレクティックマヨラナワイルである場合、次のものは任意のスピノルの入れ替えに対して不変である。

$$(\phi^{L,a}\gamma^\alpha\chi^{L,b})(\eta^{L,c}\gamma_\alpha\psi^{L,d}) = (\eta^{L,c}\gamma^\alpha\chi^{L,b})(\phi^{L,a}\gamma_\alpha\psi^{L,d}) = (\chi^{L,b}\gamma^\alpha\phi^{L,a})(\eta^{L,c}\gamma_\alpha\psi^{L,d}) \tag{19.14}$$

6 次元の完全反対称テンソル $\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_6}$ と γ-行列の間の関係を次のように設定しよう。

$$\gamma^{\mu_1\cdots\mu_6}\gamma^7 = \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_6}. \tag{19.15}$$

左辺は複素共役に対して不変であるから、ϵ-テンソルの成分は ±1 のどちらかである。符号をどのように取るかは特に指定しない。完全反対称テンソルと関連して、外微分形式の積分を次のように定義する。

$$\int a_6 = \int \frac{\mathrm{tr}}{8}(\not{a}_6\gamma^7) = \int \frac{1}{6!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_6}a_{\mu_1\cdots\mu_6}. \tag{19.16}$$

ただし a_6 は任意の 6-形式であり、$\not{a}_6$ は γ 行列との積 $\not{a}_6 = (1/6!)\gamma^{\mu_1\cdots\mu_6}a_{\mu_1\cdots\mu_6}$ を表している。後ろ二つの表式が一致することは、定義 (19.15) による。Hodge 双対を次のように定義する。

$$(*A)_{\mu_1\cdots\mu_{6-n}} = \frac{1}{n!}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_{6-n}\nu_1\cdots\nu_n}A^{\nu_1\cdots\nu_n} \tag{19.17}$$

この定義を用いれば、ゲージ場の運動項としてしばしばあらわれる二つの n-形式 A_n と B_n の内積の積分を次のように表すことができる。

$$\int \frac{1}{n!}A_{\mu_1\cdots\mu_n}B^{\mu_1\cdots\mu_n} = (-)^{n+1}\int A_n\wedge *B_n. \tag{19.18}$$

3-形式については自己双対場および反自己双対場を定義することができる。

$$\not{h}_3^\pm = \frac{1}{2}(1\pm\gamma^7)\not{h}_3, \quad *h_3^\pm = \pm h_3^\pm. \tag{19.19}$$

Soryushiron Kenkyu

19.2 $\mathcal{N}=(1,0)$ 超重力理論の多重項

10 次元から 7 次元までの全ての次元において、最小のスピノルの成分の数は実で数えて 16 である。したがって、それらの次元における超重力理論は 10 次元の超重力理論をコンパクト化することで得られるものと基本的に同じである。(実は R-対称性がゲージ化された超重力理論を考えるには 6 次元よりも 7 次元の超重力理論を考えるのが便利である。これについては後で詳しく述べる。) そこで、新たな構造が現れる 6 次元時空での超重力理論について考えてみる。具体的に作用、変換則を与える前に、6 次元にはどのような種類の超重力理論が存在し、それらにどのような多重項が含まれるのかをまとめておこう。

6 次元のスピノルの最小単位はシンプレクティックマヨラナワイルスピノルである。6 次元の超対称性は、シンプレクティックマヨラナワイルスピノルで数えていくつあるかによって $\mathcal{N}=(N_L,N_R)$ のように表される。N_L と N_R はそれぞれ左巻きおよび右巻きのシンプレクティックマヨラナワイルスピノルがいくつあるかを表すスピノルである。このとき R-対称性は $\mathrm{Sp}(N_L)\times\mathrm{Sp}(N_R)$ であり、超対称電荷はそれぞれの $\mathrm{Sp}(N)$ 因子の $2N_L$ 表現及び $2N_R$ 表現に属している。従って、実のワイルスピノルで数えれば、それぞれのカイラリティの超対称電荷の個数は $2N_L$ と $2N_R$ である。そのため、しばしば $\mathcal{N}=(2N_L,2N_R)$ のように表現する場合もある。ここでは 2 倍しないほうの表現を用いることにする。

6 次元の超重力理論としては $(1,0)$、$(1,1)$、$(2,0)$、$(2,2)$ の 4 種類が存在する。(もちろん $(0,1)$ や $(0,2)$ も存在するが、パリティ変換によって $(1,0)$ や $(2,0)$ と等価であるからここでは特に区別しない。) まずは $\mathcal{N}=(1,0)$ 理論について詳しく見ていこう。

超対称電荷はシンプレクティックマヨラナワイルであるために、超対称性の個数がもっとも少ない場合であっても $\mathrm{Sp}(1)_R$ の R-対称性がある。そこで R-対称性とヘリシティによって場を分類するのが便利である。

零質量粒子の運動量を $k^\mu=(E,0,0,0,0,E)$ と固定しよう。このときヘリシティは 4 次元空間 $(x^1,\dots,x^4)$ 上の回転対称性 $\mathrm{SO}(4)\sim\mathrm{SU}(2)_1\times\mathrm{SU}(2)_2$ によって分類される。6 次元 γ-行列をパウリ行列と 4 次元 γ 行列を用いて

$$\Gamma^0=-i\sigma_y\otimes\mathbf{1}_4,\quad \Gamma^5=\sigma_x\otimes\mathbf{1}_4,\quad \Gamma^i=\sigma_z\otimes\gamma^i. \tag{19.20}$$

線形化された運動方程式に従うスカラー場 ϕ とフェルミオン場 ψ^R の間の超対称変換を考えよう。変換パラメータを ξ^L とする。ψ^R と ξ^L の 6 次元でのカイラリティは右巻きと左巻きであるとする。線形化された運動方程式の解は次のように与えられる。

$$\phi(x)\sim e^{ikx},\quad \psi^R(x)\sim u^Re^{ikx}. \tag{19.21}$$

フェルミオンに対する運動方程式は $(\Gamma^0-\Gamma^5)u^R=0$ を与える。これは $(\sigma_z\otimes\mathbf{1}_4)u^R=u^R$ を意味する。質量次元の比較から、線形化された変換則は次のように与えられると予想される。

$$\delta\phi\sim\overline{\xi}^L\psi^R,\quad \delta\psi^R\sim\partial\!\!\!/\phi\xi^L. \tag{19.22}$$

ξ^L を、σ_z の正の固有ベクトル ξ^L_+ と負の固有ベクトル ξ^L_- に分解しよう。u^L についても同様に $u^L_\pm$ に分解すると運動方程式より $u^L_-=0$ である。この変換則の中には ξ^L_- のみが現れている。これは零質量粒子が超対称代数の「短い表現」に属しているためである。ヘリシティに対する超対称変換は

$$\delta\phi\sim\xi^L_-u^R_+,\quad \delta u^R_+\sim\phi\xi^L_-. \tag{19.23}$$

Soryushiron Kenkyu

4 次元のカイラリティ γ^5 と 6 次元のカイラリティΓ^7 の間の関係は $\Gamma^7=\sigma_z\otimes\gamma^5$ であるから、ξ^L_- と u^R_+ はどちらも同じ 4 次元のカイラリティを持っていることに注意しよう。つまり、どちらもヘリシティ $(1,2)$ を持っている。

同様の考察を 6 次元の超対称多重項に含まれる全ての粒子に行うと、表 19.1 のようになる。

表 19.1: 6 次元 $\mathcal{N}=(1,0)$ 超重力理論の多重項。より多くの超対称性をもつ理論においてはこれらのうちのいくつかが組み合わさってより大きな多重項をなす。

multiplet	field	little group	$\mathrm{Sp}(1)_R$	d.o.f.
gravity multiplet	$g_{\mu\nu}$	$(3,3)$	1	9
	ψ^L_μ	$(3,2)$	2	12
	$B^+_{\mu\nu}$	$(3,1)$	1	3
gravitino(R) multiplet	ψ^R_μ	$(2,3)$	1	6
/2	A_μ	$(2,2)$	2	8
	ψ^L	$(2,1)$	1	2
tensor multiplet	$B^-_{\mu\nu}$	$(1,3)$	1	3
	λ'^R	$(1,2)$	2	4
	φ	$(1,1)$	1	1
gravitino(L) multiplet	ψ^L_μ	$(3,2)$	1	6
/2	$B^+_{\mu\nu}$	$(3,1)$	2	6
vector multiplet	A_μ	$(2,2)$	1	4
	λ^L	$(2,1)$	2	4
hyper multiplet	ψ^R	$(1,2)$	1	2
/2	ϕ	$(1,1)$	2	2

表中のスピノルは全てシンプレクティックマヨラナワイルスピノルである。6 次元のスピノル表現は実負であるから、マヨラナ条件を課す事ができるためにはスピノルはローレンツ対称性とは異なる別の対称性の実負表現に属していなければならない。ある場合にはこれは $\mathrm{Sp}(1)_R$ 対称性の 2 表現であるが、そうでない場合には超対称性とは直接関係の無い大域的対称性の実負表現に属していなければならない。表 19.1 においてはそのような対称性は無視している。表中で /2 と書いてある多重項は実際にはほかの対称性の多重項に属しており、常に偶数個が組になって表れる。

この表からもわかるように、それぞれの 6 次元超対称多重項内の粒子は全て $\mathrm{SU}(2)_1$ の同じ表現、3、2、1 の 3 つの表現のうちのどれかに属している。$\mathrm{SU}(2)_2\times\mathrm{Sp}(1)_R$ については、$3\times1+2\times2+1\times1$ と $2\times1+1\times2$ の二つのパターンがある。これらの組み合わせとして、$\mathcal{N}=(1,0)$ 超重力理論には 6 つの多重項が存在する。これら 6 つのうち、二つのグラビティーノ多重項はしばしば無視される。それは、このような多重項を含む超重力理論は通常より大きな超対称性を持っているので、$\mathcal{N}=(1,0)$ の超対称性だけをもつ超重力理論にはグラビティーノ多重項は現れないからである。しかしここでは、あとでより大きな超対称性をもつ理論の多重項を $\mathcal{N}=(1,0)$ 多重項の組み合わせとして表すために必要であるので表に含めておいた。

$\mathcal{N}=(1,0)$ の超対称性をもつ理論を構成する一つの方法は、11 次元、あるいは 10 次元の超重力理論からコンパクト化によって構成する方法である。例えば I 型超重力理論を $\mathbf{T}^4$ でコンパクト化すると、内部空間についての回転対称性を表す $\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)$ の R-対称性を持つ $\mathcal{N}=(1,1)$ 超

重力理論が得られる。この理論から片方の Sp(1) について不変でない場を全て消去すると重力多重項のほかにテンソル多重項とハイパー多重項を一つずつ含む $\mathcal{N}=(1,0)$ 超重力理論が得られる。

19.3 重力多重項とテンソル多重項

$\mathcal{N}=(1,0)$ 超対称性を持つ 6 次元超重力理論のもっとも簡単な例として重力多重項のほかにテンソル多重項を一つだけ含む理論を考えよう。この理論は自己双対、および反自己双対なテンソル場を一つずつ含むので、それらを一つのテンソル場と見なすことにより作用を用いた議論をすることができる。この理論はヘテロ型超重力理論によく似た次の作用によって記述される。

6 次元超重力理論

作用は次の部分の和として与えられる。まずボゾン場の運動項が

$$\frac{\mathcal{L}_{\rm grav}}{2\pi}=\frac{e}{e^{2\varphi}}[R+4(\partial_\mu\varphi)^2],\quad \frac{\mathcal{L}_H}{2\pi}=-\frac{e}{e^{2\varphi}}\frac{1}{2\cdot 3!}h^2_{\mu\nu\rho}, \tag{19.24}$$

ただし、ゲージ場の強さはポテンシャル b_2 によって $h_3=db_2$ と書ける。フェルミオンの作用は h_3 を含まない部分と含む部分の二つに分けられる。

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}_{fDf}}{2\pi} &= \frac{e}{2e^{2\varphi}}(\psi_\mu \not{D}^{(\omega)}\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu-\psi_\mu\not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\lambda-\lambda\not{D}^{(\omega)}\gamma^\mu\psi_\mu+\lambda\not{D}^{(\omega)}\lambda), &(19.25)\\ \frac{\mathcal{L}_{fHf}}{2\pi} &= \int\frac{e}{e^{2\varphi}}\frac{1}{6}h_{\mu\nu\rho}\kappa^{\mu\nu\rho}. &(19.26)\end{aligned}$$

ただし κ_3 はフェルミオンの 2 次形式で、自己双対部分と反自己双対部分に分けて $\kappa_3=\kappa_3^++\kappa_3^-$ とおけばそれぞれ次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\kappa^-_{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{8}\left(-\psi^L_\alpha\gamma^{[\alpha}\gamma_{\mu\nu\rho}\gamma^{\beta]}\psi^L_\beta+\psi^L_\alpha\gamma^\alpha\gamma_{\mu\nu\rho}\lambda^R+\lambda^R\gamma_{\mu\nu\rho}\lambda^R\right) &(19.27)\\ \kappa^+_{\mu\nu\rho} &= -\frac{1}{8}(\psi^L_\alpha\gamma_{\mu\nu\rho}\gamma^\alpha\lambda^R) &(19.28)\end{aligned}$$

この理論の超対称性変換は次のように与えられる。フェルミオンの変換則は、

$$\begin{aligned}\delta\psi^a_\mu &= D^{(\omega)}_\mu\xi^a+\frac{1}{8}(\not{h}_3\gamma_\mu+\gamma_\mu\not{h}_3)\xi^a &(19.29)\\ \delta\lambda^a &= (\not{\partial}\varphi)\xi^a+\frac{1}{2}\not{h}_3\xi^a. &(19.30)\end{aligned}$$

ボゾン場の変換則は

$$\delta e^\mu_{\widehat{m}}=\frac{1}{4}(\overline{\psi}_{\widehat{m},a}\gamma^\mu\xi^a),\quad \delta\varphi=\frac{1}{8}(\overline{\lambda}_a\xi^a),\quad \delta b_{\mu\nu}=\frac{1}{4}(-\overline{\psi}_{\mu,a}\gamma_\nu\xi^a+\psi_{\nu,a}\gamma_\mu\xi^a). \tag{19.31}$$

実際に変分計算を行うことによって、上記の作用が上記の超対称変換のもとで不変であることをチェックするのは簡単である。実際この計算はすでに IIA 型超重力理論において行ったものとまったく同じになる。(以前に述べたように、この計算は次元によらずに行うことができる。)

上記の変換則をみると、φ の変換は λ のみを含み、λ の変換は φ と h_3^- のみを含むことがわかる。したがって (φ,λ,h_3^-) が一つの多重項(テンソル多重項)を成すと推測される。実際この理論からテンソル多重項だけを取り除き、重力多重項の場だけからなる理論を構成することができる。このときディラトン場も無くなる(0 になる)ことに注意しよう。このとき反対称テンソル場についての結合定数 e^φ は 1 になるがこのおかげで自己双対部分と反自己双対部分に分けることができ

Soryushiron Kenkyu

る。（結合定数が 1 でない場合には素電荷と素磁荷が異なるので、自己双対場を考えることができない。）こうして得られる極小理論は反対称テンソル場 h_3 の自己双対部分だけを含むので、簡単に作用を用いて表すことができない。運動方程式のレベルであれば次の truncation を行うことで重力多重項のみからなる理論を得ることができる。

6 次元 $\mathcal{N}=(1,0)$ 極小超重力理論

重力多重項のみを含む最小の 6 次元 $\mathcal{N}=(1,0)$ の超重力理論を得るには、先ほど与えたテンソル多重項を含む理論の作用から運動方程式を導き、その運動方程式に対して次の truncation を行えばよい。

$$\varphi=\lambda=0,\quad h_3^- - \frac{1}{2}\kappa_3^- = 0. \tag{19.32}$$

この理論は反対称テンソル場 h_3 の自由度のうち自己双対部分 h_3^+ のみを含むので、作用を用いて表わすことは簡単にはできない。超対称変換についても、前記の超対称変換に対して上記の truncation を行うことで得ることができる。

まずこの truncation が運動方程式に矛盾しないことを確かめておこう。式を簡単にするために、まずアインシュタイン計量に移っておくのがよい。そのために、次のワイル変換を行う。

$$g_{\mu\nu}\to e^{\varphi}g_{\mu\nu},\quad \psi_{\widehat{m}}\to e^{-\varphi/4}\psi_{\widehat{m}},\quad \lambda\to e^{-\varphi/4}\lambda. \tag{19.33}$$

さらに、グラビティーノ ψ_μ とディラティーノ λ の間の混合を解くために、グラビティーノを次のように置きかえる。

$$\psi_\mu\to\psi_\mu+\frac{1}{4}\gamma_\mu\lambda. \tag{19.34}$$

これらの変換は $\varphi=\lambda=0$ の場合には恒等変換であるから、truncation を行った後に得られる理論には何の影響も与えないが、この truncation がディラトンやディラティーノの運動方程式と矛盾しないことを示すには便利である。

上記の変換を行った結果、アインシュタイン計量でのラグランジアンは次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= e[R-(\partial_\mu\varphi)^2]-\frac{e}{12e^{2\varphi}}h_{\mu\nu\rho}^2-\frac{e}{2}\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu\psi_\rho-\frac{e}{8}\lambda\not{D}\lambda\\ &\quad+\frac{e}{6e^{\varphi}}h_{\mu\nu\rho}\kappa^{\mu\nu\rho}-\frac{e}{2}\lambda\gamma^\mu(\not{\partial}\varphi)\psi_\mu.\end{aligned} \tag{19.35}$$

フェルミオンの二次形式 $\kappa_{\mu\nu\rho}$ はアインシュタイン計量では次のように与えられる。

$$\kappa_{\mu\nu\rho}=\kappa_{\mu\nu\rho}^+ + \kappa_{\mu\nu\rho}^-,\quad \kappa_{\mu\nu\rho}^+=-\frac{1}{8}\psi_\alpha\gamma_{\mu\nu\rho}\gamma^\alpha\lambda,\quad \kappa_{\mu\nu\rho}^-=-\frac{1}{8}\psi_\alpha\gamma^{[\alpha}\gamma_{\mu\nu\rho}\gamma^{\beta]}\psi_\beta-\frac{1}{16}\lambda\gamma_{\mu\nu\rho}\lambda. \tag{19.36}$$

ただし、κ_3^+ と κ_3^- はそれぞれ κ_3 の自己双対部分と反自己双対部分である。h_3 に対する運動方程式とビアンキ恒等式は次のように与えられる。

$$dh_3=0,\quad d*(e^{-2\varphi}h_3-e^{-\varphi}\kappa_3)=0. \tag{19.37}$$

$\varphi=\lambda=0$ の場合、これらの和、及び差をとると、次のように $h_3^\pm$ に対する式が得られる。

$$d\left(h_3^+ + \frac{1}{2}\kappa_3^-\right)=0,\quad d\left(h_3^- - \frac{1}{2}\kappa_3^-\right)=0. \tag{19.38}$$

ここで、$\lambda=0$ のときに $\kappa_3^+=0$ であることを用いた。これらのうち二つ目と矛盾しないためには、h_3^- に対する拘束条件を単に $h_3^-=0$ ではなく (19.32) のように置く必要がある。さらに、ディ

ラトンとディラティーノの運動方程式が truncation と矛盾しないこともチェックしておかなければならない。それぞれの運動方程式は次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
-2D^{(\omega)2}\varphi &= \frac{1}{6e^{2\varphi}}h_{\mu\nu\rho}^2 - \frac{1}{6e^{\varphi}}h_{\mu\nu\rho}\kappa^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2}D_\alpha^{(\omega)}(\lambda\gamma^\mu\gamma^\alpha\psi_\mu), &(19.39)\\
\frac{1}{4}\not{D}^{(\omega)}\lambda &= \frac{1}{8e^{\varphi}}(-\not{h}_3^+\lambda + \gamma^\alpha\not{h}_3^-\psi_\alpha) - \frac{1}{2}\gamma^\alpha(\not{\partial}\varphi)\psi_\alpha. &(19.40)
\end{aligned}
$$

これらの式の右辺が (19.32) が成り立つときに（ここでは無視しているフェルミオンの高次の項を除いて） 0 になることは直ちに示すことができる。従って、拘束条件 (19.32) は運動方程式と矛盾しない。

次に、超対称変換が拘束条件と矛盾しないことを確認しよう。ここでは再び弦計量の式を用いて議論する。$\delta\varphi$ は λ を含んでおり、$\delta\lambda$ は $\partial_\mu\varphi$ または h_3^- を含んでいるから、$\delta\varphi = \delta\lambda = 0$ であることが言える。h_3^- の拘束条件に対する無矛盾性、

$$
\delta\left(h_3 - *h_3 - \kappa_3^-\right) = 0. \tag{19.41}
$$

を示すには、運動方程式を用いる必要があり、すこし面倒である。式を少しでも簡単にするために、超対称変換で不変な任意の 3-形式場 Λ_3 を導入して、(19.41) の代わりに次の式を示すことにしよう。

$$
\int \Lambda_3 \wedge \delta\left(h_3 - *h_3 - \kappa_3^-\right) = 0. \tag{19.42}
$$

こうすることで浮いた添字がなくなり、式が書きやすくなる。

まず、第 1 項を見てみよう。b_2 の変換則を用いると、

$$
\begin{aligned}
\delta\int\Lambda_3\wedge h_3 &= \int d^6x\frac{e}{3!2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}\Lambda_{\alpha\beta\gamma}D_\delta^{(\omega)}\left(\frac{1}{4}\psi_\mu\langle\gamma_{\epsilon\zeta}\gamma^\mu\rangle_1\xi\right)\\
&= \int d^6x\frac{e}{4\cdot 3!}\Lambda_{\alpha\beta\gamma}D_\delta^{(\omega)}\left(\psi_\mu\langle\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\mu\rangle_5\xi\right)\\
&= \int d^6x - \frac{e}{4}D_\delta^{(\omega)}(\psi_\mu\langle\gamma^\delta\not{\Lambda}_3\gamma^\mu\rangle_5\xi). &(19.43)
\end{aligned}
$$

一行目から二行目へ移るには γ 行列の Hodge 双対の式 $*\gamma_2 = -\gamma_4\gamma^7$ を、3 行目への移行には $(1/6)\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle\not{\Lambda}_3\gamma^\delta\rangle_4$ を用いた。

二項目は Hodge star があるので、その中に含まれる計量も変分しなければならないことに注意する必要がある。まず、h_3 に含まれる b_2 の変換からは

$$
\begin{aligned}
-\delta_B\int\Lambda_3\wedge *h_3 &= -\int d^6x\frac{e}{2}\Lambda^{\mu\nu\rho}D_\mu^{(\omega)}\left(\frac{1}{4}\psi_\alpha\langle\gamma_{\nu\rho}\gamma^\alpha\rangle_1\xi\right)\\
&= -\int d^6x\frac{e}{4}D_\mu^{(\omega)}(\psi_\alpha\langle\gamma^\mu\not{\Lambda}_3\gamma^\alpha\rangle_1\xi) &(19.44)
\end{aligned}
$$

一方、Hodge star に含まれる計量の変分は以前に与えた公式を用いることによって次のように与えられる。

$$
-\delta_e\int\Lambda_3\wedge *h_3 = \int d^6x\frac{e}{4}\psi_\mu\langle\not{\Lambda}_3\gamma^\mu\not{h}_3\rangle_1\xi \tag{19.45}
$$

さらに、h_3 が（フェルミオンの高次の項を除き）自己双対であることを用いよう。このとき $\not{h}_3\xi = 0$ である。このことは必ずしも $\langle\not{\Lambda}_3\gamma^\mu\not{h}_3\rangle_1\xi = 0$ を意味しない。なぜなら $\langle\not{\Lambda}_3\gamma^\mu\not{h}_3\rangle_5\xi$ と相殺することによって 0 になる可能性があるからである。このことに注意すれば、次のように変形することができる。

$$
-\delta_e\int\Lambda_3\wedge *h_3 = \int d^6x\left(\frac{e}{8}\psi_\mu\langle\not{\Lambda}_3\gamma^\mu\not{h}_3\rangle_1\xi - \frac{e}{8}\psi_\mu\langle\not{\Lambda}_3\gamma^\mu\not{h}_3\rangle_5\xi\right) \tag{19.46}
$$

Soryushiron Kenkyu

第 3 項の変分は、次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
-\delta\int\Lambda_3\wedge\kappa_3^- &= \int d^6x\frac{e}{6}\Lambda^{\mu\nu\rho}\delta\kappa^-_{\mu\nu\rho} \\
&= \int d^6x-\frac{e}{4}\psi_\alpha\gamma^{[\alpha}\not\Lambda_3\gamma^{\beta]}\left(D^{(\omega)}_\beta\xi+\frac{1}{8}\not h_3\gamma_\beta\xi\right) \\
&= \int d^6x\left(-\frac{e}{4}\psi_\alpha\gamma^{[\alpha}\not\Lambda_3\gamma^{\beta]}D^{(\omega)}_\beta\xi+\frac{e}{16}\psi_\alpha\langle\not\Lambda_3\gamma^\alpha\not h_3\rangle_5\xi-\frac{e}{16}\psi_\alpha\langle\not\Lambda_3\gamma^\alpha\not h_3\rangle_1\xi\right)
\end{aligned}
\tag{19.47}
$$

第 1 項目の変分 (19.43)、第 2 項目の変分 (19.44) と (19.46)、第 3 項目の変分 (19.47) を全て加えると、$\langle\gamma^\mu\not h_3\gamma^\nu\rangle_{1,5}=\gamma^{[\mu}\not h_3\gamma^{\nu]}$ や、$\gamma_\alpha\not\Lambda_3\gamma^\mu\not h_3\gamma^\alpha=4\langle\not\Lambda_3\gamma^\mu\not h_3\rangle_5-4\langle\not\Lambda_3\gamma^\mu\not h_3\rangle_1$ などの公式を用いて次の表式を得る。

$$
\int\Lambda_3\wedge\delta\left(h_3-*h_3-\kappa_3^-\right)=\int d^6x\frac{e}{8}\xi\gamma^\mu\not\Lambda_3\left(\gamma^\nu(D^{(\omega)}_\mu\psi_\nu-D^{(\omega)}_\nu\psi_\mu)+\frac{1}{8}\gamma^\nu\not h_3\gamma_\mu\psi_\nu\right). \tag{19.48}
$$

この右辺の括弧の中身はグラビティーノの運動方程式に他ならない。従って、運動方程式が成り立っている場合には拘束条件 (19.32) が超対称変換のもとで保たれることが示された。

19.4 ハイパー多重項

ここではまず、スカラー場とフェルミオンからなるハイパー多重項について、ゲージ場にも重力にも結合していない場合について作用と超対称変換を与えよう。重力やゲージ場との結合については後ほど簡単に述べる。

ハイパー多重項はスカラー場を含む。スカラー場の低エネルギーの作用は、スカラー場が値を取る空間（以下、パラメータ空間と呼ぶ）を指定することによって決定される。一般のハイパー多重項の作用を書く際にはパラメータ空間の一般座標変換に対する共変性を手がかりにすることができる。スカラー場 ϕ^M についての変換則はパラメータ空間上の座標変換として解釈できる。$\mathrm{Sp}(1)_R\times\mathrm{Sp}(k)$ の対称性はこの $4k$ 次元パラメータ空間上の局所直交座標の回転として解釈される。ξ^α は定数であるので、パラメータ空間上で大域的に定義できる必要がある。従って、パラメータ空間上のスピン接続のうち $\mathrm{Sp}(1)_R$ 回転を表す部分は 0 に取る事ができる。これはパラメータ空間が hyper-Kähler 多様体であることを意味している。

スカラー場については、パラメータ空間上の計量 G_{MN} を用いることでパラメータ空間上の一般座標変換不変な作用が次のように与えられる。

$$
\mathcal{L}_\phi=-\frac{1}{4}G_{MN}\partial_\mu\phi^M\partial^\mu\phi^N. \tag{19.49}
$$

フェルミオンについては、次のように与えられる。

$$
\mathcal{L}_\psi=-\frac{1}{2}(\overline{\psi}_m\not D^{(M)}\psi^m). \tag{19.50}
$$

ただし、この式中の共変微分 $D^{(M)}_\mu\psi^m$ は $4k$ 次元パラメータ空間上の $\mathrm{Sp}(k)$ スピン接続 $\omega_M{}^m{}_n$ を用いて次のように定義される。

$$
D^{(M)}_\mu\psi^m=\partial_\mu\psi^m+(\partial_\mu\phi^M)\omega_M{}^m{}_n\psi^n. \tag{19.51}
$$

$\mathcal{L}_\phi$ と $\mathcal{L}_\psi$ の和はパラメータ空間上の一般座標変換に対して不変であるが、超対称変換に対しては不変ではない。超対称変換で不変な作用にするためには 4-フェルミ項を付け加える必要があることを実際に超対称変換で上記の作用を変分することでみてみよう。

Soryushiron Kenkyu

超対称変換のパラメータとスピノル場は次のマヨラナ条件を満足する。

$$\xi^a = \epsilon^{ab} C \overline{\xi}_b, \quad \psi^n = J^{mn} C \overline{\psi}_n. \tag{19.52}$$

パラメータ空間上の一般座標変換に対する共変性を有する超対称変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta\phi^M &= -\frac{1}{2} e^M_{\widehat{I}} (\gamma_{\widehat{I}})^m{}_\alpha (\overline{\psi}^R_m \xi^{L,\alpha}), & (19.53) \\ \delta^{\mathrm{cov}} \psi^m &= -\frac{1}{4} (\gamma_{\widehat{K}})^m{}_\alpha e_{\widehat{K}I} (\not{\partial}\phi^I) \xi^{L,\alpha}. & (19.54) \end{aligned}$$

スカラー場 ϕ^M の変換則 (19.53) はパラメータ空間上の座標変換に対して共変になっている。フェルミオンについては、変換する前の ψ^m は、パラメータ空間上の点 ϕ^M での局所直交座標を用いて定義されているのに対して、変換後の ψ^m は $\phi^M + \delta\phi^M$ での局所直交座標を用いて定義される。この、パラメータ空間上での座標の変化まで考慮して共変になるように変換則 (19.54) の左辺は次のように与えられている。

$$\delta^{\mathrm{cov}} \psi^m = \delta\psi^m + \delta\phi^M \omega_M{}^m{}_n \psi^n. \tag{19.55}$$

この補正項も含めた変換則により、作用を変分してみて実際に超対称性変換のもとで不変になっているかどうかを確かめてみよう。ここではフェルミオンについて高次の項まで無視することなく計算する。

以下の計算で便利なように、超対称変換を $\delta = \delta_\phi + \delta_{\psi 1} + \delta_{\psi 2}$ と 3 つの部分に分けておく。それぞれは次の変換を表す。

$$\begin{aligned} &\delta_\phi \phi^M = -\frac{1}{2} e^M_{\widehat{I}} (\gamma_{\widehat{I}})^m{}_\alpha (\overline{\psi}^R_m \xi^{L,\alpha}), \\ &\delta_{\psi 1} \psi^m = -\frac{1}{4} (\gamma_{\widehat{K}})^m{}_\alpha e_{\widehat{K}I} (\not{\partial}\phi^I) \xi^{L,\alpha}, \quad \delta_{\psi 2} \psi^m = -\delta\phi^M \omega_M{}^m{}_n \psi^n. \end{aligned} \tag{19.56}$$

さらに、作用も、スカラー場の作用、フェルミオンの作用のうちスピン接続を含まない部分、フェルミオンの作用のスピン接続部分の 3 つに分けておこう。

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{4} g_{MN} \partial_\mu \phi^M \partial^\mu \phi^N, \quad \mathcal{L}_{\psi 1} = -\frac{1}{2} \overline{\psi}_m \gamma^\mu \partial_\mu \psi^m, \quad \mathcal{L}_{\psi 2} = -\frac{1}{2} \overline{\psi}_m \gamma^\mu (\partial_\mu \phi^M) \omega_M{}^m{}_n \psi^n. \tag{19.57}$$

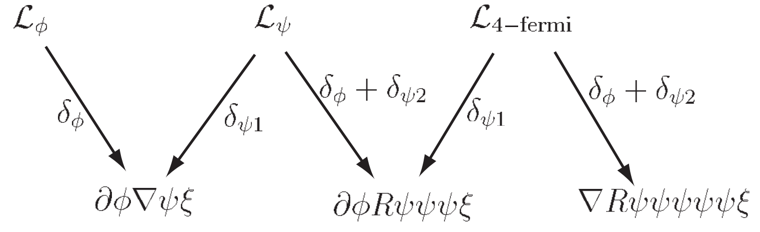

図 19.1: 重力、ゲージ場に結合していないハイパー多重項の作用の超対称変換による変分の相殺。ここではフェルミオンについて高次の項まで全てが考慮されている。

まず、作用の変分のうち、フェルミオンをひとつだけ含むものに注目しよう。それは $\delta_\phi \mathcal{L}_\phi$ と $\delta_{\psi 1} \mathcal{L}_{\psi 1}$ と $\delta_{\psi 1} \mathcal{L}_{\psi 2}$ である。まず、スカラー場の運動項の変分は、計量 g_{MN} の変分から現れる項がパラメータ空間上のクリストッフェル記号として書ける事に気付けば、次のようにスカラー場の

変分の共変微分を含む変分が得られる。

$$\begin{aligned}
\delta_\phi \mathcal{L}_\phi &= -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi^M g_{MN} \partial^\mu \delta\phi^N - \frac{1}{4}(\partial_\mu \phi^M)(\partial^\mu \phi^N) g_{MN,K}\delta\phi^K, \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi^M g_{MN} \partial^\mu \delta\phi^N - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^M)(\partial^\mu \phi^N) \Gamma_{M-NK}\delta\phi^K, \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi^M g_{MN} D^{(M)\mu}\delta\phi^N. \qquad (19.58)
\end{aligned}$$

一方、スピン接続項を含むフェルミオンの運動項の変分は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta_{\psi 1}(\mathcal{L}_{\psi 1} + \mathcal{L}_{\psi 2}) &= \frac{1}{4}(D_\mu^{(M)}\partial^\mu \phi^M)(\gamma_M)^m{}_\alpha(\overline{\psi}_m \xi^\alpha) \\
&= -\frac{1}{2}(D_\mu^{(M)}\partial^\mu \phi^M) g_{MN}\delta\phi^N. \qquad (19.59)
\end{aligned}$$

従って、これらの和は表面項を除き 0 である。

さらに、フェルミオンについて 3 次の変分は、次の 3 つである。

$$\delta_{\psi 2}\mathcal{L}_{\psi 1} = \overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu(\delta\phi^M \omega_M \psi), \qquad (19.60)$$

$$\delta_{\psi 2}\mathcal{L}_{\psi 2} = \overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu \phi^M)\delta\phi^N \omega_M \omega_N \psi, \qquad (19.61)$$

$$\delta_\phi \mathcal{L}_{\psi 2} = -\frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu \delta\phi^M)\omega_M \psi - \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu \phi^M)\delta\phi^K(\partial_K \omega_M)\psi. \qquad (19.62)$$

最初の変分のうち、微分が ψ にかかったものは

$$\delta\phi^M \omega_M{}^m{}_n(\overline{\psi}_m \gamma^\mu \partial_\mu \psi^n) = \frac{1}{2}\delta\phi^M \omega_M{}^m{}_n \partial_\mu(\overline{\psi}_m \gamma^\mu \psi^n) \qquad (19.63)$$

となる。従って表面項を除き、次の式が成り立つ。

$$\delta_{\psi 2}\mathcal{L}_{\psi 1} = \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu(\delta\phi^M \omega_M)\psi \qquad (19.64)$$

こうしてえられた 3 つの変分を加えると、次のような単純な形にまとまる。

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^M)\delta\phi^N(\overline{\psi}\gamma^\mu R_{MN}\psi) \qquad (19.65)$$

ただし、R_{MN} はパラメータ空間上の曲率テンソルである。

§7.3.2 に与えられた hyper Kähler 多様体の曲率テンソルの性質を用いると、先ほどの変分を次のように書きなおすことができる。

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu \phi^M)(\overline{\psi}_m(\gamma^N)^m{}_\alpha \xi^\alpha)(\overline{\psi}_p \gamma^\mu R_{MN}{}^p{}_q \psi^q) \\
&= -\frac{1}{8}(\partial_\mu \phi^K)(\gamma_K)^\beta{}_n(\gamma^M)^n{}_\beta(\overline{\xi}_\alpha(\gamma^N)^\alpha{}_m \psi^m)(\overline{\psi}_p \gamma^\mu R_{MN}{}^p{}_q \psi^q) \\
&= \frac{1}{4}R_{pqrs}(\partial_\mu \phi^K)(\gamma_K)^s{}_\alpha(\psi^p \gamma^\mu \psi^q)(\psi^r \xi^\alpha) \qquad (19.66)
\end{aligned}$$

ここで、$\cdots\psi^q)(\psi^r\cdots$ の部分に対してフィルツ変換を行ってみよう。添え字 q と r に対する対称性から、$\psi^r\gamma^{\mu\nu\rho}\psi^q$ を含む項は 0 になる。従って残るのは次の項のみである。

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{16}R_{pqrs}(\partial_\mu \phi^K)(\gamma_K)^s{}_\alpha(\psi^p \gamma^\mu \gamma_\nu \xi^\alpha)(\psi^r \gamma^\nu \psi^q) \\
&= -\frac{1}{8}R_{pqrs}(\partial_\mu \phi^K)(\gamma_K)^s{}_\alpha(\psi^p \xi^\alpha)(\psi^r \gamma^\mu \psi^q) + \frac{1}{16}R_{pqrs}(\partial_\mu \phi^K)(\gamma_K)^s{}_\alpha(\psi^p \gamma_\nu \gamma^\mu \xi^\alpha)(\psi^r \gamma^\nu \psi^q) \qquad (19.67)
\end{aligned}$$

(19.66) と (19.67) の第 1 項は同じ形をしているから、これらを比較することによって次の式を得る。

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{1}{24}R_{pqrs}(\partial_\mu\phi^K)(\gamma_K)^s{}_\alpha(\psi^p\gamma_\nu\gamma^\mu\xi^\alpha)(\psi^r\gamma^\nu\psi^q)\\ &= -\frac{1}{6}R_{pqrs}(\psi^p\gamma_\nu\delta_{\psi1}\psi^s)(\psi^r\gamma^\nu\psi^q)\end{aligned} \tag{19.68}$$

従って、作用に次の項を付け加えることによって、その $\delta_{\psi1}$ 変分により相殺することができる。

$$\mathcal{L}_{4-\mathrm{fermi}} = \frac{1}{24}R_{pqrs}(\psi^p\gamma_\mu\psi^q)(\psi^r\gamma^\mu\psi^s) \tag{19.69}$$

新たな 4-fermi 項を導入したせいで、その δ_ϕ および $\delta_{\psi2}$ 変分から ψ を 5 個含む次の変分が現れる。それらの項は次のように曲率テンソルの共変微分の形にまとめることができる。

$$\begin{aligned}(\delta_\phi+\delta_{\psi2})\mathcal{L}_{4-\mathrm{fermi}} &= \frac{1}{24}\delta\phi^M(D_M^{(M)}R_{pqrs})(\psi^p\gamma_\mu\psi^q)(\psi^r\gamma^\mu\psi^s)\\ &= -\frac{1}{48}(\gamma^M)^\alpha{}_m(D_M^{(M)}R_{pqrs})(\overline{\xi}_\alpha\psi^m)(\psi^p\gamma_\mu\psi^q)(\psi^r\gamma^\mu\psi^s)\end{aligned} \tag{19.70}$$

この変分が 0 になることは以下のようにしてわかる。まず $\cdots\psi^m)(\psi^p\cdots$ に対してフィルツ変換を行おう。$\psi^p\gamma^{\mu\nu\rho}\psi^m$ は p と m について反対称であり、曲率テンソルとの縮約で消えることを考慮すれば、残るのは次の項である。

$$(\delta_\phi+\delta_{\psi2})\mathcal{L}_{4-\mathrm{fermi}} = \frac{1}{4\cdot 48}(\gamma^M)^\alpha{}_m(D_M^{(M)}R_{pqrs})(\overline{\xi}_\alpha\gamma_\nu\gamma_\mu\psi^q)(\psi^r\gamma^\mu\psi^s)(\psi^p\gamma^\nu\psi^m) \tag{19.71}$$

添え字 μ と ν の対称性を考慮すれば $\gamma_\nu\gamma_\mu$ を $\eta_{\nu\mu}$ に置きかえることができる。こうして次のように書くことができる。

$$(\delta_\phi+\delta_{\psi2})\mathcal{L}_{4-\mathrm{fermi}} = \frac{1}{4\cdot 48}(\gamma^M)^\alpha{}_m(D_M^{(M)}R_{pqrs})(\overline{\xi}_\alpha\psi^q)(\psi^r\gamma_\mu\psi^s)(\psi^p\gamma^\mu\psi^m) \tag{19.72}$$

曲率テンソルのビアンキ恒等式より、5 個の Sp(k) 添え字がついて対称であることを考慮すれば、(19.70) と (19.72) は係数が異なるだけである。これらは等しいから、その値は 0 であることになる。

ハイパー多重項の作用と変換則

重力ともゲージ場とも結合していないハイパー多重項の作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}G_{MN}\partial_\mu\phi^M\partial^\mu\phi^N-\frac{1}{2}(\overline{\psi}_m\partial\!\!\!/\psi^m)-\frac{1}{2}(\overline{\psi}_m(\partial\!\!\!/\phi^M)\omega_M{}^m{}_n\psi^n)\\ &\quad+\frac{1}{24}R_{pqrs}(\psi^p\gamma_\mu\psi^q)(\psi^r\gamma^\mu\psi^s)\end{aligned} \tag{19.73}$$

上記の作用を不変に保つ大域的超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta\phi^M = -\frac{1}{2}e^M_{\widehat{I}}(\gamma_{\widehat{I}})^m{}_\alpha(\overline{\psi}^R_m\xi^{L,\alpha}), \tag{19.74}$$

$$\delta\psi^m = -\frac{1}{4}(\gamma_{\widehat{K}})^m{}_\alpha e_{\widehat{K}I}\partial\!\!\!/\phi^I\xi^{L,\alpha}-\delta\phi^M\omega_M{}^m{}_n\psi^n. \tag{19.75}$$

19.4.1 重力との結合

次に、ハイパー多重項を重力に結合することを考えてみよう。後でわかるように、重力と結合したあとに超対称性を満足するためにはパラメータ空間は hyper Kähler 多様体ではなく、quartanionic

多様体でなければばならないことがわかる [5]。そこで、パラメータ空間の計量 h^{MN} に対しては hyper Kähler であるという仮定を置かないことにしよう。作用、および変換則は、以前に与えた平坦時空上でのものを一般座標変換に対して不変、または共変な形にしたものを採用しよう。すなわち、次の作用、変換則を採用する。ここでは再びフェルミオンについて高次の項は無視する。

$$\frac{\mathcal{L}_{\mathrm{hyper}}}{2\pi} = f(\varphi)\left[-\frac{e}{4}h_{MN}\partial_\mu\phi^M\partial^\mu\phi^N - \frac{e}{2}(\overline{\psi}_m \not{D}^{(M,\omega)}_\mu \psi^m)\right]. \tag{19.76}$$

$$\delta_\phi\phi^M = -\frac{1}{2}(\overline{\psi}_m(\gamma^M)^m{}_a\xi^a), \quad \delta_\psi\psi^m = -\frac{1}{4}((\not{\partial}\phi^M)(\gamma_M)^m{}_a)\xi^a. \tag{19.77}$$

作用 (19.76) は変換パラメータ ξ とディラトン φ が定数である場合に超対称変換のもとで不変であることはすでにわかっているので、作用の変分を計算すると、ξ または φ の微分に比例した次の項が得られる。

$$(\delta_\phi+\delta_\psi)\frac{\mathcal{L}_{\mathrm{hyper}}}{2\pi} = -e(\overline{J}^\mu_a D^{(\omega)}_\mu\xi^a) + e(\overline{J}_a(\not{\partial}\varphi)\xi^a) \tag{19.78}$$

$D_\mu\xi$ や $(\not{\partial}\varphi)\xi$ の係数として現れる $J_{\mu,a}$ や J_a は次のように定義された超対称性カレントである。

$$\overline{J}^\mu_a = -\frac{1}{4}f\overline{\psi}_m\gamma^\mu(\not{\partial}\phi^M)(\gamma_M)^m{}_a, \quad \overline{J}_a = -\frac{1}{8}f'\overline{\psi}_m(\not{\partial}\phi^M)(\gamma^m_{M\,a}). \tag{19.79}$$

この第 1 項は、グラビティーノの超対称変換に、第 2 項は λ の超対称変換に、$\not{h}_3$ を含む項を除き比例している。従って、次の項を作用に追加することで相殺することができる。

$$\frac{\mathcal{L}_{\mathrm{cur}}}{2\pi} = e(\overline{J}^\mu_a\psi^a_\mu) - e(\overline{J}_a\lambda^a) \tag{19.80}$$

しかし今度はカレント中のフェルミオンの超対称変換によって新たな変分が現れる。カレントを変換すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta_\psi\overline{J}_a &= -\frac{1}{32}f'\overline{\xi}_b(\not{\partial}\phi^M)(\gamma_M)^b{}_m(\not{\partial}\phi^N)(\gamma_N)^m{}_a \\
&= -\frac{1}{32}f'\overline{\xi}_a h_{MN}(\partial_\mu\phi^M)(\partial^\mu\phi^N) + \frac{1}{4}f'\overline{\xi}_b\gamma^{\mu\nu}V_{\mu\nu}{}^b{}_a, \qquad (19.81)\\
\delta_\psi\overline{J}^\mu_a &= -\frac{1}{16}f\xi_b(\not{\partial}\phi^M)(\gamma_M)^b{}_m\gamma^\mu(\not{\partial}\phi^N)(\gamma_N)^m{}_a \\
&= -\frac{1}{4}\xi_a\gamma_\nu T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}f\xi_b\gamma^{\rho\sigma\mu}V_{\rho\sigma}{}^b{}_a \qquad (19.82)
\end{aligned}$$

ただし、$V_{\mu\nu}{}^a{}_b$ は次のように定義される微分を含むスカラー場の関数である。

$$V_{\mu\nu}{}^a{}_b = -\frac{1}{16}(\partial_\mu\phi^M\partial_\nu\phi^N - \partial_\nu\phi^M\partial_\mu\phi^N)(\gamma_M)^a{}_m(\gamma_N)^m{}_b \tag{19.83}$$

あるいは、外微分形式として表せば、

$$V_2{}^a{}_b = \frac{1}{2}V_{\mu\nu}{}^a{}_b dx^\mu\wedge dx^\nu = -\frac{1}{16}(\gamma_M)^a{}_m(\gamma_N)^m{}_b(d\phi^M\wedge d\phi^N) \tag{19.84}$$

これらを用いると、$\mathcal{L}_{\mathrm{cur}}$ の変分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_\psi\mathcal{L}_{\mathrm{cur}}}{2\pi} &= \frac{e}{4}f'\delta\varphi h_{MN}(\partial_\mu\phi^M)(\partial^\mu\phi^N) - \frac{e}{4}f'(\overline{\xi}_b\gamma^{\mu\nu}V_{\mu\nu}{}^b{}_a\lambda^a) \\
&- e\delta e^{\widehat{m}}_\mu T^\mu_{\widehat{m}} - \frac{e}{2}f(\xi_a\gamma^{\mu\nu\rho}V_{\mu\nu}{}^a{}_b\psi^b_\rho) \qquad (19.85)
\end{aligned}$$

ただし、$T^{\mu\nu}$ はスカラー場のエネルギー運動量テンソルであり、次のように与えられる。

$$T_{\mu\nu} = \frac{f}{2}h_{MN}\left(\partial_\mu\phi^M\partial_\nu\phi^N - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi^M\partial^\alpha\phi^N\right). \tag{19.86}$$

(19.85) の一行目は $\overline{J}_a$ の変分から、2 行目は $\overline{J}^\mu_a$ の変分から得られる項である。一行目第 1 項は、スカラー場の運動項中のディラトン場の超対称変換と、2 行目の第 1 項は $\mathcal{L}_\phi$ 中の多脚場の超対称変換と相殺する。ここで、関数 $f(\varphi)$ が $e^{-2\varphi}$ であるとしてみよう。すると残された項は、

$$\frac{\delta_\psi \mathcal{L}_{\rm cur}}{2\pi} + (\delta_e + \delta_\varphi)\frac{\mathcal{L}_\phi}{2\pi} = \frac{e}{2e^{2\varphi}}((\overline{\lambda}_a \gamma^{\mu\nu} V_{\mu\nu}{}^a{}_b \xi^b) + (\overline{\psi}_{\lambda,a}\gamma^{\lambda\mu\nu} V_{\mu\nu}{}^a{}_b \xi^b)) \tag{19.87}$$

ここで、重力多重項のフェルミオンの運動項の変分 (15.77) に次の項があったことを思い起こそう。((15.77) は IIA 型超重力理論の変分計算の式であるが、§15.4.1 の式はそのまま 6 次元超重力理論の変分計算とみなすことができる。)

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{2\pi} = \frac{e}{2e^{2\phi}}\left(-(\overline{\lambda}\gamma^{\mu\nu}[D^{(\omega)}_\mu, D^{(\omega)}_\nu]\xi) - (\overline{\psi}_\lambda \gamma^{\lambda\mu\nu}[D^{(\omega)}_\mu, D^{(\omega)}_\nu]\xi)\right) \tag{19.88}$$

共変微分の交換関係は曲率テンソルを与え、アインシュタイン作用の変分と相殺した。ここでもし $[D^{(\omega)}_\mu, D^{(\omega)}_\nu]$ が曲率テンソルのほかに $V_{\mu\nu}$ という項を含めば、上記の変分をちょうど相殺することができる。すなわち、モジュライ空間の曲率テンソルの $\mathrm{Sp}(1)_R$ 成分が次のように与えられれば良い。

$$R_2{}^a{}_b = V_2{}^a{}_b = -\frac{1}{16}(\gamma_M)^a{}_m(\gamma_N)^m{}_b(d\phi^M \wedge d\phi^N) \tag{19.89}$$

つまり、$V_{\mu\nu}$ はゲージポテンシャル V_μ から作られる場の強さとみなすことができる。上記の項は変換則、および作用の中の微分を次のように置きかえることで実現することができる。

$$D^{(\mathrm{Sp}(1)_R)}_\mu = \partial_\mu + V_\mu{}^a{}_b \tag{19.90}$$

これは、パラメータ空間のスピン接続の $\mathrm{Sp}(1)_R$ 部分がある一定の曲率を持っていることを意味している。重力と結合していないときにはパラメータ空間は hyper Kähler であったが、このスピン接続の存在により、パラメータ空間は四元数多様体に変形される。この多様体上の曲率は

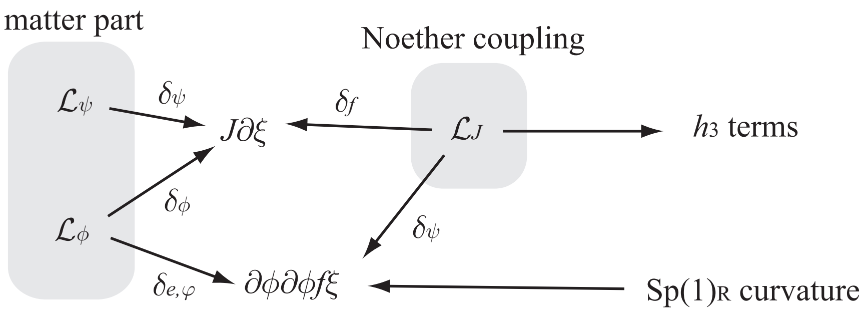

図 19.2: 重力に結合したハイパー多重項の作用の超対称変換に対する変分の相殺。f はグラビティーノとディラティーノを表している。ここでは変分のうち、スピノルを 4 個以上含む項や反対称テンソル場 h_3 を含む項は無視している。$\partial\phi\partial\phi f\xi$ の形をした変分を相殺するためには、重力部分に現れる共変微分にパラメータ空間の $\mathrm{Sp}(1)_R$ 曲率の寄与を加えることが必要である。

$$\frac{1}{2}V_{\mu\nu}{}^a{}_b dx^\mu \wedge dx^\nu = -\frac{1}{16}(\gamma_M)^a{}_m(\gamma_N)^m{}_b d\phi^M \wedge d\phi^N \tag{19.91}$$

より、

$$R_{MN}{}^a{}_b = -(1/8)(\gamma_{MN})^a{}_b, \tag{19.92}$$

と与えられる。ここでは作用全体が $1/e^{2\varphi}$ でくくられている規格化を用いているが、もしスカラー場の運動項が canonical になる規格化を用いている場合にはこの曲率は因子 $e^{2\varphi} \sim G_N$ を含む。すなわちニュートン定数に比例する。

最後に、h_3 を含む変分の相殺について述べておこう。ネーター結合項のグラビティーノやディラティーノの変分のうち h_3 を含む項は次のように与えられる。

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{e}{16e^{2\varphi}}\psi_m(\gamma_M)^m{}_a \not{h}_3(\not{\partial}\phi^M)\xi^a \tag{19.93}$$

これは次の項の導入で相殺することができる。

$$\mathcal{L} = -\frac{e}{8}\psi_m \not{h}_3 \psi^m. \tag{19.94}$$

19.5 ベクトル多重項

ここでも一旦重力との結合は無視し、ベクトル多重項とハイパー多重項が結合したときにその作用、変換則がどのようになるかをみてみよう。

まず、ハイパー多重項と結合していない、純粋にベクトル多重項だけからなる形のラグランジアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{vector}} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2}\overline{\lambda}^a_\alpha \gamma^\mu D^{(G)}_\mu \lambda^{a\alpha} + \frac{1}{2}D^a_A D^a_A \tag{19.95}$$

それぞれの場の超対称変換則は次のように与えられる。

$$\delta A^a_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^a_\alpha \gamma^\mu \xi^\alpha), \quad \delta\lambda^{a,\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}^a_2 \xi^\alpha + \frac{i}{2\sqrt{2}}D^{a,\alpha}{}_\beta \xi^\beta, \quad \delta D^a_A = -\frac{i}{2\sqrt{2}}(D^{(G)}_\mu \overline{\lambda}^a_\alpha \tau_A{}^\alpha{}_\beta \gamma^\mu \xi^\beta). \tag{19.96}$$

ただし、後にハイパー多重項と結合させる際に便利なように $\mathrm{Sp}(1)_R$ 3 重項の補助場 D^a_A を導入した。τ_A はパウリ行列であり、$D^{a\alpha}{}_\beta = D^a_A \tau_A{}^\alpha{}_\beta$ である。補助場 D の超対称変換はフェルミオン λ の運動方程式に比例しているから、$D = 0$ と置くことができる。10 次元の超対称 Yang-Mills 理論をコンパクト化することで得られる作用はそのようなものである。上記の作用の超対称変換のもとでの不変性は、10 次元の Yang-Mills 理論と全く同様に示すことができる。変分は λ について 1 次の項と 3 次の項がある。λ^3 の項は、フィルツ変換を行い、随伴表現の添え字に対する対称性を用いることで 0 であることを示すことができる。上記の作用は、ゲージ群が何であるかによらず超対称性の下で不変である。

次にこのゲージ場がハイパー多重項に結合している場合を考えよう。計算を簡単にするために、ここではハイパー多重項のスカラー場に対するパラメータ空間は平坦であるとし、その上に直交座標 ϕ^I を導入しておく。(もちろんこれは重力を無視した場合にのみ許される。§19.4 で示したように、重力を導入するとパラメータ空間は 0 でない $\mathrm{Sp}(1)_R$ 曲率を持たなければならないから、平坦であることは許されない。) さらに、ゲージ対称性は ϕ^I に対して線形に作用するとする。すなわち、ゲージ対称性のパラメータを Λ_{IJ} とするとき、スカラー場は次のように変換される。

$$\delta\phi^I = \Lambda_{IJ}\phi^J. \tag{19.97}$$

スカラー場 ϕ^I は $4k$ 個存在するので、パラメータ空間の対称性は $\mathrm{O}(4k)$ である。パラメータ Λ_{IJ} は $\mathrm{SO}(4k)$ の生成子であり二つの添え字 I と J について反対称である。実際には、理論全体としては $\mathrm{O}(4k)$ の対称性は存在せず、最大でも $\mathrm{Sp}(1)_R \times \mathrm{Sp}(k)$ である。ここでは、$\mathrm{Sp}(k)$、あるいは

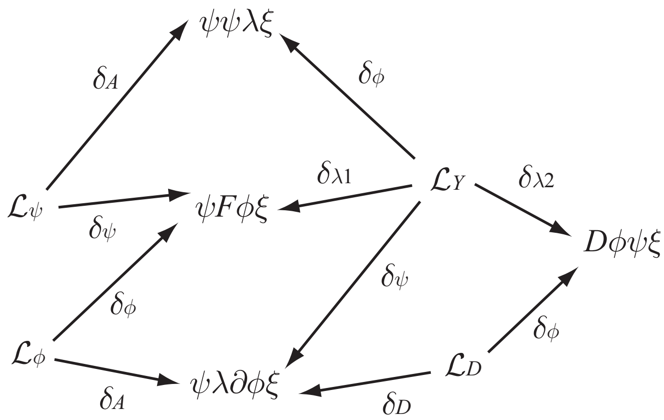

図 19.3: ゲージ場に結合したハイパー多重項の作用の超対称変換による変分の相殺。ここでは重力は無視し、パラメータ空間は平坦であると仮定しているが、フェルミオンについて高次の項は全て考慮されている。

その部分群がゲージ化されている場合を考えよう。Λ が $\mathrm{Sp}(k)$ の生成子であれば、$\mathrm{Sp}(k)$ の基本表現に対する表現 ${\Lambda^m}_n$ を用いて次のように書くことができる。

$$\Lambda_{IJ} = \frac{1}{2}(\gamma_I)^\alpha{}_m(\gamma_J)^n{}_\beta\Lambda^m{}_n\delta^\beta_\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_I)^\alpha{}_m\Lambda^m{}_n(\gamma_J)^n{}_\alpha \tag{19.98}$$

$\Lambda^m{}_pJ^{pn}$ は m と n について対称である。

ハイパー多重項の作用をゲージ変換に対して共変化すると、次の作用を得る。

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}D^{(G)}_\mu\phi^I D^{(G)\mu}\phi^I, \quad \mathcal{L}_\psi = -\frac{1}{2}\overline{\psi}_m\gamma^\mu D_\mu\psi^m. \tag{19.99}$$

ただしここでは、以前とは異なる規格化を用いている。すなわち、以前に用いた式に対して、次の置き換えを行ったものを用いる。

$$\phi^I \to \sqrt{2}\phi^I. \tag{19.100}$$

共変微分は次のように定義される。

$$D^{(G)}_\mu\phi^I = \partial_\mu\phi^I + A^{IJ}_\mu\phi^J, \quad D^{(G)}_\mu\psi^m = \partial_\mu\psi^m + A_\mu{}^m{}_n\psi^n. \tag{19.101}$$

これら二つの作用の和について、超対称変換の下での変分を調べてみよう。超対称変換としては、以前のハイパー多重項の変換則において微分を共変化した次のものを採用する。

$$\delta\phi^M = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma_M)^m{}_\alpha(\overline{\psi}^R_m\xi^{L,\alpha}), \quad \delta\psi^m = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma_I)^m{}_\alpha\not{D}^{(G)}\phi^I\xi^{L,\alpha}. \tag{19.102}$$

この計算はゲージ場が結合していない場合の計算とほぼ同じであるが、二つの点において異なる。まず、通常の微分が共変微分になったために、二つの微分が可換ではないこと、そしてもうひとつは共変微分に含まれているゲージ場の変分によって新たな変分が現れるということである。まず、$\mathcal{L}_\psi$ の中の ψ を変分してみよう。ゲージ場との結合によって、共変微分の交換関係から場の強さが現れる。

$$\begin{aligned}\delta_\psi\mathcal{L}_\psi &= -\overline{\psi}_m\not{D}^{(G)}\delta\psi^m = \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{\psi}_m\not{D}^{(G)}\gamma_I{}^m{}_\alpha\not{D}^{(G)}\phi^I\xi^\alpha \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{\psi}_m\gamma_I{}^m{}_\alpha D^{(G)}_\mu D^{(G)\mu}\phi^I\xi^\alpha + \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{\psi}_m\gamma_I{}^m{}_\alpha\not{F}_2^{IJ}\phi^J\xi^\alpha.\end{aligned} \tag{19.103}$$

ここで、共変微分の交換関係を次のように場の強さに置き換えた。

$$[D_\mu^{(G)}, D_\nu^{(G)}]\phi^I = F_{\mu\nu}^{IJ}\phi^J. \tag{19.104}$$

この変分の第 1 項は $\mathcal{L}_\phi$ の ϕ の超対称変換から得られる変分と相殺する。従って、残るのは次の項である。

$$\delta_\phi\mathcal{L}_\phi + \delta_\psi\mathcal{L}_\psi = (\overline{\psi}_m\gamma_I{}^m{}_\alpha\delta_{\lambda 1}\lambda^{\alpha,IJ})\phi^J = (\overline{\psi}_m\delta_{\lambda 1}\lambda^{\alpha m}{}_n)\phi^n{}_\alpha = -\phi^\alpha{}_m(\delta_{\lambda 1}\overline{\lambda}_\alpha{}^m{}_n\psi^m). \tag{19.105}$$

ただし、$\delta_{\lambda 1}$ は λ の変分のうちで $F_{\mu\nu}$ を含むほうの項を表す。従って、次の項を作用に加えることにより、その $\delta_{\lambda 1}$ 変換によって相殺することができる。

$$\mathcal{L}_Y = \phi^\alpha{}_m(\overline{\lambda}_\alpha{}^m{}_n\psi^n) \tag{19.106}$$

次に、共変微分の中に含まれるゲージ場の超対称変換を考えよう。フェルミオンの作用の中のゲージ場の超対称変換は、次の変分を与える。

$$\delta_A\mathcal{L}_\psi = -\frac{1}{2}\overline{\psi}_m\gamma^\mu\delta A_\mu{}^m{}_n\psi^n = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(\overline{\lambda}_\alpha{}^m{}_n\gamma_\mu\xi^\alpha)(\overline{\psi}_m\gamma^\mu\psi^n) \tag{19.107}$$

これは、三点結合項 (19.106) の中のスカラー場の超対称変換によって得られる次の変分と相殺する。

$$\delta_\phi\mathcal{L}_Y = \delta\phi^\alpha{}_m(\overline{\lambda}_\alpha{}^m{}_n\psi^n) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{\lambda}_\alpha{}^m{}_n\psi^n)(\overline{\psi}_m\xi^\alpha) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\overline{\lambda}_\alpha{}^m{}_n\gamma_\mu\xi^\alpha)(\overline{\psi}_m\gamma^\mu\psi^n) \tag{19.108}$$

最後にフィルツ変換を行ったが、$(\psi^m\gamma^{\mu\nu\rho}\psi^n)$ は m と n について反対称であり、λ との縮約で 0 になるので、γ-行列をひとつ含む項だけが現れる。

スカラー場の運動項に含まれるゲージ場の超対称変換は次の変分を与える。

$$\delta_A\mathcal{L}_\phi = -D_\mu^{(G)}\phi^I\delta A_\mu^{IJ}\phi^J = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}_\alpha^{IJ}(\not{D}^{(G)}\phi^I)\xi^\alpha)\phi^J = \frac{1}{4\sqrt{2}}\phi^\beta{}_m(\overline{\lambda}_\alpha{}^m{}_n(\not{D}^{(G)}\phi^n{}_\beta)\xi^\alpha). \tag{19.109}$$

この項は、三点結合項 (19.106) の ψ を変換したときに現れる次の変分の一部と相殺する。

$$\begin{aligned}\delta_\psi\mathcal{L}_Y &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\phi^\alpha{}_m(\overline{\lambda}_\alpha{}^m{}_n(\not{D}^{(G)}\phi^n{}_\beta)\xi^\beta)\\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\phi^\beta{}_m(\overline{\lambda}_\alpha{}^m{}_n(\not{D}^{(G)}\phi^n{}_\beta)\xi^\alpha) - \frac{1}{4\sqrt{2}}(D_\mu\phi^n{}_\alpha)\tau_A{}^\alpha{}_\beta\phi^\beta{}_m(\overline{\lambda}_\gamma{}^m{}_n\tau_{A\delta}^\gamma\gamma^\mu\xi^\delta)\end{aligned} \tag{19.110}$$

(19.109) と (19.110) の和をとると、次の項が残る。

$$\begin{aligned}\delta_A\mathcal{L}_\phi + \delta_\psi\mathcal{L}_Y &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}(D_\mu\phi^n{}_\alpha)\tau_A{}^\alpha{}_\beta\phi^\beta{}_m(\overline{\lambda}_\gamma{}^m{}_n\tau_{A\delta}^\gamma\gamma^\mu\xi^\delta)\\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}}\phi^n{}_\alpha\tau_A{}^\alpha{}_\beta\phi^\beta{}_m D_\mu(\overline{\lambda}_\gamma{}^m{}_n\tau_{A\delta}^\gamma\gamma^\mu\xi^\delta)\\ &= \frac{i}{4}\phi^n{}_\alpha\tau_A{}^\alpha{}_\beta\phi^\beta{}_m\delta D_A{}^m{}_n\end{aligned} \tag{19.111}$$

さらに、三点結合項に含まれる λ の $\delta_{\lambda 2}$ による変換は次の変分を与える。

$$\delta_{\lambda 2}\mathcal{L}_Y = -(\overline{\psi}_m\delta_{\lambda 2}\lambda^{\alpha m}{}_n)\phi^n{}_\alpha = -\frac{i}{2\sqrt{2}}D_A{}^m{}_n\phi^n{}_\alpha\tau_A{}^\alpha{}_\beta(\overline{\psi}_m\xi^\beta) = \frac{i}{2}D_A{}^m{}_n\phi^n{}_\alpha\tau_A{}^\alpha{}_\beta\delta\phi^\beta{}_m \tag{19.112}$$

(19.111) と (19.112) は、作用に次の項を加えることで同時に相殺することができる。

$$\mathcal{L}_D = -\frac{i}{4}D_A{}^m{}_n\phi^n{}_\alpha\tau_A{}^\alpha{}_\beta\phi^\beta{}_m \tag{19.113}$$

こうして、ハイパー多重項に対する次の作用が超対称変換のもとで不変であることが示された。

$$\mathcal{L}_{\text{hyper}} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_D. \tag{19.114}$$

19.5.1 重力との結合

ここで考えている 6 次元の超重力理論はヘテロ型、あるいは I 型の 10 次元超重力理論ときわめて似通っている。重力とベクトル多重項の結合も、10 次元の場合と全く同様に行うことができる。以下で簡単に説明しよう。

まず、出発点としては大域的対称性を持った作用を一般座標変換に対して共変化した次の作用を用いる。テンソル多重項にスカラー場 φ が含まれているので、その任意の関数を作用全体にかけることができる。

$$\frac{\mathcal{L}_A}{2\pi} = -\frac{e}{4} f(\varphi) F^A_{\mu\nu} F^{A,\mu\nu}, \quad \frac{\mathcal{L}_\chi}{2\pi} = -\frac{e}{2} f(\varphi)(\overline{\chi}^A_a \not{D}^{(G,\omega)} \chi^{A,a}). \tag{19.115}$$

$f(\varphi)$ の関数形は一般座標変換に対する共変性からは決まらない。変換則についても、一般座標変換に対して共変になるよう、微分を共変微分で置き換えた次のものを採用する。

$$\delta_A A^A_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\overline{\chi}^A_a \gamma_\mu \xi^a), \quad \delta_\chi \chi^{A,a} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \not{F}^A_2 \xi^a. \tag{19.116}$$

上記の作用は大域的対称性については不変であることを知っているから、局所対称性についての変分は $D_\mu \xi$ および $\partial_\mu \varphi$ に比例する項として与えられるはずである。実際に変分してみると、A^A_μ および $\chi^{A,a}$ それぞれの作用から次の変分を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta_A \mathcal{L}_A}{2\pi} &= \frac{e}{2\sqrt{2}} f(\overline{\chi}^A_a \gamma_\nu \xi^a) D^{(G,\omega)}_\mu F^{A,\mu\nu} + \frac{e}{2\sqrt{2}} (\partial_\mu f)(\overline{\chi}^A_a \gamma_\nu \xi^a) F^{A,\mu\nu}, \end{aligned} \tag{19.117}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta_\chi \mathcal{L}_\chi}{2\pi} &= -\frac{e}{2\sqrt{2}} f(\overline{\chi}^A_a \gamma_\nu \xi^a) D^{(G,\omega)}_\mu F^{A,\mu\nu} - \frac{e}{4\sqrt{2}} (\partial_\mu f)(\overline{\chi}^A_a \gamma^\mu \not{F}^A_2 \xi^a) \\ &\quad - \frac{e}{2\sqrt{2}} f(\overline{\chi}^A_a \gamma^\mu \not{F}^A_2 D^{(G,\omega)}_\mu \xi^a) - \frac{e}{4\sqrt{2}} f(\overline{\chi}^A_a \gamma^{\mu\rho\sigma} \xi^a) D^{(G,\omega)}_\mu F_{\rho\sigma} \end{aligned} \tag{19.118}$$

これらを加えると、次の項が得られる。

$$\frac{\delta_A \mathcal{L}_A}{2\pi} + \frac{\delta_\chi \mathcal{L}_\chi}{2\pi} = -e\overline{J}^\mu_a D^{(\omega)}_\mu \xi^a + e\overline{J}_a (\not{\partial}\varphi)\xi^a. \tag{19.119}$$

ただし、二つのカレント $\overline{J}^\mu_a$ と $\overline{J}_a$ は次のように与えられる。

$$\overline{J}_a = -\frac{1}{4\sqrt{2}} f' \chi^A_a \not{F}^A_2, \quad \overline{J}^\mu_a = \frac{1}{2\sqrt{2}} f \overline{\chi}^A_a \gamma^\mu \not{F}^A_2. \tag{19.120}$$

これらを相殺するには、次のネーター結合項を導入すればよい。

$$\frac{\mathcal{L}_{\rm cur}}{2\pi} = e\overline{J}^\mu_a \psi^a_\mu - e\overline{J}_a \lambda. \tag{19.121}$$

この項に含まれるグラビティーノ及びディラティーノの超対称変換のうち、h_3 を含まない変換（$\delta_{\psi 1}$ および $\delta_{\lambda 1}$ と表す）から得られる変分で (19.119) を相殺することができる。そのほかに、この項の導入によって現れる変分は、$\mathcal{L}_{\rm cur}$ に含まれる $\chi^{A,a}$ の変換から

$$\begin{aligned} \frac{\delta_\chi \mathcal{L}_{\rm cur}}{2\pi} &= -\frac{e}{16} f'(\overline{\xi}_a \not{F}^A_2 \not{F}^A_2 \lambda^a) - \frac{e}{8} f(\overline{\xi}_a \not{F}^A_2 \gamma^\mu \not{F}^A_2 \psi^a_\mu) \\ &= \frac{e}{4} f' \delta\varphi F^A_{\mu\nu} F^{A,\mu\nu} - e\delta e_{\mu\widehat{m}} T^{\mu\widehat{m}}(A^A_\mu) \\ &\quad + \frac{e}{64}[-f'(\overline{\xi}_a \gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda^a) - f(\overline{\xi}_a \{\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}, \gamma^\mu\}\psi^a_\mu)] F^A_{\alpha\beta} F^A_{\gamma\delta} \end{aligned} \tag{19.122}$$

が得られる。$T_{\mu\nu}(A)$ はゲージ場 A に対するエネルギー運動量テンソルである。

$$T_{\mu\nu}(A) = f F^A_{\mu\alpha} F^A{}_\nu{}^\alpha - \frac{f}{4} g_{\mu\nu} F^A_{\alpha\beta} F^{A,\alpha\beta}. \tag{19.123}$$

上記の変分のはじめの 2 項は $\mathcal{L}_A$ の中のディラトンと多脚場の超対称変換と相殺する。

後ろの項を相殺するために、重力部分の変分に次の項があったことを思い起こそう。(式 (15.91))

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{2\pi} = \frac{e}{6}\theta^{\alpha\beta\gamma\delta}D_\alpha^{(\omega)}h_{\beta\gamma\delta}. \tag{19.124}$$

重力多重項とテンソル多重項のみを含む理論においてはこの変分は、h_3 のビアンキ恒等式から 0 になった。ここでは h_3 のビアンキ恒等式を変形することを考えよう。(19.122) と (19.124) を見比べると、$f = Ne^{-2\varphi}$ であり、かつ

$$dh_3 = \frac{N}{2}F_2^A \wedge F_2^A \tag{19.125}$$

であれば、ちょうど打ち消し合うことがわかる。以上で h_3 を含まない変分は完全に相殺させることができた。

次に、h_3 をひとつ含む項に移ろう。そのような項は、$\mathcal{L}_{\rm cur}$ の中の λ および ψ_μ の h_3 を含む超対称性変換から現れる。

$$\frac{\delta_{f2}\mathcal{L}_{\rm cur}}{2\pi} = \frac{e}{16\sqrt{2}e^{2\varphi}}N[\overline{\chi}_a^A(\gamma^\mu \not{F}_2^A \not{h}_3\gamma_\mu - 2\not{F}_2^A\not{h}_3)\xi^a]. \tag{19.126}$$

ここで、次の式が成り立つことが示される。

$$\gamma^\mu\not{F}_2^A\not{h}_3\gamma_\mu - 2\not{F}_2^A\not{h}_3 = 2\not{h}_3\not{F}_2^A + 4\gamma^\mu F^{A,\nu\rho}h_{\mu\nu\rho}. \tag{19.127}$$

この式を示すために次の関係式を用いた。

$$\langle\not{F}_2^A\not{h}_3\rangle_5 = +\langle\not{h}_3\not{F}_2^A\rangle_5, \quad \langle\not{F}_2^A\not{h}_3\rangle_3 = -\langle\not{h}_3\not{F}_2^A\rangle_3, \quad \langle\not{F}_2^A\not{h}_3\rangle_1 = +\langle\not{h}_3\not{F}_2^A\rangle_1. \tag{19.128}$$

が成り立つ。これを用いれば、上の式が簡単に示される。

これを用いると、

$$\frac{\delta_{f2}\mathcal{L}_{\rm cur}}{2\pi} = \frac{e}{4e^{2\varphi}}N(\overline{\chi}_a^A\not{h}_3\delta\chi^{A,a}) + \frac{e}{2e^{\varphi}}N\delta A^{A,\mu}F^{A,\nu\rho}h_{\mu\nu\rho}. \tag{19.129}$$

この変分の第 1 項は次の項を作用に付け加えることによって相殺することができる。

$$\frac{\mathcal{L}_{\chi h\chi}}{2\pi} = \frac{e}{8e^{2\varphi}}N(\overline{\chi}_a^A\not{h}_3\chi^{A,a}) \tag{19.130}$$

そして、第 2 項は

$$\delta h_3 = N\delta A^A \wedge F_2^A \tag{19.131}$$

という項があれば、h_3 の運動項からの変分で相殺できる。この式は、(19.125) と矛盾していないことに注意しよう。すなわち、(19.125) を超対称変換したものと (19.131) を外微分したものは同じ式を与える。

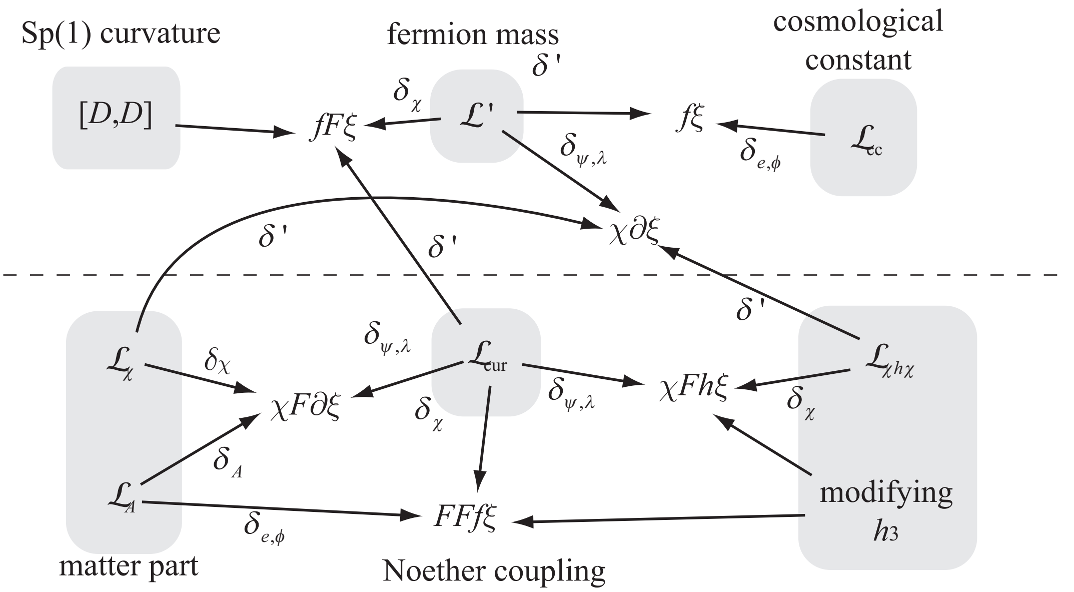

図 19.4: 重力に結合した 6 次元ベクトル多重項の作用の超対称変換による変分の相殺の様子。破線より上の部分はゲージ群が $\mathrm{Sp}(1)_R$ を含む場合にのみ必要である。

6 次元ベクトル多重項

6 次元ベクトル多重項の作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}}{2\pi} &= \frac{eN}{e^{2\varphi}}\Big[-\frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{A,\mu\nu}-\frac{1}{2}(\overline{\chi}^A_a\not{D}^{(G,\omega)}\chi^{A,a}) \\ &\quad +\frac{1}{2\sqrt{2}}[(\overline{\psi}_{\mu,a}\not{F}^A_2\gamma^\mu\chi^{A,a})+(\overline{\lambda}_a\not{F}^A_2\chi^{A,a})]+\frac{1}{8}(\overline{\chi}^A_a\not{h}_3\chi^{A,a})\Big] \qquad (19.132)\end{aligned}$$

変換則は次の通り。

$$\delta_A A^A_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\overline{\chi}^A_a\gamma_\mu\xi^a),\quad \delta_\chi\chi^{A,a}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}^A_2\xi^a. \qquad (19.133)$$

さらに、重力多重項とテンソル多重項に含まれる反対称テンソル場のビアンキ恒等式および変換則を次のように変更する必要がある。

$$dh^{\mathrm{mod}}_3=\frac{N}{2}F^A_2\wedge F^A_2,\quad \delta h^{\mathrm{mod}}_3 = N\delta A^A\wedge F^A_2. \qquad (19.134)$$

19.6 R-対称性のゲージ化

R-対称性をゲージ化してみよう。そのとき、どのような変更が必要かを考えてみよう。重力部分の不変性を示す際に (15.77) において次の変分が現れたことを思い出そう。

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{2\pi}=\frac{e}{2e^{2\varphi}}\Big[-(\psi_k\gamma^{kmn}[D^{(\omega)}_m,D^{(\omega)}_n]\xi)-(\lambda\gamma^{mn}[D^{(\omega)}_m,D^{(\omega)}_n]\xi)\Big] \qquad (19.135)$$

R-対称性がゲージ化されている場合、この式の共変微分の交換関係から、次の寄与が新たに現れる。

$$[D^{(G,\omega)}_\mu,D^{(G,\omega)}_\nu]=F^A_{\mu\nu}T_A+\cdots \qquad (19.136)$$

ここで、T_A は反エルミートな $SU(2)$ 生成子である。ここでは次のように二つの部分に分けて書いてみよう。

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{2\pi} &= \frac{e}{2e^{2\varphi}}\Big[-(\overline{\psi}_{\lambda,a}\gamma^\lambda T_A{}^a{}_b F_2^A\xi^b)-(\overline{\lambda}_a T_A{}^a{}_b F_2^A\xi^b)\Big]\\ &\quad+\frac{e}{2e^{2\varphi}}\Big[-(\overline{\psi}_{\lambda,a}F_2^A\gamma^\lambda T_A{}^a{}_b\xi^b)-(\overline{\lambda}_a F_2^A T_A{}^a{}_b\xi^b)\Big].\end{aligned} \tag{19.137}$$

一行目は $\delta\chi$ に比例している。そこで次の項の導入によって相殺できる。

$$\frac{\mathcal{L}'}{2\pi}=\frac{\sqrt{2}e}{e^{2\varphi}}\Big[(\overline{\psi}_{\lambda,a}\gamma^\lambda T_A{}^a{}_b\chi^{A,b})+(\overline{\lambda}'_a T_A{}^a{}_b\chi^{A,b})\Big]. \tag{19.138}$$

２行目を見てみると、(19.121) で導入した $\mathcal{L}_{\rm cur}$ と似ている。この項の χ に対して、次の変分を行ったものは上記の変分を相殺する。

$$\delta'\chi^{A,a}=\frac{\sqrt{2}}{N}T_A{}^a{}_b\xi^b. \tag{19.139}$$

ここで、二つの変更を行った。すなわち $\mathcal{L}'$ の追加と、χ の変換則の $\delta'\chi$ の追加である。これらがほかにどのような影響を及ぼすか考えなければならない。

まず、δ' の影響について考えてみよう。χ を含むのは $\mathcal{L}_\chi$、$\mathcal{L}_{\chi h\chi}$、そして今導入した $\mathcal{L}'$ である。これらのうち前二つについては

$$\frac{\delta'(\mathcal{L}_\chi+\mathcal{L}_{\chi h\chi})}{2\pi}=\sqrt{2}\frac{e}{e^{2\varphi}}(\delta\lambda_a+\delta\psi_{\mu,a}\gamma^\mu)T_A{}^a{}_b\chi^{A,b} \tag{19.140}$$

となる。これはちょうど $\delta_{\lambda,\psi_\mu}\mathcal{L}'$ と相殺する。

残された項は $\delta'\mathcal{L}'$ である。

$$\frac{\delta'\mathcal{L}'}{2\pi}=-\frac{2e}{e^{2\varphi}N}((\overline{\lambda}_a+\overline{\psi}_{\mu,a}\gamma^\mu)T_A{}^a{}_b T_A{}^b{}_c\xi^c)=\frac{6eC}{e^{2\varphi}N}((\overline{\lambda}_a+\overline{\psi}_{\mu,a}\gamma^\mu)\xi^a). \tag{19.141}$$

ただし、生成子 T_A の規格化によって定まる定数 C を次のように導入した。

$$T_AT_B+T_BT_A=-2C\delta_{AB}. \tag{19.142}$$

これは、次の宇宙項を追加することで相殺できる。

$$\frac{\mathcal{L}_{\rm cc}}{2\pi}=24\frac{eC}{Ne^{2\varphi}},\quad \delta_{e,\varphi}\mathcal{L}_{\rm cc}=-6\frac{eC}{Ne^{2\varphi}}(\overline{\lambda}_a\xi^a). \tag{19.143}$$

ここで現れた宇宙項の大きさは、ニュートン定数とゲージ結合定数の関数として決まる。数係数を無視した大雑把な議論で、このことを確認しておこう。今考えた系では、これらの定数は次のように与えられている。

$$G_N\sim e^{2\varphi},\quad g_{\rm YM}^2\sim\frac{Ce^{2\phi}}{N},\quad \Lambda\sim\frac{C}{Ne^{2\phi}}. \tag{19.144}$$

‘=’ ではなく ‘∼’ を用いたのは、数係数を無視していることを表している。これら 3 つの式から、次の関係式が得られる。

$$\Lambda\sim\frac{g_{\rm YM}^2}{G_N^2}. \tag{19.145}$$

実は、この関係式は R-対称性がゲージ化された超重力理論においては一般的に成り立つ関係式である。このことは、R-対称性がゲージ化された超重力理論を、曲がった内部空間を用いて高次元の超重力理論をコンパクト化することによって得られた理論だとみなすことで、次のように簡単に説明することができる。

Soryushiron Kenkyu

$d+n$ 次元の超重力理論を n 次元多様体 $\mathcal{M}$ でコンパクト化して d 次元の超重力理論を得ることを考えよう。多様体 $\mathcal{M}$ がアイソメトリーを持てば、d 次元の理論には対応するゲージ場が現れる。また、アイソメトリーが非アーベル群であれば、それは超対称電荷に作用する R-対称性である。多様体 $\mathcal{M}$ の典型的長さのスケールを L、$d+n$ 次元でのニュートン定数を G'_N としよう。このとき、$d+n$ 次元のアインシュタイン作用から d 次元のアインシュタイン作用、ゲージ場の運動項、宇宙項が現れる。

$$\mathcal{L} \sim \frac{1}{G'_N}\int_{\mathcal{M}} d^n x\sqrt{-g^{(d+n)}}R^{(d+n)} \sim \sqrt{-g^{(d)}}\left(\frac{1}{G_N}R^{(d)} + \frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^2}F_{\mu\nu}^2 + \Lambda\right). \tag{19.146}$$

宇宙項は内部空間の曲率による寄与を表している。正確にはこのほかに内部空間上のフラックスも宇宙項に寄与するが、運動方程式よりそれが曲率の寄与と同程度であることがわかる。3 つのパラメータ $G_N, g_{\mathrm{YM}}, \Lambda$ を G'_N と L で表すと、数係数を除き次のようになるはずである。

$$G_N \sim \frac{G'_N}{L^n}, \quad g_{\mathrm{YM}}^2 \sim \frac{G'_N}{L^{n+2}}, \quad \Lambda \sim \frac{L^{n-2}}{G'_N}. \tag{19.147}$$

L のべきは次元が合うように決定した。これら 3 つの関係式から G'_N と L を消去すれば、(19.145) を得る。

19.7 10 次元超重力理論の $\mathbf{T}^4$ コンパクト化

10 次元の超重力理論を 4 次元分コンパクト化することによって 6 次元の $\mathcal{N}=(1,0)$ 超重力理論を構成しよう。まずは 10 次元と 6 次元でのスピノル、γ-行列の関係を与えておく。

19.7.1 スピノルと γ-行列

まずスピノルや γ 行列について、10 次元のものと 6 次元のものの関係をまとめよう。10 次元の γ-行列 Γ^M は、ミンコフスキー 6 次元空間の γ^μ $(\mu=0,\ldots,5)$ とユークリッド 4 次元空間の γ^i $(i=6,7,8,9)$ を用いて次のように構成することができる。

$$\Gamma^\mu = \mathbf{1}\otimes\gamma^\mu, \quad \Gamma^i = \gamma^i\otimes\gamma^7, \quad \Gamma^{11} = \gamma^5\otimes\gamma^7. \tag{19.148}$$

最後の式は 10 次元でのカイラリティが 4 次元のカイラリティと 6 次元のカイラリティの積になっていることを表わしている。コンパクト化した 4 次元部分の回転対称性は 6 次元の理論の内部対称性になる。この対称性を $\mathrm{SO}(4)=\mathrm{Sp}(1)_1\times\mathrm{Sp}(1)_2$ とする。(19.148) に対応したスピノルの分解は次のように与えられる。

$$\psi = \begin{pmatrix} \eta^a \\ \chi^{\dot m} \end{pmatrix}, \quad \overline{\psi} = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_a & \overline{\chi}_{\dot m} \end{pmatrix}. \tag{19.149}$$

ただし、λ および ψ はどちらも 6 次元での 8 成分ディラックスピノルを縦に二つ並べたものであり、それらを区別する添字が a と $\dot m$ である。これらはそれぞれ $\mathrm{Sp}(1)_1$ と $\mathrm{Sp}(1)_2$ のもとで二重項として変換される。

10 次元、4 次元、6 次元の荷電共役行列としてはひとつ上の奇数次元のものを採用することにする。すると、次のように分解することができる。

$$C_{10} = C_4\otimes C_6. \tag{19.150}$$

4 次元部分についての荷電共役演算子 C_4 は次の式を満足する。

$$C_4^T = -C_4, \quad C_4(\gamma_4^i)^T = +\gamma_4^i C_4. \tag{19.151}$$

4 次元の γ 行列と荷電共役行列を 2 成分表示の行列で表わすと、次のようになる。

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & (\gamma^i)^a{}_{\dot m} \\ (\gamma^i)^{\dot m}{}_a & 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} \epsilon^{ab} & \\ & \epsilon^{\dot m\dot n} \end{pmatrix}. \tag{19.152}$$

10 次元でのマヨラナ共役は $\psi_c = C\overline{\psi}$ は、6 次元でのシンプレクティックマヨラナ共役として次のように表される。

$$\eta_c^a = \epsilon^{ab}C\overline{\eta}_b, \quad \chi_c^{\dot m} = \epsilon^{\dot m\dot n}C\overline{\chi}_{\dot n}. \tag{19.153}$$

また、γ 行列の部分行列として定義される $(\gamma^i)^a{}_{\dot m}$ および $(\gamma^i)^{\dot m}{}_a$ は次の性質を満足する。

4 次元 γ 行列に対する公式

まず、反交換関係 $\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij}$ から、次の関係が成り立つ。

$$(\gamma^i)^a{}_{\dot m}(\gamma^j)^{\dot m}{}_b + (\gamma^j)^a{}_{\dot m}(\gamma^i)^{\dot m}{}_b = 2\delta^{ij}\delta^a_b, \quad (\gamma^i)^{\dot m}{}_a(\gamma^j)^a{}_{\dot n} + (\gamma^j)^{\dot m}{}_a(\gamma^i)^a{}_{\dot n} = 2\delta^{ij}\delta^{\dot m}_{\dot n}. \tag{19.154}$$

トレースの公式 $\mathrm{tr}(\gamma^i\gamma^j) = 2\delta^{ij}$ および $\mathrm{tr}(\gamma^i\gamma^j\gamma^5) = 0$ から次の公式が成り立つ。

$$(\gamma^i)^a{}_{\dot m}(\gamma^j)^{\dot m}{}_a = 2\delta^{ij}. \tag{19.155}$$

さらに、フィルツ変換に相当する関係式は

$$(\gamma^i)^a{}_{\dot m}(\gamma^i)^{\dot n}{}_b = 2\delta^a_b\delta^{\dot n}_{\dot m}. \tag{19.156}$$

荷電共役行列との関係式は次のように書くことができる。

$$\epsilon^{ab}(\gamma^i)^{\dot m}{}_b = (\gamma^i)^a{}_{\dot n}\epsilon^{\dot n\dot m}, \quad \epsilon^{\dot m\dot n}(\gamma^i)^a{}_{\dot n} = (\gamma^i)^{\dot m}{}_b\epsilon^{ba}. \tag{19.157}$$

エルミート性は、

$$((\gamma^i)^a{}_{\dot m})^* = (\gamma^i)^{\dot m}{}_a. \tag{19.158}$$

Sp(1) の足に作用するような γ-行列、すなわち 10 次元からのコンパクト化の際に現れた γ^i については逆に、符号が現れない。γ^i をひとつ間に挟んだフェルミオンの積に対しては次の式が成り立つ。

$$(\overline{\eta}_a(\gamma^i)^a{}_{\dot m}\chi^{\dot m}) = (\eta^a\epsilon_{ab}(\gamma^i)^b{}_{\dot m}\chi^{\dot m}) = (\chi^{\dot m}\epsilon_{\dot m\dot n}(\gamma^i)^{\dot n}{}_a\eta^a). = (\overline{\chi}_{\dot m}(\gamma^i)^{\dot m}{}_a\eta^a) \tag{19.159}$$

$$(\overline{\eta}_a(\gamma^i)^a{}_{\dot m}\chi^{\dot m})^\dagger = (\overline{\chi}_{\dot m}(\gamma^i)^{\dot m}{}_a\eta^a), \quad (\eta\gamma^i\chi)^* = (\eta\gamma^i\chi). \tag{19.160}$$

19.7.2 truncation

10 次元の $\mathcal{N} = 1$ の超重力理論にはヘテロ型超重力理論と I 型超重力理論が存在する。これらは互いに変数変換で移り合う等価な理論であるが、ここではヘテロ型超重力理論の 4 次元部分をコンパクト化することによって 6 次元の超重力理論を構成しよう。ヘテロ型超重力理論の変換パラ

Soryushiron Kenkyu

メータ ξ は正のカイラリティを持っているから、(19.148) の分解により 4 次元と 6 次元のカイラリティがともに正の双スピノルと、ともに負の双スピノルに分解される。

$$\xi \to \underline{\xi^{L,a}}, \xi^{R,\dot{a}}. \tag{19.161}$$

$\mathcal{N}=(1,0)$ の 6 次元超重力理論を得るために、下線を引いたスピノルのみが残るように truncation を行おう。そのような truncation には幾つかの方法があるが、ここでは内部 4 次元空間の回転対称性 $\mathrm{SO}(4)=\mathrm{SU}(2)_1\times\mathrm{SU}(2)_2$ の元 $(+1,-1)$ をとり、その作用のもとで不変である場の成分のみを残す射影を行う。ただし、$\mathrm{SU}(2)_1$ は正のカイラリティの部分に、$\mathrm{SU}(2)_2$ は負のカイラリティの部分に作用するものとする。射影を行った結果として得られる理論において、二つの $\mathrm{Sp}(1)$ 因子のうち $\mathrm{Sp}(1)_1$ は変換パラメータに作用する R-対称性であるから $\mathrm{Sp}(1)_R$ と書くことにしよう。これに対してもう一つの $\mathrm{Sp}(1)_2$ は超対称性変換と可換なフレーバー対称性であるから、$\mathrm{Sp}(1)_F$ と書くことにする。10 次元の理論をコンパクト化することで 6 次元の理論を構成した場合には、10 次元でのマヨラナ条件がちょうど 6 次元のシンプレクティックマヨラナ条件に対応しており、その際の付加対称性は $\mathrm{SU}(2)_F=\mathrm{Sp}(1)_F$ である。

$(\gamma^i)^a{}_{\dot{m}}$ および $(\gamma^i)^{\dot{m}}{}_a$ は、SO(4) のベクトル添字を $\mathrm{Sp}(1)_1\times\mathrm{Sp}(1)_2$ の双基本表現の二つの添字に変換する変換行列と解釈することができる。この行列は $\mathrm{SO}(4k)$ のベクトル添字を $\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(k)\subset\mathrm{SO}(4k)$ の双基本表現に変換する変換行列に一般化することができる。

19.7.3 ボゾン部分

10 次元の計量、反対称テンソル、ディラトン場は、$\mathbf{T}^4$ コンパクト化の結果、次のように分解される。

$$g_{IJ}\to\underline{g_{\mu\nu}}(9), g_{\mu i}(16), \underline{g_{ij}}(10),\quad B_{IJ}\to\underline{B_{\mu\nu}}(6), B_{\mu i}(16), \underline{B_{ij}}(6),\quad \phi\to\varphi(1). \tag{19.162}$$

これらのうち、下線を引いたものだけが $(1,-1)\in\mathrm{Sp}(1)_R\times\mathrm{Sp}(1)_F$ 不変であり、truncation の結果残る。計量の非対角成分 $g_{\mu i}$ が射影によって 0 になるが、このことは以下の計算を非常に単純化する。下線を引いた場は、重力多重項 $(g_{\mu\nu}, B^+_{\mu\nu})$、テンソル多重項 $(B^-_{\mu\nu},\varphi)$、4 つのハイパー多重項 (g_{ij}, B_{ij}) に分かれる。

計量から得られるスカラー場と反対称テンソル場から得られるスカラー場を次のようにまとめて書くのが便利である。

$$\phi_{ij}=G_{ij}+B_{ij}. \tag{19.163}$$

また、6 次元におけるスカラー場 φ を次のように定義しておくのが都合が良い。

$$\varphi=\phi-\sigma. \tag{19.164}$$

σ は内部空間の大きさを表わすスカラー場であり、次のように定義される。

$$\det g_{ij}=e^{4\sigma},\quad g^{ij}\partial_\mu g_{ij}=4\partial_\mu\sigma. \tag{19.165}$$

これらのスカラー場の作用は 10 次元の作用から簡単に得られる。10 次元ヘテロ型超重力理論の作用のフェルミオンを含まない項を $\mathbf{T}^4$ によって 6 次元にコンパクト化すると、次のように全体の係数として $e^{-2\varphi}$ を含む作用が得られる。

$$\frac{S}{2\pi}=\int d^6x\sqrt{-g}\frac{1}{e^{2\varphi}}\left(R+4\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-\frac{1}{4}G^{ik}G^{jl}\partial_\mu\phi_{ij}\partial^\mu\phi_{kl}-\frac{1}{12}h_{\mu\nu\rho}h^{\mu\nu\rho}\right) \tag{19.166}$$

19.7.4 超対称変換

超対称変換を調べることで、6 次元の場が上で述べたような超対称多重項を組むことを確認しよう。そのためには、フェルミオン場についても分解、射影を行ってどの成分が残るかを確認しておく必要がある。やってみると、以下の下線を引いた成分が残ることがわかる。

$$\psi_\mu \to \underline{\psi_\mu^{L,a}}(12), \psi_\mu^{R,\dot{a}}(12), \psi_i^{L,a}(16), \underline{\psi_i^{R,\dot{a}}}(16), \quad \lambda \to \lambda^{L,\dot{a}}(4), \underline{\lambda^{R,a}}(4). \tag{19.167}$$

ただし、L と R は 6 次元でのカイラリティを表し、4 次元でのカイラリティはスピノル添え字が点なしか点つきかで区別する。括弧の中の数は物理的自由度の個数を表す。

10 次元のスピン接続で 0 でないのは以下の成分のみである。

$$\omega_{\mu-\nu\rho}, \quad \omega_{\mu-ij} = \frac{1}{2}(-e_i^{\hat{k}}\partial_\mu e_j^{\hat{k}} + e_i^{\hat{k}}\partial_\mu e_j^{\hat{k}}) \equiv V_{\mu-ij}, \quad \omega_{i-j\mu} = \frac{1}{2}\partial_\mu g_{ij} \tag{19.168}$$

これらのうち、最初のものは 6 次元のスピン接続である。二番目のものは内部対称性の足に作用する接続である。例えば、$\mathrm{Sp}(1)_R$ の二重項である変換パラメータの微分は次のように得られる。

$$D_\mu \xi^L = D_\mu \xi^L + \frac{1}{4}V_{\mu-ij}\gamma^{ij}\xi^L, \quad D_i\xi^L = \frac{1}{2}\omega_{i-j\mu}\Gamma^{j\mu}\xi^L = -\frac{1}{4}\gamma^j \otimes (\partial\!\!\!/ g_{ij})\xi^L \tag{19.169}$$

2 階反対称テンソル B_{IJ} は 6 次元でひとつの 2 階反対称テンソル場と 6 つのスカラー場を与えるが、それらをそれぞれ $b_{\mu\nu}$ および B_{ij} と書くことにする。さらに、$b_{\mu\nu}$ に対応する場の強さを $h_{\mu\nu\rho}$ とする。このとき、$H\!\!\!/_3$ は次のように分解される。

$$H_3 = \mathbf{1} \otimes h\!\!\!/_3 + \frac{1}{2}\gamma^{ij} \otimes \partial\!\!\!/ B_{ij}. \tag{19.170}$$

ただし、6 次元の場や微分演算子についた斜線は 6 次元の γ-行列との縮約を表している。さらに (19.19) によって h_3 を自己双対部分 h_3^+ と反自己双対部分 h_3^- に分解する。

これらを用いて、10 次元の超対称変換から 6 次元の超対称変換を導こう。ヘテロ型超重力理論の変換則は

$$\delta\psi_I = D_I\xi + \frac{1}{8}\{\Gamma_I, H\!\!\!/_3\}\xi, \quad \delta\lambda = (\partial\!\!\!/\phi)\xi + \frac{1}{2}H\!\!\!/_3\xi. \tag{19.171}$$

$$\delta e_{\hat{m}}^\mu = \frac{1}{4}(\psi_{\hat{m}}\Gamma^\mu\xi), \quad \delta\phi = \frac{1}{8}(\lambda\xi), \quad \delta B_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(-\psi_\mu\Gamma_\nu\xi + \psi_\nu\Gamma_\mu\xi). \tag{19.172}$$

まず、6 次元のディラトン場 φ の超対称変換を調べてみよう。ディラトン場と、その超対称パートナーのフェルミオンの超対称変換は次のようになる。

$$\delta\lambda'^R = (\partial\!\!\!/\varphi)\xi + \frac{1}{2}h\!\!\!/_3^-\xi, \quad \delta\varphi = \frac{i}{8}\lambda'\xi. \tag{19.173}$$

ただし、フェルミオン λ'^R は次のように定義される。

$$\lambda' = \lambda + \gamma^i\psi_i. \tag{19.174}$$

従って、スカラー場 φ とスピノル λ'^R は、反対称テンソル場の反自己双対部分 h_3^- とともにテンソル多重項を成す。

φ 以外の 16 個のスカラー場 ϕ_{ij} はハイパー多重項に属する。これらの超対称変換を実際に調べてみよう。このスカラー場の超対称変換は、10 次元グラビティーノのベクトル添字が 4 次元方向を向いている成分 ψ_i のみを含む。(つまり、ディラティーノや 6 次元グラビティーノを含まない。)また、ψ_i の超対称変換はスカラー場 ϕ_{ij} のみを含む。従ってこれらは超対称多重項をなす。

$$\delta\phi_{ij} = -\frac{1}{2}(\overline{\psi}_{i,\dot{m}}(\gamma_j)^{\dot{m}}{}_a\xi^a), \quad \delta\psi_i^{\dot{m}} = -\frac{1}{4}(\partial\!\!\!/\phi_{ij})(\gamma^j)^{\dot{m}}{}_a\xi^a. \tag{19.175}$$

ここで、添字 i が完全に浮いていることに注意しよう。これは i のそれぞれの値ごとに ϕ_{ij} と ψ_i^R が独立なハイパー多重項を成すことを表わしている。

Soryushiron Kenkyu

19.7.5 モジュライ空間

ここでは上記のコンパクト化で得られたハイパー多重項についてさらに詳しく調べよう。

(19.74) および (19.75) で変換則を与えた際にはスカラー場をパラメータ空間上の座標とみなし、上付きの添え字によってそれぞれの成分を区別していた。そこで内部空間のローレンツ添え字 i と j を組にして括弧でくくり、パラメータ空間上の座標を区別する一つの添え字とみなすことにしよう。(19.166) を見れば、$\phi_{ij} \equiv \phi^{(ij)}$ によって張られるパラメータ空間上の計量は次のように与えられることがわかる。

$$G_{(ij)(kl)} = G^{ik}G^{jl}. \tag{19.176}$$

フェルミオン場 $\psi_i^{\dot{m}}$ は、パラメータ空間上でもスピノルとして振舞うので、$\psi_i^{\dot{m}}$ とスカラー場の結合や超対称変換を議論するためにはパラメータ空間上にも多脚場 $E_{(AB)}^{(\widehat{A}\widehat{B})}$ を導入しておく必要がある。作用 (19.166) を見てみると、その計量は次のように与えられることがわかる。

$$E_{(MN)}^{(\widehat{A}\widehat{B})} = e_{\widehat{A}}^{M} e_{\widehat{B}}^{N}. \tag{19.177}$$

一般には、局所ローレンツ変換の自由度があるために、g_{AB} が与えられたとしても、$e_A^{\widehat{I}}$ の与え方は決まらない。たとえば、時空の異なる二つの点において g_{AB} の値は同じであるが $e_A^{\widehat{I}}$ の値は異なるということがありえる。しかし、(19.177) がパラメータ空間上の関数として与えられるためには、g_{AB} がひとつ与えられたら一意的に $e_A^{\widehat{I}}$ が決まるように、局所ローレンツ変換のゲージを固定しておく必要がある。ここでは実際にそのようなゲージが取られており、$e_A^{\widehat{I}}$ は ϕ_{AB} の関数として与えられているとする。このとき、$e_A^{\widehat{I}}$ はスカラー場 ϕ_{AB} を通してのみ空間座標 x^μ に依存している。

計量 $G_{(AB)(CD)}$ を用いて得られるクリストッフェル記号は

$$\Gamma_{(AB)(CD)}^{(EF)} = -\frac{1}{2}(G^{AD}\delta_E^C\delta_F^B + G^{BC}\delta_E^A\delta_F^D) \tag{19.178}$$

$d\phi^{(AB)}$ を掛けてパラメータ空間上の 1-形式を定義すれば、次のように与えられる。

$$\Gamma_{(AB)(CD)}^{(EF)} d\phi^{(AB)} = -\frac{1}{2}(d\phi^{A}{}_{F}\delta_E^C + d\phi_{E}{}^{C}\delta_F^D) \tag{19.179}$$

同様に、多脚場からスピン接続を計算すると、次のような式を得る。

$$\omega_{(AB)-(\widehat{E}\widehat{F})(\widehat{C}\widehat{D})} d\phi^{(AB)} = \omega_{\widehat{E}\widehat{C}}^{\mathrm{left}}\delta_{\widehat{F}\widehat{D}} + \omega_{\widehat{F}\widehat{D}}^{\mathrm{right}}\delta_{\widehat{E}\widehat{C}}. \tag{19.180}$$

この式は、16 次元のモジュライ空間のホロノミーが $\mathrm{SO}(4)\times\mathrm{SO}(4)$ に含まれることを意味している。ただし二つの SO(4) はそれぞれ ϕ_{ij} の二つの添え字に作用する。右辺の ω^{left} および ω^{right} は次のように定義される量であり、それぞれ二つの添え字のうち、左側、右側の添え字に対してどのように変換されるかを表している。

$$\omega_{\widehat{I}\widehat{J}}^{\mathrm{left}} = \omega_{\widehat{I}\widehat{J}} - \frac{1}{2}dB_{\widehat{I}\widehat{J}}, \quad \omega_{\widehat{I}\widehat{J}}^{\mathrm{right}} = \omega_{\widehat{I}\widehat{J}} + \frac{1}{2}dB_{\widehat{I}\widehat{J}}. \tag{19.181}$$

ただし、$dB_{\widehat{A}\widehat{B}} = e_{\widehat{A}}^{A}e_{\widehat{B}}^{B}dB_{AB}$、すなわち、微分したあとに添え字を局所ローレンツ添え字に変換したもの、そして $\omega_{\widehat{A}\widehat{B}}$ は、コンパクト化された n 次元内部空間上でのスピン接続を表す 1-形式であり、

$$\omega_{(AB)-\widehat{A}\widehat{B}} d\phi^{(AB)} = \frac{1}{2}e_{\widehat{A}}^{K}de_{K\widehat{B}} - \frac{1}{2}e_{\widehat{B}}^{K}de_{K\widehat{A}} \tag{19.182}$$

Soryushiron Kenkyu

と定義される。このスピン接続はパラメータ空間上の 1-形式として定義されているが、$e_A^{\widehat{I}}$ が ϕ_{AB} を通して x^μ に依存していることを思い起こせば、時空の意味でのスピン接続は次のように与えることができる。

$$\omega_{\mu-\widehat{A}\widehat{B}} = \omega_{(AB)-\widehat{A}\widehat{B}}\partial_\mu\phi^{(AB)} \tag{19.183}$$

(19.180) は、n^2 次元のパラメータ空間上のスピン接続が n 次元空間上でのスピン接続の作用と、反対称テンソル場の寄与で表されることを意味している。

$\omega^{\mathrm{left}}_{\widehat{A}\widehat{B}}$ および $\omega^{\mathrm{right}}_{\widehat{A}\widehat{B}}$ に対応する曲率を計算してみると、

$$R^{\mathrm{left}}_{\widehat{A}\widehat{B}} = -\frac{1}{4}e^K_{\widehat{A}}e^L_{\widehat{B}}d\phi_{KM}\wedge d\phi_{LN}g^{MN}, \quad R^{\mathrm{left}}_{\widehat{A}\widehat{B}} = -\frac{1}{4}g^{KL}d\phi_{KM}\wedge d\phi_{LN}e^M_{\widehat{A}}e^N_{\widehat{B}}. \tag{19.184}$$

これはモジュライ空間が確かに (19.92) を満足することを意味している。

次に、フェルミオンの変換則が確かにハイパー多重項のそれに等しいことを示そう。フェルミオンについても、SO(4) のベクトル添え字 $\widehat{I}$ と Sp(1) のスピノル添え字 $\dot{m}$ をまとめてひとつの添え字 m で表すことにしよう。これは、SO(4) × Sp(1) を部分群として含む Sp(4) の基本表現の添え字であると解釈することもできる。これに伴い、内部空間の γ 行列も次のように一般化しておく。

$$\begin{aligned}
&(\gamma_{\widehat{I}})^m{}_a = (\gamma_{(\widehat{i}\widehat{j})})^{(\widehat{k}\dot{m})}{}_a = \delta_{\widehat{i}\widehat{k}}(\gamma_{\widehat{j}})^{\dot{m}}{}_a, \quad (\gamma_{\widehat{I}})^a{}_m = (\gamma_{(\widehat{i}\widehat{j})})^a{}_{(\widehat{k}\dot{m})} = \delta_{\widehat{i}\widehat{k}}(\gamma_{\widehat{j}})^a{}_{\dot{m}}, \\
&J^{mn} = J^{(\widehat{i}\dot{m})(\widehat{j}\dot{n})} = \delta_{\widehat{i}\widehat{j}}\epsilon^{\dot{m}\dot{n}}.
\end{aligned} \tag{19.185}$$

これは前に与えた $(\gamma_{\widehat{I}})^m{}_a$ が満足すべき性質を満たす。従って変換則は §19.4 に与えたものと同じになることがわかる。

重力多重項をここでは考えないことにして、純粋にハイパー多重項の成分のみからなる作用を取り出すと、やはり §19.4 に与えた作用が得られる。

このスピン接続を用いてフェルミオン $\psi^m_{\widehat{I}}$ の、パラメータ空間上で共変な微分を書いてみよう。添え字 $\widehat{I}$ が ω^{left} によって、添え字 $\dot{m}$ が ω^{right} によって回転されることに注意すれば、次のようになる。

$$\widehat{D}_\mu\psi^m_{\widehat{I}} = \left[D_\mu\psi^m_{\widehat{I}} + \omega_{\mu-\widehat{I}\widehat{J}}\psi^m_{\widehat{J}} + \frac{1}{4}\omega_{\mu-\widehat{A}\widehat{B}}(\gamma_{\widehat{A}\widehat{B}})^m{}_n\psi^n_{\widehat{I}}\right] - \frac{1}{2}\partial_\mu B_{\widehat{I}\widehat{J}}\psi^m_{\widehat{J}} + \frac{1}{8}\partial_\mu B_{\widehat{A}\widehat{B}}(\gamma_{\widehat{A}\widehat{B}})^m{}_n\psi^n_{\widehat{I}} \tag{19.186}$$

括弧でくくったはじめの 3 項は 10 次元での共変微分をそのままコンパクト化したものである。10 次元の作用

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{L}}{2\pi} \;=\;& \frac{e}{e^{2\phi}}\left(\frac{1}{2}(\psi_m\Gamma^k\Gamma^{mn}D_k\psi_n) - (\psi_m\Gamma^{km}D_k\lambda) - (\psi_m\Gamma^m\Gamma^k\lambda)(\partial_k\phi) + \frac{1}{2}(\lambda\not{D}\lambda)\right) \\
& -\frac{e}{8e^{2\phi}}\left(\frac{1}{2}\psi_m\Gamma^m\not{H}_3\Gamma^n\psi_n - \frac{1}{2}\psi_m\Gamma^n\not{H}_3\Gamma^m\psi_n - \psi_m\Gamma^m\not{H}_3\lambda + \psi_m\not{H}_3\Gamma^m\lambda - \lambda\not{H}_3\lambda\right)
\end{aligned} \tag{19.187}$$

をコンパクト化することによって、ψ_i の作用を計算してみると、ちょうどこの共変微分を用いて次のように書くことができる。

$$\frac{\mathcal{L}}{2\pi} = -\frac{e}{2e^{2\varphi}}(\overline{\psi}_{\widehat{i},m}\widehat{\not{D}}\psi^m_{\widehat{i}}) - \frac{e}{8e^{2\varphi}}g^{ij}(\psi_i\not{h}^+_3\psi_j). \tag{19.188}$$

これはまさしくハイパー多重項のフェルミオンの作用である。

Soryushiron Kenkyu

19.7.6 超重力理論の対称性と弦理論

一般に、コンパクト化を行うと場の種類が多くなるため、計算をうまく進めることができるかどうかは、如何に対称性をうまく使うかにかかっている。とくに、超重力理論をコンパクト化した際には、ラグランジアンを見ただけで直ちにそれとわかる対称性のほかに、スカラー場に対して非線型に実現されている（従って常に破れている）隠れた対称性が存在する。この対称性は弦理論のT-双対性と密接に関係しており、弦理論を用いると隠れた対称性を比較的簡単に見つけ出すことができる。[75]

ここでは弦理論のトーラスコンパクト化を考えよう。コンパクト化に関係するのは世界面上のボゾン場、しかもそのゼロモード部分だけであるから、それ以外のフェルミオンや振動子部分はここでは無視する。コンパクト化の周期を 1 にとり、トーラスの形状は計量 G_{IJ} によって指定することにする。ラグランジアンは次のように与えられる。

$$L=\int d\sigma\left[-\frac{1}{2}\partial_\alpha X^I\partial^\alpha X^J G_{IJ}+\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^I\partial_\beta X^J B_{IJ}\right] \tag{19.189}$$

ただし $\epsilon^{\tau\sigma}=+1$ とする。

巻きつき数を w^I とすると、ゼロモード部分は次のように展開できる。

$$X^I(\tau,\sigma)=x^I(\tau)+w^I\sigma. \tag{19.190}$$

これをラグランジアンに代入すると、

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}^I\dot{x}^J G_{IJ}-\frac{1}{2}w^I w^J G_{IJ}+\dot{x}^I w^J B_{IJ}. \tag{19.191}$$

従って、x^I に共役な正準運動量は

$$p_I=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^I}=G_{IJ}\dot{x}^J+B_{IJ}w^J. \tag{19.192}$$

X^I 方向が周期 1 にコンパクト化されていることから、この運動量は整数に量子化されている。二つの整数に量子化された量をまとめて $v^{\mathcal{I}}=(p_I,w^I)^T$ と書くのが便利である。

σ 方向の並進対称性に関連した保存量 P と τ に対するハミルトニアン H は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} P &= \partial_\sigma X^I\frac{\delta L}{\delta\dot{X}^I}=\partial_\sigma X^I(G_{IJ}\partial_\tau X^J+B_{IJ}\partial_\sigma X^J), && (19.193)\\ H &= \dot{X}^I\frac{\delta L}{\delta\dot{X}^I}-L=\frac{1}{2}\dot{X}^I\dot{X}^J G_{IJ}+\frac{1}{2}\partial_\sigma X^I\partial_\sigma X^J G_{IJ} && (19.194)\end{aligned}$$

上記の展開式および正準運動量の定義を用いると、これらの量に対するゼロモードの寄与が次のように与えられることがわかる。

$$P=\frac{1}{2}v^{\mathcal{I}}\eta_{\mathcal{I}\mathcal{J}}v^{\mathcal{J}},\quad H=\frac{1}{2}v^{\mathcal{I}}M_{\mathcal{I}\mathcal{J}}v^{\mathcal{J}}. \tag{19.195}$$

ただし、$\eta_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$、$M_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ は次のように定義される行列である。

$$\eta_{\mathcal{I}\mathcal{J}}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad M_{\mathcal{I}\mathcal{J}}=\begin{pmatrix}G^{IJ}&-G^{IK}B_{KJ}\\B_{IK}G^{KJ}&G_{IJ}-B_{IK}G^{KL}B_{LJ}\end{pmatrix} \tag{19.196}$$

行列 $\mathcal{M}$ の変換性を幾何学的に理解するために、次の行列 $N_{(I)}^{\mathcal{J}}$ を定義するのが便利である。

$$N_{(I)}^{\mathcal{J}}=\begin{pmatrix}G_{IJ}+B_{IJ}\\\delta_I^J\end{pmatrix}. \tag{19.197}$$

ただし、添え字 $\mathcal{J}$ は下つきの J と上付きの J を同時に表したものである。これを用いると、行列 M_{IJ} は次のように表すことができる。

$$M_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = 2\eta_{\mathcal{I}\mathcal{K}}P^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{J}} - \eta_{\mathcal{I}\mathcal{J}}. \tag{19.198}$$

ただし、$P^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{J}}$ は n 本のベクトル $N^{\mathcal{I}}_{(A)}$ の張る n 次元部分空間への射影を表す行列であり、次のように定義される。

$$P^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{J}} = N^{\mathcal{K}}_{(A)}\mathcal{G}^{AB}N^{\mathcal{L}}_{(B)}\eta_{\mathcal{L}\mathcal{J}}, \quad \mathcal{G}^{AB} = (\mathcal{G}_{AB})^{-1}, \quad \mathcal{G}_{AB} = N^{\mathcal{I}}_{(A)}\eta_{\mathcal{I}\mathcal{J}}N^{\mathcal{J}}_{(B)}. \tag{19.199}$$

上で定義した行列を用いれば $\mathcal{G}_{AB} = 2G_{AB}$ である。

コンパクト化のパラメータは、射影演算子 $\mathcal{P}$ を通してのみスペクトルに依存するから、パラメータをひとつ選ぶことと射影演算子をひとつ選ぶことは等価である。従って、スカラー場 ϕ_{ij} のパラメータ空間は $2n$ 次元空間中に n 次元部分空間を選ぶ方法と同じであり、次のように与えることができる。

$$\mathcal{M} = \mathrm{O}(n,n)/(\mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(n)). \tag{19.200}$$

(19.198) の関係式は、$\eta^{\mathcal{I}\mathcal{K}}M_{\mathcal{K}\mathcal{J}}$ は、$2n$ 次元空間中の n 本のベクトル $N^{\mathcal{J}}_{(I)}$ によって張られる n 次元部分空間に対する鏡映演算子であることを表している。これは n 本の基底ベクトルが同じ平面を表している限りその選び方にはよらないから、次の $GL(n)$ 変換に対して不変である。

$$N^{\mathcal{I}}_{(A)} \to U_A{}^B N^{\mathcal{I}}_{(B)}. \tag{19.201}$$

N を任意の行列とすれば、独立成分の個数は $2n^2$ 個であるが、$GL(n)$ 変換を用いればこれの下半分の部分行列が $n\times n$ 単位行列になるようにゲージ固定を行うことができる。この結果、物理的自由度は n^2 個になり、このときの N の上半分の成分が $G_{IJ}+B_{IJ}$ を表している。

G_{IJ} と B_{IJ} の成分を座標とする n^2 次元のパラメータ空間の計量を、上記の対称性と矛盾しないように決定しよう。

$$ds^2 \propto \mathcal{G}^{DC}\delta N^{\mathcal{I}}_{(C)}\eta_{\mathcal{I}\mathcal{K}}(P^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{J}} - \delta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}})\delta N^{\mathcal{J}}_{(D)} = \frac{1}{4}G^{AC}G^{BD}\delta X_{AB}\delta X_{CD} \tag{19.202}$$

したがって、$\mathcal{M}$ 上の計量は次のように与えられる。

$$G_{(AB)(CD)} = G^{AC}G^{BD}, \quad G^{(AB)(CD)} = G_{AC}G_{BD}, \tag{19.203}$$

実際に、ヘテロ型超重力理論のコンパクト化によって、スカラー場 ϕ_{ij} の作用を次のように得ることができる。

$$\frac{S}{2\pi} = \int -\frac{\sqrt{-g}}{4e^{2\varphi}}G^{AC}G^{BD}\partial_\mu\phi_{AB}\partial^\mu\phi_{CD} = \int -\frac{\sqrt{-g}}{4e^{2\varphi}}G_{MN}\partial_\mu\phi^M\partial^\mu\phi^N. \tag{19.204}$$

これはちょうど上記の計量から予想されるものと一致している。ただし、ϕ_{ij} がパラメータ空間上の座標であるということをさらに見やすくするために、二つの添え字を一つの上付きの添え字で ϕ^M のように表した。

19.8 拡張された超対称性

19.8.1 $\mathcal{N}=(1,1)$

非カイラルな $\mathcal{N}=2$ の 6 次元超重力理論は $\mathcal{N}=(1,1)$ 超重力理論とも表現される。それぞれの数は左巻きおよび右巻きの超対称電荷がシンプレクティックマヨラナスピノルとしていくつある

かを表している。この理論の R-対称性はそれぞれのカイラリティの超対称電荷に付随した $\mathrm{Sp}(1)_R$ 対称性の積 $\mathrm{Sp}(1)^2$ である。これを $\mathrm{Sp}(1)_R \times \mathrm{Sp}(1)'_R$ と表そう。

$\mathcal{N} = (1,0)$ の多重項を組み合わせて $\mathcal{N} = (1,1)$ 理論の多重項を構成しよう。この場合には、$\mathrm{Sp}(1)_R$ とは別の大域的対称性として $\mathrm{Sp}(1)'_R$ を導入する。すると、$\mathcal{N} = (1,1)$ のそれぞれの多重項は $\mathrm{Sp}(1)'_R$ の一重項か 2 重項に属する $\mathcal{N} = (1,0)$ の組み合わせとして表 19.2 のように与えられる。

表 19.2: 6 次元 $\mathcal{N} = (1,1)$ 超重力理論の多重項。

$(1,1)$	$(1,0)$	$\mathrm{Sp}(1)'_R$
gravity multiplet	gravity multiplet	1
	gravitino(R) multiplet	2
	tensor multiplet	1
gravitino(L) multiplet	gravitino(L) multiplet	1
/2	vector multiplet	2
	hyper multiplet	1
gravitino(R) multiplet	gravitino(R) multiplet	1
/2	tensor multiplet	2
vector multiplet	vector multiplet	1
	hyper multiplet	2

この表の 4 つの多重項のうち、二つのグラビティーノ多重項については実条件を課すことができるためにこの表には書かれていない大域的対称性の実負表現に属していなければならない。

それぞれの多重項に含まれる場をあらわにまとめたのが表 19.3 である。このようにばらして書くと、二つのグラビティーノ多重項が $\mathrm{SU}(2)_1$ と $\mathrm{SU}(2)_2$、$\mathrm{Sp}(1)_R$ と $\mathrm{Sp}(1)'_R$ を同時に入れかえる操作に対してお互いの共役になっていることがわかる。

19.8.2 $\mathcal{N} = (2,0)$

6 次元のカイラルな $\mathcal{N} = 2$ の理論は $\mathcal{N} = (2,0)$ 理論とも表現される。この理論の二つの超対称電荷は同じカイラリティを持つから、R-対称性は $\mathrm{Sp}(2)_R \sim \mathrm{SO}(5)$ である。この理論を $\mathcal{N} = (1,0)$ の多重項を組み合わせることで構成するには、この R-対称性の $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)'$ 部分群に注目し、片方の $\mathrm{Sp}(1)$ を R-対称性、もう片方を R-対称性ではない大域的対称性とみなせば良い。

この理論には、重力多重項、グラビティーノ多重項、テンソル多重項の 3 種類の多重項が存在するが、これらは $\mathcal{N} = (1,0)$ の多重項のうち $\mathrm{SU}(1)_1$ の同じ表現に属するもの同士を表 19.4 のように組み合わせることで構成することができる。

それぞれの多重項に含まれる場をばらして書くと、表 19.5 のようにそれぞれの場が $\mathrm{Sp}(2)_R$ 対称性の表現に属していることがわかる。

表 19.3: 6 次元 $\mathcal{N}=(1,1)$ 超重力理論の多重項。

multiplet	field	little group	$\mathrm{Sp}(1)_R \times \mathrm{Sp}(1)'_R$	d.o.f.
gravity multiplet	$g_{\mu\nu}$	$(3,3)$	$(1,1)$	9
	ψ^L_μ	$(3,2)$	$(2,1)$	12
	ψ^R_μ	$(2,3)$	$(1,2)$	12
	$B^+_{\mu\nu}$	$(3,1)$	$(1,1)$	3
	$B^-_{\mu\nu}$	$(1,3)$	$(1,1)$	3
	A_μ	$(2,2)$	$(2,2)$	16
	ψ^L	$(2,1)$	$(1,2)$	4
	ψ^R	$(1,2)$	$(2,1)$	4
	φ	$(1,1)$	$(1,1)$	1
gravitino(L) multiplet	ψ^L_μ	$(3,2)$	$(1,1)$	6
/2	$B^+_{\mu\nu}$	$(3,1)$	$(2,1)$	6
	A_μ	$(2,2)$	$(1,2)$	8
	ψ^L	$(2,1)$	$(2,2)$	8
	ψ^R	$(1,2)$	$(1,1)$	2
	ϕ	$(1,1)$	$(2,1)$	2
gravitino(R) multiplet	ψ^R_μ	$(2,3)$	$(1,1)$	6
/2	$B^-_{\mu\nu}$	$(1,3)$	$(1,2)$	6
	A_μ	$(2,2)$	$(2,1)$	8
	ψ^R	$(1,2)$	$(2,2)$	8
	ψ^L	$(2,1)$	$(1,1)$	2
	ϕ	$(1,1)$	$(1,2)$	2
vector multiplet	A_μ	$(2,2)$	$(1,1)$	4
	λ^L	$(2,1)$	$(2,1)$	4
	ψ^R	$(1,2)$	$(1,2)$	4
	ϕ	$(1,1)$	$(2,2)$	4

19.8.3 $\mathcal{N}=(2,2)$

$\mathcal{N}=(2,2)$ の理論の超対称電荷は左巻き、および右巻きのシンプレクティックマヨラナワイルスピノルが二つずつ存在するので、R-対称性はそのそれぞれについての対称性 Sp(2) の積 $\mathrm{Sp}(2)_R \times \mathrm{Sp}(2)'_R$ である。この理論には表 19.6 の重力多重項のみが存在する。ある運動量の固有状態について、物理的自由度の個数はボゾンとフェルミオンが 128 個ずつである。これは 11 次元超重力理論を $\mathbf{T}^4$ でコンパクト化したもの、または II 型超重力理論を $\mathbf{T}^3$ でコンパクト化したものに等しい。ただし、このようなコンパクト化による構成では、この理論の対称性 $\mathrm{Sp}(2)^2$ の一部分だけしか明白にならない。例えばこの理論を 11 次元超重力理論を $\mathbf{T}^5$ でコンパクト化したものであると考えると、$\mathrm{Sp}(2)^2$ の対角的部分群の $\mathrm{Sp}(2) \sim \mathrm{SO}(5)$ のみが明らかである。一方、II 型弦理論の対称性として考えると、閉弦の上の左回り部分と右回り部分のそれぞれに対して SO(4) の対称性が存在するから、$\mathrm{SO}(4)^2$ の対称性だけが明らかである。

表 19.4: 6 次元 $\mathcal{N}=(2,0)$ 超重力理論の多重項。

$(2,0)$	$(1,0)$	$\mathrm{Sp}(1)'$
gravity multiplet	gravity multiplet	1
	gravitino(L) multiplet	2
gravitino multiplet	gravitino(R) multiplet	1
/2	vector multiplet	2
tensor multiplet	tensor multiplet	1
	hyper multiplet	2

表 19.5: 6 次元 $\mathcal{N}=(2,0)$ 超重力理論の多重項に含まれる成分場。

multiplet	field	little group	$\mathrm{Sp}(2)_R$	d.o.f.
gravity multiplet	$g_{\mu\nu}$	$(3,3)$	1	9
	ψ_μ^L	$(3,2)$	4	24
	$h^+_{\mu\nu\rho}$	$(3,1)$	5	15
gravitino multiplet	ψ_μ^R	$(2,3)$	1	6
/2	A_μ	$(2,2)$	4	16
	ψ^L	$(2,1)$	5	10
tensor multiplet	$h^-_{\mu\nu\rho}$	$(1,3)$	1	3
	ψ^R	$(1,2)$	4	8
	ϕ	$(1,1)$	5	5

19.9 古典解

19.9.1 D1-D5 系

D1-ブレーンと D5-ブレーンが、D1-ブレーンの伸びる二つの向きが D5-ブレーンに含まれるように重なったものは超対称性を 1/4 だけ残す。この系は作用が

$$\frac{S}{2\pi}=\int d^{10}x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{e^{2\phi}}(R+4(\partial\phi)^2)-\frac{1}{12}G^2_{\mu\nu\rho}\right]+\cdots \tag{19.205}$$

と与えられる超重力理論の解として次のように与えられる。[76, 77]

$$ds^2=\frac{1}{(H_1H_5)^{1/2}}(-dt^2+dx^2)+\frac{H_1^{1/2}}{H_5^{1/2}}dy_i^2+(H_1H_5)^{1/2}dz_i^2,\quad e^\phi=g_{\mathrm{str}}\frac{H_1^{1/2}}{H_5^{1/2}}. \tag{19.206}$$

ただし、D1-ブレーンが伸びる向きを (t,x)、D5-ブレーンが伸びる向きのうち D1-ブレーンに垂直な方向を y_i $(i=1,2,3,4)$、そして両方のブレーンに垂直な方向を z_i $(i=1,2,3,4)$ とした。通常この系を考える場合には、y_i 方向は $\mathbf{T}^4$、あるいは K3 によってコンパクト化されているものとし、残された 6 次元空間の中ではどちらのブレーンも 1-ブレーンとみなされる。ここでは $\mathbf{T}^4$ コンパクト化を考えることにし、計量を無視して座標の周期の積として計算した体積を v_4 と表すこ

表 19.6: 6 次元 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超重力理論の多重項。

multiplet	field	little group	$\mathrm{Sp}(2)_R \times \mathrm{Sp}(2)'_R$	d.o.f.
gravity multiplet	$g_{\mu\nu}$	$(3,3)$	$(1,1)$	9
	ψ_μ^L	$(3,2)$	$(4,1)$	24
	ψ_μ^R	$(2,3)$	$(1,4)$	24
	$B_{\mu\nu}^+$	$(3,1)$	$(5,1)$	15
	$B_{\mu\nu}^-$	$(1,3)$	$(1,5)$	15
	A_μ	$(2,2)$	$(4,4)$	64
	ψ^L	$(2,1)$	$(5,4)$	40
	ψ^R	$(1,2)$	$(4,5)$	40
	ϕ	$(1,1)$	$(5,5)$	25

とにする。それに対し、計量まで考慮して計算した体積は V_4 と表すことにする。コンパクト化の周期を決めれば v_4 は定数であるが、V_4 は内部空間の計量に依存する場である。

H_1 および H_5 は次の式を満足する調和関数である。

$$-\Delta H_5 = g_{\mathrm{str}}\rho_5, \quad -\Delta H_1 = g_{\mathrm{str}}\rho_1. \tag{19.207}$$

ただし、ρ_5 は D5-ブレーンに垂直方向の z_i 空間上の D5-ブレーン密度であるのに対して、ρ_1 は D1-ブレーンに垂直な (y_i, z_i) 空間上での D1-ブレーンの密度である。従って、y_i 方向が体積 v_4 でコンパクト化されていることを考慮すると、D5-ブレーンが N_5 枚、D1-ブレーンが N_1 枚であった場合、二つの調和関数は次のように与えられる。

$$H_1 = 1 + \frac{r_1^2}{r^2}, \quad H_5 = 1 + \frac{r_5^2}{r^2}, \quad r = |z_i|, \quad r_1^2 = \frac{N_1 g_{\mathrm{str}}}{4\pi^2 v_4}, \quad r_5^2 = \frac{N_5 g_{\mathrm{str}}}{4\pi^2}. \tag{19.208}$$

N_1 と N_5 は、ゲージ場の積分として次のように定義される。

$$N_1 = \int_{\mathbf{S}^3 \times \mathbf{T}^4} *^{10} G_3, \quad N_5 = \int_{\mathbf{S}^3} G_3. \tag{19.209}$$

逆に、この式からゲージ場の値を決定することもできる。

この古典解は、$\mathbf{T}^4$ 部分をコンパクト化することで 6 次元の超重力理論の古典解と見なすこともできる。その時の超重力理論の作用は、10 次元の作用をコンパクト化することによって次のように与えられる。

$$\frac{S_6}{2\pi} = \int d^6x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{e^{2\varphi}}R - \frac{V_4}{12}G_{\mu\nu\rho}^2\right] + \cdots \tag{19.210}$$

ただし、φ は 6 次元のディラトン場であり、$e^{2\varphi} = e^{2\phi}/V_4$ と定義される。上記の解を代入すると、この 6 次元ディラトン場の値は定数になることがわかる。その値をここでは $g_6 = e^{\varphi}$ のように定義しよう。すなわち、$g_6^2 = g_{\mathrm{str}}^2/v_4$ である。6 次元の意味での双対場は次のように与えられる。

$$\widetilde{G}_3 = V_4 *^6 G_3. \tag{19.211}$$

N_1 と N_5 はこれらの場によって定義された電荷である。すなわち、

$$N_1 = \int_{\mathbf{S}^3} V_4 *^6 G_3, \quad N_5 = \int_{\mathbf{S}^3} G_3. \tag{19.212}$$

ここで、地平面近傍の様子を見てみると、自己双対条件 $*^6 G_3 = G_3$（$\widetilde{G}_3 = G_3$ ではないことに注意）が成り立つことが以下のようにわかる。自己双対条件が成り立つのは、次のように定義された関数 $u(r)$ が 1 になる場合である。

$$u(r) = \frac{N_5}{N_1} V_4(r). \tag{19.213}$$

上記の古典解を代入すると、地平面 $r = 0$ の上では常に $u(r) = 0$ が成り立つことがわかる。従って地平面近傍の様子を見るには 6 次元の自己双対弦の解を考えれば十分である。自己双対性が見やすい形にするために、ゲージ場を次のようにリスケールしておこう。

$$G'_3 = \sqrt{\frac{N_1}{N_5}} G_3 \tag{19.214}$$

この場合、地平面近傍での 6 次元の理論を表す作用は次のようになる。

$$\frac{S}{2\pi} = \int d^6 x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{g_6^2} R - \frac{1}{12} G'^2_{\mu\nu\rho} \right] + \cdots \tag{19.215}$$

従って双対場 $\widetilde{G}'_3$ は $*^6 G'_3$ に等しい。さらに、このようにリスケールされたゲージ場を用いて定義された二つの電荷は次のように等しくなる。

$$Q = \oint_{\mathbf{S}^3} G'_3 = \oint_{\mathbf{S}^3} *^6 G'_3 = \sqrt{N_1 N_5}. \tag{19.216}$$

すなわち、電荷 N_1、N_5 を持った D1-D5 系の地平面近傍の様子は、$\mathbf{T}^4$ 部分を除けば電荷 Q を持った 6 次元自己双対弦の解に一致する。さらに、$r_1 = r_5$ という条件が満足されている場合にはいたるところで $u(r) = 1$ であり、（地平面近傍だけではない）完全な 6 次元自己双対弦の解を再現する。

$$ds^2 = H^{-1}(-dt^2 + dx^2) + H dz_i^2, \quad H = 1 + \frac{r_0^2}{r^2}, \quad r_0^2 = \frac{g_6 Q}{4\pi^2}. \tag{19.217}$$

自己双対場の取り扱いについての注意

ここで、自己双対場の規格化の仕方が 10 次元の自己双対場の場合とは異なることを注意しておこう。自己双対条件が課されていない $n-1$-形式ゲージ場のエネルギー運動量テンソルを次のように定義しよう。

$$t_{\mu\nu}(F_n) = \frac{1}{(n-1)!} F_{\mu\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}} F_\nu{}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}} - \frac{1}{2\cdot n!} F_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} F^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} \tag{19.218}$$

$n \neq 5$ のとき、F_n とその双対場 F_{10-n} のエネルギー運動量テンソルは同じになる。従って、R-R 場のエネルギー運動量テンソルの合計は次のように書くことができる。

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4} t_{\mu\nu}(G_{2k+1}). \tag{19.219}$$

ここで、G_5 の寄与が $T_{\mu\nu} = (1/2) t_{\mu\nu}(G_5)$ であることに注意しよう。
一方、ここで考えた 6 次元の自己双対弦を与えるための作用は、もともと自己双対ではなく、電気的成分と磁気的成分は独立な自由度であり弦の電荷と磁荷が等しいためにたまたま場の強さ H_3 が自己双対な値を取ったとみなすことができる。従って、エネルギー運動量テンソルは $T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu}(H_3)$ と与えられ、余分な 1/2 因子はつかない。

Soryushiron Kenkyu

19.9.2 自己双対弦

ヘテロ型超重力理論を $\mathbf{T}^4/\mathbf{Z}_2$ でコンパクト化することによって得られた 6 次元の理論には h_3 と結合する弦と、その双対場 $*h_3$ と結合する弦が存在する。これらは 10 次元における基本的弦およびソリトン的 5-ブレーンが内部空間に巻きついたものであると解釈できる。そこでそれぞれ基本的弦およびソリトン的弦と呼ぼう。結合定数 $e^{2\varphi}$ はこれら二つのの弦の張力の比を与える数であり、それぞれの弦の張力を T_{fund} および T_{sol} と置けば、

$$e^{2\varphi} = \frac{T_{\text{fund}}}{T_{\text{sol}}} \tag{19.220}$$

という関係を満足する。この式の両辺は次元を持たない量であるから、この関係式はどのような計量を用いているかによらず成り立つ。

2 階反対称テンソル場の結合定数は次元を持たない量であったが、ニュートン定数は次元を持つ量である。上記の作用においてはこれが $e^{2\varphi}$ によって与えられているがワイル変換を行うことによってほかの値に取ることもできる。ニュートン定数を $e^{2\varphi}$ に取ることは基本的弦の張力を 1 に取ることを意味する。そこで、この計量を弦計量と呼ぶことにしよう。$g_{\mu\nu} \to e^{\varphi} g_{\mu\nu}$ によってアインシュタイン項の係数が 1 になるようなアインシュタイン計量に移ることができる。以下では引き続き弦計量を用いる。

6 次元超重力理論は自己双対な二階反対称テンソル場を含んでいる。したがってそれと結合するブレーンとして弦が存在している。この弦は自己双対な場に結合するために、電気的ブレーンと磁気的ブレーンが同じ、自己双対ブレーンである。超対称性が破れずに残るという条件から、自己双対弦の古典解を求めよう。弦の伸びている方向を x^μ $(\mu = 0, 1)$、弦からの距離を表す半径座標を r、弦の周りの角度を表す $\mathbf{S}^3$ 上の座標を θ^i とすると、対称性より計量を次のように取ることができる。

$$ds^2 = a^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + b^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \tag{19.221}$$

この背景上でのスピノルの共変微分は次のように与えられる。

$$D_\mu \xi = \partial_\mu \xi + \frac{a'}{2b} \gamma_{\hat{\mu}\hat{r}} \xi, \quad D_i \xi = \widehat{D}_i \xi + \frac{b'}{2b} r \gamma_{\hat{i}\hat{r}} \xi, \quad D_r \xi = \partial_r \xi. \tag{19.222}$$

ただし、hat つきの量は $a = b = 1$ である、平坦な時空で定義された量を表す。この式を用いてグラビティーノの変換

$$\delta\psi_M = D_M \xi + \frac{1}{8} \not{h}_3^+ \gamma_M \xi, \tag{19.223}$$

を書き換えてみると次のようになる。

$$\delta\psi_\mu = \frac{a'}{2b} \gamma_{\hat{\mu}\hat{r}} \xi + \frac{a}{8} \not{h}_3 \gamma_{\hat{\mu}} \xi, \quad \delta\psi_i = \widehat{D}_i \xi + \frac{b'}{2b} r \gamma_{\hat{i}\hat{r}} \xi + \frac{rb}{8} \not{h}_3 \gamma_{\hat{i}} \xi, \quad \delta\psi_r = \partial_r \xi + \frac{b}{8} \not{h}_3 \gamma_{\hat{r}} \xi. \tag{19.224}$$

大域的超対称性が残っているためには、これらの変換が 0 になっていなければならない。次の式を用いてその条件を書きなおす。

$$\gamma_{\hat{r}} \not{h}_3 \gamma_{\hat{i}} = \gamma_{\hat{i}} \not{h}_3 \gamma_{\hat{r}}, \quad \gamma_{\hat{r}} \not{h}_3 \gamma_{\hat{\mu}} = -\gamma_{\hat{\mu}} \not{h}_3 \gamma_{\hat{r}}. \tag{19.225}$$

すると、次の 3 つの独立な式を得る。

$$0 = \frac{a}{b} \gamma_{\hat{\mu}} \gamma_{\hat{r}} \left(\frac{a'}{2a} + \frac{b}{8} \not{h}_3 \gamma_{\hat{r}} \right) \xi = r \gamma_{\hat{i}} \gamma_{\hat{r}} \left(\frac{b'}{2b} - \frac{b}{8} \not{h}_3 \gamma_{\hat{r}} \right) \xi = \left(\frac{s'}{s} + \frac{b}{8} \not{h}_3 \gamma_{\hat{r}} \right) \xi. \tag{19.226}$$

Soryushiron Kenkyu

これは次のように書きかえることができる。

$$\frac{b}{2}\not{h}_3\gamma_{\hat{r}} : \frac{a'}{a} : \frac{b'}{b} : \frac{s'}{s} = 1 : -\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : -\frac{1}{4}. \tag{19.227}$$

a、b、s が遠方で 1 になることを要求すれば、3 つの関数 a、b、s は遠方で 1 になるある一つの関数 H を用いて次のように書けるはずである。

$$a = H^{-1/2}, \quad b = H^{1/2}, \quad s = H^{-1/4}. \tag{19.228}$$

すなわち、自己双対弦の解の計量は次のように与えられる。

$$ds^2 = H^{-1}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + H(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2). \tag{19.229}$$

$H(r)$ の関数形を決めるために、h_3^+ に対する電束の保存則をもちいる。すなわち、弦を囲む $\mathbf{S}^3$ 上の積分が次のように電荷を与えるという条件がある。

$$N = \oint h_3 = \frac{1}{2}c_3 r^3 b^3 \not{h}_3. \tag{19.230}$$

最後の表式で 1/2 がついているのは、h_3 が自己双対であるために $h_{\theta^1\theta^2\theta^3}$ の寄与だけではなく h_{01r} の寄与も存在しているためである。この式から b と $\not{h}_3$ との関係式が得られ、上記の微分方程式と組み合わせることで関数 H が次のように決定される。

$$H = 1 + \frac{N}{4\pi^2 r^2} \tag{19.231}$$

(19.229) は、r が小さいところで次の計量で近似される。

$$ds^2 = \frac{r^2}{r_0^2}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{r_0^2}{r^2}dr^2 + r_0^2 d\Omega_3^2. \tag{19.232}$$

これは $\mathrm{AdS}_3 \times \mathbf{S}^3$ を表している。さらに、場の強さは次のように与えられる。

$$h_{\widehat{345}} = \frac{2}{r_0}, \quad r_0^2 = \frac{N}{4\pi^2}. \tag{19.233}$$

r_0 は AdS_3 と $\mathbf{S}^3$ の半径を表している。

まず、この多様体のボゾン的対称性、すなわちアイソメトリーを調べてみよう。$\mathbf{S}^3$ 部分については、その対称性は SO(4) である。AdS_3 は計量 $(-,+,+,-)$ を持つ 4 次元空間中で、次のような式で表すことができる。

$$-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = -r_0^2 \tag{19.234}$$

このように定義された座標平坦な $\mathbf{R}^4$ 座標 y_i と t、x、r の間の関係は、

$$r = y_3 + y_4, \quad t = \frac{r_0}{r}y_1, \quad x = \frac{r_0}{r}y_2. \tag{19.235}$$

によって与えられる。AdS_3 が (19.234) のように表せることからもわかるように、そのアイソメトリーは $SO(2,2)$ である。座標 y^i に作用する $SO(2,2)$ の生成子 M_{ij} は

$$M_{ij} = y_i\frac{\partial}{\partial y^j} - y_j\frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{19.236}$$

この生成子は次の交換関係を満足する。

$$[M_{ij}, M_{kl}] = \eta_{jk}M_{il} - \eta_{jl}M_{ik} - \eta_{ik}M_{jl} + \eta_{il}M_{jk}. \tag{19.237}$$

アイソメトリーは $SO(2,2) = SL(2,\mathbf{R}) \times SL(2,\mathbf{R})$ とも表すことができます。この二つの $SL(2,\mathbf{R})$ への分解は次のような生成子を定義することによって実現されます。

$$J_z = \frac{1}{2}(M_{14} + M_{23}), \quad J_x = \frac{1}{2}(M_{24} - M_{31}), \quad J_y = \frac{1}{2}(M_{12} - M_{34}). \tag{19.238}$$

$$\widetilde{J}_z = \frac{1}{2}(M_{14} - M_{23}), \quad \widetilde{J}_x = \frac{1}{2}(M_{24} + M_{31}), \quad \widetilde{J}_y = \frac{1}{2}(M_{12} + M_{34}). \tag{19.239}$$

このように定義した生成子 J_i の間の交換関係は次の通り。

$$[J_x, J_y] = -J_z, \quad [J_y, J_z] = J_x, \quad [J_z, J_x] = J_y. \tag{19.240}$$

$\widetilde{J}_i$ についてもまったく同様な式が成り立ち、J_i と $\widetilde{J}_i$ は可換である。

次に、AdS_3 の上でどのような超対称性が残るかを調べてみよう。古典解の立場からは、それらの超対称性は古典解上のキリングスピノルで表現される。キリングスピノルの満足すべき方程式は

$$D_M \xi + \frac{h}{4}(\gamma^{\widehat{345}})\gamma_M \xi = 0. \tag{19.241}$$

である。ただし $h = h_{\widehat{345}}$ であり、$\gamma^7 \xi = +\xi$ のときに

$$\not{h}_3^+ = h(\gamma^{\widehat{012}} + \gamma^{\widehat{345}}) = 2h\gamma^{\widehat{345}} \tag{19.242}$$

であることを用いた。ここで、スピノル

$$\xi' = \gamma^{\widehat{345}} \xi. \tag{19.243}$$

を定義すると、キリングスピノルの定義式 (19.241) の $M = \mu$ および $M = i$ の場合について次のように書きかえることができる。

$$D_\mu \xi - \frac{h}{4}\gamma_\mu \xi' = 0, \quad D_\mu \xi' - \frac{h}{4}\gamma_\mu \xi = 0, \tag{19.244}$$

$$D_i \xi + \frac{h}{4}\gamma_i \xi' = 0, \quad D_i \xi' - \frac{h}{4}\gamma_i \xi = 0. \tag{19.245}$$

ここで、AdS_3 の半径方向の座標 u と、$\mathbf{S}^3$ の半径方向の座標 v を導入して 8 次元空間での γ-行列を次のように導入しよう。

$$\Gamma^M = \sigma_z \otimes \gamma^M, \quad \Gamma^u = -i\sigma_y \otimes \mathbf{1}_8, \quad \Gamma^v = \sigma_x \otimes \mathbf{1}_8, \quad \Gamma^9 = \sigma_z \otimes \gamma^7. \tag{19.246}$$

さらに、ξ と ξ' を並べて次のスピノルを定義する。

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \end{pmatrix}. \tag{19.247}$$

このスピノルは上記の Γ 行列で定義された 8 次元空間のシンプレクティックマヨラナスピノルであり、(19.243) から次の式に従う。

$$\Gamma^{\widehat{v345}} \Xi = \Xi, \quad \Gamma^{\widehat{9}} \Xi = \Xi. \tag{19.248}$$

すなわち、$\mathbf{S}^3$ を含む $\mathbf{R}^4$ 上および AdS_3 を含む $\mathbf{R}^4$ 上でのカイラリティが正である事を意味している。

(19.247) において定義されたスピノル Ξ を用いると、キリングスピノルの定義式 (19.243) は次のように書くことができる。

$$D^{(6)}_\mu \Xi + \frac{h}{4}\Gamma^{\mu u}\Xi = 0, \quad D^{(6)}_i \Xi + \frac{h}{4}\Gamma^{iv}\Xi = 0. \tag{19.249}$$

さらに、それぞれの式の第 2 項の寄与は次のように 8 次元のスピン接続の次の成分として表される。

$$\omega^{(8)}_{\mu-\widehat{\mu}\widehat{u}} = \omega^{(8)}_{i-\widehat{i}\widehat{v}} = \frac{h}{2} \tag{19.250}$$

を用いれば、式 (19.249) は次のようにまとめて書くことができる。

$$D^{(8)}_M \Xi = 0. \tag{19.251}$$

すなわち、Ξ は 8 次元空間上の定数スピノルである。

19.9.3　非 BPS な自己双対弦の解と 3 次元ブラックホール

静的な解

ここでは、次の作用によって記述される系の自己双対弦の古典解について議論する。

$$\frac{S}{2\pi} = \int d^6x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{g_6^2}R - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}\right]. \tag{19.252}$$

自己双対弦は、電荷、磁荷が等しい弦のことである。つまり、次の条件を満足するような弦の解について考える。

$$\oint H_3 = \oint *H_3 = Q. \tag{19.253}$$

このような電荷、磁荷を持った 6 次元空間の非 BPS 自己双対弦の解は次のように与えられる。[78]

$$ds^2 = -F_+dt^2 + F_-dx^2 + \frac{1}{F_+F_-}d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2. \tag{19.254}$$

ただし、$F_\pm$ は半径座標 ρ の関数で次のように与えられる。

$$F_\pm(\rho) = 1 - \frac{r_\pm^2}{\rho^2}, \quad r_- \le r_+, \quad r_0^2 = r_+r_- = \frac{g_6 Q}{4\pi^2}. \tag{19.255}$$

ゲージ場については (19.253) より直ちに決定することができる。$r = r_+$ のところで $g_{tt} = 0$ になるから、$r = r_+$ は地平面を表している。そして地平面上での g_{xx} の値 $(r_+^2 - r_-^2)/r_+^2$ が地平面の面積を決定するから、r_+ と r_- がどれだけずれているかによってブラックホールのエントロピーが決定される。

地平面上で 0 となる座標に移っておくのが以下の議論のためには便利である。これは先ほどと同じ座標変換 $\rho^2 = r_+^2 + r^2$ で実現される。この座標を用いると、6 次元時空上の非 BPS な弦の解は、次の計量で与えられる。

$$ds^2 = f_+^{-1}(-dt^2 + f_\epsilon dx^2) + f_+(f_\epsilon^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_3^2), \tag{19.256}$$

ただし、f_+ と f_ϵ は次のように定義される r の関数である。

$$f_+(r) = 1 + \frac{r_+^2}{r^2}, \quad f_\epsilon(r) = 1 + \frac{\epsilon^2}{r^2}, \quad \epsilon^2 = r_+^2 - r_-^2. \tag{19.257}$$

$r_+ = r_- = r_0$ の場合は BPS な解を表しており、(19.217) に与えた BPS 自己双対弦の解を得ることができる。

二つのパラメータはこの弦の上のエネルギー密度および圧力と関係している。この解の遠方での振る舞いを見ることによって、弦上の圧力とエネルギー密度を次のように求めることができる。

$$\frac{\mathcal{E}}{T} = \frac{3r_+^2 + r_-^2}{4r_0^2}, \quad \frac{\mathcal{P}}{T} = \frac{r_+^2 + 3r_-^2}{4r_0^2}, \quad T = \frac{2\pi Q}{g_6}. \tag{19.258}$$

ブーストされた解

解 (19.256) を t-x 平面上でブーストすることによって（物理的に許される）一般のエネルギー運動量テンソルを持った弦の解も構成することができる。その目的のためには、非 BPS の程度を表すパラメータ ϵ をベクトルの成分だと思って、

$$\epsilon^i = (\epsilon^t, \epsilon^x) = (0, \epsilon) \tag{19.259}$$

を定義するのが便利である。そうすると、計量 (19.256) は次のように t-x 平面上でのローレンツ変換に対して共変な形に書くことができる。

$$ds^2 = f_+^{-1}\left(-dt^2 + dx^2 + \frac{1}{r^2}(\epsilon_i dx^i)^2\right) + r^2 f_+ \left(\frac{1}{r^2+\epsilon^2}dr^2 + d\Omega_3^2\right), \tag{19.260}$$

ただし、$dx^i = (dt, dx)$ であり、ϵ^2 はベクトル ϵ^i の長さ $-\epsilon_t^2 + \epsilon_x^2$ と解釈する。このように書いておくと、ブーストした弦の解 [79] は単にベクトルパラメータ ϵ_i をブーストすることによって得ることができる。

地平面近傍

解 (19.260) の地平面近傍について詳しく見てみよう。すなわち、$r \sim \epsilon \ll r_- \sim r_+$ と見なして微小量を無視してみよう。これは形式的に次の変数変換を行い、パラメータ α を 0 にすることで実現される。

$$\epsilon^i \to \alpha\epsilon^i, \quad r \to \alpha r, \quad t \to t/\alpha, \quad x \to x/\alpha, \quad r_+ \text{fixed}. \tag{19.261}$$

この場合 $r_\pm$ はどちらも r_0 に置きかえることができる。そして $\mathbf{S}^3$ 部分の半径も r_0 であるから、残りの 3 次元部分は宇宙項を持った 3 次元の重力理論によって記述される。

$$\frac{S}{2\pi} = \frac{2\pi^2 r_0^3}{g_6^2}\int d^3x\sqrt{-g}[R-\Lambda], \quad \Lambda = -\frac{2}{r_0^2}. \tag{19.262}$$

(19.260) に地平面近傍の近似を用いて得られる計量は次のように与えられる。

$$ds^2 = \frac{r^2}{r_0^2}(-dt^2 + dx^2) + \frac{1}{r_0^2}(\epsilon_i dx^i)^2 + \frac{r_0^2}{r^2+\epsilon^2}dr^2, \tag{19.263}$$

ただし半径 r_0 の $\mathbf{S}^3$ 部分を省略した。r が ϵ に比べて大きいところでは、この解は $\mathbf{AdS}_3$ に漸近的に近づく。r が 0 の部分には地平面（実際には地平線）が現れているので、この解は $\mathbf{AdS}_3$ 上のブラックホール解と考えることができる。その質量は地平面の長さと関係している。その長さは次の式で与えられる。

$$L_{\text{hor}} = \int \sqrt{g_{xx}(r=0)}dx = \epsilon_x \int dx \tag{19.264}$$

もし x 方向をコンパクト化していなければ、$\epsilon_x \neq 0$ である限りこの式は無限大を与える。つまり、上の解は質量無限大のブラックホールに対応する。質量が有限のブラックホールを得るためには地平面を有限の長さの $\mathbf{S}^1$ にするために x 方向をコンパクト化する。(これは 3 次元でのみ可能である。より高次元の場合は、$\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ をコンパクト化しても $\mathbf{S}^n$ にはならないので、別の解を作る必要がある。) この周期は任意に取ってよいが、上記の解は変数変換 (19.261) のもとで不変であるという性質があるので、これを用いて次のように取る事ができる。

$$x \sim x + 2\pi r_0 \tag{19.265}$$

さらに、座標 x のかわりに次元を持たない角度変数 $\phi = x/r_0$ および新しい半径座標 $\rho^2 = r^2 + \epsilon_x^2$ を導入すると、計量 (19.263) は次のように変形される。

$$ds^2 = -\frac{(\rho^2 - \epsilon_x^2)(\rho^2 - \epsilon_t^2)}{r_0^2 \rho^2} dt^2 + \rho^2 \left[d\phi + \frac{\epsilon_x \epsilon_t}{r_0 \rho^2} dt \right]^2 + \frac{r_0^2 \rho^2}{(\rho^2 - \epsilon_x^2)(\rho^2 - \epsilon_t^2)} d\rho^2. \tag{19.266}$$

これは BTZ(Banados-Teitelboim-Zanelli) ブラックホール [80] として知られている。実際次のように M と J を定義しよう。

$$M = \frac{(\epsilon^t)^2 + (\epsilon^x)^2}{r_0^2}, \quad J = \frac{2\epsilon^t \epsilon^x}{r_0}. \tag{19.267}$$

このように定義された二つのパラメータ M と J は次の関係を満足する。

$$M r_0 \geq |J|. \tag{19.268}$$

これらのパラメータを用いて書きなおすと、計量は次のようになり、[80] に与えられている表式と一致する。

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} d\rho^2 + \rho^2 (N^\phi dt + d\phi)^2. \tag{19.269}$$

ただし N は重力ポテンシャルに、N^ϕ は角運動量から現れる引きずりに対応している。これらは r の関数として次のように与えられる。

$$N^2 = \frac{\rho^2}{r_0^2} - M + \frac{J^2}{4\rho^2}, \quad N^\phi = -\frac{J}{2\rho^2}. \tag{19.270}$$

重力ポテンシャル N^2 は $2\rho^2 = |J| r_0$ で最小値 $|J|/r_0 - M$ をとる。大小関係 (19.268) を用いれば、この値は常に負、または 0 であることがわかる。ρ が大きいところでは N^2 は常に正であるから、このことは ρ のある値で $N = 0$ になることを意味する。すなわちこの解は地平面を持つ。$M = J = 0$ の場合には $\rho = 0$ が地平面になるが、これは 6 次元の BPS 弦の解の地平面近傍と同じものである。

形式的に条件 (19.268) を満足しないようなパラメータ領域を考えることもできる。そのような解は自己双対弦の地平面近傍とは見なすことができないが、3 次元の重力理論の古典解としてはありえるものである。たとえば c をある正数として $M = -c^2$、$J = 0$ の場合を考えてみよう。この場合 (19.268) は満足されない。重力ポテンシャル N^2 は常に正であり、ρ が大きいところから地平面を横切らずに $\rho = 0$ にまで到達することができる。ρ が非常に小さい領域での計量を見てみると、次のようになる。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{1}{c^2} d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2. \tag{19.271}$$

この解の原点は中心角 $2\pi c$ の錐特異点である。$c = 1$ の場合には欠損角がなくなるのでいたるところ滑らかな時空となる。これは $\mathbf{AdS}_3$ を大域的座標で書いたものに他ならない。

(19.263) で与えられる解が実は局所的には $\mathbf{AdS}_3$ であることが次のようにしてわかる。$\epsilon^t \neq 0$ の解は $\epsilon^t = 0$ の解をブーストすることで得られるから、ϵ^x のみが 0 でない場合を考えよう。また、座標変換 (19.261) を用いると、ϵ^x の値も自由に取ることができるから、$\epsilon^x = r_0$ の場合を考える。$\mathbf{AdS}_3$ は次の計量をもつ 4 次元空間の球面として与えられる。

$$ds^2 = -dU^2 + dX^2 + dY^2 - dV^2. \tag{19.272}$$

この空間上の球面 $-U^2 + X^2 + Y^2 - V^2 = -r_0^2$ 上の座標を次のようにとろう。

$$U = \rho \cosh \frac{x}{r_0}, \quad X = \rho \sinh \frac{x}{r_0}, \quad Y = r \cosh \frac{t}{r_0}, \quad V = r \sinh \frac{t}{r_0}. \tag{19.273}$$

計量 (19.263) を新しい変数で書きなおすと、たしかに $\mathbf{AdS}_3$ 上の計量になっていることが簡単に示される。

第20章　5 次元超重力理論

20.1　5 次元のスピノルと γ 行列

5 次元の γ 行列は次の基本的性質を満足する。

$$C^T = -C, \quad (\gamma^\mu)^T C = C\gamma^\mu, \quad (C\gamma^\mu)^T = -C\gamma^\mu. \tag{20.1}$$

5 次元時空上ではスピノルは実負であるからマヨラナスピノルを定義することはできない。従ってスピノルの最小単位は実で 8 個の成分をもつ。

5 次元では、偶数個のスピノルの組を考え、その組に対して次のようなシンプレクティックマヨラナ条件を課すことができる。

$$\psi^a = J^{ab} C_5 \overline{\psi}_b \tag{20.2}$$

スピノルの個数を $2k$ としよう。このとき行列 J^{ab} は $\mathrm{Sp}(k)$ の不変テンソルであり、a, b は $\mathrm{Sp}(k)$ の基本表現の添え字である。この条件を満足するスピノルはシンプレクテッィクマヨラナスピノルと呼ばれる。

二つのシンプレクティックマヨラナスピノルに対して次の式が成り立つ。

$$\overline{\psi}_a \varphi^a = \overline{\psi}_a J^{ab} C_5 \overline{\varphi}_b = -\overline{\varphi}_a J^{ab} C_5 \overline{\psi}_b = -\overline{\varphi}_a \psi^a \tag{20.3}$$

途中で J^{ab} と C_5 がどちらも反対称であることおよび二つのスピノルがグラスマン数であることを用いた。同様に

$$\overline{\psi}_a \gamma^\mu \varphi^a = \overline{\psi}_a \gamma^\mu J^{ab} C_5 \overline{\varphi}_b = -\overline{\varphi}_a J^{ab} C_5 (\gamma^\mu)^T \overline{\psi}_b = -\overline{\varphi}_a \gamma^\mu J^{ab} C_5 \overline{\psi}_b = -\overline{\varphi}_a \gamma^\mu \psi^a \tag{20.4}$$

が成り立つ。すなわち、間に挟まれた γ-行列は余計なマイナス因子を出さない。

複素共役に対しての振る舞いを見るためには、ディラック共役を定義しておく必要がある。ここでは次のように定義する。

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger D = i\psi^\dagger \gamma^0, \quad D = D^\dagger. \tag{20.5}$$

これを用いれば、二つのスピノルの積に対しての複素共役演算を次のように実行することができる。

$$(\overline{\psi}\varphi)^* = (\psi^\dagger D \varphi)^* = \varphi^\dagger (D)^\dagger \psi = \overline{\varphi}\psi. \tag{20.6}$$

スピノルがシンプレクティックマヨラナスピノルであり、そのシンプレクティック添え字も縮約されている場合には、スピノルの順序の入れ替えによって負号が出るので、積は純虚である。また、

$$(\overline{\psi}\gamma^\mu \varphi)^* = (\psi^\dagger D \gamma^\mu \varphi)^* = \varphi^\dagger (D\gamma^\mu)^\dagger \psi = -\varphi^\dagger D \gamma^\mu \psi = -\overline{\varphi}\gamma^\mu \psi. \tag{20.7}$$

すなわち、間に挟まれた γ-行列は、あたかも反エルミートであるように振舞う。

20.2 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論

20.2.1 重力多重項

5 次元では重力場が 5、ゲージ場が 3、グラビティーノ場が 8 の自由度を持つ。これらを一つずつ組み合わせることによって 5 次元の単純超重力理論を構成することができる。[81]

この理論はスカラー場を含まず、重力場とグラビティーノのほかにゲージ場を一つ含むという点で 11 次元の超重力理論に良く似た構造をしている。フェルミオンの高次の項を無視すると、作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{S}{2\pi} &= \int d^5xe\Big(\frac{1}{\kappa^2}R-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^2-\frac{1}{2}\overline{\psi}_\mu^I\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu\psi_{I\rho}\\ &\qquad +\frac{\sqrt{3}i\kappa}{8}\overline{\psi}_\mu^I\gamma^{[\mu}\not{G}_2\gamma^{\nu]}\psi_{I\nu}+\frac{i\kappa}{12\sqrt{3}}\gamma^{\lambda\mu\nu\rho\sigma}B_\lambda G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\Big)\end{aligned}\tag{20.8}$$

変換則は次のように与えられる。

$$\delta e_{\hat{m}}^\mu=\frac{\kappa}{4}(\overline{\psi}_{\hat{m}}^I\gamma^\mu\xi_I),\quad \delta\psi_{I\mu}=\frac{1}{\kappa}D_\mu\xi_I+\frac{\sqrt{3}i}{24}\gamma_\mu\not{G}_2\xi_I-\frac{\sqrt{3}i}{8}\not{G}_2\gamma_\mu\xi_I,\quad \delta B_\mu=-\frac{\sqrt{3}i}{4}\overline{\psi}_\mu^I\xi_I.\tag{20.9}$$

作用、変換則を 11 次元超重力理論のものと比較すればよく似ていることがわかる。

変分計算を行って超対称変換のもとでの不変性をチェックしておこう。11 次元超重力理論のところでチェックしたように、ゲージ場を含まない変分は次元に依らず相殺するのでここで改めてチェックはしない。ゲージ場について 1 次の変分であるが、グラビティーノの運動項から得られるゲージ場を含む項は

$$\frac{\delta_{\psi\to G\xi}S_\psi}{2\pi}=\int d^5x-\frac{\sqrt{3}ie}{4}\overline{\psi}_\mu^ID_\nu\langle\gamma^\mu\not{G}_2\gamma^\nu\rangle_{0,4}\xi_I\tag{20.10}$$

この式中の共変微分は G_2 と ξ に作用する。$\langle\gamma^\mu\not{G}_2\gamma^\nu\rangle_{0,4}=\gamma^{[\mu}\not{G}_2\gamma^{\nu]}$ であることを用いれば、この式の共変微分が ξ に作用したものは 3 点結合項の $\delta_{\psi\to D\xi}$ による変分と丁度相殺することがわかる。微分が G_2 に作用する部分は、$\langle\cdots\rangle_4$ を含むほうは dG_2 に比例するからビアンキ恒等式より 0 になり、γ 行列を含まないほうは $D_\nu\langle\gamma^\mu\not{G}_2\gamma^\nu\rangle_0=D_\nu G^{\mu\nu}$ であるから、ゲージ場の運動項の B_1 の超対称変換によって相殺される。こうして、ゲージ場について 1 次の項はすべて相殺された。

ゲージ場について二次の項について、まず 3 点結合項を $\delta_{\psi\to G\xi}$ で変分したものを計算してみよう。簡単に次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\delta_{\psi\to G\xi}S_Y}{2\pi} &= \int d^5x\frac{3i\kappa e}{8}\overline{\psi}_\mu^I\gamma^{[\mu}\not{G}_2\gamma^{\nu]}\left(\frac{i}{24}\gamma_\nu\not{G}_2-\frac{i}{8}\not{G}_2\gamma_\nu\right)\xi_I\\ &= \int d^5x\left(-\frac{\kappa e}{4}\overline{\psi}_\mu^I\langle\not{G}_2\gamma^\mu\not{G}_2\rangle_5\xi_I+\frac{\kappa e}{8}\overline{\psi}_\mu^I\langle\not{G}_2\gamma^\mu\not{G}_2\rangle_1\xi_I\right)\end{aligned}\tag{20.11}$$

得られた二つの項のうち、$\langle\cdots\rangle_1$ を含むほうはゲージ場の運動項の多脚場の変分と、$\langle\cdots\rangle_5$ を含むほうは位相項の B_1 の変分と相殺する。

20.2.2 ベクトル多重項

大域的な場合

5 次元のベクトル多重項は実スカラー場 a^a、ゲージ場 A_μ^a、シンプレクティックマヨラナフェルミオン λ_I^a を一つずつ含む。ここでは次の変換則を仮定し、この変換の下で不変な作用を構成する

ことにしよう。

$$\delta_{(0,1/2)}a^a=\frac{i}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ia}\xi_I),\quad \delta_{(0,1/2)}\lambda_I^a=\frac{i}{2\sqrt{2}}(\not{\partial}a^a)\xi_I. \tag{20.12}$$

$$\delta_{(1/2,1)}A_\mu^a=\frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{\lambda}^{Ia}\gamma_\mu\xi_I,\quad \delta_{(1/2,1)}\lambda_I^a=\frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}_2^a\xi_I \tag{20.13}$$

あとで重力と結合させるためには、変換パラメータの規格化が先ほどの重力多重項で採用したのと同じになっていなければならない。実際にスカラー場の上で交換関係を取ってみると、

$$(\delta_2\delta_1-\delta_1\delta_2)a^a=\frac{1}{4}(\overline{\xi}_1^I\gamma^\mu\xi_{2I})(\partial_\mu a^a) \tag{20.14}$$

となるから、確かに規格化は同じになっている。

この変換則のもとで不変なラグランジアンを構成しよう。まず次の運動項から出発する。

$$\frac{\mathcal{L}_0}{2\pi}=-\frac{1}{2}f_{ab}(\partial_\mu a^a)(\partial^\mu a^b),\quad \frac{\mathcal{L}_{1/2}}{2\pi}=-\frac{1}{2}f_{ab}(\overline{\lambda}^{Ia}\not{\partial}\lambda_I^b),\quad \frac{\mathcal{L}_1}{2\pi}=-\frac{1}{4}f_{ab}F_{\mu\nu}^aF^{b\mu\nu}. \tag{20.15}$$

f_{ab} は $\mathrm{U}(1)^n$ ゲージ理論の結合定数であり、スカラー場に依存する実関数である。フェルミオンの運動項 $\mathcal{L}_{1/2}$ を $\delta_{(0,1/2)}$ で変換してみると、

$$\frac{\delta_{(0,1/2)}\mathcal{L}_{1/2}}{2\pi}=f_{ab}(\partial_\mu\delta a^a)(\partial^\mu a^b)+\frac{1}{2}f_{ab,c}\delta a^a(\partial^\mu a^b)(\partial_\mu a^c) \tag{20.16}$$

一方スカラー場の運動項の変分は

$$\frac{\delta_{(0,1/2)}\mathcal{L}_0}{2\pi}=-f_{ab}(\partial_\mu\delta a^a)(\partial^\mu a^b)-\frac{1}{2}f_{cb,a}\delta a^a(\partial^\mu a^b)(\partial_\mu a^c) \tag{20.17}$$

これらの第 1 項は相殺する。第 2 項も相殺するためには、$f_{ab,c}$ がその 3 つの添え字の入れ替えに対して完全対称である必要がある。これは f_{ab} が prepotential f の微分として次のように書けていることを意味している。

$$f_{ab}=\partial_a\partial_bf. \tag{20.18}$$

フェルミオンの運動項 $\mathcal{L}_{1/2}$ を今度は $\delta_{(1/2,1)}$ で変換してみると、

$$\frac{\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}}{2\pi}=f_{ab}(\partial_\mu\delta A_\nu^a)F^{b\mu\nu}-\frac{1}{4\sqrt{2}}f_{abc}(\overline{\lambda}^{Ia}\not{F}_2^b(\not{\partial}a^c)\xi_I) \tag{20.19}$$

$f_{abc}=\partial_a\partial_b\partial_cf$ である。この第 1 項はゲージ場運動項 $\mathcal{L}_1$ の $\delta_{(1/2,1)}$ による変分で相殺できる。第 2 項を相殺するためには次の相互作用項を導入する。

$$\frac{\mathcal{L}_3}{2\pi}=-\frac{i}{4}f_{abc}(\overline{\lambda}^{aI}\not{F}^b\lambda_I^c) \tag{20.20}$$

この項の $\delta_{(0,1/2)}$ による変分が上記の変分を相殺する。$\mathcal{L}_3$ を $\delta_{(1/2,1)}$ で変分すると、ゲージ場を二つ含む次の項が得られる。

$$\frac{\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_3}{2\pi}=-\frac{i}{4\sqrt{2}}f_{abc}(\overline{\lambda}^{aI}\not{F}^b\not{F}^c\xi_I)=\frac{1}{4}f_{abc}\delta a^aF_{\mu\nu}^bF^{\mu\nu c}-\frac{i}{8}f_{abc}\gamma^{\lambda\mu\nu\rho\sigma}\delta A_\lambda^aF_{\mu\nu}^bF_{\rho\sigma}^c \tag{20.21}$$

この第 1 項はゲージ場運動項に含まれるスカラー場の変分によって、第 2 項は次の CS 項の導入によって相殺できる。

$$\frac{\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{CS}}{2\pi}=\frac{i}{24}f_{abc}\gamma^{\lambda\mu\nu\rho\sigma}A_\lambda^aF_{\mu\nu}^bF_{\rho\sigma}^c \tag{20.22}$$

この項がゲージ不変であるためには、f_{abc} はスカラー場に依存しない定数でなければならない。従って、プレポテンシャル f はスカラー場 a^a の高々 3 次の多項式である。

Soryushiron Kenkyu

まとめておこう。

5 次元アーベルゲージ理論

5 次元 $\mathcal{N}=1$ 理論の $\mathrm{U}(1)^n$ 理論のラグランジアンは次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}}{2\pi} &= f_{ab}\left(-\frac{1}{2}\partial_\mu a^a\partial^\mu a^b - \frac{1}{2}(\overline{\lambda}^{Ia}\not{\partial}\lambda_I^b) - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu}\right)\\ &\quad -\frac{i}{4}f_{abc}(\overline{\lambda}^{Ia}\not{F}_2^b\lambda_I^c) + \frac{i}{24}f_{abc}\gamma^{\lambda\mu\nu\rho\sigma}A^a_\lambda F^b_{\mu\nu}F^c_{\rho\sigma} \end{aligned}\tag{20.23}$$

ただし、f_{ab} および f_{abc} はスカラー場の実関数として与えられるプレポテンシャル f の微分として次のように与えられる。

$$f_{ab} = \partial_a\partial_b f, \quad f_{abc} = \partial_a\partial_b\partial_c f. \tag{20.24}$$

f は高々 3 次の多項式でなければならない。従って f_{abc} はスカラー場に依存しない定数である。変換則は次のように与えられる。

$$\delta_{(0,1/2)}a^a = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ia}\xi_I), \quad \delta_{(0,1/2)}\lambda_I^a = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\not{\partial}a^a)\xi_I. \tag{20.25}$$

$$\delta_{(1/2,1)}A^a_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{\lambda}^{Ia}\gamma_\mu\xi_I, \quad \delta_{(1/2,1)}\lambda_I^a = \frac{1}{2\sqrt{2}}\not{F}_2^a\xi_I \tag{20.26}$$

重力との結合

重力場と n 個の $\mathrm{U}(1)$ ベクトル多重項が結合した系について考える。ベクトル多重項は $i,j,\ldots=1,2,\ldots,n$ でラベルする。この理論は (20.27) にある場を含む。

$$\begin{array}{llllll} \text{spin} & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ \hline \text{grav.} & e_\mu^{\widehat{m}} & \psi_{I\mu} & B_\mu & & \\ \text{vect.}(\times n) & & & A^i_\mu & \lambda^i_I & a^i \end{array} \tag{20.27}$$

この理論のラグランジアン、変換則は [82] に与えられているが、ここで用いている場の規格化などは多少異なる。[1] ゲージ場はグラビフォトンも含めると $n+1$ 個ある。これらをそれぞれに対する電荷が量子化されるようにラベルをつけたものを A^a_μ （$a=1,\ldots,n,n+1$）とする。(B_μ, A^i_μ) と A^a_μ の間の変換行列を M^a_i および M^a とおき、これらの基底ベクトルの間の内積は次のようにとる。

$$M^a_i f_{ab} M^b_j = g_{ij}, \quad M^a f_{ab} M^b = 1, \quad M^a f_{ab} M^b_i = 0. \tag{20.28}$$

それぞれの基底を用いて表されたゲージ場の間の関係は次のように与えられる。

$$F^a_{\mu\nu} = M^a_i F^i_{\mu\nu} + M^a G_{\mu\nu}. \tag{20.29}$$

(20.28) を用いればこの逆変換が次のように得られる。

$$G_{\mu\nu} = M_a F^a_{\mu\nu}, \quad F^i_{\mu\nu} = M^i_a F^a_{\mu\nu}. \tag{20.30}$$

これを用いれば、グラビフォトンまで含めた全てのゲージ場の運動項をまとめて

[1] ここで与える式を [82] の式に書き換えるには符号を除き次の置き換えを行えばよい。$\kappa=\sqrt{2}$, $f_{ab}=\mathring{a}_{IJ}$, $M^a=h^I$, $M^a_i=h^I_a$, $a_{ijk}=\sqrt{2/3}T_{xyz}$.

Soryushiron Kenkyu

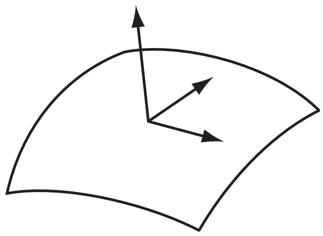

図 20.1: モジュライ空間上の基底

$$-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}-\frac{1}{4}g_{ij}F^i_{\mu\nu}F^{j\mu\nu}=-\frac{1}{4}f_{ab}F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu}. \tag{20.31}$$

と書くことができる。添え字 $a,b,\ldots$ は f_{ab} およびその逆行列 f^{ab} を用いて、添え字 $i,j,\ldots$ は g_{ij} およびその逆行列を用いて自由に上げ下げするものとする。

重力多重項とベクトル多重項が結合した系の超対称変換のもとで不変なラグランジアンをフェルミオンの二次の項までに限って構成しよう。まずそれぞれのスピンの場に対する運動項を次のように与えておく。これ以外の相互作用項は全体が超対称変換のもとで不変になるように付け加えていく。

$$\frac{\mathcal{L}_2}{2\pi} = \frac{e}{\kappa^2}R, \tag{20.32}$$

$$\frac{\mathcal{L}_{3/2}}{2\pi} = -\frac{e}{2}(\overline{\psi}{}^I_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu\psi_{I\rho}), \tag{20.33}$$

$$\frac{\mathcal{L}_1}{2\pi} = -\frac{e}{4}f_{ab}F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu}, \tag{20.34}$$

$$\frac{\mathcal{L}_{1/2}}{2\pi} = -\frac{e}{2}g_{ij}(\overline{\lambda}{}^{Ii}\not{D}^{(\omega,M)}\lambda^j_I), \tag{20.35}$$

$$\frac{\mathcal{L}_0}{2\pi} = -\frac{e}{2}g_{ij}\partial_\mu x^i\partial^\mu x^j. \tag{20.36}$$

超対称変換は、大域的な場合のベクトル多重項の変換則や、重力多重項のみの場合などを参考に次のようにとる。

$$\delta_{(3/2,2)}e^\mu_{\widehat{m}}=\frac{\kappa}{4}(\overline{\psi}{}^I_{\widehat{m}}\gamma^\mu\xi_I),\quad \delta_{(3/2,2)}\psi_{I\mu}=\frac{1}{\kappa}D_\mu\xi_I. \tag{20.37}$$

$$\delta_{(1,3/2)}A^a_\mu=-\frac{\sqrt{3}i}{4}M^a\overline{\psi}{}^I_\mu\xi_I,\quad \delta_{(1,3/2)}\psi_{I\mu}=\frac{\sqrt{3}i}{24}\gamma_\mu\not{G}_2\xi_I-\frac{\sqrt{3}i}{8}\not{G}_2\gamma_\mu\xi_I. \tag{20.38}$$

$$\delta_{(1/2,1)}A^a_\mu=\frac{1}{2\sqrt{2}}M^a_i(\overline{\lambda}{}^{Ii}\gamma_\mu\xi_I),\quad \delta_{(1/2,1)}\lambda^i_I=\frac{1}{2\sqrt{2}}M^i_a\not{F}^a_2\xi_I \tag{20.39}$$

$$\delta_{(0,1/2)}x^i=\frac{i}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}{}^{Ii}\xi_I),\quad \delta_{(0,1/2)}\lambda^i_I=\frac{i}{2\sqrt{2}}(\not{\partial}x^i)\xi_I. \tag{20.40}$$

まず、スピンが 1/2 だけ異なる二つの場の運動項の間の変分の相殺について見ておこう。これにより超対称カレントとグラビティーノが結合したネーター項を得ることができる。

$(3/2,2)$ **セクター**　アインシュタイン作用とグラビティーノ運動項の間の超対称変換は相殺する。

$$\delta_{(3/2,2)}\mathcal{L}_2+\delta_{(3/2,2)}\mathcal{L}_{3/2}=0. \tag{20.41}$$

Soryushiron Kenkyu

$(0,1/2)$ **セクター**　フェルミオンの運動項 (20.35) を変換してみると、

$$\frac{\delta_{(0,1/2)}\mathcal{L}_{1/2}}{2\pi} = \frac{ie}{2\sqrt{2}} g_{ij}\partial^\mu(\partial_\mu x^i)(\overline{\lambda}^{Ij}\xi_I) - \frac{ie}{2\sqrt{2}} g_{ij}(\overline{\lambda}^{Ii}\gamma^\mu(\not\partial x^j)D_\mu\xi_I) \tag{20.42}$$

この第 2 項は丁度スカラー場の運動項の超対称変換と相殺する。従って第 1 項のみが残るが、この項は変換パラメータの微分 $D_\mu\xi_I$ を含むから、グラビティーノと超対称カレントのネーター結合を導入すればそのグラビティーノの超対称変換 (20.37) と相殺する。

$$\frac{\mathcal{L}_{J(0,1/2)}}{2\pi} = \frac{ie\kappa}{2\sqrt{2}} g_{ij}(\overline{\lambda}^{Ii}\gamma^\mu(\not\partial x^j)\psi_{I\mu}) \tag{20.43}$$

この項の $\delta_{(0,1/2)}$ による変換はスカラー場運動項の多脚場の超対称変換と相殺することがわかる。(4 次元の場合と異なり x^i が実場なので、余計な「捩れ」の項は現れない。)

$(1/2,1)$ **セクター**　フェルミオン λ^a_I とゲージ場 A^a_μ の間の超対称変換について見てみよう。変換則 (20.39) によってフェルミオン運動項 (20.35) を変分してみる。

$$\frac{\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{1/2}}{2\pi} = -\frac{e}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ii}\not D(M_{ia}\not F^a_2\xi_I)), \tag{20.44}$$

さらに整理すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{1/2}}{2\pi} &= ef_{ab}F^{\mu\nu b}D_\mu\delta_{(1/2,1)}A^a_\nu - \frac{e}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ii}\gamma^\mu\not F_{2i}D_\mu\xi_I)\\ &\quad -\frac{e}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ii}\langle\gamma^\mu\not F^a_2\rangle_3\xi)D_\mu(f_{ab}M^b_i) - \frac{e}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ii}\langle\gamma^\mu\not F^a_2\rangle_1\xi)f_{ab}D_\mu M^b_i\end{aligned} \tag{20.45}$$

この式の右辺第 1 項はちょうどゲージ場運動項の変分によって相殺される。第二項は次のネーター項の導入によって相殺する。

$$\frac{\mathcal{L}_{J(1/2,1)}}{2\pi} = \frac{e\kappa}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ii}\gamma^\mu\not F_{2i}\psi_{\mu I}) \tag{20.46}$$

ネーター項 $\mathcal{L}_{J(0,1/2)}$ の (20.38) による変換も (20.45) の二行目に似た構造の次の変分を与える。

$$\frac{\delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{J(0,1/2)}}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}e\kappa}{8\sqrt{2}} g_{ij}(\overline{\lambda}^{Ii}\not G_2(\not\partial x^j)\xi_I) \tag{20.47}$$

(20.45) の二行目と (20.47) を合わせれば、相殺されずに残った変分が次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{2\pi} &= -\frac{e}{4\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ii}\gamma^\mu\not F^a_2\xi_I)(D_\mu(f_{ab}M^b_i) + f_{ab}D_\mu M^b_i)\\ &\quad -\frac{e}{4\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ii}\not F^a_2\gamma^\mu\xi_I)(D_\mu f_{ab})M^b_i + \frac{\sqrt{3}e\kappa}{8\sqrt{2}} g_{ij}(\overline{\lambda}^{Ii}\not G_2(\not\partial x^j)\xi_I)\end{aligned} \tag{20.48}$$

ただし、(20.45) の二行目は次の恒等式を用いて書き換えた。

$$\langle\gamma^\mu\not F^a_2\rangle_3 = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\not F_2 + \not F_2\gamma^\mu), \quad \langle\gamma^\mu\not F^a_2\rangle_1 = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\not F_2 - \not F_2\gamma^\mu) \tag{20.49}$$

$(1,3/2)$ **セクター**　(20.38) によってグラビティーノ運動項 (20.33) を変換してみると、γ 行列を整理した段階で次の式を得る。

$$\frac{\delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{3/2}}{2\pi} = -\frac{\sqrt{3}ie}{4}\overline{\psi}^I_\mu\langle\gamma^\mu D_\nu(\not G_2\gamma^\nu\rangle_{0,4}\xi_I). \tag{20.50}$$

この式で、微分は G_2 と ξ に作用している。さらに変形すると、次の式を得る。

$$
\begin{aligned}
= \ & \frac{\sqrt{3}ie}{4}[D_\nu(M^a\overline{\psi}^I_\mu\xi_I)]f_{ab}F^{b\mu\nu} - \frac{\sqrt{3}ie}{4}\overline{\psi}^I_\mu\langle\gamma^\mu \not{G}_2\gamma^\nu\rangle_{4,0}D_\nu\xi_I \\
& -\frac{\sqrt{3}ie}{4}(\overline{\psi}^I_\mu\langle\gamma^\mu \not{F}^a_2\gamma^\nu\rangle_0\xi_I)f_{ab}D_\nu M^b - \frac{\sqrt{3}ie}{4}(\overline{\psi}^I_\mu\langle\gamma^\mu \not{F}^a_2\gamma^\nu\rangle_4\xi_I)D_\nu(f_{ab}M^b) \quad (20.51)
\end{aligned}
$$

第 1 項は、ゲージ場運動項の変換で相殺できる。第 2 項は次のネーター項によって相殺する。

$$\frac{\mathcal{L}_{J(1,3/2)}}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}ie\kappa}{8}(\overline{\psi}^I_\mu\gamma^{[\mu}\not{G}_2\gamma^{\nu]}\psi_{I\nu}) \quad (20.52)$$

(20.51) の二行目に類似した項がこれまでに得られたネーター項の変換によっても得られる。

$$\frac{\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{J(0,1/2)}}{2\pi} = -\frac{i\kappa e}{8}(\overline{\psi}^I_\mu(\not{\partial}x^i)\gamma^\mu \not{F}_{2i}\xi_I) \quad (20.53)$$

$$\frac{\delta_{(0,1/2)}\mathcal{L}_{J(1/2,1)}}{2\pi} = \frac{i\kappa e}{8}(\overline{\psi}^I_\mu \not{F}_{2i}\gamma^\mu(\not{\partial}x^i)\xi_I) \quad (20.54)$$

相殺されずに残った (20.51) の二行目と (20.53) と (20.54) を合わせると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}}{2\pi} = \ & -\frac{\sqrt{3}ie}{8}(\overline{\psi}^I_\mu\gamma^{[\mu}\not{F}^a_2\gamma^{\nu]}\xi_I)(f_{ab}D_\nu M^b + D_\nu(f_{ab}M^b)) \\
& -\frac{\sqrt{3}ie}{8}(\psi^I_\mu\langle\gamma^{\mu\nu}\not{F}^a_2\rangle_{0,4}\xi_I)(D_\nu f_{ab})M^b + \frac{ie\kappa}{4}f_{ab}M^a_i(\partial_\nu x^i)(\overline{\psi}^I_\mu\langle\gamma^{\mu\nu}\not{F}^b_2\rangle_{0,4}\xi_I). \quad (20.55)
\end{aligned}
$$

ただし、(20.51) の二行目は次の恒等式を用いて書き換えた。

$$\langle\gamma^\mu\not{F}^a_2\gamma^\nu\rangle_0 = \frac{1}{2}(\gamma^{[\mu}\not{F}^a_2\gamma^{\nu]} - \langle\gamma^{\mu\nu}\not{F}^a_2\rangle_{0,4}), \quad \langle\gamma^\mu\not{F}^a_2\gamma^\nu\rangle_4 = \frac{1}{2}(\gamma^{[\mu}\not{F}^a_2\gamma^{\nu]} + \langle\gamma^{\mu\nu}\not{F}^a_2\rangle_{0,4}). \quad (20.56)$$

ここまでに計算した分をまとめておくと、図 20.2 のようになる。

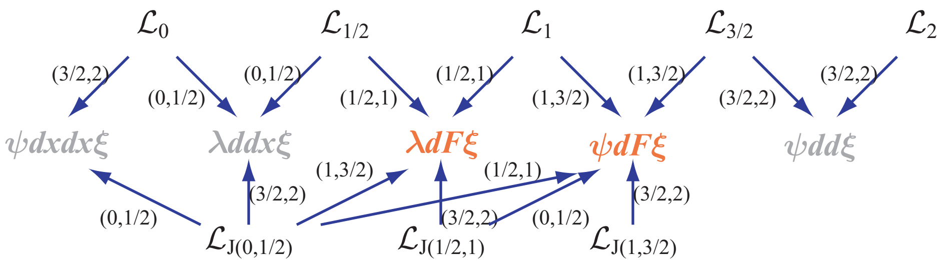

図 20.2: ベクトル多重項を含む場合の超対称変換の相殺の様子（その 1）

(M^a, M^a_i) の微分公式　これまでの計算で現れた変分の中で、相殺されていないのは (20.48) および (20.55) である。

(20.48) は $\lambda\not{F}_2(\not{\partial}x)\xi$ の形をした項と $\lambda(\not{\partial}x)\not{F}_2\xi$ の形をした項よりなる。前者は $\lambda^i\not{F}_2\delta\lambda^j$ という形をしているから、添え字 i と j を入れ替えて反対称な部分が 0 になれば $\lambda\not{F}\lambda$ という形の相互作用項の導入によって相殺することができる。i と j の反対称部分の係数が 0 であるためには次の関係が成り立つ必要がある。

$$M^a_j\partial_i f_{ab} = M^a_i\partial_j f_{ab} \quad (20.57)$$

一方 $\lambda(\not\partial x)\not F_2\xi$ の形をした項は新たな相互作用工を導入することで相殺することは出来ないので、その係数はもともと 0 でなければならない。これは次の条件を与える。

$$f_{ab}D_kM_i^b + D_k(f_{ab}M_i^b) = 0. \tag{20.58}$$

(20.55) についても $\gamma^{[\mu}\not F_2^a\gamma^{\nu]}$ を含む部分と $\langle\gamma^{\mu\nu}\not F_2^a\rangle_{0,4}$ を含む部分があるが、これらはどちらも新たな項の導入で相殺することは出来ないので、はじめから 0 でなければならない。これは次の二つの条件を与える。

$$f_{ab}\partial_kM^b + \partial_k(f_{ab}M^b) = 0. \tag{20.59}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8}(\partial_i f_{ab})M^b - \frac{\kappa}{4}f_{ab}M_i^b = 0. \tag{20.60}$$

実は (20.57) はそのほかの 3 つの関係式が成り立てば自動的に成り立つので、独立な条件は 3 つである。

こうして得られた 3 つの条件式は、(M_i^a, M^a) および (M_a^i, M_a) の微分が次のように与えられることと等価である。

M の微分

$$D_kM_i^a = a_{ki}{}^jM_j^a - \frac{\kappa}{\sqrt{3}}g_{ki}M^a, \quad D_kM_{ia} = -a_{ki}{}^jM_{ja} + \frac{\kappa}{\sqrt{3}}g_{ki}M_a. \tag{20.61}$$

$$\partial_kM^a = -\frac{\kappa}{\sqrt{3}}M_k^a, \quad \partial_kM_a = \frac{\kappa}{\sqrt{3}}M_{ka}. \tag{20.62}$$

ただし、a_{ijk} はスカラー場 x^i の関数であり、添え字について完全対称なテンソルである。

これらの公式を用いれば、(20.48) を相殺するために必要な相互作用項は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}_3}{2\pi} &= \frac{\sqrt{3}ie\kappa}{8}g_{ij}(\overline{\lambda}^{Ii}\not G_2\lambda_I^j) - \frac{ie}{4}f_{ab,i}M_j^b(\overline{\lambda}^{Ii}\not F_2^a\lambda_I^j)\\ &= -\frac{ie\kappa}{8\sqrt{3}}g_{ij}(\overline{\lambda}^{Ii}\not G_2\lambda_I^j) + \frac{ie}{2}a_{ijk}(\overline{\lambda}^{Ii}\not F_2^k\lambda_I^j)\end{aligned} \tag{20.63}$$

F^2 項 最後に、ゲージ場の強さについて二次の変分の相殺について見ておこう。

まずグラビティーノを含むのは $\mathcal{L}_{J(1/2,1)}$ の $\delta_{(1/2,1)}$ による超対称変換および $\mathcal{L}_{J(1,3/2)}$ の $\delta_{(1,3/2)}$ による超対称変換で、次のように与えられる。

$$\frac{\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_{J(1/2,1)}}{2\pi} = \frac{e\kappa}{8}(\overline{\psi}_\mu^I\langle\not F_2^i\gamma^\mu\not F_{2j}\rangle_1\xi_I) + \frac{e\kappa}{8}(\overline{\psi}_\mu^I\langle\not F_2^i\gamma^\mu\not F_{2j}\rangle_5\xi_I), \tag{20.64}$$

$$\frac{\delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{J(1,3/2)}}{2\pi} = \frac{e\kappa}{8}(\overline{\psi}_\mu^I\langle\not G_2\gamma^\mu\not G_2\rangle_1\xi_I) - \frac{e\kappa}{4}(\overline{\psi}_\mu^I\langle\not G_2\gamma^\mu\not G_2\rangle_5\xi_I) \tag{20.65}$$

これらの第 1 項の和はゲージ場のエネルギー運動量テンソルに比例した項を与え、ゲージ場運動項の多脚場の変分と相殺する。第 2 項はどちらも γ_5 を含んでおり、次のように書くことができる。

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{2\pi} = \frac{ie\kappa}{8\sqrt{3}}\gamma^{\kappa\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^iF_{i\rho\sigma}\delta B_\kappa - \frac{ie\kappa}{4\sqrt{3}}\gamma^{\kappa\mu\nu\rho\sigma}G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\delta B_\kappa \tag{20.66}$$

ゲージーノを含む変分は以下の 3 つである。

$$\frac{\delta_{(1/2,1)}\mathcal{L}_3}{2\pi} = -\frac{ie\kappa}{8\sqrt{6}}(\overline{\lambda}^{Ii}\not G_2\not F_{2i}\xi_I) + \frac{ie}{2\sqrt{2}}a_{ijk}(\overline{\lambda}^{Ii}\not F_2^j\not F_2^k\xi_I) \tag{20.67}$$

$$\frac{\delta_{(1,3/2)}\mathcal{L}_{J(1/2,1)}}{2\pi} = -\frac{7ie\kappa}{8\sqrt{6}}(\overline{\lambda}^{Ii}\langle\not F_{2i}\not G_2\rangle_0\xi_I) - \frac{ie\kappa}{8\sqrt{6}}(\overline{\lambda}^{Ii}\langle\not F_{2i}\not G_2\rangle_2\xi_I) + \frac{5ie\kappa}{8\sqrt{6}}(\overline{\lambda}^{Ii}\langle\not F_{2i}\not G_2\rangle_4\xi_I) \tag{20.68}$$

$$\frac{\delta_{(0,1/2)}\mathcal{L}_1}{2\pi} = \frac{ie}{4\sqrt{2}}a_{ijk}(\overline{\lambda}^{Ik}\xi_I)F_{\mu\nu}^iF^{j\mu\nu} - \frac{ie\kappa}{2\sqrt{6}}(\overline{\lambda}^{Ik}\xi_I)F_{k\mu\nu}G^{\mu\nu} \tag{20.69}$$

この 3 つの変分を加えると、$\langle FF\rangle_4$ を含む項だけが残り、次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{2\pi} &= \frac{ie}{2\sqrt{2}}a_{ijk}(\overline{\lambda}^{Ii}\langle \not{F}_2^j\not{F}_2^k\rangle_4\xi_I)+\frac{ie\kappa}{2\sqrt{6}}(\overline{\lambda}^{Ii}\langle \not{G}_2\not{F}_{2i}\rangle_4\xi_I)\\ &= \frac{ie}{4}a_{ijk}\gamma^{\kappa\mu\nu\rho\sigma}\delta A^i_\kappa F^j_{\mu\nu}F^k_{\rho\sigma}+\frac{ie\kappa}{4\sqrt{3}}\gamma^{\kappa\mu\nu\rho\sigma}\delta A^i_\kappa F_{i\mu\nu}G_{\rho\sigma}\end{aligned} \tag{20.70}$$

(20.66) と (20.70) は次の Chern-Simons 項があればちょうど相殺する。

$$\frac{\mathcal{L}_{CS}}{2\pi}=\frac{ie}{24}C_{abc}\gamma^{\kappa\mu\nu\rho\sigma}A^a_\kappa F^b_{\mu\nu}F^c_{\rho\sigma} \tag{20.71}$$

ただし、C_{abc} は次のように定義される対称テンソルである。

$$C_{abc}=-2a_{ijk}M^i_aM^j_bM^k_c-\sqrt{3}\kappa(M^i_aM_{ib}M_c)_{\rm sym}+\frac{2\kappa}{\sqrt{3}}M_aM_bM_c \tag{20.72}$$

$\mathcal{L}_{\rm CS}$ がゲージ不変であるためには定数でなければならない。(20.71) によって前に与えた変分が相殺されるためにもこれは必要である。

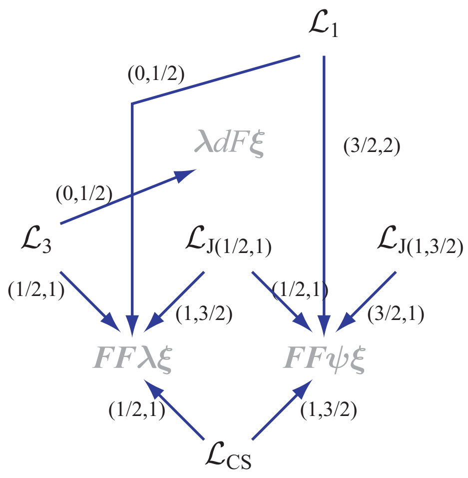

図 20.3: ベクトル多重項を含む場合の超対称変換の相殺の様子（その 2）

C_{abc} を実際に微分してみると、次の式を得る。

$$\partial_mC_{abc}=(-2a_{ijk,m}+6a_{ijn}a^n_{km}-\kappa^2g_{ij}g_{km})_{\{ijk\}}M^i_aM^j_bM^k_c \tag{20.73}$$

従って、a_{ijk} は次の微分方程式を満足する。

$$a_{ijk,m}=\left(3a_{ijn}a^n_{km}-\frac{\kappa^2}{2}g_{ij}g_{km}\right)_{\{ijk\}} \tag{20.74}$$

この式より、$a_{ijk,m}$ は 4 つの添え字の入れ替えに対して完全対称であることがわかる。

$(D_iD_j-D_jD_i)M^k_a$ を計算することで曲率テンソルが得られる。曲率テンソルは次のように a_{ijk} と g_{ij} の微分を含まない式として与えられる。

$$R_{ijkl}=a^m_{il}a_{jkm}+\frac{\kappa^2}{3}g_{il}g_{jk}-[ij] \tag{20.75}$$

ラグランジアンをまとめておくと、以下のようになる。

重力に結合した 5 次元ベクトル多重項

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathcal{L}}{2\pi} \quad = \quad & \frac{e}{\kappa^2}R - \frac{e}{4}f_{ab}F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu} - \frac{e}{2}g_{ij}\partial_\mu x^i \partial^\mu x^j . \\
& -\frac{e}{2}(\overline{\psi}^I_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_{I\rho}) - \frac{e}{2}g_{ij}(\overline{\lambda}^{Ii} \not{D}^{(\omega,M)} \lambda^j_I) \\
& +\frac{ie\kappa}{2\sqrt{2}}g_{ij}(\overline{\lambda}^{Ii}\gamma^\mu(\not{\partial}x^j)\psi_{I\mu}) + \frac{e\kappa}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ii}\gamma^\mu \not{F}_{2i}\psi_{\mu I}) + \frac{\sqrt{3}ie\kappa}{8}(\overline{\psi}^I_\mu \gamma^{[\mu}\not{G}_2\gamma^{\nu]}\psi_{I\nu}) \\
& -\frac{ie\kappa}{8\sqrt{3}}g_{ij}(\overline{\lambda}^{Ii}\not{G}_2\lambda^j_I) + \frac{ie}{2}a_{ijk}(\overline{\lambda}^{Ii}\not{F}^k_2\lambda^j_I) \\
& +\frac{ie}{24}C_{abc}\gamma^{\kappa\mu\nu\rho\sigma}A^a_\kappa F^b_{\mu\nu}F^c_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{20.76}
$$

極小超重力理論は

$$
C_{111} = \frac{2\kappa}{\sqrt{3}}, \quad M^1 = M_1 = f_{11} = 1. \tag{20.77}
$$

の場合に相当する。

モジュライ空間の構成

実は、スカラー場 x^i によって張られるモジュライ空間は対称テンソル C_{abc} を与えると座標変換の自由度を除き完全に決まってしまう。

座標 x^i によって張られたモジュライ空間を $\mathcal{M}$、M^a が値を取るベクトル空間を V としよう。関数 M^a はモジュライ空間 $\mathcal{M}$ からベクトル空間 V への写像を与えるが、$\partial_i M^a \propto M^a_i$ は M^a とあわせて完全系をなすから、この写像は非退化である。従って位相的には V 上の像 $\widetilde{\mathcal{M}} \equiv N^a(\mathcal{M})$ は $\mathcal{M}$ と同一視することができる。

(20.72) より次の式が成り立つ。

$$
C_{abc}M^aM^bM^c = \frac{2\kappa}{\sqrt{3}}. \tag{20.78}
$$

この式は V 上の部分空間として $\widetilde{\mathcal{M}}$ を与える式である。

C_{abc} の定義および M の性質を用いることで、次の式が成り立つことがわかる。

$$
M_a = \frac{\sqrt{3}}{2\kappa}C_{abc}M^bM^c, \quad M^a_i = -\frac{\sqrt{3}}{\kappa}\partial_i M^a, \quad M_{ia} = -\frac{\sqrt{3}}{\kappa}C_{abc}M^bM^c_i. \tag{20.79}
$$

これらの式は、C_{abc} が与えられたとき、(20.78) によって定まる $\widetilde{\mathcal{M}}$ の上に適当な座標 x^i を導入すれば、M_a、M^a_i、M_{ia} が自動的に決まることを表している。すなわち、モジュライ空間の構造を決めるのに必要なのは定数テンソル C_{abc} の情報だけである。ラグランジアン中に現れるそのほかの量も上で与えられた量を用いて次のように書くことができる。

$$
g_{ij} = -\frac{\sqrt{3}}{\kappa}C_{abc}M^aM^b_iM^c_j, \quad f_{ab} = 3M_aM_b - \frac{\sqrt{3}}{\kappa}C_{abc}M^c, \quad a_{ijk} = -\frac{1}{2}C_{abc}M^a_iM^b_jM^c_k. \tag{20.80}
$$

上記計量を用いればモジュライ空間上の線素は次のように Chern-Simons 項とそっくりな形に書くことができる。

$$
ds^2 = g_{ij}dx^idx^j = -\frac{3\sqrt{3}}{\kappa^3}C_{abc}M^adM^bdM^c = -\frac{3}{\kappa^2}dM_adM^a. \tag{20.81}
$$

Soryushiron Kenkyu

$|M| = C_{abc}M^aM^bM^c$ を定義すれば、f_{ab} は次のように表現することもできる。

$$f_{ab} = -\frac{1}{3}\partial_a\partial_b \log|M|\Big|_{\widetilde{\mathcal{M}}} \tag{20.82}$$

ただし、∂_a は N^a による微分を表しており、(20.78) の条件は微分を行った後で課すものとする。

20.2.3 大域的極限

大域的な場合と比較するには、まず次のような置き換えを行うのが便利である。

$$M^a = -\frac{\kappa}{\sqrt{3}}M'^a, \quad M_a = -\frac{\kappa}{\sqrt{3}}M'_a \tag{20.83}$$

すると、M^a に対して成り立つ関係式が次のようになる。

$$C_{abc}M'^aM'^bM'^c = -\frac{6}{\kappa^2}. \tag{20.84}$$

$$M'_a = -\frac{1}{2}C_{abc}M'^bM'^c, \quad M^a_i = \partial_i M'^a, \quad M_{ia} = C_{abc}M'^bM^c_i. \tag{20.85}$$

$$g_{ij} = C_{abc}M'^aM^b_iM^c_j, \quad f_{ab} = \kappa^2 M'_aM'_b + C_{abc}M'^c, \quad a_{ijk} = -\frac{1}{2}C_{abc}M^a_iM^b_jM^c_k. \tag{20.86}$$

超対称性変換は次のようになる。

$$\delta e^\mu_{\widehat{m}} = \frac{\kappa}{4}(\overline{\psi}^I_{\widehat{m}}\gamma^\mu\xi_I), \tag{20.87}$$

$$\delta\psi_{I\mu} = \frac{1}{\kappa}D_\mu\xi_I - \frac{\kappa i}{24}M'_a\gamma_\mu \not{F}^a_2\xi_I + \frac{\kappa i}{8}M'_a\not{F}^a_2\gamma_\mu\xi_I, \tag{20.88}$$

$$\delta A^a_\mu = \frac{\kappa i}{4}M'^a\overline{\psi}^I_\mu\xi_I + \frac{1}{2\sqrt{2}}M^a_i(\overline{\lambda}^{Ii}\gamma_\mu\xi_I), \tag{20.89}$$

$$\delta\lambda^i_I = \frac{1}{2\sqrt{2}}M^i_a\not{F}^a_2\xi_I + \frac{i}{2\sqrt{2}}(\not{\partial}x^i)\xi_I, \tag{20.90}$$

$$\delta x^i = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\overline{\lambda}^{Ii}\xi_I). \tag{20.91}$$

大域的超対称性を持つ理論はテンソル C_{abc} を

$$C_{0ij} = C_{00i} = 0, \quad C_{000} = -\frac{6}{\kappa^2} \tag{20.92}$$

とおき、$\kappa \to 0$ の極限をとることによって得られる。モジュライ空間上の座標として M^i を用い、M^0 をそれらの関数として

$$M'^0 = \left(1 + \frac{\kappa^2}{6}C_{ijk}a^ia^ja^k\right)^{1/3} \sim 1 \tag{20.93}$$

と表す。M^i はベクトル多重項のスカラー場 a^i に同定される。κ 展開の高次の項を無視すると、

$$M'_0 = \frac{3}{\kappa^2}(M'^0)^2, \quad M^0_i = \frac{\kappa^2}{6(M'^0)^2}C_{ijk}a^ja^k, \quad M^j_i = \delta^j_i. \tag{20.94}$$

$$g_{ij} = f_{ij} = C_{ijk}a^k + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad f_{00} = \frac{3}{\kappa^2} + \mathcal{O}(\kappa^0), \quad f_{0i} = \mathcal{O}(\kappa^2), \tag{20.95}$$

これらをラグランジアンに代入して $\kappa \to 0$ の極限をとれば大域的な超対称性の場合のラグランジアンを得ることができる。

Soryushiron Kenkyu

20.3 古典解

以下では 5 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論の幾つかの 1/2 BPS 古典解を与える。重力多重項のみを含むような極小超重力理論についての 1/2 BPS 解の完全な分類は [83] に与えられている。そこでは Killing spinor の二次形式として作ったベクトルやテンソルの間の関係を調べることで一般的な解を構成する方法が与えられている。

gauged sugra に対しては [84] において同様な解析がなされている。

2 つの U(1) ベクトル多重項を含む 5 次元 $\mathcal{N}=1$ 超重力理論は 11 次元超重力理論から自然に得られるので、極小超重力理論とともに詳しく解析されている。例えば 1/2 BPS 解については [85] において一般解を構成する方法が与えられている。

以下に与える解の導出ではある程度初めから解の形を仮定しているが、そのような仮定を置くことができることを証明する方法については上に挙げた論文を参照すること。

古典解を与える前に、幾つかの convention を与えておく。5 次元の γ 行列と ϵ テンソルの関係は次のように決めておく。

$$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma\tau}=i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} \tag{20.96}$$

4 次元および 5 次元での ϵ-テンソルの関係を次のように置く。

$$\epsilon^{tmnpq}=\epsilon^{mnpq}. \tag{20.97}$$

4 次元の ϵ テンソルに対しては $\epsilon_{1234}=+1$ とする。空間部分については (x_1,x_2,x_3,x_4) で張られる直交座標以外にもいろいろな座標を用いるが、それらについてはそのつど反対称テンソルの取り方を指定する。

20.3.1 BPS ブラックホール解

5 次元極小超重力理論は一つのベクトル場を含むから、それと電気的に結合する点状粒子と磁気的に結合する弦が存在する。ここでは特に 1/2 BPS な場合にこれらの解を与える。がおける BPS ブラックホール解を求めよう。解の計量を次のようにおく。

$$ds^2=-a^2(r)dt^2+b^2(r)(dr^2+r^2d\Omega_3^2) \tag{20.98}$$

$\mathbf{S}^3$ 上の座標を θ^1、θ^2、θ^3 とする。これらをどのように取るかは具体的には与えないが、向き付けは $\epsilon^{r\theta^1\theta^2\theta^3}>0$ であるとする。

フェルミオンを扱うために多脚場も導入する必要がある。ここでは次のようにとる。

$$e_t^{\widehat{t}}=a(r),\quad e_r^{\widehat{r}}=b(r),\quad e_b^{\widehat{a}}=b(r)\widetilde{e}_b^{\widehat{a}}. \tag{20.99}$$

ただし $\widetilde{e}_b^{\widehat{a}}$ は半径が rb ではなく r の球面上の任意の多脚場である。このときスピン接続の 0 でない成分は次のように与えられる。

$$\omega_t{}^{\widehat{t}\widehat{r}}=\frac{a'}{b},\quad \omega_a{}^{\widehat{a}\widehat{r}}=\frac{rb'}{b}+\widetilde{\omega}_a{}^{\widehat{a}\widehat{r}},\quad \omega_a{}^{\widehat{b}\widehat{c}}=\widetilde{\omega}_a{}^{\widehat{b}\widehat{c}}. \tag{20.100}$$

従って、スピノルの共変微分は、平坦な時空上の共変微分を用いて次のように書くことができる。

$$D_t\xi=\widetilde{D}_t\xi+\frac{a'}{2b}\gamma_{\widehat{t}\widehat{r}}\xi,\quad D_r\xi=\widetilde{D}_r\xi,\quad D_a\xi=\widetilde{D}_a\xi+\frac{rb'}{2b}\gamma_{\widehat{a}\widehat{r}}\xi. \tag{20.101}$$

Soryushiron Kenkyu

対称性より、$\xi = s\tilde{\xi}$ とおける。このときグラビティーノの変換則はベクトル添え字の向きごとに次のようになる。

$$\begin{aligned} \kappa\delta\psi_{It} &= \frac{a}{b}\gamma_{\hat{t}\hat{r}}\left(\frac{a'}{2a} + \frac{i\kappa}{2\sqrt{3}}b\gamma_{\hat{r}}G_2\right)\xi_I, \\ \kappa\delta\psi_{Ir} &= \left(\frac{s'}{s} + \frac{i\kappa}{2\sqrt{3}}b\gamma_{\hat{r}}G_2\right)\xi_I, \\ \kappa\delta\psi_{Ia} &= -\frac{r}{2}\gamma_{\hat{a}\hat{r}}\left(-\frac{b'}{b} + \frac{i\kappa}{2\sqrt{3}}b\gamma_{\hat{r}}G_2\right)\xi_I. \end{aligned} \tag{20.102}$$

括弧の中に注目すると、第二項は全て共通なので、第 1 項が全て等しくなければならない。すなわち、次の式が成り立つ。

$$-\frac{a'}{a} = -2\frac{s'}{s} = 2\frac{b'}{b} = \frac{H'}{H}. \tag{20.103}$$

ここで、H は次の式を満足する関数として定義した。

$$\frac{H'}{H}\xi_I = \frac{i\kappa}{\sqrt{3}}b\gamma_{\hat{r}}G_2\xi_I \tag{20.104}$$

右辺はスピノルとしては $\gamma^t\xi_I$ に比例するので、この式が 0 でない ξ_I に対して成り立つためには、ξ_I が $\gamma^{\hat{t}}$ の固有スピノルである必要がある。ここでは次のように取る。

$$\gamma^{\hat{t}}\xi_I = i\xi_I. \tag{20.105}$$

(20.103) より、3 つの関数はただ一つの関数 H を用いて次のように書くことができる。

$$a = H^{-1}, \quad s = H^{-1/2}, \quad b = H^{1/2} \tag{20.106}$$

すなわち、計量は H を用いて次のように書ける。

$$ds^2 = -H^{-2}dt^2 + H(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2) \tag{20.107}$$

(20.106) と (20.105) を用いて (20.104) は次のように書き換えることができる。

$$\partial_r\frac{1}{H} = \frac{\kappa}{\sqrt{3}}\partial_r A_t \tag{20.108}$$

従って、ゲージ変換の自由度を除き、ゲージ場は次のように与えられる。

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\kappa}\frac{1}{H}dt \tag{20.109}$$

H の関数形を決定するためには、ゲージ場の運動方程式を用いる。

$$F_3 = *F_2, \quad dF_3 = 0. \tag{20.110}$$

上記の計量、ゲージ場を代入すれば、

$$F_3 = \frac{\sqrt{3}}{\kappa}\hat{*}(dt \wedge dH) = \frac{\sqrt{3}}{\kappa}r^3\partial_r H\omega_3 \tag{20.111}$$

ただしここで、ω_3 は $d\theta^1 \wedge d\theta^2 \wedge d\theta^3$ に正係数で比例する $\mathbf{S}^3$ 上の体積形式で、$\mathbf{S}^3$ 上で積分したときに $\Omega_3 = 2\pi^2$ を与えるように規格化されているとする。従って、F_3 の積分によって電荷 N を

$$N = -\oint_{\mathbf{S}^3} F_3 \tag{20.112}$$

と定義すれば H が次のように決定される。

$$H = c + \frac{\kappa}{\sqrt{3}}\frac{N}{4\pi^2 r^2} = 0. \tag{20.113}$$

地平面近傍は $\mathbf{AdS}_2 \times \mathbf{S}^3$ である。

20.3.2 BPS 弦解

5 次元極小超重力理論における BPS string 解を構成しよう。弦上のポアンカレ対称性と弦の周りの回転対称性を仮定すれば計量は次のように置くことができる。

$$ds^2 = a^2(r)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + b^2(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2) \tag{20.114}$$

$\mathbf{S}^2$ 上の座標を θ_1、θ_2 とする。これらの座標をどのように取るかは指定しないが、向き付けは $\epsilon^{x_1 x_2 \theta_1 \theta_2} > 0$ となるように取る。

(20.114) 上のフェルミオンを扱うために多脚場も導入する必要がある。ここでは次のようにとる。

$$e_\mu^{\hat\mu} = a(r), \quad e_r^{\hat r} = b(r), \quad e_b^{\hat a} = b(r)\tilde{e}_b^{\hat a}. \tag{20.115}$$

ただし $\tilde{e}_b^{\hat a}$ は半径が rb ではなく r の球面上の任意の多脚場である。このときスピン接続の 0 でない成分は次のように与えられる。

$$\omega_{\mu-\hat\mu\hat r} = \frac{a'}{b}, \quad \omega_{a-\hat a\hat r} = \frac{rb'}{b} + \tilde\omega_{a-\hat a\hat r}, \quad \omega_{a-\hat b\hat c} = \tilde\omega_{a-\hat b\hat c}. \tag{20.116}$$

従って、スピノルの共変微分は、平坦な時空上の共変微分を用いて次のように書くことができる。

$$D_\mu\xi = \tilde D_\mu\xi + \frac{a'}{2b}\gamma^{\hat\mu\hat r}\xi, \quad D_r\xi = \tilde D_r\xi, \quad D_a\xi = \tilde D_a\xi + \frac{rb'}{2b}\gamma^{\hat a\hat r}\xi. \tag{20.117}$$

グラビティーノの変換則は、ベクトル添え字が弦に平行な方向、半径方向、$\mathbf{S}^2$ 方向の場合に対してそれぞれ次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\kappa\delta\psi_{I\mu} &= \tilde D_\mu\xi_I + \frac{a'}{2b}\gamma^{\hat\mu\hat r}\xi_I - \frac{i\kappa}{4\sqrt{3}}a\gamma_{\hat\mu}\not{G}_2\xi_I, \\
\kappa\delta\psi_{Ir} &= \tilde D_r\xi_I - \frac{i\kappa}{4\sqrt{3}}b\gamma_{\hat r}\not{G}_2\xi_I, \\
\kappa\delta\psi_{Ia} &= \tilde D_a\xi + \frac{rb'}{2b}\gamma^{\hat a\hat r}\xi + \frac{2i\kappa}{4\sqrt{3}}br\gamma_{\hat a}\not{G}_2\xi_I.
\end{aligned} \tag{20.118}$$

これらを全て 0 にするような ξ は、対称性より平坦な時空上での定数スピノル $\tilde\xi$ を用いて $\xi = s(r)\tilde\xi$ と書くことができる。$D_M\tilde\xi = 0$ を用いれば、グラビティーノの変換は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
\kappa\delta\psi_{I\mu} &= \frac{a}{b}\gamma^{\hat\mu\hat r}\left(\frac{a'}{2a} - \frac{i\kappa}{4\sqrt{3}}b\gamma_{\hat r}\not{G}_2\right)\xi_I, \\
\kappa\delta\psi_{Ir} &= \left(\frac{s'}{s} - \frac{i\kappa}{4\sqrt{3}}b\gamma_{\hat r}\not{G}_2\right)\xi_I, \\
\kappa\delta\psi_{Ia} &= -2r\gamma^{\hat a\hat r}\left(-\frac{b'}{4b} - \frac{i\kappa}{4\sqrt{3}}b\gamma_{\hat r}\not{G}_2\right)\xi_I.
\end{aligned} \tag{20.119}$$

右辺の括弧の中に注目すると、第 2 項は全て共通であるから、全てが同時に 0 になるためには第 1 項が等しくなければならない。従って次の関係が成り立つ。

$$-2\frac{a'}{a} = -4\frac{s'}{s} = \frac{b'}{b} = \frac{H'}{H}. \tag{20.120}$$

ただし、関数 H は次の式によって定義した。

$$-\frac{i\kappa}{\sqrt{3}}b\gamma_{\hat r}\not{G}_2\xi_I = \frac{H'}{H}\xi_I \tag{20.121}$$

G_2 は $G_{\theta_1\theta_2}$ のみが 0 で無いので、左辺は $\gamma_{r\theta_1\theta_2}\xi_I$ に比例する。つまり ξ_I は $\gamma_{r\theta_1\theta_2}$ の固有スピノルでなければならない。ここでは次のように置こう。

$$\gamma_{\hat{r}\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2}\xi_I = -i\xi_I \tag{20.122}$$

(20.120) より、a、s、b は一つの関数 H を用いて次のように書くことができる。

$$a = H^{-1/2}, \quad s = H^{-1/4}, \quad b = H. \tag{20.123}$$

従って計量は次の形を取る。

$$ds^2 = H^{-1}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + H^2(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2) \tag{20.124}$$

弦の電荷を N とすれば、ゲージ場のフラックスは次のように与えられる。

$$G_2 = \frac{N}{4\pi}\omega_2. \tag{20.125}$$

ただし ω_2 は $d\theta_1 \wedge d\theta_2$ に正係数で比例する $\mathbf{S}^2$ 上の体積形式で、$\mathbf{S}^2$ 上の積分で $\Omega_2 = 4\pi$ を与えるものとする。これ以外の成分は全て 0 である。

(20.121) は (20.125) と (20.122) を用いると、次のように変形できる。

$$H' = -\frac{\kappa}{\sqrt{3}}\frac{N}{4\pi r^2} \tag{20.126}$$

従って、H が次のように決定される。

$$H = c + \frac{\kappa}{\sqrt{3}}\frac{N}{4\pi r}. \tag{20.127}$$

c は積分定数である。地平面近傍は $c = 0$ と置けば得ることができて、$\mathbf{AdS}_3 \times \mathbf{S}^2$ である。

20.3.3 3-charge black holes

11 次元超重力理論のコンパクト化を考えると、3 つのベクトル場を含む超重力理論が自然に得られる。このため、3 つの独立な電荷を持つようなブラックホール解は詳しく調べられている。

まずは、最も簡単な 3-charge 解の例として、次の M2-brane 配位から得られる 5 次元ブラックホール解を見てみよう。

	t	x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
$\mathrm{M2} \times N_1/V_{3456}$	○					○	○				
$\mathrm{M2} \times N_2/V_{1256}$	○							○	○		
$\mathrm{M2} \times N_3/V_{1234}$	○									○	○

(20.128)

z_i 方向は $\mathbf{T}^6$ にコンパクト化されているとし、その $\mathbf{T}^n$ 部分空間の体積を V_{1234} のように部分空間の向きを表す添え字を用いて表すことにする。他の多くの 3-charge 解も、双対変換を行うことでこの配位に帰着させることができる。

対応する古典解は、3 つの異なる向きの M2-brane 古典解を harmonic function rule で重ね合わせることによって次のように得られる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{1}{(H_1H_2H_3)^{2/3}}dt^2 + (H_1H_2H_3)^{1/3}dx^2 \\ &\quad +(H_1H_2H_3)^{1/3}\left(\frac{dz_1^2 + dz_2^2}{H_1} + \frac{dz_3^2 + dz_4^2}{H_2} + \frac{dz_5^2 + dz_6^2}{H_3}\right). \end{aligned} \tag{20.129}$$

ただし、H_a は x_i のみに依存する調和関数で、次のように与えられる。

$$H_1 = 1 + \frac{N_1/V_{3456}}{2\Omega_3 r^2}, \quad H_2 = 1 + \frac{N_2/V_{1256}}{2\Omega_3 r^2}, \quad H_3 = 1 + \frac{N_3/V_{1234}}{2\Omega_3 r^2}. \tag{20.130}$$

z_i を内部空間だとみなせば、これは 5 次元のブラックホール解を与えている。この 5 次元ブラックホールの地平面の形状は $\mathbf{S}^3$ であり、次のように 0 でない面積を持つ。

$$A_{\mathrm{hor}} = \lim_{r\to 0} \Omega_3 r^3 (H_1 H_2 H_3)^{1/2} = \frac{\sqrt{N_1 N_2 N_3}}{4\pi V_{123456}} \tag{20.131}$$

内部空間の体積は V_{123456} で一定であり、5 次元での Newton 定数は

$$\frac{1}{32\pi^2 G} = V_{123456} \tag{20.132}$$

と与えられる。従って Bekenstein-Hawking エントロピーは次のように与えられる。

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A_{\mathrm{hor}}}{4G} = 2\pi\sqrt{N_1 N_2 N_3} \tag{20.133}$$

上では 11 次元超重力理論の古典解として 5 次元ブラックホール解を構成したが、もちろん直接 5 次元の超重力理論を用いても同じことができる。そのためにはまず 11 次元の超重力理論を $\mathbf{T}^6$ コンパクト化したときにどのような 5 次元超重力理論が得られるかを決める必要がある。また、単に $\mathbf{T}^4$ コンパクト化すると、$\mathcal{N}=4$ の 5 次元超重力理論が得られるので、適当な truncation によって $\mathcal{N}=1$ 超重力理論に落とす必要がある。この truncation を行うのに、コンパクト化される $\mathbf{T}^6$ の方向を複素座標 $a=1,2,3$ および $\bar a = \bar 1, \bar 2, \bar 3$ で表すのが便利である。二つの生成子 $T_{1\bar 1} - T_{2\bar 2}$ と $T_{2\bar 2} - T_{3\bar 3}$ で生成される $\mathrm{U}(1)^2$ で不変な部分のみを残すという操作を行えば、$\mathcal{N}=1$ 超重力理論を得ることができる。（この $\mathrm{U}(1)^2$ は Calabi-Yau コンパクト化の際の holonomy SU(3) のカルタン部分群に相当する。）このような truncation の結果残るのは、次の場である。

11 次元	5 次元	
G_{MN}	$g_{\mu\nu}$	metric
	$g_{1\bar 1}, g_{2\bar 2}, g_{3\bar 3}$	scalar × 3
$A_{MNP} \leftrightarrow A_{MNPQRS}$	$A_{\mu\nu\rho} \leftrightarrow A_{1\bar 1 2\bar 2 3\bar 3}$	scalar × 1
	$(A_{123}, A_{\overline{123}}) \leftrightarrow (A_{\mu\nu\rho\overline{123}}, A_{\mu\nu\rho 123})$	scalar × 2
	$(A_{\mu 1\bar 1}, A_{\mu 2\bar 2}, A_{\mu 3\bar 3}) \leftrightarrow (A_{\mu\nu 2\bar 2 3\bar 3}, A_{\mu\nu 1\bar 1 3\bar 3}, A_{\mu\nu 1\bar 1 2\bar 2})$	vector × 3

(20.134)

内部空間の添え字には複素座標を用いた。これらは 1 つの重力多重項と 2 つのベクトル多重項、1 つのハイパー多重項よりなる。ハイパー多重項は A_{MNP} とその双対場から得られる 3 つのスカラー場と、内部空間の体積を表すスカラー場から成るが、上記の古典解ではこれらは定数であり、無視することができる。そこで以下では重力多重項と U(1) ベクトル多重項を二つ含む超重力理論について考える。

内部空間の計量を次のように置こう。

$$g_{mn} = \mathrm{diag}(e^{\phi_1}, e^{\phi_1}, e^{\phi_2}, e^{\phi_2}, e^{\phi_3}, e^{\phi_3}). \tag{20.135}$$

ただし、ϕ_a はすべて独立ではなく、$\mathbf{T}^6$ の体積が一定であるということを表す次の式を満足している。

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0. \tag{20.136}$$

Soryushiron Kenkyu

（ここでは式を簡単にするために内部空間の体積が 1 の場合を考えることにする。）$\mathbf{T}^6$ の計量が対角的であるので、簡単に 5 次元の作用を得ることができる。

$$
\begin{aligned}
\frac{S}{2\pi} &= \int d^5x\sqrt{-g}\Big(R - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_3\partial^\mu\phi_3 \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{4e^{2\phi_1}}(F^{(1)}_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{4e^{2\phi_2}}(F^{(2)}_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{4e^{2\phi_3}}(F^{(3)}_{\mu\nu})^2\Big) \\
&\quad - \int A^{(1)} \wedge K^{(2)} \wedge K^{(3)}
\end{aligned}
\tag{20.137}
$$

5 次元の超重力理論は、Chern-Simons 項の係数を表す 3 階対称テンソル C_{abc} が与えられれば、場の変数変換の自由度を除き完全に決定されるが、上記の作用中の Chern-Simons 項は C_{abc} が次のように与えられることを意味している。

$$
C_{abc} = |\epsilon_{abc}|
\tag{20.138}
$$

この情報から、超重力理論の作用は以下のように決定される。まず、スカラー場 M^a は $C_{abc}M^aM^bM^c = 2/\sqrt{3}$ という条件を満足する場として与えられるが、これは $\mathbf{T}^6$ の体積が 1 であるという条件 (20.136) であるとみなすことができる。コンパクト化のサイズを表すスカラー場 ϕ_a との関係は次のように置くことができる。

$$
M^a = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\phi_a}
\tag{20.139}
$$

これを用いると、下付添え字の M_a は次のように与えられる。

$$
M_a = (\sqrt{3}/2)C_{abc}M^aM^b = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\phi_a}
\tag{20.140}
$$

スカラー場の作用 $(3/2)\partial_\mu M_a\partial^\mu M^a$ は確かに (20.137) に含まれるものと一致する。また、ゲージ場の運動項の係数は $f_{ab} = 3M_aM_b - \sqrt{3}C_{abc}M^c$ によって与えられるが、これも確かに (20.137) のゲージ場運動項を再現する。

5 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超重力理論のグラビティーノとゲージーノの変換則は次のように与えられる。

$$
\delta\psi_{I\mu} = D_\mu\xi_I + \frac{\sqrt{3}i}{24}\gamma_\mu M_a \not{F}^a_2\xi_I - \frac{\sqrt{3}i}{8}M_a\not{F}^a_2\gamma_\mu\xi_I,
\tag{20.141}
$$

$$
M^a_i\delta\lambda^i_I = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\delta^a_b - M^aM_b)\not{F}^b_2\xi_I - \frac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{2}}(\not{\partial}M^a)\xi_I.
\tag{20.142}
$$

この超対称変換が 1/2 だけ破れずに残るという条件を用いて、先ほどのブラックホール解を再現しよう。回転対称性を仮定し、計量を次のようにおく。

$$
ds^2 = -a^2(r)dt^2 + b^2(r)(dr^2 + r^2d\Omega_3^2), \quad \xi = s(r)\xi_0.
\tag{20.143}
$$

$\mathbf{S}^3$ 上の座標を θ^1、θ^2、θ^3 とする。これらを具体的にどのように取るかは指定しないが、$\epsilon^{r\theta^1\theta^2\theta^3} > 0$ となるように向き付けを取る。このとき、ξ の共変微分は次のように与えられる。

$$
bdx^\mu D_\mu\xi = \left(\widehat{dt}\frac{a'}{2a}\gamma_{\hat{t}\hat{r}} + \widehat{d\theta}^{\hat{\alpha}}\frac{b'}{2b}\gamma_{\hat{\alpha}\hat{r}} + \widehat{dr}\frac{s'}{s}\right)\xi.
\tag{20.144}
$$

ただし、$\widehat{dt}$、$\widehat{dr}$、$\widehat{d\theta}^{\hat{\alpha}}$ は次のように定義される。

$$
\widehat{dt} = a(r)dt, \quad \widehat{dr} = b(r)dr, \quad \widehat{d\theta}^{\hat{\alpha}} = rb(r)\hat{e}^{\hat{\alpha}}_\alpha d\theta^\alpha
\tag{20.145}
$$

$\hat{e}^{\hat{\alpha}}_{\alpha}$ は単位半径の $\mathbf{S}^3$ 上の多脚場である。回転対称性より、ゲージ場の成分で 0 で無いのは $F_{\hat{r}\hat{t}}$ のみである。また、M^a は r のみに依存する。これを用いれば、グラビティーノの変換則からは次の 3 つの独立な条件が得られる。

$$bdt\delta\psi_{It} = \widehat{dt}\gamma_{\hat{t}\hat{r}}\left(\frac{a'}{2a}+\frac{\sqrt{3}}{6}M_a ib\gamma_{\hat{r}}\not{F}^a_2\right)\xi_I, \tag{20.146}$$

$$bdr\delta\psi_{Ir} = \widehat{dr}\left(\frac{s'}{s}+\frac{\sqrt{3}}{6}M_a ib\gamma_{\hat{r}}\not{F}^a_2\right)\xi_I, \tag{20.147}$$

$$bd\theta\delta\psi_{I\theta} = \widehat{d\theta}\gamma_{\hat{\theta}\hat{r}}\left(\frac{b'}{2b}-\frac{\sqrt{3}}{12}M_a ib\gamma_{\hat{r}}\not{F}^a_2\right)\xi_I. \tag{20.148}$$

一方、ゲージーノの変換則からは

$$M^a_i\delta\lambda^i_I = -\frac{i}{2\sqrt{2}b}\gamma^{\hat{r}}\left(\sqrt{3}(\partial_r M^a)+(\delta^a_b - M^a M_b)ib\gamma_{\hat{r}}\not{F}^b_2\right)\xi_I. \tag{20.149}$$

を得る。

これらが $\xi_I \neq 0$ に対して成り立つためには、ξ_I が $M_a ib\gamma_{\hat{r}}\not{F}^a_2$ の固有ベクトルになっていればよい。そこで、$a=1,2,3$ それぞれに対して次のように置こう。

$$\sqrt{3}iM_a b\gamma_{\hat{r}}\not{F}^a_2\xi_I = \frac{H'_a}{H_a}\xi_I. \tag{20.150}$$

$\not{F}$ が γ^{rt} に比例するから、これは変換パラメータ ξ_I が $\gamma^{\hat{t}}$ の固有スピノルになっていることを意味している。ここでは次のように仮定する。

$$\gamma^{\hat{t}}\xi_I = i\xi_I \tag{20.151}$$

H_a はこれから決める r の関数であり、H'_a は H_a の r による微分を表す。これをグラビティーノ変換則に代入すれば a、b、s が次のように決定される。

$$a = H^{-1}, \quad b = H^{1/2}, \quad s = H^{-1/2}, \quad H = (H_1 H_2 H_3)^{1/3}. \tag{20.152}$$

これからあともしばしば現れる H_a の幾何平均を H と置いた。ゲージーノの変換則に (20.150) を代入すれば、M^a が次のように決定される。

$$e^{\phi_a} = \sqrt{3}M^a = \frac{H}{H_a} \tag{20.153}$$

これらを H_a の定義式 (20.150) に代入しなおせば、次の式を得る。

$$F^a_{rt} = -\frac{H'_a}{H_a^2}. \tag{20.154}$$

従って、ゲージ変換の自由度を除き、ゲージポテンシャルは次のように与えられる。

$$A^a = \frac{1}{H_a}dt. \tag{20.155}$$

あとは関数 H_a を決定すればよい。そのためにはゲージ場 A^a の運動方程式を用いる。ここで考えている古典解においては $F^a \wedge F^b$ は 0 なので、運動方程式は次のようになる。

$$dF_{a3} = 0, \quad F_{a3} = \frac{1}{e^{2\phi_a}} * F_2 = -\hat{*}(dH_a \wedge dt). \tag{20.156}$$

ここで、F_{a3} は F_2^a の双対場である。$\hat{*}$ は計量に平坦な座標を用いた Hodge 双対を表す。この式運動方程式は、H_a が平坦な 4 次元空間上での調和関数であることを表している。

$$d\hat{*}_4 dH_a = 0. \tag{20.157}$$

$\hat{*}_5(dr \wedge dt) = \hat{*}_4 dr = -r^3\omega_3$ を用いれば、ブラックホールの電荷 N_a は次の式によって与えられる。

$$N_a = -\oint_{\mathbf{S}^3} F_{a3} = -\Omega_3 r^3 H'_a. \tag{20.158}$$

これらより、調和関数は次のように決まる。

$$H_a = 1 + \frac{N_a}{4\pi^2 r^2} \tag{20.159}$$

これは確かに 11 次元超重力理論の古典解に対する調和関数 (20.130) でコンパクト化の周期が 1 の場合に一致する。従ってこの調和関数を用いて表される計量

$$ds^2 = -\frac{1}{H^2}dt^2 + H(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2), \tag{20.160}$$

は確かに (20.129) の 5 次元部分を再現している。

20.3.4 rotating charged black hole (BMPV black hole)

BMPV black hole[86] は角運動量を持つ 5 次元の charged black hole である。5 次元での SO(4) 角運動量は独立な二つの平面上での角運動量を表す二つのパラメータによって表されるが、BMPV ブラックホールはこの二つが等しい場合である。これは、系に SU(2) 対称性が残っていることを意味している。

一般に、角運動量を持つ系の計量は、時間成分が $(dt + k_1)^2$ のような形で含まれる。k_1 は計量の t-x^m 成分を表す x^m 空間上の 1 形式である。そこで、背景時空の計量が、(20.143) の dt を $dt + k_1$ で置き換えた次の形で与えられると仮定しよう。

$$ds^2 = -a(x)^2(dt + k_1)^2 + b(r)^2 h_{mn}(x)dx^m dx^n \tag{20.161}$$

さらに、ゲージ場に対しても同じ置き換えを行うと、$A^a = H_a^{-1}(dt + k_1)$ となる。この置き換えにより、ゲージ場の強さは $F^a = (dH_a^{-1}) \wedge (dt + k_1) + H_a^{-1}G_2$ と変更される。ただし $G_2 = dk_1$ である。ここでは少し一般化して

$$F^a = F_0 + \delta F, \tag{20.162}$$

と表すことにしよう。ただし F_0^a はもともとあった部分で $dr \wedge (dt + k_1)$ に比例し、(20.150) を満足すると仮定する。δF については、空間成分のみを持ち、$dx^m \wedge (dt + k_1)$ のような成分は持たないと仮定する。

以上のような計量とゲージ場の修正によってフェルミオンの超対称変換には補正項が現れるが、変換則中のもともとあった項を 0 に保ちながら補正項も 0 になるように k_1 と δF を決めることを考えよう。

変換則中にもともとあった項がそのまま 0 であるようにするためには、(20.150) であるという条件を保つためには、F_0^a と (20.150) によって関係する関数 H_a (この段階ではまだ調和関数であるかどうかは決まっていない)を用いて a、b、s、M^a、M_a などが以前と同様に次のように与えられればよい。

$$M^a = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{H}{H_a}, \quad M_a = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{H_a}{H}, \quad a = \frac{1}{H}, \quad b = H^{1/2}, \quad s = \frac{1}{H^{1/2}}. \tag{20.163}$$

H は H_a の幾何平均、すなわち $H = (H_1H_2H_3)^{1/3}$ である。さらに ξ_I は以前と同じ次の条件を満足するとする。

$$\gamma^{\hat{t}}\xi_I = i\xi_I. \tag{20.164}$$

この式は ξ_I が x^m で張られる 4 次元空間上で定まったカイラリティを持っていることを意味している。このことから、次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}\epsilon_{mnpq}\gamma^{pq}\xi_I = \frac{i}{2}\epsilon_{tmnpq}\gamma^{pq}\gamma^t\xi_I = \frac{1}{2}\gamma_{tmnpq}\gamma^{pq}\gamma^t\xi_I = -\gamma_{mn}\xi_I \tag{20.165}$$

すなわち、$\gamma_{mn}\xi_I$ は添え字 mn に対して反自己双対である。また、一般の 4 次元反対称テンソル T_{mn} の自己双対部分を T^+_{mn}、反自己双対部分を T^-_{mn} とすれば、次の式が成り立つ。

$$\not{T}_2\xi_I = \not{T}_2^-\xi_I, \quad \not{T}_2\gamma_m\xi_I = \not{T}_2^+\gamma_m\xi_I. \tag{20.166}$$

(20.163) と (20.164)、および F^a_0 と H_a の関係 (20.150) を用いれば、ゲージ場の時間成分は次の式を満足する。

$$\partial_m A^a_t = -\frac{\partial_m H_a}{H_a^2}. \tag{20.167}$$

すなわち、定数部分を除き、ゲージ場の時間成分は次のように与えられる。

$$A^a_t = \frac{1}{H_a}. \tag{20.168}$$

ゲージ場の空間成分を B^a_1 とおき、次のように仮定する。

$$A^a_1 = \frac{1}{H_a}(dt + k_1) + B^a_1. \tag{20.169}$$

B^a_1 に対する場の強さを $\Theta^a_2 = dB^a_1$ と書くことにすれば、A_1 の場の強さは次のようになる。

$$F^a_2 = dH_a^{-1} \wedge (dt + k_1) + \frac{1}{H_a}G_2 + \Theta^a_2. \tag{20.170}$$

ここで、F^a_2 の第 1 項を $F^a_{02} = dH_a^{-1} \wedge (dt + k_1)$、それ以外を $\delta F^a_2 = H_a^{-1}G_2 + \Theta^a_2$ と書くことにする。

これらの仮定の下でフェルミオンの超対称変換を見てみよう。まず、ゲージーノの変換には次のように補正項が加わる。

$$M^a_i\delta\lambda^i_I = M^a_i(\delta\lambda_0)^i_I + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{H_a}\sum_{b=1,2,3}\left(\delta^a_b - \frac{1}{3}\right)H_b\delta\not{F}_2^{-b}\xi_I \tag{20.171}$$

(20.163) や (20.164) を用いれば $M^a_i(\delta\lambda_0)^i_I = 0$ であることが示される。補正項も 0 になるためには $H_a\delta F_2^{-a}$ が全て等しければよい。その共通の値を K^- とおこう。

$$K^- = H_1\delta F_2^{-1} = H_2\delta F_2^{-2} = H_3\delta F_2^{-3} \tag{20.172}$$

自己双対部分に対しては、この式からはいかなる条件も課されない。

(20.163) と (20.164) に加えて (20.172) を用いると、グラビティーノの超対称変換が次のように与えられる。

$$\delta\psi^{\hat{t}} = \delta\psi^{\hat{t}}_0 - \frac{1}{4H^2}(\not{G}_2^{-(h)} - \not{K}_2^{-(h)})\xi_I, \tag{20.173}$$

$$\delta\psi_{I\hat{l}} = \delta\psi^{\hat{l}}_0 - \frac{i}{8H^2}\gamma_{\hat{l}}(\not{G}_2^{-(h)} - \not{K}_2^{-(h)})\xi_I + \frac{i}{8H^2}(\not{G}_2^{+(h)} - \sum_{a=1,2,3}H_a\delta\not{F}_2^{+a(h)})\gamma_{\hat{l}}\xi_I \tag{20.174}$$

Soryushiron Kenkyu

(20.166) を用いた。これが 0 になるためには次の式が成り立てばよい。

$$G_2^- = K_2^-, \quad G_2^+ = \sum_{a=1,2,3} H_a \delta F_2^{+a}. \tag{20.175}$$

これらの式に K_2^- や δF_2^a の定義を代入すれば、

$$(\Theta_2^a)^- = 0, \quad -2G_2^+ = \sum_{a=1,2,3} H_a (\Theta_2^a)^+. \tag{20.176}$$

(20.150) によって定義される関数 H_a の関数形を決めるには､、ゲージ場 A^a に対する運動方程式を用いる。ここで考えている、$B_1^a \neq 0$ の場合には、$F^a \wedge F^b$ が一般には 0 でないので、運動方程式の非線形項まで考慮する必要がある。ゲージ場の運動方程式は、次のように与えられる。

$$dF_{a3} = 0, \quad F_{a3} = e^{-2\phi_a} * F_2^a - \frac{1}{2} C_{abc} A_1^b \wedge F_2^c = 0. \tag{20.177}$$

(20.156) と異なり、非線形項まで含めた。ansatz を代入すれば、線形項、非線形項が次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^{2\phi_a}} * F_2^a &= -\hat{*}_4 dH_a + (dt + k_1) \wedge (\frac{H_a}{H^3} G_2 + C_{abc} \frac{\Theta_2^b}{H_c}) \\
-\frac{1}{2} C_{abc} A_1^a \wedge F_2^a &= -\frac{1}{2} C_{abc} B_1^b \wedge \Theta_2^c + \frac{1}{2} d \left(C_{abc} B_1^b \wedge \frac{1}{H_c} (dt + k_1) \right) \\
&\quad -(dt + k_1) \wedge (\frac{H_a}{H^3} G_2 + C_{abc} \frac{\Theta_2^b}{H_c})
\end{aligned} \tag{20.178}$$

これらの和を取れば、双対場 F_{a3} が次のように得られる。

$$F_{a3} = -\hat{*}_4 dH_a - \frac{1}{2} C_{abc} B_1^b \wedge \Theta_2^c + \frac{1}{2} d \left(C_{abc} B_1^b \wedge \frac{1}{H_c} (dt + k_1) \right) \tag{20.179}$$

従って、運動方程式は、

$$dF_3^a = -d\hat{*}_4 dH_a - \frac{1}{2} C_{abc} \Theta_2^b \wedge \Theta_2^c = 0. \tag{20.180}$$

となる。関数 H_a はこれを満足するように決定しなければならない。

以上のことから、(20.176) および (20.180) を満足する B_1^a、k_1、H^a を与えれば古典解が決定される。これらの式を一般的に解く方法は後で述べることにし、ここでは簡単な例として $G_2^+ = B_1^a = 0$ である場合を考えよう。これは BMPV black hole を与える。この場合、解を与えるには反自己双対な G_2 を与える k_1 と H_a を与えればよい。(20.180) より、H_a は特異点を除き調和関数でなければならない。$\hat{*}_4 dr = -r^3 \omega_3$ を用いれば、保存電荷 N_a と H_a との関係が

$$N_a = -\oint_{\mathbf{S}^3} F_{a3} = -\oint_{\mathbf{S}^3} (-\hat{*}_4 dH_a) = -2\pi^2 r^3 H_a' \tag{20.181}$$

と決まる。従って、§20.3.3 と同様に調和関数は次のように与えられる。

$$H_a = 1 + \frac{N_a}{4\pi^2 r^2}. \tag{20.182}$$

k_1 については、$G_2 = dk_1$ が反自己双対であるという条件だけからは一意的に決まらないが、遠方での振る舞いが回転ブラックホールとしてふさわしいものを選ぼう。角運動量と計量の漸近形の関係は §A.3.1 に与えてある。5 次元ブラックホールの場合、角運動量を J_{ij} とすれば、計量の遠方での様子は次のようになるはずである。

$$k_1 = \frac{(2\kappa^2)}{4\pi^2 r^4} J_{ij} x^i dx^j. \tag{20.183}$$

ここで、J_{ij} が自己双対（反自己双対ではない）の場合を考えよう。この場合、次のものを用いるのが便利である。

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{2}{r^2}(x_1dx_2 - x_2dx_1 + x_3dx_4 - x_4dx_3),\\
\sigma_y &= \frac{2}{r^2}(x_1dx_3 - x_3dx_1 + x_4dx_2 - x_2dx_4),\\
\sigma_z &= \frac{2}{r^2}(x_1dx_4 - x_4dx_1 + x_2dx_3 - x_3dx_2).
\end{aligned} \tag{20.184}$$

これを用いれば、平坦な $\mathbf{R}^4$ の計量を次のように書ける。

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2). \tag{20.185}$$

直交座標での向き付けを $\epsilon^{1234} > 0$ のように取ってあれば、$\epsilon^{rxyz} > 0$ である。σ_a は次の関係式を満足する。

$$d\sigma_x = \sigma_y \wedge \sigma_z, \quad d\sigma_y = \sigma_z \wedge \sigma_x, \quad d\sigma_z = \sigma_x \wedge \sigma_y. \tag{20.186}$$

この関係を用いると、$d(r^2\sigma_a)$ が自己双対であるのに対して $d(r^{-2}\sigma_a)$ は反自己双対であることが簡単に示される。

$$d\left(\frac{\sigma_z}{r^2}\right) = +\frac{4}{r^4}\left(\frac{r\sigma_x}{2} \wedge \frac{r\sigma_y}{2} - dr \wedge \frac{r\sigma_z}{2}\right) \tag{20.187}$$

J_{ij} が自己双対、たとえば $J_{12} = J_{34} = J$ の場合には、k_1 は次のように与えられる。

$$k_1 = \frac{(2\kappa^2)J}{8\pi^2 r^2}\sigma_3. \tag{20.188}$$

上で述べたように、これは反自己双対な G_2 を与える。さらに $2\kappa^2 = 1/(2\pi)$ の場合には

$$k_1 = \frac{J}{16\pi^3 r^2}\sigma_3. \tag{20.189}$$

こうして定まった調和関数 H_a と反自己双対 1-形式 k_1 を計量

$$ds^2 = -\frac{1}{H^2}(dt + k_1)^2 + H dx_m dx_m \tag{20.190}$$

に代入すれば、BMPV ブラックホールが得られる。

このブラックホールの地平面は $r = 0$ で与えられる。そこでの計量は squashed $\mathbf{S}^3$ を与える。

$$ds^2 = \frac{(N_1N_2N_3)^{1/3}}{16\pi^2}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{J^2}{N_1N_2N_3}\sigma_z^2\right) \tag{20.191}$$

従って表面積が次のように決まる。

$$A_{\rm hor} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{N_1N_2N_3 - J^2} \tag{20.192}$$

20.3.5 string 解

black ring 解を構成する準備として、black ring 解の半径を無限大にとる極限で得られる string 解を作ってみよう。ここで考える string 解は §20.3.2 で与えたものとは異なり、M2-ブレーンからなる black hole 解と同じ超対称性を残すようなものであり、純粋な弦ではなく electric な charge も持つようなものである。このような解は [87] において与えられた。

(20.176) および (20.180) を満足する B_1^a、k_1、H_a を与えるには次の手順を踏めばよい。

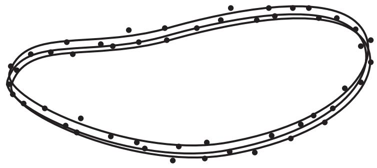

図 20.4: ここで考える弦の M ブレーン的イメージ。M5 ブレーンの弦の束と M2 ブレーンの粒子の束縛状態。この図にあるように、安定な閉じた弦を作ることも可能であり、black ring と呼ばれる。brack ring についてはこの次の節で解を与える。

一般の 1/2 BPS 解の構成手順

1. まず始めに、自己双対な場の強さを与えるようにゲージ場の空間部分 B_1^a を与える。

2. ゲージ場 B_1^a を決めたら、その場の強さ $\Theta_2^a = dB_1^a$ の二次形式をソースにするようなラプラス方程式

$$-d\hat{*}_4 dH_a = \frac{1}{2}C_{abc}\Theta_2^b \wedge \Theta_2^c \tag{20.193}$$

の解として H_a を決定する。

3. さらに、得られた Θ_2^a と H_a を用いて、次の方程式を与えるような k_1 を決定する。

$$G_2^+ = -\frac{1}{2}\sum_a H_a\Theta_2^a \tag{20.194}$$

ただし G_2^+ は $G_2 = dk_1$ の自己双対部分である。反自己双対部分 G_2^- はどのような値を取ってもかまわないので、この方程式は多くの解を持つが、物理的に適当な境界条件を満足するものをその中から選ぶ。

以上の手順によって B_1^a、H_a、k_1 が与えられれば、古典解は次のように与えられる。

$$ds^2 = -\frac{1}{H^2}(dt+k_1)^2 + Hdx_m dx_m, \quad H = (H_1H_2H_3)^{1/3}. \tag{20.195}$$

$$A_1 = \frac{1}{H_a}(dt+\omega) + B_1^a. \tag{20.196}$$

この手順を用いて、string 解を与えよう。そのためにまず平坦な 4 次元空間上の座標を次のように取る。

$$ds^2 = d\psi^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{20.197}$$

向き付けは、(r,ψ,θ,ϕ) が正の向き付けになるように取る。さらに次の座標変換を行う。(y,ψ,x,ϕ) が正の向きである。

$$y = -\frac{1}{r}, \quad x = -\cos\theta, \quad y \le 0, \quad -1 \le x \le 1. \tag{20.198}$$

この座標は後に与えるリング座標との対応が見やすい。また、自己双対場を与えるときも式が簡単になる。この座標での計量は次のように与えられる。

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{y^2}dy^2 + y^2d\psi^2 + \frac{dx^2}{1-x^2} + (1-x^2)d\phi^2\right). \tag{20.199}$$

自己双対な場の強さを与える 1-形式および場の強さは次のように与えられる。

$$B_1^a = \frac{q_a}{4\pi}(yd\psi + xd\phi), \quad \Theta_2^a = \frac{q_a}{4\pi}(dy \wedge d\psi + dx \wedge d\psi). \tag{20.200}$$

Θ_2^a を弦を囲む $\mathbf{S}^2$ で積分すると、q_a を与えるので、q_a は弦の magnetic charge を表す。Θ_2^a を (20.193) の右辺に代入すると次のようになる。

$$\frac{1}{2}C_{abc}\Theta_2^b \wedge \Theta_2^c = \frac{C_{abc}q_a q_b}{16\pi^2}(dy \wedge d\psi \wedge dx \wedge d\phi). \tag{20.201}$$

従って、H_a を決定するために解くべきラプラス方程式は次のように与えられる。

$$\frac{1}{y^4}\Delta H_a = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}\right)H_a = \frac{C_{abc}q_b q_c}{16\pi^2} \tag{20.202}$$

これは簡単に解くことができて、次の解を得る。

$$H_a = 1 - \frac{N_a}{4\pi}y + \frac{C_{abc}q_b q_c}{32\pi^2}y^2 \tag{20.203}$$

ここで、第 2 項の y について 1 次の項は弦が持つ electric charge を表しており、N_a は electric charge の線密度である。

あとは (20.194) を解いて k_1 を決定すればよい。

$$2G^+ = -\frac{1}{4\pi}\left((q_1+q_2+q_3) - \frac{q_a N_a}{4\pi}y + \frac{C_{abc}q_a q_b q_c}{32\pi^2}y^2\right)(yd\psi + xd\phi) \tag{20.204}$$

$k_1 = k_\psi d\psi + k_\phi d\phi$ と置けば、

$$\partial_y k_\psi + \partial_x k_\phi = -\frac{1}{4\pi}\left((q_1+q_2+q_3) - \frac{q_a N_a}{4\pi}y + \frac{C_{abc}q_a q_b q_c}{32\pi^2}y^2\right) \tag{20.205}$$

$$(1-x^2)\partial_x k_\psi - y^2\partial_y k_\phi = 0. \tag{20.206}$$

この解として次のものがすぐに思いつく。

$$k_\psi = -\frac{q_a}{4\pi}y + \frac{q_a N_a}{2(4\pi)^2}y^2 - \frac{q_1 q_2 q_3}{(4\pi)^3}y^3, \quad k_\phi = 0. \tag{20.207}$$

これが物理的に妥当であることを見るために、closed time-like curve がないかどうかを見てみよう。ψ 方向がある周期でコンパクト化されていると仮定し、その方向に一周するサイクルについて見てみる。計量は

$$ds^2 = -\frac{1}{H^2}(dt + k_\psi d\psi)^2 + Hdxdx. \tag{20.208}$$

と与えられるから、ψ 方向のサイクルが CTC では無いためには $H^3 - k_\psi^2 \geq 0$ を満足する必要がある。$|y|$ が大きい弦の近傍では H^3 も k_ψ^2 も y^6 程度の大きさであるが、y^6 の項と y^5 の項は丁度相殺して、次の項が残る。

$$\begin{aligned} H^3 - k_\psi^2 &= \frac{y^4}{(4\pi)^4}\Big[(q_1N_1q_2N_2 + q_2N_2q_3N_3 + q_3N_3q_1N_1) - \frac{1}{4}(q_aN_a)^2 \\ &\quad -(q_1+q_2+q_3)(q_1q_2q_3)\Big] + \mathcal{O}(y^3). \end{aligned} \tag{20.209}$$

となる。CTC が存在しないためには、y^4 の係数が負にならないようにパラメータを選ばなければならない。

遠方での計量の振る舞いから弦が持つ運動量を求めよう。重力場が弱い場合の運動量密度 P^i と計量の 0-i 成分 $g_{0i} \sim -k_i$ との関係は、

$$P^i = -\frac{1}{2\kappa^2}\partial^2 k^i \tag{20.210}$$

と与えられる。従って、5 次元時空に ψ 方向に伸びた弦があり、ψ 方向への運動量線密度が p である場合 k_ψ は遠方で次のように振舞うはずである。

$$k^\psi = \frac{2\kappa^2 p}{4\pi r} \tag{20.211}$$

これを string 解 $k_\psi \sim (q_1+q_2+q_3)/(4\pi r)$ と比較すると、弦が持つ運動量密度が次のように決定される。

$$p = 2\pi(q_1+q_2+q_3) \tag{20.212}$$

(ここでは $2\kappa^2 = 1/(2\pi)$ という約束である。)

地平面の面積は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} A_{\rm hor} &= \lim_{y\to-\infty}\sqrt{H^3 - k_\psi^2}\frac{4\pi L}{y^2} \\ &= \frac{L}{4\pi}\sqrt{\begin{array}{r}(q_1N_1q_2N_2 + q_2N_2q_3N_3 + q_3N_3q_1N_1) - (1/4)(q_aN_a)^2 \\ -(q_1+q_2+q_3)(q_1q_2q_3)\end{array}} \end{aligned} \tag{20.213}$$

20.3.6 black rings

Black ring は 5 次元の重力理論の古典解であり、horizon の位相が $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ であるようなものをいう。ここで与えるのは 3-charge の black ring であり、Bena と Warner によって与えられた。[85]

リング座標

Brack ring 解を表すのには 4 次元空間をリング座標と呼ばれる座標を用いて表すのが便利である。ます、座標 (u,v,ψ,ϕ) を次のように導入する。

$$ds_4^2 = R^2(du^2 + u^2d\psi^2 + dv^2 + v^2d\phi^2). \tag{20.214}$$

ここで、(u,v) から次の関係を用いて x と y を定義する。

$$u = \frac{\sqrt{y^2-1}}{x-y}, \quad v = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-y}, \quad -1 \le x \le 1, \quad y \le -1. \tag{20.215}$$

$y=-\infty$ はもとの座標では $(u,v)=(1,0)$ に対応し、リングの形状をしている。ψ はリングに沿って一周する角であり、ϕ はリングに直交する面上の角度を表す。

u-v 平面に x あるいは y を定数とする曲線群をプロットすると、図 20.5 のようになる。こうして得られた 4 つの座標 (u,v,ψ,ϕ) はリング座標と呼ばれる。リング座標での計量は次のように与えられる。

$$ds^2 = \frac{R^2}{(x-y)^2}\left[\frac{dy^2}{y^2-1} + (y^2-1)d\psi^2 + \frac{dx^2}{1-x^2} + (1-x^2)d\phi^2\right] \tag{20.216}$$

原点からの距離は次のように表される。

$$u^2+v^2 = \frac{x+y}{x-y} \tag{20.217}$$

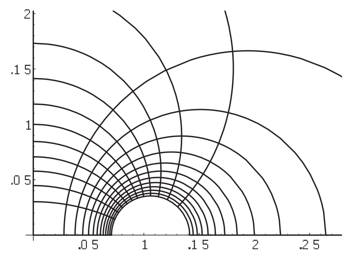

図 20.5: ring coordinates

漸近的振る舞い $|y|$ が非常に大きい場合には、

$$u \sim 1 - \frac{x}{(-y)}, \quad v \sim \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-y)} \tag{20.218}$$

となり、$R/(-y)$ がリングからの距離を、$\cos^{-1} x$ がリング周りの u-v 平面上での角度を表している。u-v 平面の原点付近では x、y は次のように与えられる。

$$x \sim 1 - 2v^2, \quad y \sim -1 - 2u^2. \tag{20.219}$$

u-v 平面の遠方の様子を見るには

$$y = -1 - \frac{2R^2}{r^2}\cos^2\theta, \quad x = -1 + \frac{2R^2}{r^2}\sin^2\theta. \tag{20.220}$$

とおくとよい。すると、r が大きいところで、

$$Ru \sim r\cos\theta, \quad Rv \sim r\sin\theta. \tag{20.221}$$

調和関数 この座標でのラプラシアンは

$$R^2\Delta = (x-y)^4\frac{\partial}{\partial y}\frac{y^2-1}{(x-y)^2}\frac{\partial}{\partial y} + (x-y)^4\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-x^2}{(x-y)^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(x-y)^2}{y^2-1}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2} + \frac{(x-y)^2}{1-x^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{20.222}$$

角度変数に依存せず、遠方で 0 になるようなラプラス方程式の解は

$$\Psi = \frac{y-x}{4\pi R}. \tag{20.223}$$

リングからの距離を $\epsilon \sim R/(-y)$ とすれば、リング近傍で次のように振舞う。

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi\epsilon} + \text{regular} \tag{20.224}$$

従って、$\Delta\Psi$ はリング上の密度 1 の δ 関数を与える。

反自己双対場 あとで必要になるので、リング上にのみ源を持つ反自己双対ゲージ場を与えよう。ここで、$\epsilon_{y\psi x\phi} > 0$ であるように向き付けをとることにする。ψ 方向と ϕ 方向への $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ 回転対称性を仮定し、ゲージ場を $A = A_\psi d\psi + A_\phi d\phi$ と置く。リング座標での計量 (20.216) を用いると、場の強さ $F = dA$ は次のように自己双対部分と反自己双対部分に分けることができる。

$$\begin{aligned} F^\pm &= \frac{1}{2}(\partial_y A_\psi \pm \partial_x A_\phi)(dy\wedge d\psi \pm dx\wedge d\phi) \\ &\quad + \frac{1}{2}(a\partial_x A_\psi \mp a^{-1}\partial_y A_\phi)(a^{-1}dx\wedge d\psi \mp a\,dy\wedge d\phi) \end{aligned} \tag{20.225}$$

ただし $a=(1-x^2)^{1/2}/(y^2-1)^{1/2}$ である。従って、場が反自己双対であるという条件 $F^+=0$ は次のように与えられる。

$$(1-x^2)\partial_x A_\psi-(y^2-1)\partial_y A_\phi=0,, \tag{20.226}$$

$$\partial_y A_\psi+\partial_x A_\phi=0 \tag{20.227}$$

このうち、二つ目の式 (20.227) は、次のように解く事ができる。

$$A_\psi=\partial_x f(x,y),\quad A_\phi=-\partial_y f(x,y). \tag{20.228}$$

ただし $f(x,y)$ は任意の関数である。これを一つ目の式に代入すれば、関数 f に対する微分方程式が得られる。

$$(1-x^2)\partial_x^2 f+(y^2-1)\partial_y^2 f=0. \tag{20.229}$$

この微分方程式は変数分離型であるから $f(x,y)=p(x)q(y)$ と置くことで簡単に解く事ができる。関数 $p(x)$ と $q(y)$ はどちらも同じ微分方程式を満足する。

$$(x^2-1)\partial_x^2 p(x)=\lambda p(x),\quad (y^2-1)\partial_y^2 q(y)=\lambda q(y). \tag{20.230}$$

を満足する。この微分方程式の解 $p_n(t)$ は非負整数 $n=0,1,2,\dots$ によってラベルされ、対応する固有値は $\lambda=n(n-1)$ である。p_n の微分はルジャンドル多項式 P 関数にほかならない。$p_n(t)$ は n 次の多項式で、始めの幾つかは次のように与えられる。

$$p_0=1,\quad p_1=x,\quad p_2=x^2-1,\quad p_3=x^3-x,\quad \cdots \tag{20.231}$$

固有値 $\lambda=n(n-1)$ が p_0 と p_1 で縮退していることに注意すれば、微分方程式 (20.229) の解は次のように与えられる。

$$f(x,y)=\sum_{m,n=0,1}a_{mn}p_m(x)p_n(y)+\sum_{n=2}^{\infty}a_n p_n(x)p_n(y) \tag{20.232}$$

これを用いると、ゲージ場が次のように決定される。

$$(A_\psi,A_\phi)=a_{10}(1,0)+a_{01}(0,1)+a_{11}(y,-x)+a_2(2x(y^2-1),-2y(x^2-1))+\cdots \tag{20.233}$$

a_{00} はゲージ場には影響しない。これらのうち、始めの 3 つは u-v 平面の軸上でのゲージ場の特異性を決める。すなわち、

$$\oint A_\psi d\psi\Big|_{y=-1}=2\pi(a_{10}-a_{11}),\quad \oint A_\phi d\phi\Big|_{x=+1}=2\pi(a_{01}-a_{11}),\quad \oint A_\phi d\phi\Big|_{x=-1}=2\pi(a_{01}+a_{11}). \tag{20.234}$$

これらが 0 でなければ、対応する軸の上に Dirac string があることを意味している。A_1 がコンパクト U(1) に属するゲージ場であればそのような特異性が許され、特に

$$\oint_{\mathbf{S}^2}F_2=\left[\oint A_\phi d\phi\right]_{x=1}^{x=-1}=4\pi a_{11}. \tag{20.235}$$

はリングが持っている磁荷（弦のチャージ）を与える。一方もし U(1) が非コンパクトであれば、このような Dirac string の存在は許されないから $a_{10}=a_{01}=a_{11}=0$ でなければならない。

black ring 解

3-charge black hole で現れた調和関数 H_1 をリング状のソースを持つものに置き換えることによって、リング状に分布する 3 つの chareg を表す古典解を構成することは簡単である。例えば、調和関数を

$$H_a = 1 + \frac{N_a}{8\pi^2 R^2}(x-y) \tag{20.236}$$

と取れば、半径 R のリング上に電荷 N_a が一様に分布している様子を表すことができる。このとき、リング近傍では、リングからの距離を ϵ としたときに $H_a \sim 1/\epsilon$ のように振舞うので、horizon の面積は 0 である。0 でない horizon 面積を持つ black ring 解を作るためには、非自明な M5-ブレーン電荷を導入する必要がある。

§20.3.5 で与えた手順に従って、string charge を持つ Black ring 解を与えよう。まず、B_1^a を次のように与える。

$$B_1^a = \frac{q_a}{4\pi}(yd\psi + xd\phi) \tag{20.237}$$

係数 q_a は、リングが持つ string charge である。場の強さ

$$\Theta_2^a = \frac{q_a}{4\pi}(dy\wedge d\psi + dx\wedge d\phi) \tag{20.238}$$

は self-dual である。Θ_2^a をリングを囲む $\mathbf{S}^2$ で積分すれば、string charge q_a を与える。この場の強さは 0 でない $\Theta_2\wedge\Theta_2$ を与えるので、H_a は調和関数ではなくなる。関数 H_a は次の式を解いて決める。

$$d\widehat{*}_4 dH_a = -\frac{C_{abc}q_bq_c}{(4\pi)^2}(dy\wedge d\psi\wedge dx\wedge d\phi) \tag{20.239}$$

あるいは、

$$d*d = -\frac{R^4}{(x-y)^4}dx\wedge dy\wedge d\psi\wedge d\phi\Delta \tag{20.240}$$

を用いれば、これは次の式を意味している。

$$R^2\Delta H_a = \frac{1}{(4\pi R)^2}C_{abc}q_bq_c(x-y)^4 \tag{20.241}$$

この解は簡単に求めることができて、

$$H_a = 1 + \frac{2N_a}{(4\pi R)^2}(x-y) + \frac{C_{abc}q_bq_c/2}{(4\pi R)^2}(y^2-x^2) \tag{20.242}$$

この調和関数は遠方では

$$H_a \sim 1 + \frac{N_a + (1/2)C_{abc}q_bq_c}{4\pi^2 r^2} + \cdots \tag{20.243}$$

となるので、実際の M2 charge Q_a は N_a とはずれており、フラックスからの寄与を表す q_a の二次の項を含んでいる。

$$Q_a = N_a + \frac{1}{2}C_{abc}q_bq_c. \tag{20.244}$$

最後に、$G_2 = dk_1$ を決定しよう。満足すべき式は

$$G_2^+ = -\frac{R}{2(4\pi R)^3}\left(A + 2B(x-y) + 3C(y^2-x^2)\right)(dy\wedge d\psi + dx\wedge d\phi) \tag{20.245}$$

ただし以下の変数を定義した。

$$\begin{aligned} A &= (4\pi R)^2(q_1+q_2+q_3), && (20.246)\\ B &= q_aN_a = q_aQ_a - 3q_1q_2q_3, && (20.247)\\ C &= q_1q_2q_3, && (20.248)\\ D &= N_1q_1N_2q_2 + N_2q_2N_3q_3 + N_3q_3N_1q_1 \\ &= Q_1q_1Q_2q_2 + Q_2q_2Q_3q_3 + Q_3q_3Q_1q_1 - 2(q_1q_2q_3)q_aQ_a + 3(q_1q_2q_3)^2 && (20.249) \end{aligned}$$

リング座標でのゲージ場の自己双対部分は (20.225) のように書けるから、$k = k_\psi d\psi + k_\phi d\phi$ と置けば成分 k_ψ、k_ϕ は次の式を満足しなければならない。

$$\partial_y k_\psi + \partial_x k_\phi = \frac{R}{(4\pi R)^3}[-A - 2B(x-y) - 3C(y^2-x^2)] \quad (20.250)$$

$$(1-x^2)\partial_x k_\psi - (y^2-1)\partial_y k_\phi = 0. \quad (20.251)$$

第 1 式の右辺は x に依存する項と y に依存する項が分離しているから、特殊解を与えるのは簡単である。たとえば、次のように取ることができる。

$$k_\psi = \frac{R}{(4\pi R)^2}\left[-A(1-\alpha)y + By^2 - Cy^3\right], \quad k_\phi = \frac{R}{(4\pi R)^2}\left[-A\alpha x - Bx^2 + Cx^3\right]. \quad (20.252)$$

α は定数部分を x と y の関数にどのように振り分けるかを表すパラメータである。一般解はこれに斉次微分方程式の解を加えたものである。斉次微分方程式の解はすでに (20.233) に与えられている。軸上で Dirac string がないと要請することで加えるべき (20.233) の係数のうち a_{10}、a_{01}、a_{11} が一意的に決定される。ひとまず $a_{n\geq 2} = 0$ と置いてこれらの項を加えた結果以下のようになる。

$$k_\psi = \frac{R}{(4\pi R)^2}\left[-A(y+1) + B(y^2-1) - C(y^3-y)\right], \quad k_\phi = \frac{R}{(4\pi R)^2}\left[-B(x^2-1) + C(x^3-x)\right]. \quad (20.253)$$

さらに closed timelike curve が無いということを要請することにより、$a_{n\geq 2}$ の値が一意的に決まる。ここでは $d\psi$ 方向に一周するサイクルに注目しよう。このサイクル上の線素は

$$ds^2 = \left(-\frac{1}{H^2}k_\psi^2 + HR^2\frac{y^2-1}{(x-y)^2}\right)d\psi^2 \quad (20.254)$$

と与えられるが、これが time-like にならないためには次の式が成り立つ必要がある。

$$\frac{1}{R^2}k_\psi^2 \leq H^3\frac{y^2-1}{(x-y)^2} \quad (20.255)$$

右辺は y^6 程度なので、左辺はこれより次数が大きくてはならない。従って加えることのできる斉次方程式の解は $a_{n\geq 4} = 0$ でなければならない。a_2 と a_3 を決めるために、さらに詳しく $y \to -\infty$ での振る舞いを見てみよう。右辺をを y が大きいところで展開すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{y^2-1}{(x-y)^2}H^3 &= \frac{1}{(4\pi R)^6}[C^2y^6 + (2C^2x - 2CB)y^5 \\ &\quad +(4D + AC - C^2 - 2CBx)y^4 + \mathcal{O}(y^3)] && (20.256) \end{aligned}$$

(20.253) に与えられた k_ψ を見てみると、y^6 の項については (20.255) の等号が成り立っていることが分かる。a_3 を加えると、x の値によっては条件が成り立たないので、$a_3 = 0$ でなければならない。最後に残された a_2 については

$$k_\psi = k_\psi^0 + \frac{R}{(4\pi R)^3}a_2(2x)(y^2-1) \quad (20.257)$$

と置いてみると、(ここで現れた a_2 は (20.233) 中のものとは規格化を変更した。)

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^2}k_\psi^2 &= \frac{1}{(4\pi R)^6}[-Cy^3+By^2+2a_2xy^2+Cy-Ay-B-A-2a_2x]^2\\ &= \frac{1}{(4\pi R)^6}[C^2y^6-2BCy^5-4Ca_2xy^5+\mathcal{O}(y^4)]^2 \qquad (20.258)\end{aligned}$$

となる。y^6 項、x を含まない y^5 項は (20.256) 中のものとちょうど一致している。y^5x 項を (20.256) 中のものと比較してみると、(20.255) が成り立つためには $a_2=-C/2$ でなければならないことがわかる。そうでないと、x が正か負のどちらかで条件が破れる。この結果、k_1 が次のように完全に決定される。

$$k_\psi = \frac{R}{(4\pi R)^3}[-A(y+1)+(y^2-1)(B-C(y+x))], \qquad (20.259)$$

$$k_\phi = \frac{R}{(4\pi R)^3}(1-x^2)(B-C(x+y)). \qquad (20.260)$$

black ring の角運動量は、k_1 の遠方での振る舞いを見ることで決めることができる。k_ψ および k_ϕ は遠方で $1/r^2$ 程度の大きさであり、次のように振舞う。

$$k_1 \sim \frac{1}{32\pi^3r^2}[(A+2B+4C)\cos^2\theta d\psi+(2B+4C)\sin^2\theta d\phi] \qquad (20.261)$$

従って、角運動量は半径リングの半径 R と電荷 q_a および Q_a の関数として次のように与えられる。

$$J_\psi = \frac{A+2B+4C}{4}, \quad J_\phi = \frac{2B+4C}{4}. \qquad (20.262)$$

次に、地平面の面積を計算しよう。そのために ring 近傍での (ψ,ϕ,x) 方向の計量を抜き出し、$y\to-\infty$ で残る項を見る。交差項 $-2k_\psi k_\phi d\psi d\phi$ も残る事に注意して残る項を抜き出すと、計量は次のようになる。

$$ds^2 = \left(R^2H\frac{y^2-1}{(x-y)^2}-\frac{k_\psi^2}{H^2}-R^2H\frac{1-x^2}{y^2}\right)d\psi^2+\frac{R^2}{y^2}H\left(\frac{dx^2}{1-x^2}+(1-x^2)(d\phi-d\psi)^2\right) \qquad (20.263)$$

この計量の第 1 項が $\mathbf{S}^1$ 部分、第 2 項が $\mathbf{S}^2$ 部分の計量である。したがって、地平面の面積は次の式によって与えられる。

$$A_{\rm hor} = \lim_{y\to-\infty}\frac{(4\pi R)^2}{2y^2}\sqrt{R^2H^3\frac{y^2-1}{(x-y)^2}-k_\psi^2-R^2H^3\frac{1-x^2}{y^2}} \qquad (20.264)$$

平方根に含まれるはじめ二つの項はどちらも y^6 程度の大きさであるが、それらは互いに相殺して、残るのは y^4 以下の項だけである。実際に計算してみると、次の結果を得ることができる。

$$\begin{aligned}A_{\rm hor} &= \frac{1}{8\pi}\sqrt{4D-B^2-AC}\\ &= \frac{1}{4\pi}\sqrt{Q_1Q_2Q_3-N_1N_2N_3-J_\phi^2-q_1q_2q_3(J_\psi-J_\phi)} \qquad (20.265)\end{aligned}$$

二つの角運動量成分 J_ϕ と J_ψ が等しく、M2 電荷が全てフラックス起源の場合、すなわち $N_a=0$ である場合には、BMPV ブラックホールの地平面面積に対する式 (20.192) と一致する。

最後に、リングの半径を大きくする極限においてこの式が以前に得られた string 解の式に一致することを確認しておこう。§20.3.5 で与えた string 解を再現するためには、M2 ブレーン電荷密度を

Soryushiron Kenkyu

一定に保ちながら $R\to\infty$ の極限を取る必要がある。そこで、電荷密度を n_a として $N_a=2\pi Rn_a$ と置き換えよう。正確には遠方で測った M2-ブレーン電荷は N_a ではなく (20.244) で与えられる Q_a であるが、R が大きい極限ではこの差は無くなり、$Q_a/(2\pi R)\sim n_a$ となる。従って n_a をそのまま遠方で測った M2-brane 密度として採用することができる。

角運動量 J_ψ は R が大きいときに $J_\psi\sim(2\pi R)^2(q_1+q_2+q_3)$ と与えられるが、これは丁度運動量密度が (20.212) で与えられる black string を円形にしたときに現れる角運動量を表している。

さらに地平面の面積の式 (20.265) においても同様の置き換えを行えば、以前に得られた string 解の地平面の面積を得る。

付 録 A　補遺

A.1　n 次元球面の表面積

$\mathbf{S}^n$ の表面積は次のようにして求めることが出来る。まず、$\mathbf{R}^{n+1}$ 上の直交座標を $x_1, \ldots, x_{n+1}$ として、次の積分を考える。

$$I = \int dx^{n+1} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2\right) \tag{A.1}$$

これは二つの方法で求めることができる。まず、被積分関数が $e^{-x_1^2} \cdot e^{-x_2^2} \cdots e^{-x_{n+1}^2}$ と因子化していることを用いて、

$$I = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x_i^2) dx\right]^{n+1} = \pi^{(n+1)/2} \tag{A.2}$$

また、極座標に移ると、次のように表すことができる。

$$I = \int_0^\infty \Omega_n r^n e^{-r^2} dr = \frac{\Omega_n}{2} \int_0^\infty t^{(n-1)/2} e^{-t} dt = \frac{\Omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right). \tag{A.3}$$

ただし単位 $\mathbf{S}^n$ の表面積を Ω_n とおいた。(A.2) と (A.3) を比べることによって、Ω_n は次のように求まる。

$$\Omega_n = \frac{2 \cdot \pi^{(n+1)/2}}{\Gamma[(n+1)/2]}. \tag{A.4}$$

いくつか小さな n について計算しておくと次のようになる。

$$\begin{gathered} \Omega_0 = 2, \quad \Omega_1 = 2\pi, \quad \Omega_2 = 4\pi, \quad \Omega_3 = 2\pi^2, \\ \Omega_4 = \frac{8}{3}\pi^2, \quad \Omega_5 = \pi^3, \quad \Omega_6 = \frac{16}{15}\pi^3, \quad \Omega_7 = \frac{1}{3}\pi^4, \quad \ldots \end{gathered} \tag{A.5}$$

A.2　正規座標

正規座標とは、もっともまっすぐな座標である。これは、原点 $x^\mu = 0$ を通る全ての測地線が、$x^\mu(t) = tu^\mu$ によって与えられるような座標系である。ただし、u^μ は測地線の向きを決める定数ベクトルであり、t は測地線上の長さに比例するパラメータである。この条件は、クリストッフェル記号に対する次の式と等価である。

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(tu^\mu) u^\mu u^\nu = 0. \tag{A.6}$$

原点の周りで $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ をテイラー展開することにより、この条件は「$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の任意階の微分の原点での値について下付き添字について完全対称な成分を含まない」といいかえることができる。これは 0 階微分については $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$ を意味し、1 階微分に対しては、次の条件を与える。

$$\partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} + \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\rho\mu} = 0. \tag{A.7}$$

これらの式を用いれば、クリストッフェル記号の微分が曲率テンソルを用いて次のように与えられる。

$$\partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{3}(R_{\rho\mu}{}^\lambda{}_\nu + R_{\rho\nu}{}^\lambda{}_\mu) \tag{A.8}$$

これは、計量の二階微分についての次の式と等価である。

$$\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu} = \frac{1}{3}(R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\mu\sigma}). \tag{A.9}$$

従って、正規座標の原点近傍では計量は次のように与えられる。

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(0) + \frac{1}{3}R_{\rho\mu\nu\sigma}(0)x^\rho x^\sigma + \mathcal{O}(x^3). \tag{A.10}$$

ゲージ場についても、類似のゲージを取ることができる。すなわち、原点から放射状に伸びる線 $x^\mu = tu^\mu$ に沿ったゲージ場を 0 にするようなゲージを取ることができる。このゲージを正規ゲージと呼ぼう。式で表わせば、

$$u^\mu A_\mu(tu^\mu) = 0. \tag{A.11}$$

となる。原点の周りでテイラー展開することにより、「ゲージ場の任意階の微分の原点での値は全ての添字に対して完全対称な成分を含まない」という条件が得られる。特に、微分が 0 階の場合には $A_\mu = 0$ を、1 階および 2 階の場合には

$$\partial_\mu A_\nu = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}, \tag{A.12}$$

$$\partial_\mu \partial_\nu A_\rho = \frac{1}{3}(D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\mu\rho}). \tag{A.13}$$

が得られる。ただし D_μ はゲージ場に対する共変微分である。従って、原点近傍でのゲージ場の値は

$$A_\mu = \frac{1}{2}F_{\alpha\mu}(0)x^\alpha + \frac{1}{3}D_\alpha F_{\beta\mu}(0)x^\alpha x^\beta + \mathcal{O}(x^3). \tag{A.14}$$

と与えられる。

A.3 エネルギー運動量テンソル

$$\frac{\mathcal{L}[F_n]}{2\pi} = -\frac{e}{2g^2 n!}F_{\alpha_1\cdots\alpha_n}F^{\alpha_1\cdots\alpha_n}. \tag{A.15}$$

ゲージ場 F_n のエネルギー運動量テンソルは次のように定義される。

$$\frac{\delta\mathcal{L}[F_n]}{\delta e^{\widehat{m}n}} = -eT_{\widehat{m}n}[F_n]. \tag{A.16}$$

この定義に従って $T_{mn}[F_n]$ は次のように与えられる。

$$T^{\mu\nu}[F_n] = \frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{(n-1)!}F^\mu{}_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}F^{\nu\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}} - \frac{1}{2\cdot n!}g^{\mu\nu}F_{\alpha_1\cdots\alpha_n}F^{\alpha_1\cdots\alpha_n})\gamma_\nu\right). \tag{A.17}$$

このエネルギー運動量テンソルは γ 行列を用いて次のように書くことができる。

$$\frac{1}{g^2}\langle F_n\gamma^\mu F_n\rangle_1 = -2(-)^{\pi(n+1)}T^{\mu\nu}[F_n]\gamma_\nu. \tag{A.18}$$

A.3.1 計量の漸近的振る舞いと角運動量

角運動量を持つ物体から遠く離れた場所での重力場の漸近的振る舞いを与えよう。重力場が弱く、時空が十分平坦であるとして $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ とおく。このときリッチテンソルは次のように与えられる。

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\mu h^\lambda_\nu + \partial_\lambda\partial_\nu h^\lambda_\mu - \partial_\lambda\partial^\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h^\lambda_\lambda) \tag{A.19}$$

さらに、一般座標変換の自由度を用いて次の式を満足するようにゲージを取るのが便利である。

$$\partial_\lambda h^\lambda_\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu h^\lambda_\lambda = 0. \tag{A.20}$$

このゲージにおいては、リッチテンソルは次のように単純な形で表される。

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\lambda\partial^\lambda h_{\mu\nu}. \tag{A.21}$$

アインシュタイン方程式 $R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R = -\kappa^2 T_{\mu\nu}$ に代入すれば、運動量密度 P^i と計量の非対角成分の間の次の関係式を得ることができる。

$$P^i = T^i_0 = \frac{1}{2\kappa^2}\partial^2 h^i_0. \tag{A.22}$$

従って、角運動量は次のように与えられる。

$$J_{ij} = \frac{1}{2\kappa^2}\int(x_i\partial^2 h_{0j} - x_k\partial^2 h_{0i})dV \tag{A.23}$$

J_{ij} が与えられたとき、この式を満足する h_{0i} の遠方での振舞いは次のように与えることができる。

$$h_{0i} = \frac{1}{2}(2\kappa^2)J_{ik}\partial_k G(x) \tag{A.24}$$

ただし、$G(x)$ は $\partial_i\partial_i G(x) = \delta(x)$ を満足するグリーン関数である。あるいは、$\omega = -h_{0i}dx^i$ として次のように書くこともできる。

$$ds^2 = -(dt+\omega)^2 + \cdots, \quad \omega = -\frac{(2\kappa^2)}{2}dx^i J_{ik}\partial_k G(x). \tag{A.25}$$

A.4 双対場について

ここで用いる完全反対称テンソルは、テンソル密度として定義する。すなわち、どのような座標系においてもその成分は ±1 である。このことに関連して、添え字がすべて上付きのものと、すべて下つきのものだけを用いる。時間方向が負計量であることによって、すべての添え字が上付きのものとすべての添え字が下つきのものでは符号が逆になることに注意しなければならない。

完全反対称テンソル密度 ϵ を用いて Hodge 双対を次のように定義する。

$$*F_n = \frac{1}{n!(D-n)!}\sqrt{-g}\epsilon_{a_1\cdots a_{D-n}b_1\cdots b_n}F^{b_1\cdots b_n}dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_{D-n}} \tag{A.26}$$

これを 2 回行うともとに戻るが、そのとき次のように符号が現れる。

$$**F_n = -(-)^{n(D-n)}F_n. \tag{A.27}$$

この関係式には、時間方向の負計量から現れる余分なマイナス符号が考慮されている。

双対場ともとの場の wedge 積は次のように内積を与える。

$$*F_n \wedge F_n = -\frac{1}{n!}\sqrt{-g}F_{b_1\cdots b_n}F^{b_1\cdots b_n}d^Dx \tag{A.28}$$

ただしここで、積分の間の次の関係式を用いた。

$$dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_D} = \epsilon^{a_1\cdots a_D}d^Dx \tag{A.29}$$

さらに、$F_n = dA_{n-1}$ であれば、部分積分を行うことで次の式を得る。

$$\int *F_n \wedge F_n = \int A_{n-1}\wedge d*F_n \tag{A.30}$$

これは A_{n-1} の運動方程式を作る際に用いることができる。

コンパクト化を行う場合、完全反対称テンソル密度の間の関係を次のように取ろう。

$$\epsilon^{(D)}_{123\cdots D} = \epsilon^{(D-1)}_{123\cdots D-1} \tag{A.31}$$

すなわち、D 次元の ϵ のコンパクト化する方向の添え字を最後に持ってきたものが $D-1$ 次元の ϵ と一致するように取ることにする。コンパクト化する方向は常に空間的であると仮定する。

ある反対商テンソル場 F_n はコンパクト化すると n 階と $n-1$ 階のテンソル場に分解される。これら二つの $D-1$ 次元のテンソル場を f_n と f_{n-1} とおき、F_n との関係を次の式によって設定しよう。

$$F_n = f_n + f_{n-1}dx^D \tag{A.32}$$

このとき F_n の D 次元での Hodge 双対と f_n および f_{n-1} の $D-1$ 次元での Hodge 双対の間には次の関係があることがこれまでの定義、公式を用いて示される。

$$*^D F_n = \frac{1}{\sqrt{g_{DD}}} *^{D-1} f_{n-1} + (-)^n\sqrt{g_{DD}} *^{D-1} f_n dx^D \tag{A.33}$$

A.4.1 スカラー多様体上の座標変換

実スカラー場 ϕ^m のラグランジアンは、微分の数が二つまでという条件をおくと、次のように書ける。

$$\mathcal{L}[\phi] = -\frac{1}{2}h_{mn}(\phi)\partial_\mu\phi^m\partial^\mu\phi^n - V(\phi) \tag{A.34}$$

ここでは時空の計量は平坦であるとしておく。スカラー場をある多様体 M の座標とみなそう。このとき M のことをスカラー多様体と呼ぶことにする。運動項の係数として現れるスカラー場の関数 h_{mn} は二つの添え字 m、n の入れ替えに対して対称であり、正定値であるとする。スカラー場の変数変換

$$\phi'^m = \phi'^m(\phi) \tag{A.35}$$

を行い、ラグランジアンが $\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}[\phi']$ という条件を満足する、つまり、変数変換のもとで不変であるとすると、運動項の係数は次のように M 上の二階のテンソルとして変換される。

$$h'_{pq} = \frac{\partial\phi^m}{\partial\phi'^p}\frac{\partial\phi^n}{\partial\phi'^q}h_{mn}. \tag{A.36}$$

これらのことより、h_{mn} はスカラー多様体上の計量であるとみなすことができる。計量 h_{mn} は一般には平坦ではないので、座標の取り方に依存しない形で書いておくのが便利である。

スカラー場の再定義 (A.35) のもとで次の変換則に従う ψ^m はスカラー多様体上のベクトルである。

$$\psi'^m = \frac{\partial \phi'^m}{\partial \phi^n}\psi^n. \tag{A.37}$$

例えばスカラー場の微分 $\partial_\mu \phi^m$ は、スカラー多様体上のベクトルとして振舞う。このことはスカラー場の微分の変換が

$$\partial_\mu \phi'^m = \frac{\partial \phi'^m}{\partial \phi^n}\partial_\mu \phi^n. \tag{A.38}$$

となることからわかる。

ベクトル ψ^m がもし ϕ^m の関数として M 上で定義されたベクトル場であれば、M の座標 ϕ^m による共変微分を

$$D_m \psi^n = \partial_m \psi^n + \Gamma^n_{mk}\psi^k \tag{A.39}$$

と書くことができる。ただし、Γ^k_{mn} はスカラー多様体上のクリストッフェル記号で次のように定義される。

$$\Gamma^k_{mn} = \frac{1}{2}h^{kp}(\partial_m h_{np} + \partial_n h_{mp} - \partial_p h_{mn}) \tag{A.40}$$

実際には、ψ^m は時空の座標 x^μ の関数であるから、(A.39) 中の $\partial_m \psi^n$ というのは定義できない。それでも式 (A.39) は ψ^m の x^μ による共変微分を微分の連鎖則を用いて定義する際に便利である。

$$D^{(\sigma)}_\mu \psi^n (= (\partial_\mu \phi^m) D_m \psi^n) = \partial_\mu \psi^n + (\partial_\mu \phi^m)\Gamma^n_{mk}\psi^k \tag{A.41}$$

共変微分の肩の σ は non-linear σ-model の σ であり、スカラー多様体上の接続に対する共変微分であることを表している。括弧でくくった中間的な表式は、ψ^m が ϕ^m を通して時空座標 x^μ に依存している場合を除いては実際には定義できないので、形式的な意味しか持たない。

スカラー多様体上の座標変換 (A.35) のもとで、この共変微分はベクトル場 ψ^n と同様に変換される。すなわち、

$$D^{(\sigma)}_\mu \psi'^m = \frac{\partial \phi'^m}{\partial \phi^n} D^{(\sigma)}_\mu \psi^n. \tag{A.42}$$

スカラー多様体上の計量 h_{mn} の共変微分は 0 になる。h_{mn} は時空座標 x^μ にスカラー場 ϕ^m を通して依存しているから連鎖則を用いて次のように示すことができる。

$$D^{(\sigma)}_\mu h_{mn} = (\partial_\mu \phi^k) D_k h_{mn} = 0. \tag{A.43}$$

スカラー多様体上の座標変換に対して不変な理論では、ベクトルの微分は自動的に共変微分 (A.41) の形になっている。たとえば (A.34) から得られる運動方程式は、

$$h_{mn} D^{(\sigma)}_\mu \partial^\mu \phi^n - \frac{\partial V}{\partial \phi^m} = 0. \tag{A.44}$$

となる。

スカラー多様体上の一般のテンソルの共変微分は次のように定義される。

$$D^{(\sigma)}_\mu = \partial_\mu + (\partial_\mu \phi^m)\widehat{\Omega}_m \tag{A.45}$$

ここで、$\widehat{\Omega}_m$ はスカラー多様体上のスピン接続であり、作用する場に応じて適当な表現のものを取る。例えばベクトル場であればクリストッフェル記号に置き換える。

共変微分の交換関係からは、スカラー多様体の曲率の、時空への pull back を得る。

$$[D^{(\sigma)}_\mu, D^{(\sigma)}_\nu] = (\partial_\mu \phi^m)(\partial_\nu \phi^n)\widehat{R}_{mn} \tag{A.46}$$

$\widehat{R}_{mn}$ はスカラー多様体の曲率テンソルであり、次のように定義される。

$$\widehat{R}_{mn} = \partial_m \widehat{\Omega}_n - \partial_n \widehat{\Omega}_m + [\widehat{\Omega}_m, \widehat{\Omega}_n] \tag{A.47}$$

ここでは背景時空は平坦であるとしたが、一般の時空の上では共変微分 (A.45) には時空の接続の寄与が加わり、次のようになる。

$$D_\mu^{(\omega,\sigma)} = D_\mu^{(\omega)} + (\partial_\mu \phi^m)\widehat{\Omega}_m = \partial_\mu + \omega_\mu + (\partial_\mu \phi^m)\widehat{\Omega}_m \tag{A.48}$$

この場合の交換関係には時空の曲率が現れる。

$$\begin{aligned} [D_\mu^{(\omega,\sigma)}, D_\nu^{(\omega,\sigma)}] &= [D_\mu^{(\omega)}, D_\nu^{(\omega)}] + (\partial_\mu \phi^m)(\partial_\nu \phi^n)\widehat{R}_{mn} \\ &= R_{\mu\nu} + (\partial_\mu \phi^m)(\partial_\nu \phi^n)\widehat{R}_{mn} \end{aligned} \tag{A.49}$$

A.4.2 スカラー場に作用する変換と共変性

スカラー場 ϕ^m と、モジュライ空間上のテンソル場 ψ に対して作用する無限小変換を考え、δ で表そう。

$$\phi \to \widetilde{\phi} = \phi + \delta\phi, \quad \psi \to \widetilde{\psi} = \psi + \delta\psi. \tag{A.50}$$

具体的には、δ は超対称変換や、ゲージ変換などであるが、ここでは特に指定しないことにする。ψ の変換 $\delta\psi$ が、スカラー多様体の上の座標変換でどのように振舞うかを考えてみよう。

まず、ψ がベクトルの場合について見てみよう。スカラー場の変数変換のもとで、ψ^m は (A.37) によって変換される。この式の両辺を δ によって変換すると、

$$\delta\psi'^m = \delta\left(\frac{\partial\phi'^m}{\partial\phi^n}\psi^n\right) = \frac{\partial\phi'^m}{\partial\phi^n}\delta\psi^n + \delta\phi^k \frac{\partial\phi'^m}{\partial\phi^k \partial\phi^n}\psi^n \tag{A.51}$$

もしこの式の右辺の第 2 項がなければ、この式は $\delta\psi^m$ が ψ^m 同様スカラー多様体の座標変換のもとでベクトルとして振舞うことを表しているが、実際には第二項の補正が存在している。このことは、ψ^m がスカラー多様体上の点 ϕ^m における接空間上で定義されているのに対し、$\widetilde{\psi}^m$ が $\widetilde{\phi}^m$ における接空間上で定義されているためでる。すなわち、$\delta\psi^m$ は異なる座標系で定義された値の差を表している。

$$\delta\psi^m = \widetilde{\psi}^m_{(\widetilde{\phi})} - \psi^m_{(\phi)} \tag{A.52}$$

右辺の添え字は、どの点の接空間で定義されているかを表す。従って、二つの点の間で ψ を平行移動したときに現れる寄与を別にしておけば、$\delta\psi^m$ から共変な部分を取り出すことができる。

$$\delta\psi^i = \delta^{\mathrm{cov}}\psi^i + \delta^{\mathrm{para}}\psi^i, \tag{A.53}$$

δ^{para} の部分は、スカラー場 ϕ^i が $\delta\phi^i$ だけずれたために引き起こされる ψ^i を定義する接束の平行移動による寄与を表す。具体的には次のように表される。

$$\delta^{\mathrm{para}}\psi^m = \psi^m_{(\widetilde{\phi})} - \psi^m_{(\phi)} = -\delta\phi^k \Gamma^m_{kl}\psi^l. \tag{A.54}$$

ここで、$\psi^m_{(\widetilde{\phi})}$ は $\psi^m_{(\phi)}$ を点 $\widetilde{\psi}$ までスカラー多様体上の接続に従って平行移動したものを表す。$\delta^{\mathrm{cov}}\psi^m$ は変換 $\delta\psi^m$ から上記の平行移動によって現れる寄与を除いた部分を表し、変換後の $\widetilde{\psi}$ から変換前の ψ を点 $\widetilde{\phi}$ まで平行移動したものを引いたものである。

$$\delta^{\mathrm{cov}}\psi^m = \widetilde{\psi}^m_{(\widetilde{\phi})} - \psi^m_{(\widetilde{\phi})} \tag{A.55}$$

このように定義された変分 $\delta^{\rm cov}\psi^m$ は、スカラー多様体上の座標変換で ψ^m 同様ベクトルとして振舞う。

ここで与えた δ と $\delta^{\rm cov}$ の関係は、すでに前に与えた共変微分の定義とよく似ている。すなわち、δ を $x^\mu \to x^\mu + \epsilon$ という時空の並進を表す変換であるとすれば、δ は微分 ∂_μ に相当し、$\delta^{\rm cov}$ は共変微分 $D_\mu^{(\sigma)}$ に相当する。

ラグランジアンが変換 δ でどのように変化するかを計算をする場合には、ϕ^m に対しても δ を $\delta^{\rm para}$ と $\delta^{\rm cov}$ に分けておくのが便利である。ラグランジアン中には ϕ^m はその時空座標による微分か、スカラー多様体上のテンソル場（例えば計量 h_{mn} や曲率 R_{mnpq} など）として現れる。時空座標による微分を含まないテンソル場として現れる場合には、その変換を次のように変形することができる。

$$\delta T[\phi] = \delta\phi^m \partial_m T[\phi] = \delta\phi^m D_m T[\phi] - \delta\phi^m \widehat{\Omega}_m T[\phi] \tag{A.56}$$

そこで、$\delta^{\rm cov}$ と $\delta^{\rm para}$ を次のように定義する。

$$\delta^{\rm cov} T[\phi] = \delta\phi^m D_m T[\phi], \quad \delta^{\rm para} T[\phi] = -\delta\phi^m \widehat{\Omega}_m T[\phi]. \tag{A.57}$$

さらに、スカラー場 ϕ^m の時空座標による微分 $\partial_\mu\phi^m$ を含む場合、

$$\delta(\partial_\mu\phi^m) = \partial_\mu\delta\phi^m = D_\mu\delta\phi^m - (\partial_\mu\phi^k)\Gamma^m_{kl}\delta\phi^l \tag{A.58}$$

これを次のように分解する。

$$\delta^{\rm cov}(\partial_\mu\phi^m) = D_\mu^{(\sigma)}\delta\phi^m, \quad \delta^{\rm para}(\partial_\mu\phi^m) = -\delta\phi^k\Gamma^m_{kl}(\partial_\mu\phi^l) \tag{A.59}$$

さらに、スカラー多様体上のテンソル ψ の共変微分 $D_\mu^{(\sigma)}\psi$ に対しては、次の式が成り立つ。

$$\delta(D_\mu^{(\sigma)}\psi) = D_\mu^{(\sigma)}\delta^{\rm cov}\psi + \delta\phi^m(\partial_\mu\phi^n)\widehat{R}_{mn}\psi - \delta\phi^m\widehat{\Omega}_m(D_\mu^{(\sigma)}\psi) \tag{A.60}$$

これは次のように分解することができる。

$$\delta^{\rm cov}(D_\mu^{(\sigma)}\psi) = D_\mu^{(\sigma)}\delta^{\rm cov}\psi + \delta\phi^m(\partial_\mu\phi^n)\widehat{R}_{mn}\psi, \quad \delta^{\rm para}(D_\mu^{(\sigma)}\psi) = -\delta\phi^m\widehat{\Omega}_m(D_\mu^{(\sigma)}\psi) \tag{A.61}$$

$\delta^{\rm cov}$ の定義式の第 2 項は、形式的に次のように表しておくと便利である。

$$\delta^{\rm cov} D_\mu^{(\sigma)} = \delta\phi^m(\partial_\mu\phi^n)\widehat{R}_{mn}. \tag{A.62}$$

以上の δ の $\delta^{\rm cov}$ と $\delta^{\rm para}$ への分解を用いれば、ラグランジアンの変分全体を $\delta^{\rm cov}\mathcal{L}$ と $\delta^{\rm para}\mathcal{L}$ とに分けることができる。ラグランジアンは必ずスカラー多様体上のスカラーとして振舞うから、これらのうち後者は必ず 0 になる。したがって、実際には $\delta^{\rm cov}$ のみを考えればよい。これにより、ラグランジアンの変分をスカラー多様体上の座標変換に対する共変性を保ちながら行うことができる。

このような、共変化された変換 $\delta^{\rm cov}$ の導入が実際の計算でどのように役立つか、具体例で見てみよう。ここでは δ として $\mathcal{N}=1$ 大域的超対称理論の超対称変換を考え、ϕ^m および ψ^m をカイラル多重項に含まれるスカラー場とフェルミオンであるとする。ラグランジアンを超場形式で次のようにとる。

$$\mathcal{L} = \int 64 d^4\theta K(\Phi^m, \Phi^{*m}) = K_{m\overline{n}}\partial_\mu\phi^m\partial^\mu\overline{\phi}^{\overline{n}} + \cdots \tag{A.63}$$

フェルミオンがスカラー多様体上のベクトル場として振舞うことは、変数変換 (A.35) を超場の関係式

$$\Phi'^m = \Phi'^m(\Phi) \tag{A.64}$$

Soryushiron Kenkyu

へと拡張すればよい。実際この式の両辺の θ^1 項を抜き出せば、フェルミオン ψ^m がベクトルの変換則を示すことがわかる。スカラー場 ϕ^m とフェルミオン場 ψ^m の超対称変換則はそれぞれ次のように与えられる。

$$\delta\phi^m = \frac{1}{2}\xi\psi^m, \quad \delta\psi^m = -\frac{i}{2}\sigma^\mu\overline{\xi}\partial_\mu\phi^m + \frac{1}{2}F^m\xi \tag{A.65}$$

さらに、補助場 F^m に対する運動方程式を用いて F^m を消去しよう。ラグランジアンの中で F^m を含む項は

$$\mathcal{L} = K_{m\overline{n}}F^m\overline{F}^{\overline{n}} - \frac{1}{2}K_{k\overline{m}\overline{n}}F^k(\overline{\psi}^{\overline{m}}\overline{\psi}^{\overline{n}}) - \frac{1}{2}K_{\overline{k}mn}\overline{F}^{\overline{k}}(\psi^m\psi^n) \tag{A.66}$$

運動方程式を解けば、F^m は次のように他の場を用いて表すことができる。

$$F^m = \frac{1}{2}K^{m\overline{n}}K_{\overline{n}pq}(\psi^p\psi^q) = \frac{1}{2}\Gamma^m_{pq}(\psi^p\psi^q) \tag{A.67}$$

従って、式 (A.65) のフェルミオン変換則の第 2 項は次のように $\delta^{\rm para}$ の一般形に一致する。

$$\frac{1}{2}F^m\xi = \frac{1}{4}\Gamma^m_{pq}(\psi^p\psi^q)\xi = -\frac{1}{2}\Gamma^m_{pq}(\xi\psi^p)\psi^q = -\delta\phi^p\Gamma^m_{pq}\psi^q \tag{A.68}$$

従って、第 1 項が $\delta^{\rm cov}$ に対応する。

$$\delta^{\rm cov}\psi^m = -\frac{i}{2}\sigma^\mu\overline{\xi}\partial_\mu\phi^m \tag{A.69}$$

ラグランジアンの超対称変換の具体例として、ここでは次の項を考えよう。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}R_{i\overline{j}k\overline{l}}(\psi^i\psi^k)(\overline{\psi}^{\overline{j}}\overline{\psi}^{\overline{l}}) \tag{A.70}$$

このラグランジアンはスカラー多様体上のスカラーであるから、上で説明したように超対称変換のうち $\delta^{\rm cov}$ の部分のみを考えればよい。このことを用いれば、$\delta\mathcal{L}$ が初めから共変な形で次のように得られる。

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{4}\delta\phi^m(D_mR_{i\overline{j}k\overline{l}})(\psi^i\psi^k)(\overline{\psi}^{\overline{j}}\overline{\psi}^{\overline{l}}) + \frac{1}{2}R_{i\overline{j}k\overline{l}}(\psi^i\delta^{\rm cov}\psi^k)(\overline{\psi}^{\overline{j}}\overline{\psi}^{\overline{l}}) + \frac{1}{2}R_{i\overline{j}k\overline{l}}(\psi^i\psi^k)(\overline{\psi}^{\overline{j}}\delta^{\rm cov}\overline{\psi}^{\overline{l}}) \tag{A.71}$$

A.5 特殊ホロノミー多様体

D 次元で零質量スカラー場を n 個含む理論の有効ラグランジアンについて考えよう。低エネルギーの極限では、高階微分を含む項はほとんど効かない。そこで二階微分の項までを許せば、もっとも一般的なラグランジアンは次のように与えられる。(背景時空は平坦であるとする。)

$$\mathcal{L} = \int d^Dx h_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j. \tag{A.72}$$

$h_{ij}(\phi)$ は $n\times n$ の対称行列で、スカラー場に依存してもよい。このようなラグランジアンで与えられる理論は非線形 σ 模型と呼ばれる。

非線形 σ 模型において、スカラー場はモジュライ空間と呼ばれる空間上の座標であるとみなされ、$h_{ij}(\phi)$ はその空間の計量であると解釈される。このような理論を扱う際には、モジュライ空間上の一般座標変換のもとでの共変性を尊重しながら計算を進めると都合のよいことが多い。たとえば、ラグランジアン (A.72) は一般座標変換のもとで共変な形に書かれている。実際座標変換 $\phi^i \to \phi'^m(\phi)$ を行った際に h_{ij} をモジュライ空間上のテンソルとして次のように変換しておけば、ラグランジアンは不変である。

$$h'_{mn} = \frac{\partial\phi^i}{\partial\phi'^m}\frac{\partial\phi^j}{\partial\phi'^n}h_{ij}. \tag{A.73}$$

Soryushiron Kenkyu

超対称性を持つ理論の場合、モジュライ空間の構造に対してしばしば条件が課される。そのためには、モジュライ空間上のホロノミーを考えるのがよい。次元が d のある多様体上の一点 P を定め、そこを始点、終点とする閉曲線 C にそってベクトルやテンソルを平行移動して点 P に戻ってくると、一般には $\mathrm{SO}(d)$ の元によって回転される。これにより、閉曲線 C から $\mathrm{SO}(d)$ の元への写像が定まる。点 P を始点、終点とする全ての閉曲線の集合の、この写像による像を H とすれば、H は $\mathrm{SO}(d)$ の部分群である。このとき多様体のホロノミーは H であるという。一般に、$\mathcal{M}$ 上のある一点 P で与えられたオブジェクト（ベクトル、テンソル、スピノルなど）が、共変的に一定という条件で $\mathcal{M}$ 全体に拡張できるとき、そのオブジェクトは点 P での H による局所回転のもとで不変でなければならない。

表 A.1: ホロノミーによる多様体の分類

holonomy		manifold
$\mathrm{SO}(d)$		general
$\mathrm{SU}(n)\times\mathrm{U}(1)$	$d=2n$	Kähler
$\mathrm{SU}(n)$	$d=2n$	Calabi-Yau
$\mathrm{Sp}(k)\times\mathrm{Sp}(1)$	$d=4k$	quarternionic
$\mathrm{Sp}(k)$	$d=4k$	hyper-Kähler

例として 4 次元の $\mathcal{N}=1$ の大域的超対称性を持つ理論を考えてみよう。カイラル多重項 (ϕ^i,ψ^i) が n 個あれば、そこに含まれるスカラー場は複素次元が n のモジュライ空間上の座標であるとみなすことができる。4 次元 $\mathcal{N}=1$ のモジュライ空間はケーラー多様体でなければならないことが知られている。ケーラー多様体はホロノミーが $\mathrm{U}(n)\subset\mathrm{SO}(2n)$ の部分群であり、複素構造 I は $\mathrm{U}(n)$ のもとで不変であるから、ある点で複素構造が与えられればそれを平行移動することによってモジュライ空間全体に拡張することができる。すなわち、モジュライ空間全体に正則、反正則の概念を自然に導入することができる。

A.6 't Hooft の η 記号

x^α を規格化直交座標であるとする。γ^5 が対角化される表示を用い、正の固有値に対応した二成分スピノルを ψ^a、負の固有値に対応しニ成分スピノルを $\psi^{\dot{a}}$ のように書くことにする。$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ を次のように定義する。

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{\mathrm{tr}}{4}(\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^5) \tag{A.74}$$

このように定義された $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ を用いると、次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\gamma_{\gamma\delta})^a{}_b=-(\gamma_{\alpha\beta})^a{}_b,\quad \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\gamma_{\gamma\delta})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}=(\gamma_{\alpha\beta})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}. \tag{A.75}$$

すなわち、$\gamma_{\alpha\beta}$ の左上ブロックは反自己双対、右下ブロックは自己双対である。（反）自己双対テンソルの独立成分は 3 つである。この 3 つの成分を取り出す不変テンソル $\eta^A_{\alpha\beta}$ を次のように定義することができる。

$$(\gamma_{\alpha\beta})^a{}_b=i\eta^A_{\alpha\beta}(\sigma^A)^a{}_b,\quad (\gamma_{\alpha\beta})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}=i\overline{\eta}^{\dot{A}}_{\alpha\beta}(\sigma^{\dot{A}})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}. \tag{A.76}$$

σ^A はパウリ行列である。この $\eta^A_{\alpha\beta}$ および $\overline{\eta}^{\dot{A}}_{\alpha\beta}$ のことを 't Hooft の η 記号と呼ぶ。(A.75) より、次の（反）自己双対性を満足する。

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta^A_{\gamma\delta} = -\eta^A_{\alpha\beta}, \quad \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\overline{\eta}^{\dot{A}}_{\gamma\delta} = \overline{\eta}^{\dot{A}}_{\alpha\beta}. \tag{A.77}$$

さらに次のような性質を満足する。

$$\eta^A_{\alpha\beta}\eta^B_{\alpha\beta} = 4\delta^{AB}, \quad \overline{\eta}^{\dot{A}}_{\alpha\beta}\overline{\eta}^{\dot{B}}_{\alpha\beta} = 4\delta^{\dot{A}\dot{B}}, \quad \eta^A_{\alpha\beta}\overline{\eta}^{\dot{B}}_{\alpha\beta} = 0. \tag{A.78}$$

$$\eta^A_{\alpha\beta}(\gamma_{\alpha\beta})^a{}_b = 4i(\sigma^A)^a{}_b, \quad \overline{\eta}^{\dot{A}}_{\alpha\beta}(\gamma_{\alpha\beta})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} = 4i(\sigma^{\dot{A}})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}. \tag{A.79}$$

$$\int \eta^A_2 \wedge \eta^B_2 = -2\delta^{AB}\int d^4x, \quad \int \overline{\eta}^A_2 \wedge \overline{\eta}^B_2 = 2\delta^{AB}\int d^4x. \tag{A.80}$$

A.7　コンパクト化で用いられる公式

まず、一般的にスピン接続が多脚場からどのように計算されるかをまとめておこう。次の関係式から出発する。

$$0 = D_M E^{\widehat{K}}_N = \partial_M E^{\widehat{K}}_N + \Omega_{M-\widehat{K}\widehat{L}} E^{\widehat{L}}_N - \Gamma^L_{MN} e^{\widehat{K}}_L \tag{A.81}$$

この式に $dX^M \wedge dX^N$ をかけると、Γ^K_{MN} の項が消えて、多脚場とスピン接続を含む次の式が得られる。

$$0 = DE^{\widehat{M}} = dE^{\widehat{M}} + \Omega_{\widehat{M}\widehat{N}} \wedge E^{\widehat{N}} \tag{A.82}$$

成分で書けば、

$$X^{\widehat{K}}_{MN} = -\Omega_{M-\widehat{K}N} + \Omega_{N-\widehat{K}M} \tag{A.83}$$

となり、これを Ω について解くことでスピン接続を多脚場を用いて表すことができる。ただし、X は次のように定義されるテンソルである。

$$X^{\widehat{M}} = dE^{\widehat{M}}. \tag{A.84}$$

曲率テンソルはスピン接続を用いて次のように与えられる。

$$R_{MN} = \partial_M \Omega_N + \Omega_M \Omega_N - [MN] \tag{A.85}$$

添え字を直交系のものに直すと、

$$R_{\widehat{M}\widehat{N}} = (\partial_{\widehat{M}}\Omega_{\widehat{N}} + \Omega_{\widehat{M}}\Omega_{\widehat{N}} - [\widehat{M}\widehat{N}]) + X^{\widehat{K}}_{\widehat{M}\widehat{N}}\Omega_{\widehat{K}} \tag{A.86}$$

A.7.1　アイソメトリーを持つ内部空間

座標 X^M で張られる空間の一部の次元を座標 y^m で張られる内部空間でコンパクト化しよう。コンパクト化されずに残った基底空間の座標を x^μ とする。

ここではまず内部空間の計量が内部空間の座標のみに依存する場合を考える。内部空間がアイソメトリーを持つ場合にはその対称性は基底空間のゲージ対称性として現れる。次の ansatz から出発する。

$$E^{\widehat{m}} = e^{\widehat{m}} + t^{\widehat{m}}_a A^a, \quad E^{\widehat{\mu}} = e^{\widehat{\mu}}. \tag{A.87}$$

ただし $e^{\widehat{m}}=e_n^{\widehat{m}}dy^n$ は内部空間の多脚場、$t_a^{\widehat{m}}$ は内部空間のアイソメトリーに対応したキリングベクトルであり、これらは座標 y^m にのみ依存するとする。$A^a=A_\mu^a dx^\mu$ は基底空間上のゲージ場、$e_\nu^{\widehat{\mu}}dx^\nu$ は基底空間の多脚場であり、x^μ のみに依存するものとする。同じことを成分で書けば

$$E_m^{\widehat{m}}=e_m^{\widehat{m}},\quad E_\mu^{\widehat{m}}=t_a^{\widehat{m}}A_\mu^a,\quad E_m^{\widehat{\mu}}=0,\quad E_\mu^{\widehat{\mu}}=e_\mu^{\widehat{\mu}}. \tag{A.88}$$

多脚場の逆行列 $E_{\widehat{M}}^M$ は次のようになる。

$$E_{\widehat{m}}^m=e_{\widehat{m}}^m,\quad E_{\widehat{\mu}}^m=-e_{\widehat{\mu}}^\mu t_a^m A_\mu^a,\quad E_m^{\widehat{\mu}}=0,\quad E_{\widehat{\mu}}^\mu=e_{\widehat{\mu}}^\mu. \tag{A.89}$$

上で述べた方法で、この空間上でのスピン接続を計算しよう。そのためにまずテンソル $X_{\widehat{M}\widehat{N}}^{\widehat{K}}$ を計算する。(A.87) を微分すると、外微分形式で書かれた次の式を得る。

$$X^{\widehat{i}}=dE^{\widehat{i}}=de^{\widehat{i}}+dt_a^{\widehat{i}}A^a+t_a^{\widehat{i}}dA^a,\quad X^{\widehat{\mu}}=de^{\widehat{\mu}}. \tag{A.90}$$

この式からテンソル X の成分が次のように読み取れる。

$$X_{jk}^{\widehat{i}}=x_{jk}^{\widehat{i}},\quad X_{j\mu}^{\widehat{i}}=\partial_j t_a^{\widehat{i}}A_\mu^a,\quad X_{\mu\nu}^{\widehat{i}}=t_a^{\widehat{i}}\partial_\mu A_\nu^a-[\mu\nu],\quad X_{\mu\nu}^{\widehat{\lambda}}=x_{\mu\nu}^{\widehat{\lambda}}. \tag{A.91}$$

これ以外の成分は 0 である。ただし、テンソル x は

$$x_{mn}^{\widehat{l}}=\partial_m e_n^{\widehat{k}}-[mn],\quad x_{\mu\nu}^{\widehat{\kappa}}=\partial_\mu e_\nu^{\widehat{\kappa}}-[\mu\nu]. \tag{A.92}$$

と定義される内部空間、基底空間に対するテンソルで、それぞれの空間のスピン接続と次の関係にある。

$$x_{\widehat{m}\widehat{n}}^{\widehat{k}}=-\omega_{\widehat{m}-\widehat{k}\widehat{n}}+\omega_{\widehat{n}-\widehat{k}\widehat{m}},\quad x_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}^{\widehat{\kappa}}=-\omega_{\widehat{\mu}-\widehat{\kappa}\widehat{\nu}}+\omega_{\widehat{\nu}-\widehat{\kappa}\widehat{\mu}}. \tag{A.93}$$

テンソル $X_{MN}^{\widehat{K}}$ の成分は、ゲージ対称性のもとでの振る舞いがあまりよくない。たとえば $X_{\mu\nu}^{\widehat{m}}$ を見てみると、この成分がゲージ場の強さを最終的に与えるであろうと予想されるが、非線形項が無いためにアイソメトリーが非アーベル群である場合にはそれ自身を場の強さと同定することはできない。しかし、テンソル X の添え字を直交座標系のものに書き換えると、ゲージ変換のもとでの振る舞いが良くなる。そこで次に行うべきことは、こうして得られたテンソル $X_{MN}^{\widehat{K}}$ の成分を用いて全ての添え字を直交座標系のものに直した $X_{\widehat{M}\widehat{N}}^{\widehat{K}}$ の成分を計算することである。まず、3 つの添え字が全て内部空間、あるいは全て基底空間のものである場合は、それぞれの空間上の x テンソルの添え字をそれぞれの空間の多脚場を用いて直交座標系に直したものと同じになることがわかる。

$$X_{\widehat{j}\widehat{k}}^{\widehat{i}}=e_{\widehat{k}}^m e_{\widehat{k}}^n x_{mn}^{\widehat{i}}=x_{\widehat{k}\widehat{l}}^{\widehat{i}},\quad X_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}^{\widehat{\lambda}}=e_{\widehat{\mu}}^\mu e_{\widehat{\nu}}^\nu x_{\mu\nu}^{\widehat{\lambda}}=x_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}^{\widehat{\lambda}}. \tag{A.94}$$

混合成分のうち 0 でないのは $X_{\widehat{j}\widehat{\mu}}^{\widehat{i}}$ と $X_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}^{\widehat{i}}$ の二つだけである。まず前者は

$$\begin{aligned}
X_{\widehat{j}\widehat{\mu}}^{\widehat{i}} &= E_{\widehat{j}}^j E_{\widehat{\mu}}^\mu X_{j\mu}^{\widehat{i}}+E_{\widehat{j}}^j E_{\widehat{\mu}}^k X_{jk}^{\widehat{i}}\\
&= A_{\widehat{\mu}}^a\partial_{\widehat{j}}t_a^{\widehat{i}}-A_{\widehat{\mu}}^a t_a^{\widehat{k}}x_{\widehat{j}\widehat{k}}^{\widehat{i}}\\
&= A_{\widehat{\mu}}^a(\partial_{\widehat{j}}t_a^{\widehat{i}}+\omega_{\widehat{j}\widehat{i}\widehat{k}}t_a^{\widehat{k}}-\omega_{\widehat{k}\widehat{i}\widehat{j}}t_a^{\widehat{k}})\\
&= A_{\widehat{a}}\mu^a(D_{\widehat{j}}t_a^{\widehat{i}}-t_a^{\widehat{k}}\omega_{\widehat{k}\widehat{i}\widehat{j}})\\
&= -A_{\widehat{\mu}}^a(t_{\widehat{i}\widehat{j}}^a+t_a^{\widehat{k}}\omega_{\widehat{k}\widehat{i}\widehat{j}})
\end{aligned} \tag{A.95}$$

Soryushiron Kenkyu

となる。もうひとつの成分は基底空間上のゲージ場に対する場の強さを表している。

$$\begin{aligned}
X^{\widehat{i}}_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} &= E^{\mu}_{\widehat{\mu}}E^{\nu}_{\widehat{\nu}}X^{\widehat{i}}_{\mu\nu} + E^{j}_{\widehat{\mu}}E^{\nu}_{\widehat{\nu}}X^{\widehat{i}}_{j\nu} + E^{\mu}_{\widehat{\mu}}E^{k}_{\widehat{\nu}}X^{\widehat{i}}_{\mu k} + E^{j}_{\widehat{\mu}}E^{k}_{\widehat{\nu}}X^{\widehat{i}}_{jk} \\
&= e^{\mu}_{\widehat{\mu}}e^{\nu}_{\widehat{\nu}}(t^{\widehat{i}}_{a}\partial_\mu A^a_\nu - [\mu\nu]) - A^a_{\widehat{\mu}}A^b_{\widehat{\nu}}(t^m_a\partial_m t^{\widehat{i}}_b - t^n_b\partial_n t^{\widehat{i}}_a - t^m_a t^n_b x^{\widehat{i}}_{mn}) \\
&= e^{\mu}_{\widehat{\mu}}e^{\nu}_{\widehat{\nu}}(t^{\widehat{i}}_{a}\partial_\mu A^a_\nu - [\mu\nu]) - A^a_{\widehat{\mu}}A^b_{\widehat{\nu}}(t^m_a D_m t^{\widehat{i}}_b - t^n_b D_n t^{\widehat{i}}_a) \\
&= e^{\mu}_{\widehat{\mu}}e^{\nu}_{\widehat{\nu}}(t^{\widehat{i}}_{a}\partial_\mu A^a_\nu - [\mu\nu]) - A^a_{\widehat{\mu}}A^b_{\widehat{\nu}}f_{ab}{}^{c}t^{\widehat{i}}_c \\
&= F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}t^{\widehat{i}}_a
\end{aligned} \tag{A.96}$$

こうして、テンソル $X^{\widehat{K}}_{\widehat{M}\widehat{N}}$ の成分が全てもとまったので、公式 (A.83) によりスピン接続を計算することができる。3 つの添え字が同種である場合には、つぎのように対応する空間上のスピン接続になる。

$$\Omega_{\widehat{k}\widehat{m}\widehat{n}} = \omega_{\widehat{k}\widehat{m}\widehat{n}}, \quad \Omega_{\widehat{\kappa}\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = \omega_{\widehat{\kappa}\widehat{\mu}\widehat{\nu}}. \tag{A.97}$$

混合成分についても比較的簡単な次の式を得る。

$$\Omega_{\widehat{k}-\widehat{m}\widehat{\nu}} = 0, \quad \Omega_{\widehat{k}-\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = -\frac{1}{2}t^{\widehat{k}}_a F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}, \quad \Omega_{\widehat{\kappa}-\widehat{m}\widehat{n}} = -A^a_{\widehat{\kappa}}(t^a_{\widehat{m}\widehat{n}} + t^{\widehat{k}}_a\omega_{\widehat{k}\widehat{m}\widehat{n}}), \quad \Omega_{\widehat{\kappa}-\widehat{\mu}\widehat{n}} = \frac{1}{2}t^{\widehat{n}}_a F^a_{\widehat{\kappa}\widehat{\mu}}. \tag{A.98}$$

このように式が簡単な形にまとまるのは、全ての添え字を直交座標系のものに取っているおかげである。

こうして得られた Ω や X を (A.86) に代入すれば曲率テンソルを得ることができる。この際微分記号の取り扱いに注意する必要がある。微分記号の添え字を直交座標系のものに直すときに E を用いているのか e を用いているのかを区別する必要がある。それぞれ $\partial^{(E)}$ および $\partial^{(e)}$ と書くことにすると、それらの間の関係は次のように与えられる。

$$\partial^{(E)}_{\widehat{m}} = E^M_{\widehat{m}}\partial_M = e^n_{\widehat{m}}\partial_n = \partial^{(e)}_{\widehat{m}}, \quad \partial^{(E)}_{\widehat{\mu}} = E^M_{\widehat{\mu}}\partial_M = e^\nu_{\widehat{\mu}}\partial_\nu - A^a_{\widehat{\mu}}t^m_a\partial_m = \partial^{(e)}_{\widehat{\mu}} - A^a_{\widehat{\mu}}t^{\widehat{m}}_a\partial^{(e)}_{\widehat{m}} \tag{A.99}$$

従って、$\partial_{\widehat{\mu}}$ については $\partial^{(E)}_{\widehat{\mu}}$ と $\partial^{(e)}_{\widehat{\mu}}$ の二つを区別する必要がある。

上で得られた Ω と X を用い、キリングベクトルの性質を用いれば、曲率テンソルを計算するのは簡単である。

$$R_{\widehat{m}\widehat{n}-\widehat{k}\widehat{l}} = R^{(y)}_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{k}\widehat{l}}, \tag{A.100}$$

$$R_{\widehat{m}\widehat{n}-\widehat{p}\widehat{\mu}} = 0, \tag{A.101}$$

$$R_{\widehat{m}\widehat{n}-\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = -t^a_{\widehat{m}\widehat{n}}F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} + \frac{1}{4}t^{\widehat{n}}_a F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\rho}}t^{\widehat{m}}_b F^b_{\widehat{\rho}\widehat{\nu}} - \frac{1}{4}t^{\widehat{m}}_a F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\rho}}t^{\widehat{n}}_b F^b_{\widehat{\rho}\widehat{\nu}}, \tag{A.102}$$

$$R_{\widehat{\mu}\widehat{m}-\widehat{\nu}\widehat{n}} = -\frac{1}{2}t^a_{\widehat{m}\widehat{n}}F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} + \frac{1}{4}t^{\widehat{m}}_a t^{\widehat{n}}_b F^a_{\widehat{\nu}\widehat{\kappa}}F^b_{\widehat{\mu}\widehat{\kappa}}, \tag{A.103}$$

$$R_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}-\widehat{\rho}\widehat{k}} = \frac{1}{2}t^{\widehat{k}}_b D_{\widehat{\mu}}F^b_{\widehat{\nu}\widehat{\rho}} - \frac{1}{2}t^{\widehat{k}}_b D_{\widehat{\nu}}F^b_{\widehat{\mu}\widehat{\rho}}, \tag{A.104}$$

$$R_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}-\widehat{\rho}\widehat{\sigma}} = R^{(x)}_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}-\widehat{\rho}\widehat{\sigma}} + t^{\widehat{k}}_a t^{\widehat{k}}_b\left(-\frac{1}{4}F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\rho}}F^b_{\widehat{\nu}\widehat{\sigma}} + \frac{1}{4}F^a_{\widehat{\nu}\widehat{\rho}}F^b_{\widehat{\mu}\widehat{\sigma}} - \frac{1}{2}F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F^b_{\widehat{\rho}\widehat{\sigma}}\right). \tag{A.105}$$

リッチテンソルとスカラー曲率は次のように与えられる。

$$R_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = R^{(x)}_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} - \frac{1}{2}t^{\widehat{k}}_a t^{\widehat{k}}_b F^a_{\widehat{\mu}\widehat{\sigma}}F^b_{\widehat{\nu}\widehat{\sigma}}, \quad R_{\widehat{\mu}\widehat{k}} = -\frac{1}{2}t^{\widehat{k}}_b D_{\widehat{\kappa}}F^b_{\widehat{\kappa}\widehat{\mu}}, \quad R_{\widehat{m}\widehat{n}} = R^{(y)}_{\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{1}{4}t^{\widehat{m}}_a t^{\widehat{n}}_b F^a_{\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}}F^b_{\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}}. \tag{A.106}$$

$$R = R^{(x)} + R^{(y)} - \frac{1}{4}t^{\widehat{k}}_a t^{\widehat{k}}_b F^a_{\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}}F^b_{\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}} \tag{A.107}$$

Soryushiron Kenkyu

A.7.2　変形のパラメータを持つ内部空間

次に、内部空間の形状が固定されておらず、パラメータ u^A に依存している場合を考えよう。このパラメータは基底空間上ではスカラー場として振舞う。すなわち座標 x^μ に依存するものとする。この様な場合、内部空間の計量はパラメータ u^A を通して x^μ に依存する。内部空間のテンソルの u^A による微分を扱うためには、次の複合ゲージ場を導入し、これらを用いて共変微分を定義しておくのが便利である。

$$V_{A\hat{i}\hat{j}} = \frac{1}{2}(e^k_{\hat{i}}\partial_A e^{\hat{j}}_k - e^k_{\hat{j}}\partial_A e^{\hat{i}}_k), \quad S_{A\hat{i}\hat{j}} = \frac{1}{2}(e^k_{\hat{i}}\partial_A e^{\hat{j}}_k + e^k_{\hat{j}}\partial_A e^{\hat{i}}_k) = \frac{1}{2}e^k_{\hat{i}}e^l_{\hat{j}}\partial_A g_{kl}. \tag{A.108}$$

これを用いて、内部空間のベクトル $v_{\widehat{m}} = e^{\widehat{m}}_m v^m = e^m_{\widehat{m}} v_m$ のモジュライパラメータ u^A による共変微分を次のように定義する。

$$D_A v_{\hat{i}} = \partial_A v_{\hat{i}} + V_{A\hat{i}\hat{j}} v_{\hat{j}}, \quad D_A v^m = \partial_A v^m + S^{mn}_A v_n, \quad D_A v_m = \partial_A v_m - S_{Amn} v^n. \tag{A.109}$$

V と S が丁度 ω と Γ に似た形で現れている。これらの共変微分は $D_A v_{\widehat{m}} = e^{\widehat{m}}_m D_A v^m = e^m_{\widehat{m}} D_A v_m$ を満足するという意味で共変である。このゲージ場の曲率は次のように与えられる。

$$R_{AB\widehat{m}\widehat{n}} = \partial_A V_{B\widehat{m}\widehat{n}} - \partial_B V_{A\widehat{m}\widehat{n}} + V_{A\widehat{m}\widehat{k}} V_{B\widehat{k}\widehat{n}} - V_{B\widehat{m}\widehat{k}} V_{A\widehat{k}\widehat{n}} \tag{A.110}$$

あるいは、S を用いて次のように表すこともできる。

$$R_{AB}{}^m{}_n = \partial_A S_B{}^m{}_n - \partial_B S_A{}^m{}_n + S_A{}^m{}_k S_B{}^k{}_n - S_B{}^m{}_k S_A{}^k{}_n. \tag{A.111}$$

内部空間のキリングベクトルに対しては、t^m_a が u^A に依存しないものと仮定する。共変ベクトル、および反変ベクトルのリー微分は t^m_a のみを用いて定義され、モジュライパラメータに依存する多脚場を含まないので、この仮定により u^A 微分とリー微分が可換になる。

$$\mathcal{L}\partial_A v^m = \partial_A \mathcal{L} v^m. \tag{A.112}$$

以上を踏まえて、§A.7.1 で行った計算を $e^{\widehat{m}}_m$ の u^A 依存性を考慮しながらやり直そう。(A.90) から成分を読み取るときに、多脚場やキリングベクトルの x^μ 微分が存在することを考慮しなければならない。その結果、(A.91) は次のように変更される。

$$X^{\hat{i}}_{jk} = x^{\hat{i}}_{jk}, \quad X^{\hat{i}}_{j\mu} = \partial_j t^{\hat{i}}_a A^a_\mu \underline{-\partial_\mu e^{\hat{i}}_j}, \quad X^{\hat{i}}_{\mu\nu} = t^{\hat{i}}_a \partial_\mu A^a_\nu \underline{+(\partial_\mu t^{\hat{i}}_a) A^a_\nu} - [\mu\nu], \quad X^{\hat{\lambda}}_{\mu\nu} = x^{\hat{\lambda}}_{\mu\nu}. \tag{A.113}$$

下線を引いた部分が増えたところである。直交座標系の添え字に直すと、次の混合成分にのみ新たな寄与が現れる。

$$X^{\hat{i}}_{\hat{j}\hat{\mu}} = -A^a_{\hat{\mu}}(t^a_{\hat{i}\hat{j}} + t^{\hat{k}}_a \omega_{\hat{k}\hat{i}\hat{j}}) \underline{+(\partial^{(e)}_{\hat{\mu}} u^A)(V_{A\hat{i}\hat{j}} - S_{A\hat{i}\hat{j}})} \tag{A.114}$$

この変更の結果、スピン接続も次の成分が変更される。

$$\Omega_{\hat{k}-\widehat{m}\hat{\nu}} = (\partial_{\hat{\nu}} u^A) S_{A\hat{k}\widehat{m}}, \quad \Omega_{\hat{\kappa}-\widehat{m}\widehat{n}} = -A^a_{\hat{\kappa}}(t^a_{\widehat{m}\widehat{n}} + t^{\hat{k}}_a \omega_{\hat{k}\widehat{m}\widehat{n}}) + (\partial_{\hat{\kappa}} u^A) V_{A\widehat{m}\widehat{n}}. \tag{A.115}$$

X および Ω の変更を考慮しながら曲率テンソルの計算をやり直せば、以下の結果を得るのにそ

Soryushiron Kenkyu

れほど困難は無い。

$$
\begin{aligned}
R_{\hat m\hat n-\hat k\hat l} &= R^{(y)}_{\hat m\hat n-\hat k\hat l} - (\partial_{\hat\rho}u^A)(\partial_{\hat\rho}u^B)(S_{A\hat m\hat k}S_{B\hat n\hat l} - [mn]), &\text{(A.116)}\\
R_{\hat m\hat n-\hat p\hat\mu} &= (\partial_{\hat\mu}u^A)D_{\hat m}S_{A\hat n\hat p} - (\partial_{\hat\mu}u^A)D_{\hat n}S_{A\hat m\hat p}\\
&\quad -\frac{1}{2}(\partial_{\hat\kappa}u^A)S_{A\hat m\hat p}t^a_{\hat n}F^a_{\hat\kappa\hat\mu} + \frac{1}{2}(\partial_{\hat\kappa}u^A)S_{A\hat n\hat p}t^a_{\hat m}F^a_{\hat\kappa\hat\mu}, &\text{(A.117)}\\
R_{\hat m\hat n\hat\mu\hat\nu} &= -t^a_{\hat m\hat n}F^a_{\hat\mu\hat\nu} + \frac{1}{4}t^{\hat n}_a F^a_{\hat\mu\hat\rho}t^{\hat m}_b F^b_{\hat\rho\hat\nu} - \frac{1}{4}t^{\hat m}_a F^a_{\hat\mu\hat\rho}t^{\hat n}_b F^b_{\hat\rho\hat\nu}\\
&\quad -(\partial_\mu u^A)(\partial_\nu u^B)(S_{A\hat n\hat p}S_{B\hat m\hat p} - S_{A\hat m\hat p}S_{B\hat n\hat p}), &\text{(A.118)}\\
R_{\hat\mu\hat m-\hat\nu\hat n} &= -\frac{1}{2}t^a_{\hat m\hat n}F^a_{\hat\mu\hat\nu} + \frac{1}{4}t^{\hat m}_a t^{\hat n}_b F^a_{\hat\nu\hat\kappa}F^b_{\hat\mu\hat\kappa}\\
&\quad -(D_{\hat\mu}\partial_{\hat\nu}u^A)S_{A\hat m\hat n} - (\partial_{\hat\mu}u^A)(\partial_{\hat\nu}u^B)(S_{A\hat k\hat m}S_{B\hat k\hat n} + D_A S_{B\hat m\hat n}), &\text{(A.119)}\\
R_{\hat\mu\hat\nu-\hat\rho\hat k} &= \frac{1}{2}t^{\hat k}_b D_{\hat\mu}F^b_{\hat\nu\hat\rho} + \frac{1}{2}(\partial_{\hat\mu}u^A)S_{A\hat k\hat l}t^{\hat l}_a F^a_{\hat\nu\hat\rho} - [\hat\mu\hat\nu] - t^{\hat p}_a F^a_{\hat\mu\hat\nu}(\partial_{\hat\rho}u^A)S_{A\hat p\hat k}\\
R_{\hat\mu\hat\nu-\hat\rho\hat\sigma} &= R^{(x)}_{\hat\mu\hat\nu-\hat\rho\hat\sigma} + t^{\hat k}_a t^{\hat k}_b\left(-\frac{1}{4}F^a_{\hat\mu\hat\rho}F^b_{\hat\nu\hat\sigma} + \frac{1}{4}F^a_{\hat\nu\hat\rho}F^b_{\hat\mu\hat\sigma} - \frac{1}{2}F^a_{\hat\mu\hat\nu}F^b_{\hat\rho\hat\sigma}\right). &\text{(A.120)}
\end{aligned}
$$

以上の結果から、リッチテンソルは次のように得られる。

$$
\begin{aligned}
R_{\hat m\hat n} &= R^{(y)}_{\hat m\hat n} + \frac{1}{4}t^{\hat m}_a t^{\hat n}_b F^a_{\hat\mu\hat\kappa}F^b_{\hat\mu\hat\kappa}\\
&\quad -(D_{\hat\mu}\partial_{\hat\mu}u^A)S_{A\hat m\hat n} - (\partial_{\hat\kappa}u^A)(\partial_{\hat\kappa}u^B)(S_{A\hat m\hat n}S_{B\hat k\hat k} + D_A S_{B\hat m\hat n}), &\text{(A.121)}\\
R_{\hat\mu\hat\nu} &= R^{(x)}_{\hat\mu\hat\nu} - \frac{1}{2}t^{\hat k}_a t^{\hat k}_b F^a_{\hat\mu\hat\sigma}F^b_{\hat\nu\hat\sigma}\\
&\quad -(D_{\hat\mu}\partial_{\hat\nu}u^A)S_{A\hat m\hat m} - (\partial_{\hat\mu}u^A)(\partial_{\hat\nu}u^B)(S_{A\hat k\hat m}S_{B\hat k\hat m} + D_A S_{B\hat m\hat m}), &\text{(A.122)}\\
R_{\hat m\hat\mu} &= \frac{1}{2}t^{\hat m}_b D_{\hat\rho}F^b_{\hat\nu\hat\rho}\\
&\quad +(\partial_{\hat\mu}u^A)(D_{\hat p}S_{A\hat m\hat p} - D_{\hat m}S_{A\hat p\hat p}) - (\partial_{\hat\kappa}u^A)F^a_{\hat\kappa\hat\mu}(S_{A\hat m\hat p}t^a_{\hat p} + \frac{1}{2}S_{A\hat p\hat p}t^a_{\hat m}). &\text{(A.123)}
\end{aligned}
$$

スカラー曲率は次のように与えられる。

$$
R = R^{(x)} + R^{(y)} - \frac{1}{4}t^{\hat k}_a t^{\hat k}_b F^a_{\hat\mu\hat\nu}F^b_{\hat\mu\hat\nu} + R_u. \tag{A.124}
$$

ただし R_u はモジュライパラメータの微分を含む部分で、次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
R_u &= -2D_{\hat\mu}((\partial_{\hat\mu}u^A)S_{A\hat m\hat m}) - (\partial_{\hat\kappa}u^A)(\partial_{\hat\kappa}u^B)(S_{A\hat m\hat m}S_{B\hat n\hat n} + S_{A\hat m\hat n}S_{B\hat m\hat n})\\
&= -D^\mu(g^{mn}(\partial_\mu g_{mn})) - \frac{1}{4}g^{mn}(\partial_\mu g_{mn})g^{kl}(\partial^\mu g_{kl}) + \frac{1}{4}(\partial_\mu g^{mn})(\partial^\mu g_{mn}). &\text{(A.125)}
\end{aligned}
$$

A.7.3 トーラスコンパクト化

トーラス $\mathbf{T}^n$ 上の座標を $0 \le y^m < 1$ とし、計量を g_{mn} とする。トーラス上のキリングベクトルは座標 y^m の座標軸と一対一に対応しており $t^m_a = \delta^m_a$ と取ることができる。ゲージ群は $\mathrm{U}(1)^n$ であり、その添え字 a と座標 y^m の添え字を同一視することができる。

多脚場を次のように置こう。

$$
E_M{}^{\hat N} = \begin{pmatrix} e_\mu{}^{\hat\nu} & A^m_\mu e_m{}^{\hat n} \\ 0 & e_m{}^{\hat n} \end{pmatrix}, \quad E_{\hat M}{}^N = \begin{pmatrix} e_{\hat\mu}{}^\nu & -e_{\hat\mu}{}^\nu A^n_\nu \\ 0 & e_{\hat m}{}^n \end{pmatrix}. \tag{A.126}
$$

計量は次のようになる。

$$ds^2 = g_{mn}(dy^m + A^m_\mu dx^\mu)(dy^n + A^n_\nu dx^\nu) + g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{A.127}$$

この多脚場からスピン接続を計算すると、その成分は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\Omega_{\widehat{\lambda}-\widehat{\mu}\widehat{\nu}} &= \omega_{\widehat{\lambda}-\widehat{\mu}\widehat{\nu}}, & \text{(A.128)}\\
\Omega_{\widehat{\lambda}-\widehat{\mu}\widehat{n}} &= \frac{1}{2}e_{\widehat{n}k}F^k_{\widehat{\lambda}\widehat{\mu}}, & \text{(A.129)}\\
\Omega_{\widehat{l}-\widehat{\mu}\widehat{\nu}} &= -\frac{1}{2}e_{\widehat{l}k}F^k_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}, & \text{(A.130)}\\
\Omega_{\widehat{\lambda}-\widehat{m}\widehat{n}} &= \frac{1}{2}(e^a_{\widehat{m}}\partial_{\widehat{\lambda}}e_{\widehat{n}a} - e^a_{\widehat{n}}\partial_{\widehat{\lambda}}e_{\widehat{m}a}), & \text{(A.131)}\\
\Omega_{\widehat{l}-\widehat{\mu}\widehat{n}} &= -\frac{1}{2}(e^a_{\widehat{l}}\partial_{\widehat{\mu}}e_{\widehat{n}a} + e^a_{\widehat{n}}\partial_{\widehat{\mu}}e_{\widehat{l}a}). & \text{(A.132)}
\end{aligned}$$

ただし場の強さは $F^m_{\mu\nu} = \partial_\mu A^m_\nu - \partial_\nu A^m_\mu$ と定義される。

高次元側で次の作用によって与えられる理論を考え、これをトーラスによってコンパクト化することを考えよう。

$$\frac{S}{2\pi} = \int dX \frac{\sqrt{g}}{e^{2\phi}}(R + 4\partial_M\phi\partial^N\phi) \tag{A.133}$$

公式 (A.124) と (A.125) を用い、新たなディラトン場 ϕ' を

$$\frac{1}{e^{2\phi'}} = \frac{\sqrt{g^{(y)}}}{e^{2\phi}}, \quad \phi' = \phi - \frac{1}{4}\log g^{(y)} \tag{A.134}$$

と定義すれば、上記の作用は次のように書き換えることができる。

$$S = \int dx \frac{\sqrt{g^{(x)}}}{e^{2\phi'}}\left(R^{(x)} - \frac{1}{4}g_{mn}F^m_{\mu\nu}F^{n\mu\nu} + 4\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi' + \frac{1}{4}\partial_\mu g_{mn}\partial^\mu g^{mn}\right) \tag{A.135}$$

もともとディラトン場を含まない理論を考える場合には、$\phi = 0$ とおけばよい。この場合、ϕ' に対しては次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{e^{2\phi'}} = \sqrt{g^{(y)}}, \quad \partial_\mu\phi' = -\frac{1}{4}(g^{(y)})^{-1}\partial_\mu g^{(y)}. \tag{A.136}$$

従って、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\frac{S}{2\pi} &= \int dX \frac{\sqrt{g}}{e^{2\phi}}R \\
&= \int dx\sqrt{g^{(x)}g^{(y)}}\left(R^{(x)} - \frac{1}{4}g_{mn}F^m_{\mu\nu}F^{n\mu\nu} - \frac{1}{4}\partial_\mu g^{(y)}\partial^\mu(g^{(y)})^{-1} + \frac{1}{4}\partial_\mu g_{mn}\partial^\mu g^{mn}\right)
\end{aligned} \tag{A.137}$$

A.7.4 $\mathbf{S}^n$ コンパクト化

平坦でない内部空間によるコンパクト化の例として n 次元球面 $\mathbf{S}^n$ によるコンパクト化を考えよう。ここでは $\mathbf{S}^n$ の回転を表す $\mathrm{SO}(n+1)$ 対称性のもとで不変なモードのみを残す truncation を行おう。この仮定を満足する計量は次のように書くことができる。

$$ds^2 = g^{(x)}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + e^{2\rho(x)}h_{mn}(y)dy^m dy^n \tag{A.138}$$

この計量からスカラー曲率を計算すると次のように与えられる。

$$R = R^{(x)} + n(n-1)e^{-2\rho} - 2nD^\mu\partial_\mu\rho - (n^2+n)(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho) \tag{A.139}$$

ゲージ場 F_n については、SO$(n+1)$ 不変なモードは次のように表される。

$$F_n = \frac{Q}{\Omega_n}\omega_n + F_n^{(x)}, \tag{A.140}$$

ω_n は $\mathbf{S}^n$ 上の体積形式であり、Q は $\mathbf{S}^n$ を通り抜けるフラックスを表す定数である。$F_n^{(x)}$ は基底空間上の n-形式場である。

まずは超重力理論でしばしば現れる次の作用を考える。

$$S = \int dX \frac{\sqrt{-g}}{e^{2\phi}}\left(R + 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2n!}|F_n|^2\right) \tag{A.141}$$

この理論を $\mathbf{S}^n$ でコンパクト化してみよう。(A.138) と (A.140) を作用に代入し、公式を用いれば基底空間上の理論の作用が次のように得られる。

$$S = \Omega_n \int dx\sqrt{-g^{(x)}}\frac{1}{e^{2\phi'}}\left(R^{(x)} + 4(\partial_\mu\phi')(\partial^\mu\phi') - \frac{1}{2n!}|F_n^{(x)}|^2 - n(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho) - f(\rho)\right) \tag{A.142}$$

ただし、基底空間上でのディラトン場 ϕ' を次のように定義した。

$$\phi' = \phi - \frac{n}{2}\rho. \tag{A.143}$$

$f(\rho)$ はスカラー場 ρ の関数で、次のように与えられる。

$$f(\rho) = \frac{Q^2}{2\Omega_n^2}\frac{1}{e^{2n\rho}} - n(n-1)\frac{1}{e^{2\rho}} \tag{A.144}$$

スカラー場 ρ の運動方程式は

$$2nD_\mu\frac{\partial_\mu\rho}{e^{2\phi'}} - \frac{1}{e^{2\phi'}}\frac{df}{d\rho} = 0. \tag{A.145}$$

であり、$\rho = \rho_0$ が関数 $f(\rho)$ の極値で定数であれば、他の場に依らず運動方程式の解になる。これは次の条件を満足する。

$$e^{2(n-1)\rho_0} = \frac{1}{2(n-1)}\frac{Q^2}{\Omega_n^2} \tag{A.146}$$

これを再び $f(\rho)$ に代入すれば、その最小値は

$$f(\rho_0) = \frac{(n-1)^2}{e^{2\rho_0}} \tag{A.147}$$

もう一つの例として、ディラトン場 ϕ が存在しない場合を考えよう。すなわち、次の作用から出発する。

$$S = \int dX \frac{\sqrt{-g}}{e^{2\phi}}\left(R - \frac{1}{2n!}|F_n|^2\right) \tag{A.148}$$

このコンパクト化もさっきと同様に行うことができる。その結果得られる作用は先ほどの結果で $\phi = 0$ と置いたものである。これは $\phi' = -(n/2)\rho$ を意味しており、次の作用を得る。

$$S = \Omega_n \int dx\sqrt{-g^{(x)}}e^{n\rho}\left(R^{(x)} - \frac{1}{2n!}|F_n|^2 + (n^2-n)(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho) - f(\rho)\right) \tag{A.149}$$

Soryushiron Kenkyu

この作用で、$\rho = \mathrm{const}$ という解が存在するかを考えてみよう。先ほどそのような解が存在したのは作用中の R 項や $|F_n|^2$ 項の係数に ρ が含まれておらず、そのような場と結合していなかったからである。今度も R 項の係数はワイル変換によって ρ 依存性をなくすことが出来るが、それと同時に $|F_n|$ 項の係数の ρ 依存性をなくすことは出来ない。ここでは単に $F_n^{(x)} = 0$ を仮定することにしよう。これは運動方程式と矛盾しない。次のワイル変換を行えばアインシュタイン計量に移ることが出来る。

$$g_{\mu\nu}^{(x)} = e^{-2n/(d-2)}\tilde{g}_{\mu\nu} \tag{A.150}$$

このワイル変換ののち、作用中のポテンシャルは次のように与えられる。

$$V(\rho) = e^{-2n\rho/(d-2)}f(\rho). \tag{A.151}$$

$\mathbf{S}^n$ の半径 e^ρ は、このポテンシャルが最小になる点として次のように決定される。

$$e^{2(n-1)\rho_0} = \frac{d-1}{(n+d-2)(n-1)}\frac{Q^2}{2\Omega_n^2} \tag{A.152}$$

そこで関数 $f(\rho)$ は、

$$f(\rho_0) = -\frac{d-2}{d-1}\frac{(n-1)^2}{e^{2\rho_0}} \tag{A.153}$$

従って、コンパクト化の結果得られる作用は

$$S = \Omega_n e^{n\rho}\int dx\sqrt{-g^{(x)}}\left(R^{(x)} - f(\rho_0)\right) \tag{A.154}$$

A.8 ワイル変換についての公式

D 次元時空において $g'_{\mu\nu} = e^{2\phi}g_{\mu\nu}$ というワイル変換を考えよう。この変換のもとでのクリストッフェル記号の変化は次のように与えられる。

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + H^{\lambda}_{\mu\nu}. \tag{A.155}$$

ただし $H^{\lambda}_{\mu\nu}$ は次のように定義されるテンソルである。

$$H^{\lambda}_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu}\partial_\nu\phi + \delta^{\lambda}_{\nu}\partial_\mu\phi - g_{\mu\nu}\partial^\lambda\phi. \tag{A.156}$$

このことから曲率テンソルが次のように変換されることが簡単に示される。

$$R'_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta} = R_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta} + \nabla_{[\mu}H^{\alpha}_{\nu]\beta} + H^{\alpha}_{[\mu\gamma}H^{\gamma}_{\nu]\beta}. \tag{A.157}$$

さらに、リッチテンソル、スカラー曲率に対しての公式は次のように与えられる。

$$R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (D-2)\nabla_\mu\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\nabla^2\phi + (D-2)(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi). \tag{A.158}$$

$$R' = e^{-2\phi}\left[R - 2(D-1)\nabla^2\phi - (D-1)(D-2)(\partial\phi)^2\right]. \tag{A.159}$$

この公式を用いて、アインシュタイン作用が次のように変換されることが示される。

$$\begin{aligned}&\int d^Dx\sqrt{-g'}e^{\alpha}R' \\ &= \int d^Dx\sqrt{-g}e^{(D-2)\phi+\alpha}\left[R + 2(D-1)(\partial\phi)(\partial\alpha) + (D-1)(D-2)(\partial\phi)^2\right].\end{aligned} \tag{A.160}$$

Soryushiron Kenkyu

局所ローレンツ座標が関係する公式を与えよう。次のワイル変換を考える。

$$e_{\mu\widehat{a}} \to e^{\phi} e_{\mu\widehat{a}}. \tag{A.161}$$

このとき、スピン接続は次のように変換される。

$$\omega_{\mu-\widehat{a}\widehat{b}} \to \omega_{\mu-\widehat{a}\widehat{b}} + e_{\mu\widehat{a}}\partial_{\widehat{b}}\phi - e_{\mu\widehat{b}}\partial_{\widehat{a}}\phi \tag{A.162}$$

これは、（ワイル変換で不変な）スピノル ψ の共変微分が次のように変化することを意味している。

$$D_\mu\psi \to D_\mu\psi + \frac{1}{2}\gamma_\mu{}^\nu(\partial_\nu\phi)\psi. \tag{A.163}$$

また、（ワイル変換で不変な）スピノルベクトル $\psi_{\widehat{m}}$ の共変微分は

$$D_\mu\psi_{\widehat{n}} \to D_\mu\psi_{\widehat{n}} + \frac{1}{2}\gamma_\mu{}^\nu(\partial_\nu\phi)\psi_{\widehat{n}} + e_{\mu\widehat{n}}(\partial^\nu\phi)\psi_\nu - (\partial_{\widehat{n}}\phi)\psi_\mu. \tag{A.164}$$

A.9 運動量があるときの計量についての公式

次の計量を考える。ここでは、添え字の上げ下げの際に符号がどうなるかを考える煩わしさを避けるためにまずは Euclidian で考える。

$$ds^2 = a(x)^2(dt + v_m dx^m)^2 + g_{mn}dx^m dx^n \tag{A.165}$$

この計量に対する spin connection は $\mathbf{S}^1$ コンパクト化の公式から次のように与えられる。

$$\Omega_{\widehat{l}-\widehat{m}\widehat{n}} = \omega^{(g)}_{\widehat{l}-\widehat{m}\widehat{n}}, \quad \Omega_{\widehat{l}-\widehat{m}\widehat{t}} = \frac{1}{2}av^{(g)}_{\widehat{l}\widehat{m}}, \quad \Omega_{\widehat{t}-\widehat{m}\widehat{n}} = -\frac{1}{2}av^{(g)}_{\widehat{m}\widehat{n}}, \quad \Omega_{\widehat{t}-\widehat{m}\widehat{t}} = -\frac{\partial^{(g)}_{\widehat{m}}a}{a}. \tag{A.166}$$

ただし、$v^{(g)}_{\widehat{m}\widehat{n}} = (e^{\widehat{g}})^m_{\widehat{m}}(e^{\widehat{g}})^n_{\widehat{n}}v_{mn}$ であり、v_{mn} は v_m に対応する場の強さ $\partial_m v_n - \partial_n v_m$ である。また、$\partial^{(g)}_{\widehat{m}} = (e^{(g)})^m_{\widehat{m}}\partial_m$ である。さらに、Base space の計量に対して次のワイル変換を行う。

$$g_{mn} = b(x)^2 h_{mn} \tag{A.167}$$

とすると、g_{mn} に対するスピン接続は h_{mn} に対するスピン接続を用いて次のように表される。

$$\omega^{(g)}_{l-\widehat{m}\widehat{n}} = \omega^{(h)}_{l-\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{e^{(h)}_{l\widehat{m}}\partial^{(h)}_{\widehat{n}}b - e^{(h)}_{l\widehat{n}}\partial^{(h)}_{\widehat{m}}b}{b} \tag{A.168}$$

ただし $\partial_{\widehat{m}} = (e^{(h)})^m_{\widehat{m}}\partial_m$ である。これらを組み合わせることにより、計量

$$ds^2 = a(x)^2(dt + k_m dx^m)^2 + b(r)^2 h_{mn}dx^m dx^n \tag{A.169}$$

に対するスピン接続が次のように与えられる。

$$\Omega_{\widehat{l}-\widehat{m}\widehat{n}} = \frac{1}{b}\omega^{(h)}_{\widehat{l}-\widehat{m}\widehat{n}} + \frac{\delta_{\widehat{l}\widehat{m}}\partial^{(h)}_{\widehat{n}}b - \delta_{\widehat{l}\widehat{n}}\partial^{(h)}_{\widehat{m}}b}{b^2}, \tag{A.170}$$

$$\Omega_{\widehat{l}-\widehat{m}\widehat{t}} = \frac{a}{2b^2}v^{(h)}_{\widehat{l}\widehat{m}}, \tag{A.171}$$

$$\Omega_{\widehat{t}-\widehat{m}\widehat{n}} = -\frac{a}{2b^2}v^{(h)}_{\widehat{m}\widehat{n}}, \tag{A.172}$$

$$\Omega_{\widehat{t}-\widehat{m}\widehat{t}} = -\frac{\partial^{(h)}_{\widehat{m}}a}{ab}. \tag{A.173}$$

Soryushiron Kenkyu

これらを用いて t に依存しないスピノルの共変微分を計算すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} D^{(G)}_{\hat{t}}\xi &= \partial^{(G)}_{\hat{t}}\xi + \frac{1}{4}\Omega_{\hat{t}-\hat{m}\hat{n}}\gamma^{\hat{m}\hat{n}}\xi + \frac{1}{2}\Omega_{\hat{t}-\hat{m}\hat{t}}\gamma^{\hat{m}\hat{t}}\xi \\ &= -\frac{a}{8b^2}v^{(h)}_{\hat{m}\hat{n}}\gamma^{\hat{m}\hat{n}}\xi - \frac{1}{2ab}(\partial^{(h)}_{\hat{m}}a)\gamma^{\hat{m}\hat{t}}\xi, \qquad (A.174) \\ D^{(G)}_{\hat{l}}\xi &= \partial^{(G)}_{\hat{l}}\xi + \frac{1}{4}\Omega_{\hat{l}-\hat{m}\hat{n}}\gamma^{\hat{m}\hat{n}}\xi + \frac{1}{2}\Omega_{\hat{l}-\hat{m}\hat{t}}\gamma^{\hat{m}\hat{t}}\xi \\ &= \frac{1}{b}D^{(h)}_{\hat{l}}\xi + \frac{1}{2b^2}(\partial^{(h)}_{\hat{n}}b)\gamma^{\hat{l}\hat{n}}\xi + \frac{a}{4b^2}v^{(h)}_{\hat{l}\hat{m}}\gamma^{\hat{m}\hat{t}}\xi \qquad (A.175) \end{aligned}$$

ここで、t 方向の計量の符号を反転してミンコフスキー空間に対する公式を与えよう。符号を変える場合には、次のことに注意する。a という関数は $e^{\hat{t}}_t$ を表している。また、v_2 は t 方向のコンパクト化で得られるゲージ場であるから本来 v^t_2 と書くべきもので、av という組み合わせは $e^{\hat{t}}_t v^t$ から来ている。従って、(A.171) と (A.172) の右辺は上付きの $\hat{t}$ 添え字を持っている。一方 (A.173) の右辺は $a^{-1}\partial a = e^t_{\hat{t}}\partial e^{\hat{t}}_t$ と書けるので、上付きの $\hat{t}$ と下付の $\hat{t}$ を一つずつ持っている。このことに注意して、Minkowski 空間

$$ds^2 = -a(x)^2(dt + k_m dx^m)^2 + b(r)^2 h_{mn}dx^m dx^n \qquad (A.176)$$

の上での共変微分が次のように書ける。

$$\begin{aligned} D^{\hat{t}}_{(G)}\xi &= -\frac{a}{8b^2}v^{(h)}_{\hat{m}\hat{n}}\gamma^{\hat{m}\hat{n}}\xi - \frac{1}{2ab}(\partial^{(h)}_{\hat{m}}a)\gamma^{\hat{m}\hat{t}}\xi, \qquad (A.177) \\ D^{(G)}_{\hat{l}}\xi &= \frac{1}{b}D^{(h)}_{\hat{l}}\xi + \frac{1}{2b^2}(\partial^{(h)}_{\hat{n}}b)\gamma^{\hat{l}\hat{n}}\xi + \frac{a}{4b^2}v^{(h)}_{\hat{l}\hat{m}}\gamma_{\hat{m}\hat{t}}\xi \qquad (A.178) \end{aligned}$$

A.10 群多様体上の計量と接続

A.10.1 G

群多様体 G 上に座標系 x^μ を導入しよう。x^μ を与えたときに一つ決まる G 上の点（G の要素）を $g(x^\mu)$ と書くことにする。大域的な座標 x^μ に加え、それぞれの点 x^μ における局所座標 y^a を次のように定義する。

$$g(x^\mu + dx^\mu) = g(x^\mu)e^y. \qquad (A.179)$$

ただし $y \equiv y^a T_a$ である。この定義において、因子 e^y を左から掛けて定義することもできるが、ここでは上の定義を採用しておく。(A.179) は次のように書くこともできる。

$$\sigma \equiv y^a T_a = g^{-1}dg = (g^{-1}\partial_\mu g)dx^\mu \qquad (A.180)$$

σ は群多様体上のマウレー・カルタン 1-形式であって次の性質を満足する。

$$d\sigma + \sigma \wedge \sigma = 0. \qquad (A.181)$$

多様体 G 上に次の式によって計量を導入しよう。

$$ds^2 = g_{ab}y^a y^a \qquad (A.182)$$

g_{ab} は一般に群の元 g に依存してもよい。座標変換 $g \to h_L g$, $h_L \in G$ を行うと、この計量は $ds^2 = g_{ab}(h_L g)y^a y^b$ に変換される。従ってもし $g_{ab}(g)$ が g に依存しない定数行列であれば、計量は $g \to h_L g$, $h_L \in G$ のもとで不変になる。このような計量は左不変計量と呼ばれる。

以下では計量が左不変な場合のみを考えることにする。

計量 g_{ab} を与えることは、リー代数の元に対する内積を定義することと等価である。すなわち、二つのリー代数の元 $u = u^a T_a$ と $v = v^a T_a$ の内積を次のように定義できる。

$$\langle u, v\rangle = g_{ab} u^a v^b \tag{A.183}$$

特に、二つの生成子の内積は計量を与える。

$$\langle T_a, T_b\rangle = g_{ab} \tag{A.184}$$

群の元 g に右から作用する座標変換 $g \to g h_R^{-1}$ を考えてみよう。この変換によって y^a は随伴表現として変換されることがその定義よりわかる。従って、計量が左変換だけではなく右変換のもとでも不変であるためには、g_{ab} がリー代数の不変テンソルであればよい。

計量が正定値である場合に、次の条件を満足する行列 $e_a^{\widehat{a}} = e_{a\widehat{a}}$ を定義することができる。

$$g_{ab} = e_a^{\widehat{a}} e_{b\widehat{a}} \tag{A.185}$$

また、$e_a^{\widehat{a}}$ の逆行列として $e_{\widehat{a}}^a$ を定義する。この行列を用いれば、群多様体上の vielbein 1-form が次のように定義される。

$$e^{\widehat{a}} = e_a^{\widehat{a}} \sigma^a \tag{A.186}$$

定義より、次の式が成り立つ。

$$\delta_{\widehat{a}\widehat{b}} = \langle T_{\widehat{a}}, T_{\widehat{b}}\rangle, \quad T_{\widehat{a}} \equiv e_{\widehat{a}}^a T_a. \tag{A.187}$$

群多様体がリーマン接続を持つ、すなわち torsion が 0 であると仮定しよう。このときスピン接続は vielbein が与えられれば一意的に決まる。スピン接続を決めるために、torsionless 条件に vielbein (A.186) を代入してみよう。

$$0 = De^{\widehat{a}} = e_a^{\widehat{a}} d\sigma^a + \omega^{\widehat{a}}{}_{\widehat{b}} \wedge e_b^{\widehat{b}} \sigma^b \tag{A.188}$$

この式とマウレルカルタン方程式 (A.181) を比較することで次の式が得られる。

$$\left(\omega_{c-\widehat{a}b} - \frac{1}{2} f_{\widehat{a}-cb}\right) \sigma^c \wedge \sigma^b = 0. \tag{A.189}$$

ここで、$\omega^{\widehat{a}}{}_b = \omega^{\widehat{a}}{}_{\widehat{b}} e_b^{\widehat{b}}$ である。さらに 1-form ω を σ^c で展開し、成分を ω_c とした。

この式は添え字 b と c について反対称部分のみを含むが、$\omega_{\widehat{a}\widehat{b}}$ が $\widehat{a}$ と $\widehat{b}$ について反対称であることを用いれば b と c の対称部分も決めることができる。その結果、次のスピン接続を得る。

$$\omega_{a-\widehat{b}\widehat{c}} = \frac{1}{2}(f_{\widehat{b}-a\widehat{c}} + f_{a-\widehat{b}\widehat{c}} + f_{\widehat{c}-\widehat{b}a}) \tag{A.190}$$

ここで、構造定数は

$$[T_a, T_b] = T_c f^c{}_{ab} \tag{A.191}$$

によって定義したものであり、後ろ二つの添え字については反対称であるが、先頭の添え字については一般にはそのような対称性はない。(A.190) で与えられるスピン接続が実際に (A.189) を満足することと、添え字 $\widehat{b}$ と $\widehat{c}$ の入れ替えについて反対称であることはすぐに確かめることができる。

(A.190) の後ろ二つの項は、次のように変形することができる。

$$\omega_{a-\widehat{b}\widehat{c}} = \frac{1}{2} f_{\widehat{b}-a\widehat{c}} + \frac{1}{2} e_{\widehat{b}}^b e_{\widehat{c}}^c (g_{ad} f^d{}_{bc} + g_{dc} f^d{}_{ba}) \tag{A.192}$$

ここで、$g_{ad}f^{d}{}_{bc}+g_{dc}f^{d}{}_{ba}$ はテンソル g_{ac} の T_b による変換とみなすことができる。従って、計量が（左不変であるだけでなく）右不変である場合にはこの部分は 0 になる。すなわち、

$$\omega_{a-\widehat{b}\widehat{c}}=\frac{1}{2}f_{\widehat{b}-a\widehat{c}} \tag{A.193}$$

$f_{\widehat{b}-a\widehat{c}}$ は随伴表現の生成子とみなすことができるから、σ^a を両辺にかけると、スピン接続をリー代数に値を持つ量として次のように表すことができる。

$$\omega=\frac{1}{2}\sigma \tag{A.194}$$

この式と、マウレルカルタン方程式を用いると、曲率テンソルは次のように求まる。

$$R=-\frac{1}{4}\sigma\wedge\sigma \tag{A.195}$$

A.10.2 G/H

ここでは多様体 $\mathcal{M}=G/H$ についてその上の計量、スピン接続、曲率テンソルを決定する。

G の生成子を T_A とおく。そのうち H の生成子であるものを T_a、それ以外を T_i と表すことにする。

$\mathcal{M}$ 上のある点 gH の近傍における局所座標系 y^i は、gH から一つ代表元 g を選ぶことにより次のように定義することができる。

$$g'H=ge^{y^iT_i}H \tag{A.196}$$

ただし、$g'H$ は局所座標 y^i によって決まる gH の近傍に属する点である。これは次のように表すこともできる。

$$y^iT_i+z^aT_a=\sigma\equiv g^{-1}dg \tag{A.197}$$

z^aT_a は H のリー代数の元である。この定義では、

$$T_i=T'_i+\alpha_i^aT_a \tag{A.198}$$

のように T_i をシフトする自由度がある。このようなシフトを行うと、z^a が

$$z'^a=z^a+\alpha_i^ay^i \tag{A.199}$$

のように変化するが、y^i の定義には影響しない。元 $g\in gH$ の選択の自由度は局所座標系の H 回転の自由度に対応している。

この用に定義した局所座標系は左不変である。すなわち、$g\to h_Lg$、$h_L\in G$ という変換で不変である。

リー代数において内積を定義することにより計量を定義しよう。ただし、H の生成子の作用は回転を表すだけなので、次の条件を満足する内積を用いる。

$$\langle T_a,*\rangle=\langle *,T_a\rangle=0,\quad T_a\in H \tag{A.200}$$

このような内積を用いて、計量を次のように表すことができる。

$$ds^2=\langle\sigma,\sigma\rangle=g_{ij}y^iy^j \tag{A.201}$$

G/H を考えるために、この内積は H 不変であるとする。T_i の定義には (A.198) のような不定性があるが、内積の性質 (A.200) のために $g_{ij} = \langle T_i, T_j \rangle$ には不定性がない。$e_i^{\hat{i}}$ を次の条件を満足する行列として定義する。

$$g_{ij} = e_i^{\hat{i}} e_{j\hat{i}} \tag{A.202}$$

このとき vielbein 1-form が次のように与えられる。

$$e^{\hat{i}} = e_i^{\hat{i}} \sigma^i \tag{A.203}$$

スピン接続を決定するためにこれを torsionless 条件に代入しよう。

$$0 = De^{\hat{i}} = e_i^{\hat{i}} d\sigma^i + \omega^{\hat{i}}{}_j \wedge \sigma^j \tag{A.204}$$

マウレルカルタン方程式は、リー代数の添え字を H のものとそれ以外に分けて書くと、

$$d\sigma^i + \frac{1}{2} f^i{}_{jk} \sigma^j \wedge \sigma^k + f^i{}_{ak} \sigma^a \wedge \sigma^k = 0. \tag{A.205}$$

H が群をなすことから、構造定数が $f^i{}_{ab}$ という成分を持たないことを用いた。上の二つの式を比較することにより、次の式が得られる。

$$\omega_j{}^i{}_k \sigma^j \wedge \sigma^k + \omega_a{}^i{}_k \sigma^a \wedge \sigma^k = \frac{1}{2} f^i{}_{jk} \sigma^j \wedge \sigma^k + f^i{}_{ak} \sigma^a \wedge \sigma^k. \tag{A.206}$$

ここで、スピン接続も $\omega = \omega_j \sigma^j + \omega_a \sigma^a$ のように展開しておいた。ω_a については、係数を比較することにより直ちに次のように決まる。

$$\omega_a{}^i{}_k = f^i{}_{ak} \tag{A.207}$$

計量の H 不変性により、$\omega_{a-\hat{i}\hat{j}}$ は後ろ二つの添え字の入れ替えに対して反対称である。ω_a は $\mathcal{M} = G/H$ 上のある一点の上にあるファイバー H の方向のスピン接続を表している。(A.207) はこのファイバー上の位置の変化が $\mathcal{M}$ の局所直交座標の回転させることを表している。

ω_j については (A.206) には j と k の反対称成分しか含まれていないが、$\omega_{j-\hat{i}\hat{k}}$ が後ろ二つの添え字について反対称であるということを用いれば次のように一意的に決定することができる。

$$\omega_{i-\hat{j}\hat{k}} = \frac{1}{2}(f_{\hat{j}-i\hat{k}} + f_{i-\hat{j}\hat{k}} + f_{\hat{k}-\hat{j}i}) \tag{A.208}$$

ここで、

$$f^a{}_{bj} = f^i{}_{jk} = 0 \tag{A.209}$$

の場合を考えてみよう。この場合、$\omega_i = 0$ であるから、スピン接続を次のように書くことができる。

$$\omega^i{}_j = f^i{}_{aj} \sigma^a = [g^{-1}dg]^i{}_j \tag{A.210}$$

従って曲率は

$$\begin{aligned}
R^i{}_j &= [d\omega + \omega \wedge \omega]^i{}_j = d[g^{-1}dg]^i{}_j + [g^{-1}dg]^i{}_k \wedge [g^{-1}dg]^k{}_j \\
&= -[g^{-1}dg]^i{}_a \wedge [g^{-1}dg]^a{}_j = -f^i{}_{ka} f^a{}_{lj} v^k \wedge v^l \\
&= -\frac{1}{2} f^a{}_{kl} f^i{}_{aj} v^k \wedge v^l
\end{aligned} \tag{A.211}$$

最後の変形にはビアンキ恒等式を用いた。成分を抜き出すと、

$$R_{kl}{}^i{}_j = -f^a{}_{kl} f^i{}_{aj} \tag{A.212}$$

となる。H のリー代数の元として表せば、

$$R_{ij} = -f^a{}_{ij} T_a \tag{A.213}$$

超重力理論においては、スカラー多様体上の局所的な回転の対称性 H と曲率 $R_{kl}{}^i{}_j$ が与えられる。この式を用いることでそれらの情報から群 G を決定することができる。

A.10.3 $\mathbf{S}^3 \sim \mathrm{SU}(2)$

しばしば超重力理論の古典解の構成要素として $\mathbf{S}^3$ が現れる。ここでは $\mathbf{S}^3$ を群多様体 SU(2) とみなすことでその上の計量、スピン接続、曲率などを調べる。

$\mathbf{S}^3$ の対称性 $\mathrm{SO}(4) = \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$ のそれぞれの SU(2) 因子は左右から SU(2) の元を作用させることと対応している。

$$g \to h_L g h_R, \quad h_L \in \mathrm{SU}(2)_L, \quad h_R \in \mathrm{SU}(2)_R. \tag{A.214}$$

ここでは SU(2) の生成子を次のように取る。

$$T_a = \frac{i}{2}\sigma_a, \quad f^a{}_{bc} = -\epsilon_{abc}. \tag{A.215}$$

ここでは y^a の代わりに ϵ^a という記号を用いる。Maurer-Cartan 1-形式は次のように与えられる。

$$g^{-1}dg = \frac{i}{2}\epsilon^a\sigma_a. \tag{A.216}$$

これらの 1-形式は次の性質を満足することが定義 (A.216) を用いて簡単に示される。

$$d\epsilon_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_j \wedge \epsilon_j. \tag{A.217}$$

しばしば具体的な座標系を導入したほうがよい場合があるが、次の座標がよく用いられる。

$$g(\theta,\phi,\psi) = \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_z\phi\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_x\theta\right)\exp\left(+\frac{i}{2}\sigma_z\psi\right) \tag{A.218}$$

ただし変数の範囲は次のように取る。

$$0 \le \theta < \pi, \quad 0 \le \phi < 2\pi, \quad 0 \le \psi < 4\pi. \tag{A.219}$$

行列で表せば次のようになる。

$$g = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2^* \\ u_2 & u_1^* \end{pmatrix}, \quad (u_1, u_2) = \left(e^{\frac{i}{2}(\psi-\phi)}\cos\frac{\theta}{2}, e^{\frac{i}{2}(\psi+\phi)}\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{A.220}$$

次の式によって定義される $\mathbf{R}^3$ 上のベクトルを考えよう。

$$v^i = u^\dagger\sigma^i u = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \tag{A.221}$$

このベクトルの長さは 1 である。従って (A.221) は $\mathbf{S}^3$ から $\mathbf{S}^2$ への写像を与えている。このことは、$\mathbf{S}^3$ を $\mathbf{S}^2$ 上のファイバー束とみなすことができることを意味している。(A.221) において u の位相を回しても v は変化しないから、ファイバーは u の位相に対応した $\mathbf{S}^1$ であることがわかる。(A.220) の行列に対しては、右から $e^{i\alpha\sigma_z} \in \mathrm{SU}(2)_R$ を作用させることによってこの位相を変化させることができる。また、底空間である $\mathbf{S}^2$ は $\mathrm{SO}(3)_L \sim \mathrm{SU}(2)_L$ によって回転する。

(A.216) に (A.218) を代入すれば、座標 (θ, ϕ, ψ) を用いて Maurer-Cartan 1 形式を表すことができる。

$$\epsilon^1 = \cos\psi \sin\theta d\phi + \sin\psi d\theta, \quad \epsilon^2 = \sin\psi \sin\theta d\phi - \cos\psi d\theta, \quad \epsilon^3 = d\psi - \cos\theta d\phi. \tag{A.222}$$

次の計量を導入しよう。

$$ds^2 = a^2(\epsilon^x)^2 + b^2(\epsilon^y)^2 + c^2(\epsilon^z)^2 \tag{A.223}$$

$a = b = c = 1/2$ のとき、半径 1 の $\mathbf{S}^3$ を与える。

スピン接続は (A.190) を用いて次のように得られる。

$$\Omega_{x-\widehat{y}\widehat{z}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \Omega_{y-\widehat{z}\widehat{x}} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \Omega_{z-\widehat{x}\widehat{y}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \tag{A.224}$$

A.11 Taub-NUT 多様体

§A.10.3 で考えた SU(2) の群多様体上の 1-形式は左不変であるから、計量が次のように与えられる 4 次元の多様体は $\mathrm{SU}(2)_L$ の対称性を持っている。

$$ds^2 = d\rho^2 + a^2(\rho)\epsilon_x^2 + b^2(\rho)\epsilon_y^2 + c^2(\rho)\epsilon_z^2 \tag{A.225}$$

この計量を与える多脚場は次のように取ることができる。

$$e^{\widehat{i}}_{\mu} dx^\mu = (d\rho, a\epsilon_x, b\epsilon_y, c\epsilon_z). \tag{A.226}$$

この多脚場によって定義される局所ローレンツ座標を取ったとき、スピン接続は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\omega_{\widehat{\rho}\widehat{x}} &= -a'\epsilon_x \quad \omega_{\widehat{y}\widehat{z}} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}\epsilon_x \\
\omega_{\widehat{\rho}\widehat{y}} &= -b'\epsilon_y \quad \omega_{\widehat{z}\widehat{x}} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ca}\epsilon_y \\
\omega_{\widehat{\rho}\widehat{z}} &= -c'\epsilon_z \quad \omega_{\widehat{x}\widehat{y}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\epsilon_z
\end{aligned} \tag{A.227}$$

スピン接続を、自己双対部分と反自己双対部分に次のように分割する。

$$\omega^\pm = \pm\frac{i}{2}\left[(\omega_{\widehat{\rho}\widehat{x}} \pm \omega_{\widehat{y}\widehat{z}})\sigma_x + (\omega_{\widehat{\rho}\widehat{y}} \pm \omega_{\widehat{z}\widehat{x}})\sigma_y + (\omega_{\widehat{\rho}\widehat{z}} \pm \omega_{\widehat{x}\widehat{y}})\sigma_z\right]. \tag{A.228}$$

多様体が Hyper Kähler であるためには、ω^+ が純粋ゲージでなければならない。すなわち

$$\omega^+ = h^{-1}dh \tag{A.229}$$

を満足する $h(g) \in \mathrm{SU}(2)$ が定義できなければならない。この条件から、関数 a、b、c に対する一階の微分方程式を得ることができる。ここでは h として $h = e$ と $h = g$ の二つの場合を考えよう。$h = e$ の場合には純粋ゲージ条件より、次の式を得る。

$$\omega_{12} + \omega_{34} = 0, \quad \omega_{13} + \omega_{42} = 0, \quad \omega_{14} + \omega_{23} = 0. \tag{A.230}$$

一方、$h = g$ の場合には次の式を得る。

$$\omega_{12} + \omega_{34} = \epsilon_x, \quad \omega_{13} + \omega_{42} = \epsilon_y, \quad \omega_{14} + \omega_{23} = \epsilon_z. \tag{A.231}$$

Soryushiron Kenkyu

$h = g$ の場合を考える。解くべき式は、

$$a' = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} - 1, \quad b' = \frac{-b^2+c^2+a^2}{2ca} - 1, \quad c' = \frac{-c^2+a^2+b^2}{2ab} - 1 \tag{A.232}$$

U(1) 対称性を要求すれば、$a = b$ でなければならない。そのとき微分方程式は次のようになる。

$$2a\frac{da}{d\rho} = c - 2a, \quad 2a^2\frac{dc}{d\rho} = -c^2. \tag{A.233}$$

これら二つの式の比をとって ρ を消去すると、

$$\frac{da}{dc} = 2\frac{a^2}{c^2} - \frac{a}{c}$$

この微分方程式の解は、パラメータ r を用いて次のように書くことができる。

$$a^2 = B^2 r(1+r), \quad c^2 = B^2\frac{r}{1+r}$$

B は積分定数である。この変数 r と、変数 ρ の関係を求めるために、微分方程式を再び用いると、次の式が得られる。

$$d\rho^2 = B^2\frac{1+r}{r}dr^2$$

従って、計量は次のように与えられる。

$$ds^2 = B^2\left[H(dr^2 + r^2(\epsilon_x^2+\epsilon_y^2)) + H^{-1}\epsilon_z^2\right], \quad H = 1 + \frac{1}{r}. \tag{A.234}$$

$r = 0$ の近くでの様子を見るために $r = r'^2$ と置いて r' の高次の項を無視してみよう。

$$ds^2 = 4B^2\left[dr'^2 + \frac{r'^2}{4}(\epsilon_x^2+\epsilon_y^2+\epsilon_z^2)\right]. \tag{A.235}$$

従って、これは原点付近で $\mathbf{R}^4$ である。逆に、r が大きいところでは、

$$ds^2 = B^2\left(dt^2 + t^2(\epsilon_x^2+\epsilon_y^2) + \epsilon_z^2\right). \tag{A.236}$$

これは $\mathbf{R}^3$ 上の $\mathbf{S}^1$ 束を表している。ψ の周期が 4π であるから、$\mathbf{S}^1$ の半径は $2B$ によって与えられる。

以下の計算を行う前に、計量にかかる全体の係数を 1 と置いておこう。$B \neq 1$ の場合を扱いたければ適当にスケール変換を行えばよい。

$$ds^2 = \frac{1+r}{r}dr^2 + r(1+r)(\epsilon_x^2+\epsilon_y^2) + \frac{r}{1+r}\epsilon_z^2. \tag{A.237}$$

この空間の上の調和 2 形式を ζ_2 と置こう。つまり、$d\zeta_2 = d*\zeta_2 = 0$ を満足するものとする。この ζ_2 を自己双対部分 ζ_2^+ と反自己双対部分 ζ_2^- に分けると、これらはどちらも $d\zeta_2^\pm = 0$ を満足する。逆に、$d\zeta_2^\pm = 0$ を満足すれば、（反）自己双対性より $d*\zeta_2^\pm = 0$ も自動的に満足される。(θ,ϕ) によって張られる $\mathbf{S}^2$ 方向の回転対称性を仮定すれば、この 2-形式は $\epsilon_1\wedge\epsilon_2$ と $\epsilon_3\wedge dr$ の線形結合で書けるはずである。さらに条件 $d\zeta_2 = 0$ よりそれら二つの項の係数に関係がつき、任意関数 $f(r)$ を用いて次のように与えられることがわかる。

$$\zeta_2 = f(r)\epsilon_1\wedge\epsilon_2 + f'(r)dr\wedge\epsilon_3 = d\zeta_1. \tag{A.238}$$

ただし、1-形式 ζ_1 を次のように定義した。

$$\zeta_1 = f(r)\epsilon_3. \tag{A.239}$$

ζ_2 が自己双対、あるいは反自己双対であるという条件により、関数 $f(r)$ を決定することができる。このとき Taub-NUT 空間の計量を用いる必要がある。規格化された 1-形式を用いれば、ζ_2 は次のように書くことができる。

$$\zeta_2 = \frac{1}{r(1+r)} f(r)\widehat{\epsilon}_1 \wedge \widehat{\epsilon}_2 + f'(r)\widehat{dt} \wedge \widehat{\epsilon}_3. \tag{A.240}$$

従って、これが自己双対、あるいは反自己双対という条件は、関数 $f(r)$ が次の微分方程式を満足することを意味する。

$$f'(r) = \pm \frac{1}{r(1+r)} f(r). \tag{A.241}$$

復号のどちらを自己双対と呼び、どちらを反自己双対と呼ぶかは定義に依るが、ここではこの式の右辺が正の場合を自己双対、負の場合を反自己双対と呼び、対応する解をそれぞれ $f_+(r)$ および $f_-(r)$ と書くことにしよう。微分方程式は簡単に解くことができて、その解は積分定数として現れる比例定数を除き $f_\pm(r) \propto H^{\mp 1}$ と与えられる。これらのうち、原点で滑らかなのは $f_+(r)$ のほうだけである。そこで以後 ζ_2 として自己双対な解を採用しよう。すなわち、次のようにとる。

$$f(r) = \frac{1}{4\pi H}, \tag{A.242}$$

とする。係数はあとで都合がいいように決めた。このとき ζ_1 は次のように与えられる。

$$\zeta_1 = \frac{1}{4\pi H}\epsilon_3. \tag{A.243}$$

計量と見比べれば、このベクトルは次のようにアイソメトリーを生成するキリングベクトルであることがわかる。

$$\zeta^\psi = \frac{1}{4\pi} \tag{A.244}$$

次の二つの積分公式は便利である。$dr \wedge d\psi$ で張られる非コンパクト 2 サイクル C に対して

$$\int_C \zeta_2 = 4\pi \int_0^\infty f'(r)dr = 1. \tag{A.245}$$

また、$\zeta_2 \wedge \zeta_2$ を Taub-NUT 全体で積分を行えば、

$$\int_{\mathrm{TN}} \zeta_2 \wedge \zeta_2 = 8 \int_0^\infty (f^2(r))' dr \int_{S^3} \Omega_3 = 1. \tag{A.246}$$

ここで述べた Taub-NUT 解は 3 次元で見れば、モノポールがただ一つ存在する場合に対応している。さらに一般の場合、つまり複数個のモノポールが存在するような場合に対応した解も知られており、multi-Taub-NUT 解と呼ばれている。

$$ds^2_{TN} = H(dx^i)^2 + H^{-1}(d\psi + C_i dx^i)^2. \tag{A.247}$$

H は $\mathbf{R}^3$ 上の調和関数であり、ベクトル場 C_i はポテンシャル H の双対として定義される。

$$H = 1 + \sum_{I=1}^N \frac{1}{|x^i - a^i_I|}, \quad dC = *^3 dU. \tag{A.248}$$

A.12 Chern-Simons 形式とインスタントン

ここでは、共変微分を $d + A_1$ とする。そのとき場の強さは $F_2 = dA_1 + A_1 \wedge A_1$ と与えられる。インスタントンは、次の方程式を満足する解として定義することができる。

$$F_2 = *^4 F_2 \tag{A.249}$$

球対称性を仮定し、無限遠で純粋ゲージになることを用いれば次のように置くことができる。

$$A_1 = f(r) C_1. \tag{A.250}$$

ただし、C_1 は $\mathbf{S}^3$ 上の純粋ゲージを表す 1-形式であり、次のように与えられる。

$$C_1 = g d g^{-1}. \tag{A.251}$$

ただし、

$$g = x_4 + i\sigma_x x_1 + i\sigma_y x_2 + i\sigma_z x_3. \tag{A.252}$$

このように定義された C_1 は次の条件を満足する。

$$-dC_1 = C_1 \wedge C_1 = 2 *^3 C_1. \tag{A.253}$$

さらに、

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{fund}}(C_1 \wedge C_1 \wedge C_1) = -12\Omega_3. \tag{A.254}$$

ただし、Ω_3 は $\mathbf{S}^3$ の体積形式。(A.250) を (A.249) に代入し、関係式 (A.253) を用いると、スカラー関数 $f(r)$ に対する次の微分方程式を得る。

$$\frac{df}{dr} = \frac{2}{r} f(1-f). \tag{A.255}$$

ただし、$\mathbf{R}^4$ 上の Hodge 双対と単位 $\mathbf{S}^3$ 上の Hodge 双対が次の関係で与えられることを用いた。

$$*^4 F_2 = (*^3 F_2) \wedge \frac{dr}{r}. \tag{A.256}$$

(A.255) は簡単に解くことができて、次の解を得る。

$$f(r) = \frac{r^2}{r^2 + a^2}. \tag{A.257}$$

ただし、a はインスタントンのサイズを表すパラメータである。Chern-Simons 形式を次のように定義する。

$$\omega_3 = \mathrm{tr}_{\mathrm{fund}} \left(\frac{1}{2} A_1 \wedge dA_1 + \frac{1}{3} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right). \tag{A.258}$$

これは次の式を満足する。

$$d\omega_3 = \mathrm{tr}_{\mathrm{fund}} \frac{1}{2} (F_2 \wedge F_2) \tag{A.259}$$

これにインスタントン解を代入すれば、

$$\omega_3 = 2(3f^2 - 2f^3) dx \wedge dy \wedge dz. \tag{A.260}$$

従って、インスタントン解について次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2} \int \mathrm{tr}_{\mathrm{fund}}(F_2 \wedge F_2) = \oint \omega_3 = 4\pi^2 (3f^2 - 2f^3). \tag{A.261}$$

積分面の半径を無限大に取れば、この積分の値は $(2\pi)^2$ になる。

関連図書

[1] J.Bagger, *"Supersymmetric sigma models" in Proc. of NATO Conf. on Supersymmetry*, Eds. K. Dietz, R. Flume, G. van Gehlen, V. Rittenberg (Plenum, 1985).

[2] S. Ferrara, D. Z. Freedman, P. N. Nieuwenhuizen, *"Progress towards a theory of supergravity"*, Phys.Rev.**D13**(1976)3214.

[3] S. Deser, B. Zumino, *"Consistent supergravity"*, Phys.Lett.**62B**(1976)335.

[4] P. K. Townsend, "Cosmological constant in supergravity", Phys.Rev.**D15**(1977)2802.

[5] E. Witten, J. Bagger, "Quantization of Newton's constant in certain supergravity theories", Phys.Lett.**115B**(1982)202.

[6] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello, A. Van Proeyen, *"Yang-Mills Theories with Local Supersymmetry: Lagrangian, transformation laws and super-Higgs effect"*, Nucl.Phys.**B212**(1983)413.

[7] K. S. Stelle, P. C. West "Minimal auxiliary Fields for Supergravity", Phys. Lett. 74B (1978) 330.

[8] S. Ferrara, P. van Nieuwenhuizen, "The auxiliary fields of supergravity", Phys.Lett. 74B (1978) 333

[9] N. Dragon, *"Torsion and Curvature in Extended Supergravity"*, Z.Phys.**C2**(1979)29.

[10] S.Ferrara and P. van Nieuwenhuizen "The auxiliary fields of supergravity" Phys.Lett.**74B**(1978)333

[11] K.S.Stelle and P.C.West, "Minimal auxiliary fields for supergravity" Phys.Lett.**74B**(1978)330

[12] M.Kaku, P.K.Townsend, P.van Nieuwenhuisen "Properties of conformal supergravity" Phys.Rev.D17(1978)3179

[13] E.Cremmer, S.Ferrara, L.Girardello, A. van Proyen Yang-Mills theories with local supersymmetry: Lagrangian, transformation laws and super-Higgs effect Nucl.Phys.B212(1983)413

[14] "Conformal and Poincaré tensor calculi in $N = 1$ supergravity", T. Kugo, S. Uehara, Nucl.Phys.B226(1983)49.

[15] L. Alvarez-Gaum´ e and D.Z. Freedman, Comm. Math. Phys. 80 (1981) 443.

[16] S. Ferrara, P. van Nieuzenhuizen, *"Consistent supergravity with complex spin 3/2 gauge fields"*, Phys.Rev.Lett.**37**(1976)1669

[17] N=2 Extremal Black Holes Sergio Ferrara, Renata Kallosh, Andrew Strominger Phys.Rev. D52 (1995) 5412-5416 hep-th/9508072

[18] Andrew Strominger Macroscopic Entropy of $N = 2$ Extremal Black Holes Phys.Lett. B383 (1996) 39-43 hep-th/9602111

[19] Gregory W. Moore Les Houches Lectures on Strings and Arithmetic hep-th/0401049

[20] E. Cremmer, B. Julia, *"The N=8 supergravity theory. I. The Lagrangian"*, Phys. Lett. **80B** (1978) 48.

[21] B. de Wit, H. Nicolai, *"N=8 supergravity with local SO(8)×SU(8) invariance"*, Phys. Lett. **108B** (1982) 687.

[22] C. M. Hull, *"Non-compact gaugings of N=8 supergravity"* Phys. Lett. **142** (1984) 693.

[23] W. Rarita, J. Schwinger, Phys.Rev.**60**(1941)61.

[24] P. A. M. Dirac, Proc.Roy.Soc.**A133** (1931) 60.

[25] E.Cremmer, B.Julia and J.Scherk, *"Supergravity Theory in 11 Dimensions"*, Phys.Lett.**76B**(1978)409.

[26] N.Seiberg, *"Observations on the Moduli Space of Superconformal Field Theories"*, Nucl.Phys.**B303**(1988)286.

[27] Andrew Strominger, *"Open P-Brane"*, Phys.Lett.**B383**(1996)44, `hep-th/9512059`.

[28] M. Hatsuda, K. Kamimura, M. Sakaguchi, *"Super-PP-wave Algebra from Super-AdS $\times$ S Algebras in Eleven-dimensions"*, `hep-th/0204002`.

[29] E.Cremmer, S.Ferrara Phys.Lett.**91B**(1980)61.

[30] L.Brink, P.Howe, Phys.Lett.**91B**(1980)384.

[31] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P. K. Townsend, *"Supermembranes and eleven-dimensional supergravity"*, Phys.Lett.**B189**(1987)75, Ann. of Phys. **185**(1988)330.

[32] M. B. Green, C. M. Hull, P. K. Townsend, *"D-brane Wess–Zumino actions, T-duality and the cosmological constant"*, Phys.Lett.**B382**(1996)65, `hep-th/9604119`.

[33] M.Huq and M.A.Namazie, *"Kaluza-Klein Supergravity in Ten Dimensions"*, Class.Quantum Grav.**2**(1985)293.

[34] L.Romans, *"Massive $N = 2a$ Supergravity in Ten Dimensions"*, Phys.Lett.**169B**(1986)374.

[35] M.Aganagic, J.Park, C.Popescu, and J.H.Schwarz, *"Dual D-Brane Actions"*, Nucl.Phys.**B496**(1997)215, `hep-th/9702133`.

Soryushiron Kenkyu

[36] A. A. Tseytlin, *"Self-duality of Born-Infeld action and Dirichlet 3-brane of type IIB superstring theory"*, Nucl.Phys. B469 (1996) 51, hep-th/9602064.

[37] Mina Aganagic, Jaemo Park, Costin Popescu, John H. Schwarz, *"Dual D-Brane Actions"*, Nucl.Phys. B496 (1997) 215, hep-th/9702133.

[38] G.W. Gibbons and K. Maeda, *"Black Holes and Membranes in Higher Dimensional Theories with Dilaton Fields"*, Nucl. Phys. **B298** (1988) 741.

[39] M.J. Duff and J.X. Lu, *"The Selfdual Type IIB Superthreebrane"*, Phys. Lett. **B273** (1991) 409.

[40] M.J. Duff and J.X. Lu, *"Elementary Five-brane Solutions of $D = 10$ Supergravity"*, Nucl. Phys. **B354** (1991) 141.

[41] G.T. Horowitz and A. Strominger, *"Black Strings and p-branes"*, Nucl. Phys. **B360** (1991) 197.

[42] N. Itzhaki, J.M. Maldacena, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, *"Supergravity and The Large N Limit of Theories With Sixteen Supercharges"*, Phys. Rev. **D58** (1998) 046004, *hep-th/9802042*.

[43] A. Dabholkar, G.W. Gibbons, J.A. Harvey, F. Ruiz Ruiz, Nucl.Phys.**B340**(1990)33.

[44] C.G. Callan, J.A. Harvey and A. Strominger, *"Supersymmetric String Solitons"*, Trieste 1991, proceedings, *String Theory and Quantum Gravity*, World Scientific, hep-th/9112030.

[45] B.R.Greene, A.Shapere, C.Vafa and S.-T.Yau, *"Stringy Cosmic Strings and Noncompact Calabi-Yau Manifolds"*, Nucl.Phys.**B337**(1990)1.

[46] C.Vafa, *"Evidence for F-Theory"*, Nucl.Phys.**B469**(1996)403, hep-th/9602022.

[47] E. Witten, *"String Theory Dynamics in Various Dimensions"*, Nucl.Phys.**B443**(1995)85, hep-th/9503124.

[48] Y. Imamura, *"Born-Infeld Action and Chern-Simons Term from Kaluza-Klein Monopole in M-theory"*, Phys.Lett.**B414**(1997)242, hep-th/9706144.

[49] S. D. Mathur, "The fuzzball proposal for black holes: an elementary review", hep-th/0502050.

[50] R. Emparan, D. Mateos, P. Townsend, *"Supergravity Supertubes"*, JHEP **0107** (2001) 011, hep-th/0106012.

[51] A. Dabholkar, J. P. Gauntlett, J. A. Harvey, D. Waldram, *"Strings as Solitons & Black Holes as Strings"*, Nucl.Phys. **B474** (1996) 85-121, hep-th/9511053.

[52] C. G. Callan, Jr., J. M. Maldacena, A. W. Peet, *"Extremal Black Holes As Fundamental Strings"*, Nucl.Phys. **B475** (1996) 645-678. hep-th/9510134.

[53] O. Lunin, J. Maldacena, L. Maoz, *"Gravity solutions for the D1-D5 system with angular momentum"*, hep-th/0212210.

Soryushiron Kenkyu

[54] Igor R. Klebanov, Nikita A. Nekrasov *"Gravity Duals of Fractional Branes and Logarithmic RG Flow"* Nucl.Phys. B574 (2000) 263-274 hep-th/9911096

[55] I.R. Klebanov, A.A. Tseytlin, "Gravity Duals of Supersymmetric SU(N) x SU(N+M) Gauge Theories", `hep-th/0002159`, Nucl.Phys. B578 (2000) 123-138.

[56] I. R. Klebanov, M. J. Strassler, "Supergravity and a Confining Gauge Theory: Duality Cascades and χSB-Resolution of Naked Singularities", `hep-th/0007191`, JHEP 0008 (2000) 052.

[57] G.Horowitz and A.Strominger, *"Black Strings And p-Branes"*, Nucl.Phys.**B360**(1991)197.

[58] J.L.Carr, S.J.Gates Jr., R.N.Oerter, *"$D = 10$, $N = 2A$ supergravity in superspace"*, Phys.Lett.**189B**(1987)68.

[59] P.S.Howe, P.C.West, *"The complete $N = 2$, $d = 10$ supergravity"*, Nucl.Phys**B238**(1984)181.

[60] S.J.Gates Jr. and H.Nishino, Phys.Lett.**B173**(1986)46.

[61] B. Nilsson, Nucl.Phys.**B188**(1981)176.

[62] M. Aganagic, C. Popescu and J. H. Schwarz, *"D-brane actions with local kappa symmetry"*, Phys. Lett. B **393**, 311 (1997) `hep-th/9610249`.

[63] M. Cederwall, A. von Gussich, B. E. Nilsson, P. Sundell and A. Westerberg, *"The Dirichlet super-p-branes in ten-dimensional type IIA and IIB supergravity"*, Nucl. Phys. B **490** (1997) 179, `hep-th/9611159`.

[64] E. Bergshoeff and P. K. Townsend, *"Super D-branes"*, Nucl. Phys. B **490** (1997) 145, `hep-th/9611173`.

[65] E.Bergshoeff, M.de Roo, B.de Wit and P.van Nieuwenhuizen, *"Ten-dimensional Maxwell-Einstein supergravity, its currents, and the issue of auxiliary fields."* Nucl.Phys.**B195**(1982)97.

[66] M.B.Green, J.H.Schwarz and E.Witten, *"Superstring Theory"*, Cambridge University Press.

[67] A.Salam and E.Sezgin, "SO(4) *gauging of $N = 2$ supergravity in seven dimensions"*, Phys.Lett.**126B**(1983)295.

[68] S.K.Han, I.G.Koh, H.W.Lee, *"Gauged seven dimensional $N = 2$ pure supergravity with two form potential and its compactifications"*, Phys.Rev.**D32**(1985)3190.

[69] W.Siegel, Nucl.Phys.**B156**(1979)135; J.Schoenfield, Nucl.Phys.**B185**(1981)157; S.Deser, R.Jackiw, S.Templeton, Phys.Rev.Lett.**48**(1982)975.

[70] P.K.Townsend and P. van Nieuwenhuizen, *"Gauged seven dimensional supergravity"*, Phys.Lett.**125B**(1983)41.

Soryushiron Kenkyu

[71] M. Cvetic, H. Lu, C.N. Pope, *"Consistent Kaluza-Klein Sphere Reductions"*, Phys.Rev. D62 (2000) 064028, `hep-th/0003286`.

[72] A. H. Chamseddine, W. A. Sabra, *"D=7 SU(2) Gauged Supergravity From D=10 Supergravity"*, Phys.Lett. B476 (2000) 415, `hep-th/9911180`.

[73] Ali H. Chamseddine, Mikhail S. Volkov, *"Non-Abelian BPS Monopoles in N=4 Gauged Supergravity"*, Phys.Rev.Lett. 79 (1997) 3343, `hep-th/9707176`.

[74] J. M. Maldacena, C. Nunez, *"Towards the large N limit of pure N=1 super Yang Mills"*, Phys.Rev.Lett. **86** (2001) 588-591, `hep-th/0008001`.

[75] J. Maharana, J. H. Schwarz, *"Noncompact symmetries in string theory"*, Nucl.Phys. **B390** (1993) 3, `hep-th/9207016`.

[76] A. Strominger, C. Vafa, *"Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy"*, Phys.Lett. B379 (1996) 99, `hep-th/9601029`.

[77] Curtis G. Callan, Juan M. Maldacena, *"D-brane Approach to Black Hole Quantum Mechanics"*, Nucl.Phys. **B472** (1996) 591, `hep-th/9602043`,

[78] G.W.Gibbons, G.T.Horowitz and P.K.Townsend, *"Higher-dimensional resolution of dilatonic black hole singularities"*, Class.Quantum.Grav.**12**(1995)2353, `hep-th/9410073`.

[79] G.T.Horowitz and A.Strominger, *"Counting States of Near-Extremal Black Holes"*, Phys.Rev.Lett.**77**(1996)2368, `hep-th/9602051`.

[80] M.Banados, C.Teitelboim and J.Zanelli, *"Black Hole in Three-Dimensional Spacetime"*, Phys. Rev. Lett.,**69**(1992)1849, `hep-th/9204099`.

[81] E. Cremmer, in *"Superspace and Supergravity"*, edited by S. W. Hawking and M. Rocek, CUP, 1981.

[82] M.Günaydin, G.Sierra, P.K.Townsend *"Gauging the $d = 5$ Maxwell/Einstein supergravity theories: more on Jordan algebra"*, Nucl.Phys.**B253**(1985)379.

[83] J. P. Gauntlett, J. B. Gutowski, C. M. Hull, S. Pakis, H. S. Reall, *"All supersymmetric solutions of minimal supergravity in five dimensions"*, Class.Quant.Grav. **20** (2003) 4587-4634, `hep-th/0209114`.

[84] J. P. Gauntlett, J. B. Gutowski, *"All supersymmetric solutions of minimal gauged supergravity in five dimensions"*, Phys.Rev. **D68** (2003) 105009; Erratum-ibid. D70 (2004) 089901, `hep-th/0304064`.

[85] I. Bena, N. P. Warner, *"One Ring to Rule Them All ... and in the Darkness Bind Them?"*, `hep-th/0408106`.

[86] J.C. Breckenridge, R.C. Myers, A.W. Peet, C. Vafa D–branes and Spinning Black Holes Phys.Lett. B391 (1997) 93-98 `hep-th/9602065`.

[87] I. Bena, *"Splitting hairs of the three charge black hole"*, Phys.Rev. **D70** (2004) 105018, `hep-th/0404073`.

Soryushiron Kenkyu

更新履歴

2016 年 1 月 9 日 ホームページに公開していた 2007 年 9 月のバージョンを素粒子論研究に投稿