なぜ、量子重力は（QCD に比べて）難しいのか？

深谷英則

大阪大学大学院　理学研究科

概 要

重力の量子化は難しい。これはよく知られた事実であるが、その説明はニュートン定数がくりこみ不可能であるとのひとことで片づけられ、他の量子化可能なゲージ理論との比較という視点からの説明は乏しいように思える。本稿では、一般相対性理論をゲージ理論の一つとして、その特殊性を洗い出すことから他のゲージ理論と比較し、なぜ重力の量子化が難しいのかを議論したい。

1　はじめに

筆者は格子ゲージ理論による数値シミュレーションを用いた量子色力学（QCD）の理論計算を主として研究している。ふだんの研究相手は数 GeV 以下のクォークとグルーオンの多体系であり、重力のじの字も出てこない。しかし、2014 年の前期に学部４年生に一般相対論をゼミで教えることになり、にわかに相対論の復習の必要性にせまられた。ところが、素粒子論研究室希望の４年生がゼロという阪大素粒子論研究室始まって以来の珍事がおこり、このゼミは開講しないことになってしまった。

ここで一般相対論の復習をやめてもよかったのだが、これも何かの縁ととらえ、開講するはずだったゼミの時間を重力の勉強にあてて、普段研究している QCD と比較することで重力の量子化が困難となる原因を洗い出すことを試みた。重力の量子化が難しいことは、ニュートン定数が負の質量次元を持ち、摂動的なくりこみを許さないことから明らかであるが、他の量子化可能なゲージ理論との比較という視点からの説明が乏しいように思われる。半年間の勉強の成果として、筆者なりに納得のいく答えが得られたため、2015 年の研究室文献紹介で発表したところ、同じ研究室の尾田欣也氏より発表した内容をなんらかの文章に残すことを勧められ、本稿の執筆に至った次第である。

一般相対性理論は、一般座標不変性（および局所ローレンツ不変性）のゲージ対称性を持った理論である。QCD は、カラーの自由度のゲージ対称性 $SU(3)$ を持った理論である。どちらも局所的なゲージ変換に対する不変性に立脚したゲージ理論であり、古典論のレベルで共通点は多い。どちらのラグランジアンも場の曲率テンソルを用いて表され、その曲率は接続とよばれるゲージ場で与えられる。

一方、大きな違いも見られる。QCD ではゲージポテンシャルを表す接続 A_μ が基本的な場の自由度を担うのに対し、一般相対論では計量 $g_{\mu\nu}$ が物理を記述する。運動方程式の解にも大きな違いがある。QCD では時間的にほぼ定常な解が好まれるが、一般相対論は宇宙項を

ゼロに微調整するなど特別な条件を課さない限り、インフレーションを起こすような時間発展する解が基本となる。重力理論に見られる捩率や四脚場 (vierbein) といった概念は QCD には対応物が見あたらない。そして何よりも、QCD はくりこみ可能であるが、重力理論は（少なくとも摂動論的な）くりこみが不可能である。表 1 に両者の類似点、異なる点をまとめた。

表 1: 重力と QCD の類似、違い

	重力（一般相対論）	QCD
接続	$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$	A_μ
曲率	$R^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$	$F_{\mu\nu}$
基本的な自由度	$g_{\mu\nu}$	A_μ
Lagrangian	$\sqrt{g}R$	$\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
典型的な古典解は定常？	No.	Yes.
捩率、四脚場の存在	Yes.	No.
くりこみ可能性	No！	Yes！

勉強を始めるにあたり、筆者は我らが阪大の偉大な先輩である内山の教科書 [1] から読みはじめた。これには重力理論を一般のゲージ理論の一つとして扱う試みが明確に描かれている。そして、ちょうど同時期に数学で発展したファイバー束の理論と内山の理論の基礎的な概念がほぼ等価であることも書かれている。次に、ファイバー束を学ぶため、Nash & Sen の教科書 [2] を読んだ。これによれば、一般相対論を記述する Riemann 幾何学は、ファイバー束の接続が計量で表される特殊なケースであることが示されている。また、小林の教科書 [4] にその特殊性の説明がある。これらの数学で知られていることを物理的に解釈すれば、一般相対論と他のゲージ理論との違いを説明できそうである。実際に、一般相対論でも接続および四脚場を基本的な自由度として扱う一階形式（first order formalism あるいは Palatini formalism）という記述法が存在することも学んだ。

本稿では、ファイバー束の観点、つまり、一般相対性理論の一階形式を他のゲージ理論を扱うファイバー束と比較することで、重力理論の特殊性がどこに起因するのかを議論する。ここでいきなり筆者の結論を述べる。くりこみ不可能性を含む重力理論の特殊性は、それを記述する Riemann 多様体の親玉である

フレーム束 $F(M)$ が平行化可能

であることに起因している。

以下で、どのようにこの結論が得られるかの根拠を述べていくが、それらは一部の筆者の考察を除き、ほとんど全てこれまでの研究で知られていることであり、またこの結論自体も Heller の文献 [5] に述べられており、筆者のオリジナルな考えではないことを強調しておく。ただ、Newton 定数がくりこみ不可能であることの背後に、もう少し深い理由がありそうだということを読者のみなさんに伝えるのが本稿の目的である。また、以下の議論に筆者の根本的な誤解、間違いなどがあれば [1] 指摘して頂けるとなお嬉しい。

[1] E-mail address: hfukaya[at]het.phys.sci.osaka-u.ac.jp ([at] を@に変える。)

2 ファイバー束

ファイバー束についてはたくさんの参考文献が知られており、物理の研究者向けの教科書もいくつか存在する [2, 3]。それらの中で、筆者が気に入ったものが、Nash & Sen の教科書 [2] である。物理の研究者向けに書かれていること、ファイバー束が登場する７章以前に Riemann 幾何学について一切触れられていないことがこの教科書の長所である。ここではファイバー束の厳密な定義には立ち入らず、物理の、特に素粒子論の言葉を使って、ファイバー束の概念を説明したい。

ファイバー束とは、時空間を表す底空間 M と場を表すファイバー空間 F をいっしょくたに一つの多様体（全空間 E）として考える数学の概念である。時空の各点に場が定義されるという状況は、４次元時空の各点で局所的に $\mathbb{R}^4 \times F$ の直積で表される。これが大域的にも成り立てば、$M \times F$ の単なる直積となり、あまりおもしろくないが、もちろん実際のファイバー束は一般に非自明である。

ファイバー束の定義にはファイバー空間 F の座標変換を与える構造群 G の存在が与えられている。あまり教科書では強調されていないが、この構造群 G は、ファイバー空間に線形に作用するものに限られる。後の議論で、この線形性が重要になる。例えば、F を複素数空間、G を U(1) 群にとると、$x \in M$ 上の $\phi(x) \in F$ の $g(x) \in G$ による座標変換は、

$$\phi'(x) = g(x)\phi(x), \tag{1}$$

で与えられる。この表式からもわかるとおり、ファイバー空間上の座標変換とは、ゲージ変換のことである。

ファイバー束は座標変換（底空間の座標変換も含む）による違いは同値とみなす。その非自明性は、座標づけを M 上の局所的な近傍の開被覆 U_i で行い、それを M 全体に覆うようにはりめぐらせたとき、そのオーバーラップした部分における座標変換の整合性（変換関数）から生じる。物理における非自明なファイバー束の代表例は、インスタントンである。底空間を４次元球 $M = S^4$ にとり、北極、南極を含む２枚の開被覆上で構造群 $G = SU(2)$ で変換を受ける座標を与える。そのオーバーラップした赤道上の３次元球 S^3 部分において、両者の座標は座標変換（ゲージ変換）によって関係しているが、これが非自明性な場合、ファイバー束は、$M \times F$ の直積の形に表すことができない。

さて、ファイバー空間 F を構造群 G 自体にとることができ、これを主束 P という。さらに、G のいろいろな表現空間をファイバー F にとるファイバー束を主束から構成することができ、これらを同伴束という。同伴束 E は、$P \times F/G$ で与えられる。このことは、ゲージ理論を構成するためには時空間 M とゲージ群 G を用意し、主束を構成すれば、そのいろいろな表現の場は同伴束として自然に定義できることを示す。時空間と、ゲージ群を決めれば場の理論が構成できるというゲージ原理がここに見られる。

主束にはさらに、局所的な構造を与えることができる。具体的には、主束 P 上の局所的な点 u における接空間 $T_u(P)$ を、底空間に垂直な接空間（ファイバー方向へ平行な接空間）$V_u(P)$, 　底空間に平行な接空間 $H_u(P)$ に分解し、この分解を全ての u について定義できる。（その全体を P 上の接束 $T(P) = V(P) \oplus H(P)$ と表す [2]）。これを接続という。

[2] 接続は、主束 P そのものではなく、P を底空間とする接ベクトル束 $T(P)$ で与えられていることになる。束の束という概念は筆者のような初学者にはとても難しい。

主束上の接続は、接続1-形式と呼ばれる微分形式によって定義できる。局所的な P 上の座標を $u=(x,g)$ $[x\in\mathbb{R}^4,\ g\in G]$ で表すと、接続1-形式は

$$\omega = g^{-1}dg + g^{-1}Ag, \quad A = A^a_\mu(x)T_a dx^\mu, \tag{2}$$

で与えられる。$A^a_\mu(x)$ が私たちになじみ深いベクトルポテンシャルを表す。T_a は群 G の生成子である。$T(P)$ の分解は、$X\in H(P)$ に対して

$$\langle\omega, X\rangle = 0 \tag{3}$$

を要請することで与えられる。ω の自由度は G の次元だけあることから、ω が $T_u(P)$ 上の法線ベクトルを定め、それと直交するベクトルで $H_u(P)$ を与えていると解釈できる。ω はファイバー方向の座標のとりかた (ゲージ変換) によらないことは、$g\to hg$ で

$$A \to hdh^{-1} + hAh^{-1}, \tag{4}$$

と変換させることで保たれる。これは私たちになじみ深いゲージ変換にほかならない。さらに、曲率形式とよばれる 2-形式が ω を用いて、

$$\Omega = d\omega + \omega\wedge\omega = g^{-1}(dA + A\wedge A)g = g^{-1}Fg, \tag{5}$$

によって定義される。F は場の強さを表す 2-形式である。

最後に、インターネット上で見かけたファイバー束の陳腐なアナロジーをしるしておく。底空間 M をあなたの頭とすると、ファイバー F があなたの髪の毛、ファイバー束の全空間 E とはあなたの髪型である。接続 ω は、局所的に髪型を整える整髪料と言える。髪束が、どの程度非自明なトポロジーを許容しているかについては、筆者は知らない。

3　ファイバー束でみた QCD

次に、ファイバー束の言葉で QCD がどう記述されるかを見てみたい。(筆者は格子ゲージ理論屋なので) 底空間 M は4次元 Euclid 空間とする。ゲージ群は $SU(3)$ である。これだけで主束は定義でき、接続も自然に導入される。この時点でまだ計量は付与されていないものとする。

場の量子論はどのように記述されるだろうか？接続を与えた主束 P がなんらかの確率分布 ρ で実現されるという経路積分の統計力学的な解釈を (筆者は格子ゲージ理論屋なので) 採用してみよう。ρ はスカラー量である。計量を用いることなく主束の接続で作られる唯一のスカラー量は

$$S_\theta = \frac{\theta}{4}\int_M \mathrm{Tr} F\wedge F, \tag{6}$$

である。これは θ 項であり、$\rho = \exp(iS_\theta)$ とするのが妥当であろう。計量を与えなくても作用が定義できること [3]、計量を与えなければくりこみ可能な項しか書けないこと、普段 QCD では考えない θ 項が真っ先に出てきたことが興味深い。

[3] いわゆるトポロジカルな場の理論になっている。

もちろん、底空間 M には計量 $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ が与えられていることを忘れてはいけない。このおかげで、曲率の Hodge 双対というものが定義できる:

$$*F_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\epsilon_{\gamma\delta\mu\nu}. \tag{7}$$

これを用いて、普段見慣れているゲージ作用

$$S_g = \frac{1}{4g^2}\int_M \mathrm{Tr}F \wedge *F + \cdots, \tag{8}$$

が定義できる。$\cdots$ で表したように、計量が与えられると、くりこみ不可能な高階微分項も含めて作用が無数に構成できるようになる。

ここで、クォーク場を導入しよう。前節で述べたように、主束 P さえ与えれば、いろいろな表現を持つベクトル束が同伴束として定義できる:

$$Q = P \times F/G. \tag{9}$$

ここで、F を基本表現のベクトル空間とすれば、クォーク場を導入したことになる。Gauge 不変なスカラー量は、Dirac 演算子 D を用いて

$$S_q = \int_M d^4x\sqrt{g}\bar{q}Dq, \tag{10}$$

と表せる。主束から作ったグルーオン作用にはファイバーにとった場の情報（ゲージ自由度に相当）が抜け落ちるのに対し、クォーク場はファイバー F の情報が作用に直に反映されるのが興味深い。

このように QCD は、主束 P およびそれに同伴する Q がぐにゃぐにゃと“ 曲がって ”いて、その変形した状態の実現確率が $\rho = \exp(-S_g + iS_\theta - S_q)$ で与えられる統計力学であると解釈できる。なぜ確率 ρ が指数関数の形をとるのかについては、作用の示量性とか、クラスター分解原理とかいろいろ考えると示せそうな気もするが、今回は深く立ち入らないことにする。

この節の最後に、筆者が研究している格子ゲージ理論は、ファイバー束ととても近い構造を持っていることを指摘しておきたい。格子ゲージ理論は、離散化された格子を時空間にとるが、群は連続のままにとるので、ファイバー空間は離散化されていない。格子状の各点にゲージ自由度を付与するのは、主束のファイバー G を与えている状況と同等であり、リンク変数はとなりあうゲージ変換をまさに“ 接続 ”している。実際、微分を離散化した“ 差分形式 ”なるものが Lüscher によって提案され、差分コホモロジーを用いてトポロジカルチャージも定義、$U(1)$ のカイラルゲージ理論の定式化 [6] に役立ったことも指摘しておきたい。

4　ファイバー束でみた重力理論と solder（はんだ）1-形式

さて、いよいよ一般相対性理論の一階形式をファイバー束で議論しよう。底空間にまだ計量を与えていない４次元の多様体 M、ゲージ群に、実一般線形変換の群 $GL(4,\mathbb{R})$ をとる主束を考える。この主束はフレーム束 $F(M)$ と呼ばれる。

フレーム束には他の主束にはない重要な性質がある。それは平行化可能であるという性質である。接ベクトル束が自明である：多様体全体に、接ベクトルがなめらかに定義できるとき、その多様体は平行化可能であるという。

２次元では経線と緯線が全体にわたって定義できるかどうかを考えればよい。２次元トーラスではこれが可能であり、平行化可能である。２次元球では北極、南極で経線を交差させざるをえないので、平行化可能ではない。平行化可能性＝ぺしゃんこにできるかどうかという直観とも合致しているようである。４次元多様体のフレーム束は、$4 + 4^2 = 20$ 次元の多様体であり、筆者には直接イメージすることはもはや不可能であるが、平行化可能であることは次のようにわかる。

M 上の x における接ベクトル空間 T_xM は $\mathbb{R}^4$ であり、$GL(4, \mathbb{R})$ の４次元同伴ベクトル空間 V も $\mathbb{R}^4$ であるので、$v \in V$ と $t \in T_xM$ をマップする同相写像 e が存在する：

$$v^a = e^a_\mu t^\mu. \tag{11}$$

ここで 4 成分の 1-形式 $e = (e^1_\mu dx^\mu, e^2_\mu dx^\mu, e^3_\mu dx^\mu, e^4_\mu dx^\mu)$ を solder 1-形式 (solder 1-form) という。solder ははんだのことらしいが、日本語ではもう少し無味乾燥的に、標準 1-形式というらしい。この solder 1-形式は物理でいう四脚場にほかならない。フレーム束は“ たまたま ”同伴ベクトル空間と接ベクトル空間が同相であるがために、接続 1-形式とは独立に、solder 1-形式が定義できてしまう。

実は e を solder 1-形式と呼ぶのはやや不正確である。e は M 上の 1-形式であるが、座標変換で不変ではない。座標のとりかたによらない本当の solder 1-形式 θ は、$F(M)$ 上の 1-形式として、

$$\theta = g^{-1} e \tag{12}$$

で与えられる。ゲージ変換 $g \to hg$ で $e \to he$ と変換するので、θ は不変に保たれる。ただし、ここで $F(M)$ 上の局所的な座標を $u = (x, g)$ とした [4]。

θ は $F(M)$ 上の 1-形式であるが、x 方向の成分しか持っていないので、点 u における接ベクトル X がファイバー方向の接ベクトル、つまり $X \in V_u(F(M))$ となるとき、$\langle \theta, X \rangle = 0$ となる [5]。式 (3) で見たように接続 1-形式と $H_u(F(M))$ に属するベクトルとの内積はゼロなので、結局任意の $X \in T_u(F(M))$ について、

$$\langle \omega, X \rangle = 0 \text{ かつ } \langle \theta, X \rangle = 0 \Longleftrightarrow X = 0, \tag{14}$$

となる。このことは、$X \neq 0$ が ω, θ の少なくともどちらかとゼロでない内積を持つことになる。つまり、任意の X を ω, θ を (双対なベクトル空間の) 基底として与えられることがで

[4] 座標のとりかたによらないと言いつつ、式 (12) は明確に座標 $u = (x, g)$ を与えてしまっている。座標を明示しない solder 1-形式の定義は、任意の $F(M)$ 上の接ベクトル場 X に対して

$$\langle \theta, X \rangle = \langle e, \pi_*(X) \rangle, \tag{13}$$

とするようである。ここで π_* は、射影とよばれる全射 $\pi : F(M) \to M$ (フレーム束上の点が M 上のどの点からのびているファイバー上にあるかを指定する写像) の誘導写像 $\pi_* : T(F(M)) \to T(M)$ である。e は θ の引き戻しになっている。難しい！でもこちらの方が $F(M)$ 上の 1-形式であることがはっきりする。

[5] 座標を明示しない定義では、$X \in V_u(F(M))$ となるとき $\pi_*(X) = 0$ であることから示される。

きる。実際、ω の自由度は $4\times 4=16$, θ の自由度は 4 なので、その合計は $F(M)$（の接空間）の次元 20 と一致する。ω, θ はともに $F(M)$ 上でなめらかに定義されているので、任意の接ベクトル場 X が $F(M)$ 上になめらかに定義できる。すなわち、$F(M)$ は平行化可能である。

接続 1-形式を与えるゲージ場とは別に solder 1-形式を与える四脚場が定義できてしまうという事情は、$F(M)$ が平行化可能であるからと言える。通常のゲージ理論と重力理論はそもそも材料が違うのだということがここで理解できる。重力の理論は接続と 4 脚場の 2 種類の場を必要としている。さらに、捩率 2-形式 (torsion 2-form)

$$\Theta = d\theta + \omega \wedge \theta, \tag{15}$$

も定義され、捩率という概念がフレーム束 $F(M)$ に特有であることがわかる。

材料がそろったところで、一階形式の重力理論を展開していこう。まず、自由度の確認をする。ゲージ場は $GL(4,\mathbb{R})$ の生成子が 4 方向あるので、$4^2\times 4=64$、四脚場は $4\times 4=16$ で、全部で 80 個もある。最終的に欲しいグラビトンの物理的な自由度は 2 なので、えらく多く感じられる。以下で見るようにさまざまな物理的な要請で自由度がばっさり落ちていくのはなかなか清々しい。

まず、数学的にはファイバー束の簡約化 (reduction) ということが行われるようである。$GL(4,\mathbb{R})$ の可縮な部分を C と書くと、$GL(4,\mathbb{R})=O(4)\times C$ と書けることが知られている。この C を無視して構造群を $O(4)$ にとりなおすことを、ファイバー束（ここでは主束）の簡約化というそうである。$O(4)$ は物理でいうところの局所ローレンツ群に対応する（今は Euclid 時空だが）。これは多様体に Riemann 計量を与えることを示すらしい。実際、このおかげで計量

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}, \quad \eta_{ab} = \mathrm{diag}(1,1,1,1), \tag{16}$$

が定義でき、Affine 接続

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \left[A^A_\nu\right]^a_b \eta_{ca} e^b_\mu e^c_\sigma g^{\sigma\lambda} + (\text{微分項}), \tag{17}$$

も与えられる。(微分項) の詳細は後で与える。A^A_ν は $O(4)$ のゲージ場である。ここで注目していただきたいのは、どちらも群の添字 a, b について縮約がとられており、$O(4)$ ゲージ不変な量となっていることである。早くも QCD と全く異なる様相を示している。四脚場の登場で、QCD では類似物のない縮約がとられた結果である。

さらに新たなゲージ対称性が登場する。それが一般座標不変性である。これはどんな教科書でも載っているので詳細は省くが、ベクトル場の内積

$$g_{\mu\nu}(x)X^\mu(x)Y^\nu(x) \tag{18}$$

を" 局所的 "な並進に対して保存する対称性として定義され、それは $g_{\mu\nu}$ に計量条件 (metricity condition)

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} - g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} = 0, \tag{19}$$

を課すことで得られる。一般相対論の本質である一般座標不変性というゲージ対称性が、一階形式では2次的に現れるという点が興味深い。しかも、スピノール場を考えない限り、元の $O(4)$ ゲージ対称性は完全に見えなくなってしまうのもおもしろい。

さて、ここで筆者は自由度の勘定をしようとして困ってしまった。まず、ゲージ群の簡約 (reduction) で、ゲージ場の自由度は $6 \times 4 = 24$, $g_{\mu\nu}$ が 10, 四脚場の自由度のうち、$g_{\mu\nu}$ に現れない局所 $O(4)$ 回転の自由度が 6 で、計 40 となっている。しかし、計量条件も一見すると $10 \times 4 = 40$ の条件を課しており、ゲージ群の簡約と計量条件が独立だとすると、物理的な自由度が $80 - 40 - 40 = 0$ になってしまう。実際、ここで残って欲しい自由度は 40 なので、ゲージ群の簡約と、計量条件は物理的に等価な条件でなければならない。

ゲージ群の簡約と計量条件の等価性についていろいろ文献をあさってみたが、見つからないので筆者自身で証明を試みることにした。そのためには、ゲージ群の簡約を具体的に式で書き下し、それが計量条件と等価であることを示せばよい。いろいろ試行錯誤した結果を先に述べると、四脚場に“ 運動方程式 ”

$$[D_\nu e_\mu]^a = (\partial_\nu \delta^a_b + [A_\nu]^a_b) e^b_\mu = 0, \tag{20}$$

を課すことで、これが可能であることがわかった。ここで、A_ν は、$GL(4, \mathbb{R})$ のゲージ場であり、D_ν はただの共変微分である。

ここでゲージ場を対称成分 A^S_ν($10 \times 4 = 40$ 成分) と反対称性分 A^A_ν($6 \times 4 = 24$ 成分) にわけて、$A_\nu = A^S_\nu + A^A_\nu$ とすると、上の式は、

$$(\partial_\nu \delta^a_b + [A^A_\nu]^a_b) e^b_\mu = -[A^S_\nu]^a_b e^b_\mu, \tag{21}$$

と書き直せる。左辺は e^a_μ が 16 成分、A^A_ν が 24 成分、計 40 成分、右辺は A^S_ν が 40 成分あるので、A^S を固定して物理的自由度から排除してしまう条件ととらえることができる。残る反対称の A^A_ν はまさに $O(4)$ 群の生成子になっており、上の方程式により、ゲージ対称性を $GL(4, \mathbb{R})$ から $O(4)$ に簡約化できている。

さらに、

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = -[A^S_\nu]^a_b e^b_\mu [e^{-1}]^\rho_a, \tag{22}$$

という量を定義すると、式（21）は4脚場仮定（vierbein postulate）として知られる式に書き換えられる：

$$[\bar{D}_\nu e_\mu]^a \equiv (\partial_\nu \delta^a_b + [A^A_\nu]^a_b) e^b_\mu = \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a_\rho. \tag{23}$$

ここで $\bar{D}_\nu$ は $O(4)$ ゲージ場に関する共変微分である。この式より、

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho}(g_{\mu\nu}) = \frac{\partial}{\partial x_\rho}(e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}) = [\bar{D}_\rho e_\mu]^a e^b_\nu \eta_{ab} + e^a_\mu [\bar{D}_\rho e_\nu]^b \eta_{ab} = \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\mu\lambda}, \tag{24}$$

が得られる。この式は計量条件 (19) にほかならない。こうして4脚場の運動方程式 (20) を $GL(4, \mathbb{R})$ ゲージ場の対称成分に課すことで、ゲージ群の簡約化と計量条件が同時に得られることが示された。残っている自由度は $80 - 40 = 40$ である。なお、Affine 接続は、

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = [e^{-1}]^\lambda_a [\bar{D}_\nu e_\mu]^a = \left[A^A_\nu\right]^a_b \eta_{ca} e^b_\mu e^c_\sigma g^{\sigma\lambda} + (\partial_\nu e^a_\mu) \eta_{ca} e^c_\sigma g^{\sigma\lambda}, \tag{25}$$

と与えられる。

ここで一般相対性理論の重要な原理、等価原理を登場させよう。等価原理とは、座標変換により、局所的に重力場をゼロにできるという原理で、その必要十分条件は $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ である。この式は捩率 $T^{\lambda}_{\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ がゼロであることと等しい。つまり、等価原理は捩率がゼロであることを要請する原理である。式 (23) を用いると、

$$[\bar{D}_\nu e_\mu]^a-[\bar{D}_\mu e_\nu]^a=0, \tag{26}$$

と書ける。この式を 2-形式ととらえると、式（15）で与えた捩率 2-形式の引き戻しになっており、$F(M)$ 上の Θ ももちろんゼロとなっている。捩率の自由度は 24 あるので、ちょうど $O(4)$ のゲージ場の自由度と同じである。つまり、理論は計量 $g_{\mu\nu}$(10 成分) と四脚場の $g_{\mu\nu}$ を不変に保つ $O(4)$ ゲージ自由度 6 の合計 16（あるいは元々の四脚場の自由度 16）だけで書けるようになっており、接続 A_μ の自由度は完全に消えてしまっている。もはや、筆者が研究している QCD とは似ても似つかない理論になってしまった。どうりで重力は難しいわけである。

最後に局所ローレンツゲージを固定して (自由度 -6) しまうと、計量 $g_{\mu\nu}$(自由度 10) だけで書ける教科書でおなじみの（２階形式の）一般相対論である。$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ も計量だけで書ける Christoffel 記号となる。蛇足ながら、４成分の一般座標変換のゲージ固定、ガウスの法則からくる拘束条件４つより、重力の物理的自由度が 2 成分になることがわかる。

さて、重力場の作用はどのように与えられるだろうか？まず、通常のゲージ理論のときにも存在した θ 項

$$S_\theta=\frac{\theta}{4}\int_M \mathrm{Tr}F\wedge F, \tag{27}$$

はありそうである。しかし、$GL(4,\mathbb{R})$ ゲージ群がコンパクトではないので、QCD のときのように $i\pi\times$(整数) のようにはならなそうである。無理矢理この作用の最小作用の原理から $GL(4,\mathbb{R})$ の可縮部分の $F=0$ が選ばれるような気もするがどうなのだろう？なお、$GL(4,\mathbb{R})$ が $O(4)$ に簡約されていれば、M に境界がなければ θ を除いた部分は Hirzebruch の Signature という整数になるそうである。

また、四脚場もあるので、$\sigma_a^b=(e^{-1})_a^\mu[D_\nu e_\mu]^b dx^\nu$ という量を定義して、

$$\int_M \mathrm{Tr}\left[\sigma\wedge\sigma\wedge F\right], \tag{28}$$

という項も作れそうな気がするが、文献をあさっても見当たらない。運動方程式 (21) はこの作用の極値から出せそうなのであるが $\cdots$ 。

運動方程式 (21) がなんらかのダイナミクスで実現し、ひとたび $GL(4,\mathbb{R})$ が $O(4)$ に簡約され、計量 $g_{\mu\nu}$ が与えられると、作用は無数に書けることができてしまう。その中でも UV 発散がましになると思われる微分の少ないものから挙げていくと、

$$S_\Lambda=\Lambda M_{\mathrm{pl}}^2\int_M e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d\epsilon_{abcd}, \tag{29}$$

が宇宙項、

$$S_{EH}=M_{\mathrm{pl}}^2\int_M e^a\wedge e^b\wedge[\bar{D}A^A]^c_d\eta^{de}\epsilon_{abce}, \tag{30}$$

が Einstein-Hilbert 作用に相当する。$M_{\rm pl}$ はプランクスケールである。ここで、曲率 $\bar{D}A^A$ の一次に比例する項が作用に現れるのは、重力特有であることがわかる。QCD の曲率の 2 次からはじまる作用に比べ、Einstein-Hilbert 作用はいかにも不安定そうで、非定常な解がたくさんあるのもうなづける。また、物質場としてフェルミオン作用

$$S_m = \int_M d^4x \bar{\psi} g^{\mu\nu} \gamma_a e^a_\mu (\partial_\nu + [A_\nu]^b_c \eta^{cd} \gamma_b \gamma_d) \psi(x), \tag{31}$$

(γ_a は 4×4 ガンマ行列。) を理論に組み込むことも可能である。

無数に考えられる高階微分項の寄与が小さく無視できると仮定し、作用 $S = S_\Lambda + S_{EH} + S_m$ に最小作用の原理を適用する。まず、A^A_μ の変分から（フェルミオン場が妙な真空期待値を持たないと仮定して）捩率ゼロの条件 (26) が得られる。つまり、一階形式の重力理論では、等価原理は理論に元々要請しなくても、ダイナミクスとして実現できることがわかる。さらに、e^a_μ を変分すると、Einstein 方程式が得られ、めでたく通常の一般相対性理論に帰着する[6]。最後に以上の議論を表 2 にまとめておく。

表 2: 一階形式から二階形式の一般相対性理論の導出

条件	条件式	ゲージ対称性	基本的な場	自由度
フレーム束	—	$GL(4,\mathbb{R})$	$[A_\mu]^a_b, [e_\mu]^a$	80
↓				
構造群の簡約 (計量条件)	$[D_\nu e_\mu]^a = 0$	$O(4)+$ 一般座標変換	$[A^A_\mu]^a_b, [e_\mu]^a$ ($g_{\mu\nu}$)	40
↓				
等価原理 (捩率ゼロ)	$[\bar{D}_\nu e_\mu]^a - [\bar{D}_\mu e_\nu]^a = 0$	$O(4)+$ 一般座標変換	$[e_\mu]^a$ ($g_{\mu\nu}$)	16
↓				
$O(4)$ ゲージ固定	いろいろ	一般座標変換	$g_{\mu\nu}$	10

5　なぜ重力の量子化は難しいのか？

さて、重力の量子化はなぜ難しいのだろうか？前節で見たように、重力はもう既に古典論レベルで QCD に比べてはるかに複雑なので、難しいことはほぼ自明であるが、もう少し我慢して量子論への拡張を議論してみる。古典レベルで難しくなった理由は、フレーム束が平行化可能なことにより、四脚場という余計な場が登場したことによる。ここでは、この四脚場が量子論を構成する際にも障害となることを見る。なお、これまで試みられた重力の量子化の先行研究には触れず、本稿の主旨である「難かしさ」だけに焦点をあてることにご了解いただきたい。

まず、中西氏が文献 [7] などで、「計量 $g_{\mu\nu}$ をナイーブに量子化しようとするのは間違っている。」と強く主張されているが、これに全面的に賛同することからはじめたい。前節で見

[6] 式 (25) を用いて Riemann テンソルを計算すると、$R^\lambda_{\mu\nu\rho} = [e^{-1}]^\lambda_a [\bar{D}_\rho A^A_\nu]^a_b e^b_\mu$ となっていることがわかる。

た通り、通常のゲージ理論あるいは一階形式から見ると、$g_{\mu\nu}$ は2次的な場であり、2つの四脚場の複合場である。QCD で言えば、$g_{\mu\nu}$ はパイ中間子などに相当する。パイ中間子の有効理論はカイラル摂動論であるが、くりこみ不可能である。だからといって QCD がくりこみできないと言って騒ぐ人はいない。

実際、四脚場はベクトル場であり、スピンは1である。スピン2の場よりも扱いやすいことははっきりしている。場の量子論の教科書ででてくるのも、スピン 0, 1/2, 1 の3つまでである [8]。式 (29) の宇宙項、式 (30) の Einstein-Hilbert 作用を見ても、$g_{\mu\nu}$ で表したときの絶望的にくりこみ不可能な作用とは違って見える。（少なくとも見かけ上）負の質量次元をもった係数は存在しないので、前者を4点自己相互作用、後者をゲージ場との3点相互作用とみて、あとは適当に四脚場の運動項、ゲージ場の運動項を入れたらなんとかくりこみ可能な量子論ができるのではないかという気がしてくる。

しかし、世の中そうは甘くない。上記の四脚場の状況は QED に荷電ベクトル場（ρ中間子とか）を加えている状況と同じである。荷電ベクトル場を基本的な場の自由度としてくりこみ可能な理論が構成できるかというと、答えは「否」である。縦波成分が発散を引き起こし、くりこみを不可能にしてしまう。これを防ぐにはこの新たな荷電ベクトル場が QED とは別のゲージ対称性を持っている必要がある（$SU(2)$ ゲージ対称性を持ち、Higgs 機構で質量を持つ W ボソンはこの例に当てはまる）。つまり、重力の量子化の問題は、四脚場をゲージボソンとするゲージ対称性が見つからないという問題ではないだろうか？

実際、四脚場をゲージ粒子として理論を構成する試みも数多くなされてきたようだ。その成功例が3次元量子重力である。Witten は、3次元重力が量子化可能であることを示し [9]、そこでは三脚場がゲージボソンとしての役割を果たしている。3次元量子重力は三脚場を局所的な並進変換（一般座標変換とは定義が異なる）の生成子ととらえることができ、その作用は Chern-Simons 項の形をしており、その並進変換の下で不変に保たれる。3次元重力では“ たまたま ”拡張されたゲージ対称性があって、三脚場をそのゲージ粒子として扱うことができ、理論をくりこみ可能にできていると言える。

しかし、4次元の重力では四脚場をゲージ粒子としてとらえることはできない。前節で出てきた作用はにこの局所並進に対して不変ではない。そもそも、数学的にも難しい。ファイバー束の節で指摘したように、ファイバー束の構造群はファイバーに線形に作用することを要請しているので、場に線形に作用しない局所並進を新たな構造群ととるようなファイバー束を構成することはできない。

また、1階形式の量子重力理論があったとして、2階形式の古典重力を低エネルギー極限で得る際、表2に与えた各々のステップのどれを原理として要請し、どれをダイナミクスとして実現するかも非自明である。下のほうの捩率ゼロ条件などはなんとかダイナミクスで実現できそうな気がするが、上の方の計量条件をダイナミカルに実現するような高エネルギー理論が作れるのかどうかは想像がつかない。そもそも群がコンパクトでない $GL(4,\mathbb{R})$ を扱うことでもいろいろ問題がありそうである。

6 まとめ

重力の難しさは理論の数学的基礎となるフレーム束が平行化可能なことにある。この平行化可能性により、通常のゲージ場である接続とは別に、四脚場という余計な場が定義できてしまい、理論に組みこまなければならない。四脚場は通常のゲージ理論に存在しない捩率やAffine 接続といった物理量をもたらし、ゲージ不変な作用の形も複雑にする。特に、曲率の一次の項が (Einstein-Hilbert) 作用になるのは、曲率と四脚場の縮約によるものである。

四脚場はゲージ粒子として扱えないスピン 1 粒子であるので、くりこみも難しい。唯一の例外が三脚場を局所並進のゲージ場としてとらえることのできる 3 次元重力理論であるが、たまたま 3 次元の作用が Chern-Simons 作用の形をとっていたという偶発的な対称性の側面は否めない。実際、一般のファイバー束の議論で局所並進変換を構造群としてとらえることはできず、数学的にも多脚場をゲージ粒子とする対称性を導入することは難しいようである。

以上が筆者の結論である。専門家ではないので議論が短絡過ぎるかもしれない。また、フレーム束を出発点とする一階形式そのものが量子化するべき重力理論として間違っているかもしれない。あるいは重力を研究されている方々には自明な内容かもしれない。などなど、本稿の問題点を挙げればきりがないが、専門としている QCD との明確な違いが理解できた点には個人的に満足している。

最後に、本稿を書くことを勧めてくださった尾田欣也氏、四脚場について議論をしていただいた杉本茂樹氏、重力の専門家として本稿のチェックをお願いした棚橋典大氏、三次元球面がなぜ平行化可能かを説明してくださった田中章詞氏、難しい数学の教科書の解読を助けてくださった山口哲氏に感謝する。

参考文献

[1] 内山 龍雄,“ 一般ゲージ場論序説, ” (1987) 岩波書店 (ISBN-10: 4000050400).

[2] C. Nash and S. Sen, “Topology and Geometry for Physicists,” Dover Books on Mathematics Reprint 版 (2011) (ISBN-10: 0486478521).

[3] 中原幹夫 (著)、中原幹夫、佐久間一浩（訳）,“ 理論物理学のための幾何学とトポロジー I, II, ”(2000,2001) ピアソンエデュケーション (ISBN-10: 4894711656, 4894714264).

[4] 小林 昭七,“ 接続の微分幾何とゲージ理論, ” (1989) 裳華房 (ISBN-10: 4785310588).

[5] M. Heller, “Evolution of Space-Time Structure”, Concepts of Physics 3, 2006, pp. 119-133.

[6] M. Luscher, Nucl. Phys. B **549**, 295 (1999) doi:10.1016/S0550-3213(99)00115-7 [hep-lat/9811032].

[7] 中西 襄,“ 重力場の量子論と一般相対論, ” 素粒子論研究電子版 Volume1 (2009).

[8] M. Srednicki, “Quantum Field Theory,” (2007) Cambridge University Press (ISBN-10: 0521864496).

[9] E. Witten, Nucl. Phys. B **311**, 46 (1988) doi:10.1016/0550-3213(88)90143-5.