

シンポジウム報告

日大理工・益川塾連携 素粒子物理学シンポジウム

日程: 2017年11月4日(土)、5日(日)

場所: 日本大学理工学部駿河台校舎1号館6階CSTホール

概要

第7回日大理工・益川塾連携素粒子物理学シンポジウムが、日本大学理工学部素粒子論研究室と京都産業大学益川塾の連携の下、上記の日時・場所において開催された。本シンポジウムは、私立大学が連携して素粒子物理学に関する研究交流を図ることを目的とし、計22件の講演が行われた。講演は場の量子論から素粒子現象論にわたる理論に関するものが中心であるが、Extreme Light Infrastructure と呼ばれる高強度パルスレーザーを用いた大型実験プロジェクトで今後に期待される物理やブラックホール蒸発に伴う情報損失問題における新しいアプローチに関する招待講演も含め、幅広い内容であった。参加者は、日本大学と京都産業大学を中心に、東京大学、東北大学、名古屋大学、広島大学、九州大学、理化学研究所、高エネルギー加速器研究機構、富士通研究所、近畿大学、国土館大学、早稲田大学、上智大学、北里大学、神奈川大学、明治学院大学、埼玉工業大学、静岡県立大学、摂南大学、武蔵高等学校中学校、本郷中学校高等学校などから63名が参加し、大変に有意義なシンポジウムとなった。なお、本シンポジウムは、日本大学量子科学研究所の援助を受けて開催された。

世話人

仲 滋文 (日本大学 理工学部)

二瓶 武史 (日本大学 理工学部)

大谷 聡 (日本大学 理工学部)

梅津 光一郎 (日本大学 理工学部)

山田 賢治 (日本大学 短期大学部)

鈴木 隆史 (日本大学 短期大学部)

杉田 和優 (日本大学 理工学部)

九後 汰一郎 (京都産業大学 益川塾)

菊地 健吾 (京都産業大学 益川塾)

山中 真人 (京都産業大学 益川塾)

出口 真一 (日本大学 理工学部)

三輪 光嗣 (日本大学 理工学部)

三島 隆 (日本大学 理工学部)

江成 隆之 (日本大学 理工学部)

豊田 陽己 (日本大学 短期大学部)

岡野 諭 (日本大学 理工学部)

藤原 侑樹 (日本大学 理工学部)

上村 尚平 (京都産業大学 益川塾)

山津 直樹 (京都産業大学 益川塾)

諮問委員

益川 敏英 (京都産業大学 益川塾)

藤川 和男 (理化学研究所)

曾我見 郁夫 (京都産業大学)

石田 晋 (日本大学 理工学部)

第7回 日大理工・益川塾連携素粒子物理学シンポジウム プログラム

11月4日 (土)

	時間	進行	講演者	内容
	12:30	受付開始		場所： 1号館 6階 CSTホール 入口
座長：仲 滋文 (日大)	13:00 - 13:10	挨拶	高野 良紀 (日大理工・学部次長)	
	13:10 - 13:20	挨拶	益川 敏英 (益川塾・塾頭)	
	13:20 - 13:30	案内	主催者	シンポジウムに関する連絡事項
Session 1 (100分)	13:30 - 14:30	講演	本間 謙輔 (広大)	高強度レーザー場を用いた真空構造への多角的アプローチ
座長：山中 直人 (益川塾)	14:30 - 14:50	講演	植松 恒夫 (益川塾)	電子・光子衝突でのヒッグス粒子生成
	14:50 - 15:10	講演	松崎 真也 (名大)	Dynamical scalegenesis via bosonic seesaw mechanism
	15:10 - 15:30	休憩		
Session 2 (80分)	15:30 - 16:10	講演	曾我見 郁夫 (京産大)	コロイド分散系の粒子相互作用の統一理論
座長：三輪 光嗣 (日大)	16:10 - 16:30	講演	仲 滋文 (日大)	An Approach to Yukawa's Elementary Domain Based on AdS ₅ Spacetime
	16:30 - 16:50	講演	中島 唯仁 (日大)	可換空間上のヤン-ミルズ理論におけるホログラフィックエンタングルメントエントロピー
	16:50 - 17:10	休憩		
Session 3 (100分)	17:10 - 17:30	講演	菊地 健吾 (益川塾)	グラディエントフロー方程式とその拡張
	17:30 - 17:50	講演	二瓶 武史 (日大)	真空エネルギーと正則化の方法について
	17:50 - 18:10	講演	梅津 光一郎 (日大)	曲がった時空における真空条件
	18:10 - 18:30	講演	九後 汰一郎 (益川塾)	Scale Invariance solves Cosmological Constant Problem
	18:30 - 18:50	講演	志摩 一成 (埼玉工大)	Unity of nature -Nonlinear-SUSY invariant General Relativity Theory-
	19:10 - 21:00	懇親会		懇親会 1号館2階 122中会議室 (申込者のみ)

11月5日 (日)

	時間	進行	講演者	内容
	9:30	受付開始		場所： 1号館 6階 CSTホール 入口
Session 4 (120分)	10:00 - 11:00	講演	堀田 昌寛 (東北大)	リンドラー地平面に創発する重力記憶電荷とブラックホール物理
	11:00 - 11:20	講演	三島 隆 (日大)	円筒対称重力波の厳密解による重力波の非線形現象の解析
	11:20 - 11:40	講演	大谷 聡 (日大)	Emergent Anyon Distribution in the Unruh Effect
	11:40 - 12:00	講演	上村 尚平 (益川塾)	弦理論におけるモジュライと現象論
	12:00 - 13:30	昼食		昼食 1号館2階カフェテリア (申込者のみ)
Session 5 (100分)	13:30 - 14:10	講演	藤川 和男 (理研, 日大)	マヨラナニュートリノはボゴリュエボフ準粒子か
	14:10 - 14:30	講演	二間瀬 敏史 (益川塾)	Neutrino mass from the magnitude-redshift relation of SNIa
	14:30 - 14:50	講演	山中 真人 (益川塾)	レプトンフレーバー非保存相互作用の検証に向けたレプトン-核子散乱の高精度定式化
	14:50 - 15:10	講演	山田 賢治 (日大)	Electromagnetic currents for quark-antiquark meson systems and the dimension of bilocal meson fields
	15:10 - 15:40	休憩		
Session 6 (80分)	15:40 - 16:00	講演	太田 信義 (近大)	Classical and Quantum Properties of Unimodular Gravity
	16:00 - 16:20	講演	山津 直樹 (益川塾)	Special Grand Unification
	16:20 - 16:40	講演	三輪 光嗣 (日大)	On bulk field propagator and Wilson loop in AdS/CFT correspondence
	16:40 - 17:00	講演	出口 真一 (日大)	減衰調和振動子の正準量子化 (1つの試み)
	17:00 - 17:10	案内	主催者	シンポジウムに関する連絡事項

目次

序文		i
プログラム		iii
目次		iv
本間 謙輔 (広大)	高強度レーザー場を用いた真空構造への多角的アプローチ	1
植松 恒夫 (益川塾/京大)	電子・光子衝突における Higgs 粒子生成	5
松崎 真也 (名大)	Dynamical scalegenesis via bosonic seesaw mechanism	9
曾我見 郁夫 (益川塾)	コロイド粒子相互作用の断熱対ポテンシャルについて	13
仲 滋文 (日大)	An Approach to Yukawa's Elementary Domain Based on AdS ₅ Spacetime	17
中島 唯仁 (日大)	非可換空間上のヤン-ミルズ理論における ホログラフィックエンタングルメントエントロピー	22
菊地 健吾 (益川塾)	グラディエントフロー方程式とその拡張	23
二瓶 武史 (日大)	真空エネルギーと正則化の方法について	26
梅津 光一郎 (日大)	曲がった時空における真空条件	28
九後 汰一郎 (益川塾)	Scale Invariance solves Cosmological Constant Problem	32
志摩 一成 (埼玉工大)	Unity of nature -Nonlinear-supersymmetric general relativity theory-	40
堀田 昌寛 (東北大)	リンドラー地平面に創発する重力記憶電荷とブラックホール物理	42
三島 隆 (日大)	円筒対称重力波の厳密解による重力波の非線形現象の解析	44
大谷 聡 (日大)	Statistics Interpolation in the Unruh Effect: Anyon Exchange Relation in the Timelike Domain	48
上村 尚平 (益川塾)	超弦理論におけるモジュライと現象論	52
藤川 和男 (日大/理研)	マヨラナニュートリノはボゴリューボフ準粒子か	55
二間瀬 敏史 (京産大)	Constraints of neutrino mass by the lensing effect on the m - z relation of type Ia supernovae	59
山中 真人 (益川塾)	レプトンフレーバー非保存相互作用の検証に向けたレプトン-核子散乱の高精度定式化	62
山田 賢治 (日大)	Electromagnetic currents for quark-antiquark meson systems and the dimension of bilocal meson fields	67
太田 信義 (近大/益川塾)	Classical and Quantum Properties of Unimodular Gravity	74
山津 直樹 (益川塾)	Special Grand Unification	78
三輪 光嗣 (日大)	On bulk field propagator and Wilson loop in AdS/CFT correspondence	82
出口 真一 (日大)	減衰調和振動子の正準量子化 -Two quantization approaches based on the Bateman oscillator model-	86

高強度レーザー場を用いた真空構造への多角的アプローチ

本間謙輔

広島大学大学院理学研究科物理学科

高強度電磁場を真空中に集光すると真空の特性は変化するであろうか？このようないわば励起した真空状態を、様々な波長の探査光を用いて調査することにより、真空の特性の一部として、宇宙を構成する暗黒の成分を垣間見ることができのかもしれない。本稿では、高強度レーザー場を組み合わせ、真空構造を多角的に解明していくアプローチについて概説する。

1 高強度レーザーのおさらい

レーザー強度は J/s/m^2 の単位を持つ。この強度の平方根が電場の強さに比例する。例えば、欧州で誕生した Extreme Light Infrastructure[1] などの最先端の高強度パルスレーザーでは、 $10 \text{ PW} = 1 \text{ kJ}/100 \text{ fs}$ 程度まで利用できる。このパワーのレーザーパルスを回折限界まで絞ると、およそ 10^{24} W/cm^2 となる。これは静電場中で実真空分極が起り得る Schwinger 限界 $\sim 10^{29} \text{ W/cm}^2$ には至っていないが、近年の高強度レーザー技術の進展は凄まじく、いずれ人類はこの真空が破砕する強度へと到達できるであろう。以下では 10 PW までのスケールで実施可能なテーマに集中する。

2 量子光学的観測量と微視的光子-光子散乱

ここで一旦、量子光学的観測量について紹介する。量子光学では物質の光応答を議論するが、その際、以下のように分極の感受率を電場強度にて展開する。

$$P(\omega) = \epsilon_0(\chi^{(1)}(\omega)E + \chi^{(2)}(\omega)E^2 + \chi^{(3)}(\omega)E^3 + \dots) \quad (1)$$

これら物質の分極感受率 $\chi^{(i)}$ は入射する光の周波数依存性をもつ。この描像をそのまま真空に適用した場合、どの次数の効果をみても面白い効果に対応することが分かる。1次の項はローレンツ不変性の破れに他ならない。2次は外電場による真空の屈折率変動を表す。3次は3つの光波が作用して4つ目の光波が生成されるような四光波混合過程などに相当する。本稿ではこのうち2次と3次的効果に着目する。

これらの観測量は、素粒子実験的な視点で言えば、結局、集光したコヒーレントな光子群にコヒーレントな光子群を当てた場合の散乱現象に対応させられる。そこで微視的な視点に戻り、摂動的な光子同士の散乱として捉え直し、様々な光子-光子衝突エネルギーで起り得る散乱を外観してみよう。100 GeV の重心系エネルギースケールでは、ヒッグスが2光子へと崩壊できる。100 MeV では、例えば中性 π 中間子が同様に崩壊する。したがって、原理的にこれらの共鳴は2光子衝突から生成かつ崩壊させられる。さらに、エネルギーを下げ、例えば MeV 領域では主として QED 過程で生じる光子-光子散乱が期待される [2]。それよりもさらに低い eV あるいは sub-eV 領

域においては、QEDの散乱が重心系エネルギーの6乗で抑制されていくことから、ほぼ未知場の交換による散乱しか起こらなくなる。このように極めて軽い場の候補は、擬南部ゴールドストーンボゾン(pNGB)が有力であろう。特にpNGBのうち光子との結合が重力的に弱いものは、宇宙の暗黒成分を自然に説明し得る。可視域近傍のレーザー光は、おおよそ1eVのエネルギーをもつため、レーザー光を色々な衝突幾何で衝突させて直接的に共鳴を作り出すことは、これらのpNGB探索にとって最適である。さらに強調したいことは、レーザーパルス中の光子数である。荷電粒子衝突の場合、衝突バンチあたりの粒子数は空間電荷効果の物理的制限のため高々 10^{11} 個が限度であるが、光子ビームの場合には、真空が破碎する強さまでは集光可能である。現状でMJ($\sim 10^{24}$ の光子数に相当)のコヒーレントな光子を集めることは技術的に可能である。故に、高強度レーザー場による衝突実験は、軽い宇宙暗黒場に対してこれまでにない感度を発揮できる。

3 真空複屈折と真空内四光波混合

2次的効果として、レーザーの集光点をターゲットにした場合の真空複屈折について触れる。複屈折とはターゲットを透過する探査光が感じる屈折率とその偏光状態によって異なる現象である。これに関して、Euler-Heisenbergの有効ラグランジアンに基づく計算が多数ある[3]。例えば、10PWのレーザーを回折限界ぐらまで絞れた場合、焦点極近傍の屈折率変動は 10^{-9} 程度である[4]。このようなわずかな変動を捉える実験的提案も複数ある。多くの場合、探査光も1eV領域[4]であるが、さらにX線領域[5]、 γ 線領域[6]のプロープ光を用いて検証するアイデアもある。また、未だにQEDの効果が見られる到達感度には至っていないが、静磁場中を往復するレーザー光の偏光状態が変化していくことを観測する手法はこれまでに実施されてきた[7]。いずれにしろ、この効果そのものが明白に測られた事例はない。測定ができるだけでも意義はあるが、さらに、QEDに基づく予言と異なる複屈折性を観測した場合、これもまた暗黒成分の効果を間接的に反映している可能性がある点で意義深い。

次に3次的効果として、真空内四光波混合を素粒子的反応の側面から説明する。この効果は、軽い場の共鳴を介する $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \text{共鳴} \rightarrow \omega_3 + \omega_4$ という光子・光子散乱確率を、 ω_4 光のレーザーによって増大させる誘導共鳴散乱に相当する。この過程は、原子群に集光した3色の光が原子を介して混合し、4つ目の光が生み出される量子光学的過程と運動学的に類似している。四光波混合の反応率は、レーザー光子数の3乗に比例し、レーザー時間幅に反比例するため、近未来のレーザーの高強度化かつ高繰り返し化により感度が飛躍的に向上し、究極的には重力結合への感度へと至れる[8, 9]。これまで、真空下で $\omega = \omega_1 = \omega_2$ を満たす単一レーザー集光による準平行光子・光子衝突系(QPS)において、 ω_4 の混合集光により散乱の終状態を誘導する探索を実施してきた(生成光が縮退した四光波混合に相当。 $\omega_3 = 2\omega - \omega_4$ の光子が探索すべき信号)[10, 11]。QPSは1eV未満のsub-eV質量域全体に感度を有する。これに対して重心系エネルギーを上げる場合には、正面衝突系(HCS)による誘導共鳴散乱も利用できる。QPSでは、ルミノシティ因子が減少するため、より低質量域の暗黒場探索には、より高強度のレーザーを必要とする。一方、HCSではルミノシティ因子の増大により比較的低強度のレーザーを用いても結合に関してQPSと同程度以上の感度を見込める[9]。しかし、一度に探索できる質領域が狭い難点はある。本手法が探

索の対象とする pNGB は、強固な理論的背景を持つアクシオン (擬スカラー場)[12] およびディラトン (スカラー場)[13] である。ディラトン場は、有限到達距離の重力源とも捉えられる。ディラトンはスケール変換対称性の自発的破れに伴う pNGB であり、その自己相互作用により微少な質量を持った pNGB である。neV 以上のディラトンが量子アノマリー結合のみを通じて重力程度の強さで物質と相互作用できると、宇宙年齢 (10^{60} プランク単位) の 2 乗に反比例して減衰する宇宙項 (10^{-120} プランク単位) が自然に導出でき、観測値を無理なく説明できる [13]。ディラトンが暗黒エネルギーの候補となるためには、その物質場との結合は重力程度に弱い必要がある。究極的に本手法の感度が重力結合へ至るのならば、それよりも強い結合領域に予言される軽いアクシオンは必然的に観測網にかかる。

4 展望とむすび

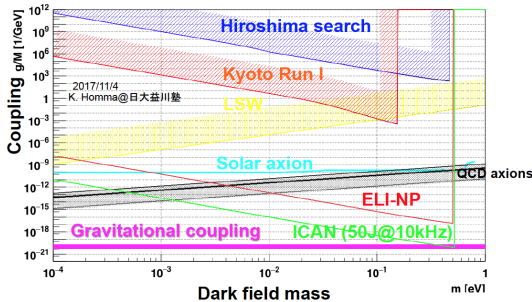


Figure 1: 準平行衝突系における感度上限。

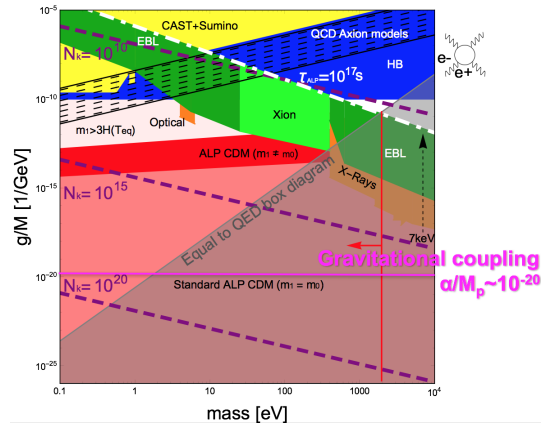


Figure 2: 非対称エネルギー正面衝突系における感度上限。詳細は文献 [9] を参照。

すでに予算措置が行われている ELI プロジェクトのうち、著者らが直接関与しているルーマニアに建設中の ELI-NP[15] には 10PW のレーザーが二基導入されると同時に、700MeV の線形電子線加速器が備えられる予定のユニークな施設である。現在、稼働に向けた準備を進めている。この実験提案の 1 つとして 1 GeV の探査光を用いた真空複屈折の測定提案がある [6]。加えて、真空内四光波探索に関しては、これまでに著者らは上記 QPS の衝突幾何において、テーブルトップの実験として手探りの状態で予備実験を繰り返してきた。これらの準備的研究の段階を経た後、ELI-NP での実験へ拡張することを視野に入れ、SAPPHIRES(Search for Axion-like Particles via optical Parametric effects with High-Intensity laserRs in Empty Space)[14] という国際共同探索チームが立ち上がった。さらに高繰り返しかつ高強度のファイバー束を基礎としたレーザー

ICAN(50J/100fsで繰り返しレート10kHz)が開発の途上にある。Figure 1は、QPSでの探索で期待されるpNGBの質量 m [eV]と光との結合 g/M [GeV⁻¹]に対する95%信頼度の感度上限値を表している。ELI-NPでは、レーザーと静磁場を用いた探索(LSW)の感度上限値 $g/M \sim 10^{-7}$ GeV⁻¹や太陽アクシオン観測による感度上限値 $g/M \sim 10^{-10}$ GeV⁻¹を、比較的重い質量領域で超えられる。一番下の太い水平線は、 M がプランク質量すなわち重力と同程度の弱結合に相当する。一番下の斜線は、ファーバー束レーザー(ICAN)が将来的に利用出来た場合、重力的弱結合の感度領域に触れられることを示す。一方、HCSにおける探索は更なる将来計画としてkeV領域の自由電子レーザー等を用いた探索を構想している。Figure 2はHCSでの探索で期待される感度上限をレーザーパルス当たりの光子数 N_k ごとに示す。このように世界中の高強度レーザー施設を有機的に活用できれば、レーザー強度を上げるにつれて、暗黒場に対する感度は冪的に上昇して行き、究極的には重力並みに弱い相互作用すら散乱現象を通じて見える感度に到達できると見込まれる。真空には何が潜んでいるのか？これが暴かれる日は、それほど遠くないかもしれない。

References

- [1] <http://www.eli-laser.eu/>
- [2] K. Homma, K. Matsuura and K. Nakajima, PTEP **2016**, no. 1, 013C01 (2016).
- [3] W. Dittrich and H. Gies, *Probing the Quantum Vacuum*, Springer, Berlin (2007).
- [4] K. Homma, D. Habs and T. Tajima, Appl. Phys. B **104**, 769 (2011).
- [5] F. Karbstein and C. Sundqvist, Phys. Rev. D **94**, no. 1, 013004 (2016).
- [6] Y. Nakamiya and K. Homma Phys. Rev. D **96**, no. 5, 053002 (2017).
- [7] F. Della Valle *et al.*, Phys. Rev. D **90**, 092003 (2014).
- [8] Y. Fujii and K. Homma, Prog. Theor. Phys **126**, 531 (2011); Prog. Theor. Exp. Phys. 089203 (2014).
- [9] K. Homma and Y. Toyota, Prog. Theor. Exp. Phys. 2017 (2017) no.6, 063C01.
- [10] K. Homma, T. Hasebe, and K.Kume, Prog. Theor. Exp. Phys. 083C01 (2014).
- [11] T. Hasebe, K. Homma, Y. Nakamiya, K. Matsuura, K. Otani, M. Hashida, S. Inoue, S. Sakabe, Prog. Theor. Exp. Phys. 073C01 (2015).
- [12] R. D. Peccei and H. R. Quinn, Phys. Rev. Lett **38**, 1440 (1977); S. Weinberg, Phys. Rev. Lett **40**, 223 (1978); F. Wilczek, Phys. Rev. Lett **40**, 271 (1978).
- [13] Y. Fujii and K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation* Cambridge Univ. Press (2003).
- [14] <http://home.hiroshima-u.ac.jp/spphrs/>
- [15] K. Homma, O. Tesileanu, L. D'Alessi, T. Hasebe, A. Ilderton, T. Moritaka, Y. Nakamiya, K. Seto, H. Utsunomiya, Y. Xu, Romanian Reports in Physics, Vol. 68, Supplement, P. S233-S274 (2016); <http://www.eli-np.ro>.

電子・光子衝突におけるヒッグス粒子生成

京都産業大学益川塾/京都大学国際高等教育院

植松 恒夫

1 はじめに

— 昨年 の 第 5 回 シンポジウム では 標準模型 (SM) の ヒッグス 粒子 を e^+e^- や $e^-\gamma$ 衝突 実験 で 生成 する 過程 に 着目 し, その 過程 の 散乱 振幅 を 記述 する “transition form factor” (遷移形状因子) と 散乱 断面積 の Q^2 依存 性 について 論じ た. 特 に, $e\gamma \rightarrow eH$ の 1-loop レベル の 寄与 は W-loop が top-quark loop に 比べて 圧倒 的 に 大き い こと が 分かった. 一方, 昨年 の 第 6 回 の シンポジウム では Higgs sector を minimal に 拡張 し た 2 Higgs Doublet Model (2HDM) で 登場 する CP-odd Higgs A^0 の 生成 について preliminary な 結果 を 述べ た. 今回は SM Higgs の 場合 を 簡単 に 復習 し て, CP-odd Higgs の 場合 を 詳し く 論じ る.

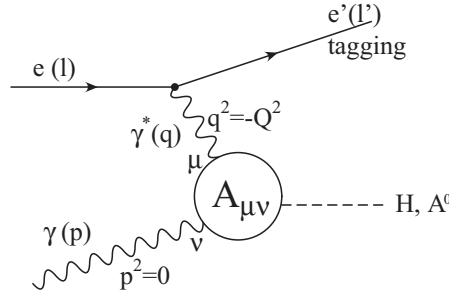


Figure 1: 電子・光子衝突過程での Higgs 粒子 H, A^0 の生成

2 電子・光子衝突での SM ヒッグス生成

Fig.1 に示した $e(l) + \gamma(p) \rightarrow e'(l') + H(q+p)$ の散乱振幅は次式で与えられる。

$$\langle e'H|T|e\gamma \rangle = \bar{u}(l')(-ie\gamma^\mu)u(l)\frac{-i}{q^2+i\epsilon}A_{\mu\nu}\epsilon^\nu(p) \quad (1)$$

上式で, $u(l)$ ($\bar{u}(l')$) は入射電子 (散乱電子) のスピノル, $\epsilon^\nu(p)$ は入射光子の偏極ベクトル。また, 図で示されるテンソル $A_{\mu\nu}$ はゲージ不変性より, 以下のように 2 つの項に分解される。

$$A_{\mu\nu}(q,p) = (g_{\mu\nu}(q \cdot p) - p_\mu q_\nu) S_1(m^2, Q^2, m_H^2) + \left(q_\mu p_\nu - \frac{q^2}{q \cdot p} p_\mu p_\nu \right) S_2(m^2, Q^2, m_H^2) \quad (2)$$

ここで $q^2 = -Q^2 < 0$, $p^2 = 0$ and $(q+p)^2 = p_H^2 = m_H^2$ 。またループを回る粒子の質量を m で表した。今, $p^\nu \epsilon_\nu(p) = 0$ なので, S_1 だけが散乱振幅に寄与する。そこで “transition form factor”, $F_i(m^2, Q^2, m_H^2)$ を以下の式で定義する。

$$F_i(m^2, Q^2, m_H^2) = S_1(m^2, Q^2, m_H^2) / \left(\frac{ge^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{m_W} \right) \quad (3)$$

i はスピンを表し, フェルミオン・ループに対しては, $F_{1/2}$ また W ボソン・ループに対して F_1 である。 e と g はそれぞれ電磁・電弱相互作用の結合定数で, m_W は, W の質量。Total の transition form factor は以下で与えられる。

$$F_{\text{total}}(Q^2, m_H^2) = \sum_f N_c e_f^2 F_{1/2}(m_f^2, Q^2, m_H^2) + F_1(m_W^2, Q^2, m_H^2) \quad (4)$$

ここで N_c は color の数 (レプトンに対し 1, クォークに対し 3, e_f はフェルミオン f の電荷を表す。) ヒッグス粒子の生成断面積は Eq.(4) で与えられる transition form factor の絶対値の 2 乗で表される。one-loop の level では W-loop の寄与が top-quark ループの寄与を遙かに凌駕する [1, 2]。

3 2HDM/MSSM における CP-odd ヒッグス A^0 生成

標準模型での Higgs Sector の minimal な拡張を考える。ここでは MSSM を含む Two-Higgs Doublet Model (2HDM) の type II の場合を考察する。標準模型でそれぞれ, $Y = -1$, $Y = 1$ の $SU(2)_L$ doublet, H_1 , H_2 を考える。ここで考察する type II の場合, H_1 (H_2) は down-type (up-type) のクォーク, レプトンにのみ couple する。これらが, 自発的対称性の破れの結果, 以下の真空期待値をとるものとする。

$$\langle H_1 \rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \tan \beta = v_2/v_1 \quad (5)$$

4 種類の複素スカラー場で自由度が 8 つあるうち, 3 つは W^\pm , Z の縦成分に吸われて残りの 5 つの物理的自由度が以下の 2 種類の荷電 Higgs 粒子と 3 種類の中性 Higgs 粒子となる。

$$\text{Charged } H^+, H^-; \quad \text{CP-even } h^0, H^0; \quad \text{CP-odd } A^0 \quad (6)$$

この type II での A^0 の coupling の特徴は

- A^0 は CP-even の h^0 や H^0 と異なり, tree level で W^+W^- , ZZ のゲージボソン対に couple しない。したがって, W ボソンや Z ボソンの 1-ループは A^0 生成に効かない。
- また A^0 は cubic 相互作用で他の 2 個の physical Higgs boson と couple しない。
- A^0 の fermion への coupling はフェルミオンの質量に比例する。よって fermion としては質量 m_t の top quark のみを考えればよく, A^0 との coupling λ_{γ_5} は $\lambda = -gm_t \cot \beta / 2m_W$ 。

- MSSM の場合, A^0 の質量固有状態の squark 対, $\tilde{q}_i \tilde{q}_i$ ($i = 1, 2$) への trilinear な coupling は消える [4]。よって, スカラーのトップ・クォーク (stop) は $e\gamma$ 衝突での 1-loop レベルの A^0 生成に効かない。

以上の性質から, 1 ループでは top-quark のループのみを考えればよいことが分かる。

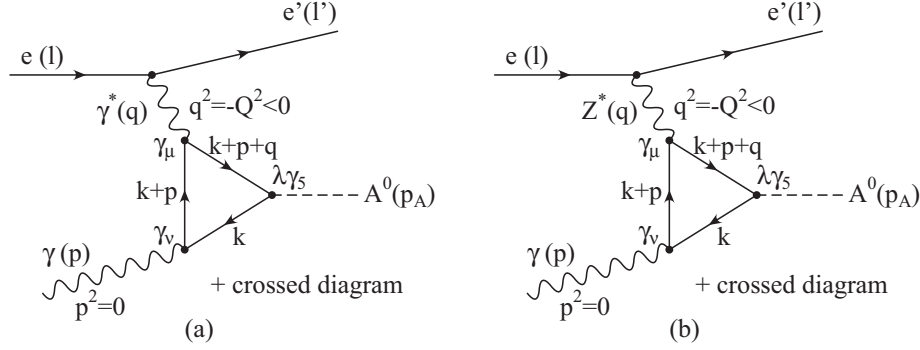


Figure 2: (a) $\gamma^*\gamma$ fusion diagram for $e\gamma \rightarrow e'A^0$ (b) $Z^*\gamma$ fusion diagram for $e\gamma \rightarrow e'A^0$

Figure 2 に示すように $e + \gamma \rightarrow e' + A^0$ には仮想光子 γ^* を交換するグラフと Z ボソン Z^* を交換するするグラフが効くが, 計算の結果, 前者が後者に比べて圧倒的に上回ることが示せる。Fig.2(a) に対する遷移振幅は

$$A_{\mu\nu} = \frac{-ige^2 \cot \beta}{(4\pi)^2} \frac{\tau}{2m_W} \frac{1}{1+\rho\tau} [g(\rho) + 4f(\tau)] \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta \equiv \tilde{S}(m_t^2, Q^2, m_A^2) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta \quad (7)$$

と表される。ここで, $p_1^2 = -Q^2 < 0$, $p_2^2 = 0$, また $(p_1 + p_2)^2 = m_A^2$ (m_A : A^0 の質量) である。 $\tau = 4m_t^2/m_A^2$, $\rho = Q^2/4m_t^2$ として A^0 の Transition Form Factor は以下の式で定義される。

$$\tilde{F}(m_t^2, Q^2, m_A^2) \equiv \tilde{S}(m_t^2, Q^2, m_A^2) / \left(\frac{ge^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{m_W} \right) = -\frac{1}{2} \cot \beta \frac{\tau}{1+\rho\tau} [g(\rho) + 4f(\tau)] \quad (8)$$

ただし, $f(\tau) = [\sin^{-1} \sqrt{1/\tau}]^2$ ($\tau \geq 1$), $-(1/4)[\log[(1 + \sqrt{1-\tau})/(1 - \sqrt{1-\tau})] - i\pi]^2$ ($\tau < 1$) であり, $g(\rho) = [\log[(\sqrt{\rho+1} + \sqrt{\rho})/(\sqrt{\rho+1} - \sqrt{\rho})]]^2$ で定義される関数である。

また微分断面積は

$$\frac{d\sigma(\gamma^*\gamma)}{dQ^2} / \frac{\alpha_{\text{em}}^3 g^2}{64\pi 4\pi} = \frac{1}{Q^2} \left[1 + \frac{(m_A^2 + Q^2 - s)^2}{s^2} \right] \frac{1}{m_W^2} \left| \frac{4}{3} \tilde{F}(m_t^2, Q^2, m_A^2) \right|^2 \quad (9)$$

で与えられる。またここで, $s = (l + p)^2 \approx 2l \cdot p$ である。

Fig.3(a) に A^0 生成の微分断面積 $d\sigma/dQ^2$ を $m_A = 200, 300, 400$ GeV で $\sqrt{s} = 500$ GeV, $m_t = 173$ GeV の場合に示した。この領域では, m_A が増加するにつれて断面積が増すことが分か

る。これをさらに明確にするため、 $Q^2 = (100)^2 \text{ GeV}^2$ のときに微分断面積の m_A 依存性を示したのが、Fig.3(b) である。 m_A が変化して、 $t\bar{t}$ threshold $2m_t \approx 346\text{GeV}$ を横切るとき、 $m_A < 2m_t$ では増加していた $d\sigma/dQ^2$ が $2m_t$ を超えると減少に転じることが分かる。 Q^2 で積分した全断面積も同様に振る舞う。いずれも、threshold 効果に対応した kink 構造が $2m_t \approx 346\text{GeV}$ で現れる。

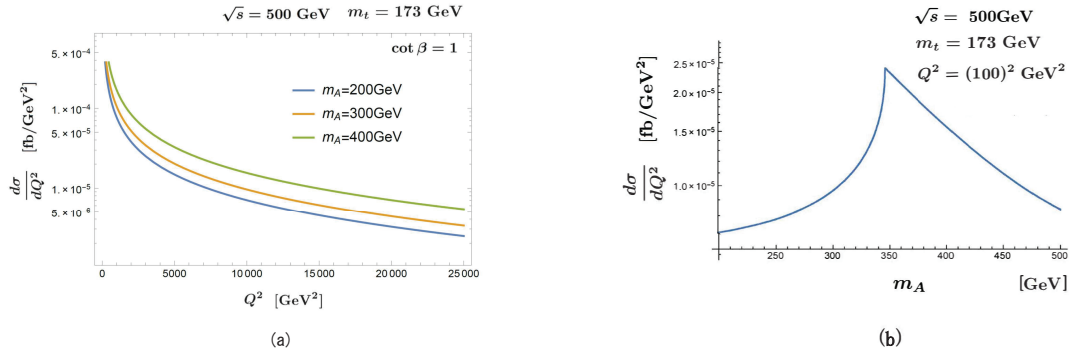


Figure 3: (a) $e\gamma \rightarrow e'A^0$ の微分断面積 (b) $Q^2 = (100)^2 \text{ GeV}^2$ の場合の微分断面積の m_A 依存性

4 結論と今後の課題

ここでは、最初に標準模型でのヒッグス粒子の $e\gamma$ 衝突による生成について述べ、次に、標準模型を超えた MSSM を含む type-II の 2HDM で現れる CP-odd の Higgs 粒子 A^0 の場合について、 $e\gamma$ 衝突での A^0 生成の Transition Form Factor と断面積を求めた。1 ループのレベルでは、top-quark の triangle グラフのみを考慮すれば良いことが明らかになった。また、 Z^* を交換する寄与は γ^* 交換の効果に比べて桁違いに小さいことが分かった。今後はより一般の BSM について研究を進める。

References

- [1] N. Watanabe, Y. Kurihara, K. Sasaki and T. Uematsu, *Phys. Lett.* **B728**, 202 (2014); PoS (RADCOR 2013) 050; PoS (RADCOR 2013) 053; PoS (QFTHEP 2013) 040.
- [2] N. Watanabe, Y. Kurihara, T. Uematsu, and K. Sasaki, *Phys. Rev.* **D90**, 033015 (2014).
- [3] K. Sasaki and T. Uematsu, arXiv:1712.00197 [hep-ph] (2017).
- [4] J. F. Gunion, H. E. Haber, G. Kane and S. Dawson, “The Higgs Hunter’s Guide” (Addison-Wesley, 1990).

Dynamical scalegenesis via bosonic seesaw mechanism

Shinya Matsuzaki

Institute for Advanced Research, Nagoya University, Nagoya 464-8602, Japan.

Department of Physics, Nagoya University, Nagoya 464-8602, Japan.

Abstract

In this talk, an intriguing possibility to dynamically account for all existing particle masses as well as masses for expected dark matter candidate and active neutrinos is introduced. The proposed scenario is based on the so-called classical scale invariance which can be achieved at the Planck scale in terms of a nontrivial renormalization group flow in an over-Planckian quantum gravity theory, called asymptotic safety gravity, hence can be an actual realization of the scale generation (what is called “scalegenesis”). The scalegenesis is triggered by a sequence of seesaw mechanisms (bosonic seesaws) induced from a newly introduced vectorlike confinement sector.

1 Introduction

The standard model (SM) in the field of particle physics has been excellently consistent with experiments so far. In the SM, an elementary scalar field, a Higgs field, plays a role in the spontaneous breaking of the electroweak symmetry to generate masses, and the SM Higgs boson indeed looks much like a scalar boson discovered at the LHC [1, 2]. Thus one might think that it is truly the last piece of the SM, so its discovery would imply the end of the story. However, one has to be aware of lots of observational evidences necessary to account for, which cannot be addressed by the SM alone: for instance, baryon asymmetry of Universe, neutrino masses and mixing structure, and dark matter, and so forth. Even from the theoretical point of view, the SM possesses unsatisfactory ingredient: the source to trigger the electroweak symmetry breaking (EWSB) seems quite ad hoc and involves mysterious stuff: square of the Higgs mass parameter to be negative without any dynamical reason. In that sense, one may thus be urged to go beyond the SM, taking into account the evidences of new physics as above, where the low-energy physics looks much like that of the SM to be consistent with experiments so far.

Once trying to reveal the origin of the EWSB, triggered by the negative mass squared for the Higgs, one necessarily encounters a problem: cancellation of quantum corrections to the Higgs mass which is proportional to the new physics scale. One way to avoid this problem is to invoke the classical scale invariance (CSI), which can forbid all dimensional parameters including the Higgs mass in the theory, hence one is to be free from quantum corrections to the Higgs mass.

Note that the scale symmetry is anomalous to be explicitly broken by quantum corrections, yielding the trace anomaly. The gravitational effects may, however, cancel the trace anomaly and make the theory asymptotically safety [3, 4]. Therefore, one may assume that the CSI is held below the Planck scale, as long as all the couplings in the theory do not reach the Landau pole up to the Planck scale, as argued in [4]. It has recently been argued [5]

that the CSI can naturally be realized at the Planck scale in a sense of the (nonperturbative) renormalization group equation derived from a quantum gravity candidate having a nontrivial ultraviolet fixed point – what is called “resurgence” mechanism by asymptotic safety for quantum gravity). The (running) Higgs mass parameter can naturally be tuned by the nontrivial scaling with the negatively large anomalous dimension, which makes the mass parameter power-damped from the over-Planckian scale down to the Planck scale, to be vanishing, so that the CSI can solve the gauge-hierarchy problem by “the self-tuning mechanism” [5]. Given the CSI successfully at the Planck scale by the above “resurgence” mechanism, the next issue one encounters is to generate *mass scales* and the non-vanishing and negative squared Higgs mass term to retrieve the EWSB: one calls for the *scalegenesis*.

One proposal built on the CSI has been published in the framework of namely the bosonic seesaw mechanism [6, 7], which is triggered by a new strong dynamics [8, 9, 10], what we call the hypercolor (HC). In models of this class, the scale-invariance is dynamically broken by the strong scale intrinsic to the HC dynamics, and the negative-mass squared of the Higgs is then dynamically generated by the seesaw mechanism operative between the elementary Higgs field and a composite Higgs field generated from the HC dynamics, which originates from a Yukawa interaction between the elementary Higgs doublet and HC fermions. (Since the sign is never absorbed by phase rotations in the case of boson fields, the negative sign induced by the seesaw mechanism is manifestly physical to be a trigger of the EWSB.)

In this talk, I introduce the development on the bosonic seesaw model including the $U(1)_{B-L}$ gauge symmetry: all the masses, for the SM particles and $U(1)_{B-L}$ Higgs, gauge boson, and right-handed Majorana neutrinos (RH ν s), are generated singly by the new strong dynamics, the HC, via a sequence of bosonic seesaws (multiple seesaws) involving the HC composite Higgs bosons: that is the *dynamical scalegenesis*. The scale of active neutrino masses is generated via the neutrino seesaw induced from the bosonic seesaw term of the elementary and composite $U(1)_{B-L}$ Higgs bosons. The dark matter candidate also arises as the lightest HC baryon.

2 The dynamical scalegenesis: multiple seesaws

The proposed model for the dynamical scalegenesis consists of the HC sector having the $SU(3)_{\text{HC}}$ gauge symmetry, the SM sector, all having the CSI, so that the Higgs field (H) in the SM sector does not have the mass term. The HC sector includes eight HC gluons of the $SU(3)_{\text{HC}}$ as well as four HC fermions ($F_{i=1,2,3,4}$) forming the the fundamental representation of $SU(4)$, $F_{L/R} = (\chi, \psi_1, \psi_2)_{L/R}^T$. The HC dynamical feature is assumed to be a complete analogue of QCD. In addition to the SM gauge symmetry, the $U(1)_{B-L}$ gauge symmetry is introduced by gauging the global baryon and lepton number symmetries, where the $U(1)_{B-L}$ gauge boson and a new complex scalar (ϕ with $U(1)_{B-L}$ charge +2) weakly couple involving the HC sector and the SM particles. The L/R -HC fermions are vector-likely charged under the SM and $U(1)_{B-L}$ gauges. Their charge assignment is chosen as $\chi = (\chi_1, \chi_2)^T \sim (1, 2, 1/2, -1)$, $\psi_1 \sim (1, 1, 0, -1)^T$, $\psi_2 \sim (1, 1, 0, 1)^T$ for $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y \times U(1)_{B-L}$. To make the $U(1)_{B-L}$ -gauge anomaly-free, three right-handed Majorana neutrinos (RH ν s) $N_R^{\alpha=1,2,3}$ (with no SM charges and $U(1)_{B-L}$ charge -1) are also introduced. The point here is that the gauge-invariance allows the HC

fermions to couple to Higgses H and ϕ and the RHM ν s to do with the ϕ :

$$-y_H \bar{\chi} H \psi_1 - y_\phi \bar{\psi}_2 \phi \psi_1 - y_N^{\alpha\alpha} \phi \bar{N}_R^{\alpha C} N_R^\alpha + \text{h.c.} . \quad (1)$$

At the confinement/strong scale Λ_{HC} , the HC sector dynamics can be described as the ‘‘hadron’’ physics (HC hadron). As in the case of QCD, the lightest HC hadron spectra are then expected to be constructed from the composite scalars and pseudoscalars, pseudo Nambu-Goldstone bosons (pNGBs) associated with the spontaneous ‘‘chiral’’ $SU(4)_{F_L} \times SU(4)_{F_R}$ symmetry breaking. Among those HC hadrons, one finds composite scalars, $\Theta_1 \sim \bar{\psi}_1 \chi$, $\Phi \sim \bar{\psi}_1 \psi_2$ in which the Θ_1 has the same quantum numbers as those of the elementary Higgs doublet H , and the Φ carries the same charges as those the elementary $U(1)_{B-L}$ scalar ϕ does. Of interest is to note that at the Λ_{HC} scale, the y_H - and y_ϕ -Yukawa interactions in Eq.(1) induce the mixing between Θ_1 - H and Φ - ϕ , such as $y_H \Lambda_{\text{HC}}^2 (\Theta_1^\dagger H + \text{h.c.})$ and $y_\phi \Lambda_{\text{HC}}^2 (\Phi^* \phi + \text{h.c.})$. Thus, the mass matrices of the seesaw form are generated:

$$\begin{pmatrix} 0 & y_{H/\phi} \Lambda_{\text{HC}}^2 \\ y_{H/\phi} \Lambda_{\text{HC}}^2 & \Lambda_{\text{HC}}^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

These matrices yield the negative mass-squared for H and ϕ , $m_H^2 \simeq -y_H^2 \Lambda_{\text{HC}}^2$ and $m_\phi^2 \simeq -y_\phi^2 \Lambda_{\text{HC}}^2$ for small Yukawa couplings. Combined with the present quartic potential (with the couplings λ_H and λ_ϕ) terms for H and ϕ , the EWSB and $U(1)_{B-L}$ breaking are thus triggered to develop the vacuum expectation values $v_{\text{EW}} \simeq 246$ GeV and $v_{\phi_1} = \mathcal{O}(\Lambda_{\text{HC}}) = \mathcal{O}(5 - 10 \text{ TeV})$. Then, the physical Higgs boson (h_1) and the $U(1)_{B-L}$ Higgs boson (ϕ_1) respectively arise around the VEVs v_{EW} and v_{ϕ_1} , obtaining the masses $m_{h_1} \simeq \sqrt{2\lambda_H} v_{\text{EW}} \simeq 125$ GeV and $m_{\phi_1} \simeq 2\sqrt{2\lambda_\phi} v_{\phi_1} \simeq \mathcal{O}(10 - 30)$ TeV for $\lambda_\phi = \mathcal{O}(1)$.

The $U(1)_{B-L}$ -gauge breaking VEV, v_{ϕ_1} , makes the $U(1)_{B-L}$ gauge boson (X) and RHM ν N_R^α massive as well: by the ϕ -Higgs mechanism through the covariantized kinetic term $|D_\mu \phi|^2$ the $U(1)_{B-L}$ gauge boson gets the mass of order $\mathcal{O}(g_X \Lambda_{\text{HC}}) = \mathcal{O}(5 - 10 \text{ TeV})$ with the $U(1)_{B-L}$ gauge coupling of $\mathcal{O}(1)$; the N_R^α become massive via the Yukawa coupling $y_N^{\alpha\alpha}$ in Eq.(1), to get the masses $m_{N_R^\alpha} = \mathcal{O}(y_N^{\alpha\alpha} \Lambda_{\text{HC}}) = \mathcal{O}(5 - 10 \text{ TeV})$ with $y_N^{\alpha\alpha} = \mathcal{O}(1)$. We then note that the N_R -mass generation combined with the y_{lN} -Dirac Yukawa term in Eq.(1) induces the neutrino seesaw:

$$\begin{pmatrix} 0 & y_{lN} v_{\text{EW}} \\ y_{lN}^T v_{\text{EW}} & m_{N_R} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

One can realize the neutrino mass scale $m_\nu \simeq y_{lN}^2 v_{\text{EW}}^2 / m_{N_R} = \mathcal{O}(0.1 \text{ eV})$ for $y_{lN} = \mathcal{O}(10^{-5})$.

In addition, the present scenario provides HC baryons with the mass of $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{HC}}) = \mathcal{O}(5 - 10)$ TeV possessing the HC baryon number associated with the global $U(1)_{F_V}$ symmetry, so can be stabilized to be DM candidates. In the present setup for the charge assignment given in the above, the lightest HC baryon turn out to be $\Omega_{(12)} \sim \psi_1 \psi_1 \psi_2$ or $\Omega_{(22)} \sim \psi_1 \psi_2 \psi_2$.

3 Summary

The proposed dynamical scalegenesis has successfully generated masses of the SM particle and active neutrino as well as explained the dark matter, by the multiple seesaw mechanisms induced from the new strong dynamics of the hypercolor. As an evident new physics to

be probed in the future experiments, a number of HC hadrons including the dark matter candidate as the lightest HC baryon, the $B-L$ Higgs, gauge bosons and three heavy RHMs, are predicted at around the order of a few or tens of TeV scale.

More details on the phenomenological consequences derived from the preset dynamical scalegenesis are discussed in the published paper [11].

References

- [1] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Lett. B **716** (2012) 1 [arXiv:1207.7214 [hep-ex]].
- [2] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], JHEP **1306** (2013) 081 [arXiv:1303.4571 [hep-ex]].
- [3] M. Shaposhnikov and C. Wetterich, Phys. Lett. B **683** (2010) 196 [arXiv:0912.0208 [hep-th]].
- [4] A. J. Helmboldt, P. Humbert, M. Lindner and J. Smirnov, JHEP **1707**, 113 (2017) doi:10.1007/JHEP07(2017)113 [arXiv:1603.03603 [hep-ph]].
- [5] C. Wetterich and M. Yamada, Phys. Lett. B **770**, 268 (2017) doi:10.1016/j.physletb.2017.04.049 [arXiv:1612.03069 [hep-th]].
- [6] N. Haba, H. Ishida, N. Okada and Y. Yamaguchi, Phys. Lett. B **754** (2016) 349 [arXiv:1508.06828 [hep-ph]].
- [7] X. Calmet, Eur. Phys. J. C **28** (2003) 451 [hep-ph/0206091]; H. D. Kim, Phys. Rev. D **72** (2005) 055015 [hep-ph/0501059]; N. Haba, N. Kitazawa and N. Okada, Acta Phys. Polon. B **40** (2009) 67 [hep-ph/0504279]; O. Antipin, M. Redi and A. Strumia, JHEP **1501** (2015) 157 [arXiv:1410.1817 [hep-ph]].
- [8] N. Haba, H. Ishida, N. Kitazawa and Y. Yamaguchi, Phys. Lett. B **755** (2016) 439 [arXiv:1512.05061 [hep-ph]].
- [9] H. Ishida, S. Matsuzaki and Y. Yamaguchi, Phys. Rev. D **94**, no. 9, 095011 (2016) [arXiv:1604.07712 [hep-ph]].
- [10] H. Ishida, S. Matsuzaki and Y. Yamaguchi, PTEP **2017**, no. 10, 103B01 (2017) doi:10.1093/ptep/ptx132 [arXiv:1610.07137 [hep-ph]].
- [11] H. Ishida, S. Matsuzaki, S. Okawa and Y. Omura, Phys. Rev. D **95**, no. 7, 075033 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.95.075033 [arXiv:1701.00598 [hep-ph]].

コロイド粒子相互作用の断熱対ポテンシャルについて

京都産業大学 益川塾

曾我見郁夫

－序論－ 第二次世界大戦中の1940年前後に、ロシアの物理学者 Derjaguin と Landau およびオランダの化学者 Verwey と Overbeek は、コロイド分散系のヘルムホルツ自由エネルギーを計算し、粒子の相互作用を記述する遮蔽されたクーロン斥力ポテンシャルを導出した。彼等は、この対ポテンシャルと近距離のファンデルワールス引力の線形結合を用いることにより、分散系中のコロイド粒子の凝集が“添加塩の価数の6乗に比例する”という経験則（Schulze-Hardy 則）を証明することに成功した。これは経験則に頼ってきたコロイド科学に物理学の基礎を与えた画期的な成果であり、以来、彼らの名を冠した Derjaguin-Landau-Verwey-Overbeek の理論（DLVO 理論）がコロイド分散系の安定性と不安定性を記述する“標準理論”と位置づけられてきた。

1970年代に入ると、均質なコロイド粒子が生成され観測技術が急速な進歩を遂げた。その結果、単分散コロイドの溶液で不純な小イオンを十分に除去すると、オパールのような美しい光彩色を放つコロイド結晶が成長することが発見された。この現象は、一時期小イオン濃度が適当な値をとると遮蔽により斥力効果が低下して“DLVO ポテンシャルの第二極小”が生じる結果であると考えられた。この解釈によると、塩濃度を増加させると第二極小は深くなり、DLVO 理論は「添加塩の濃度を増加するとコロイド結晶は安定化する」ことを予言する。

この DLVO 理論の予言を検証するために、蓮等は1973年に、粒子の体積分率と添加塩の濃度の異なるポリスチレンラテックス分散系の状態を観察し、分散系の相図を作成した。塩濃度が低い領域では、分散液はブラッグ回折により美しい虹彩色を発生し、コロイド結晶の形成が確認される。そのような状態から塩濃度を増加させると、共存領域を経て、虹彩色が失われる。すなわち、添加塩濃度を増加させると、結晶は安定性を失って溶解するのである。この蓮の発見を契機に、表面電荷の大きいコロイド分散系で多様な相転移現象が見出され、DLVO 理論の欠陥が明らかになって来た。

遮蔽された静電ポテンシャルは分散系のヘルムホルツ自由エネルギーから導き出されていることに注目し、筆者は分散系のギブス自由エネルギーの導出の可能性を研究した。そして、化学ポテンシャルの総和としてギブス自由エネルギーを計算することにより、コロイド粒子の間に弱い長距離引力成分が残余する可能性を発見した。それ以来、長距離引力の存在の実験的な検証とギブス自由エネルギーの理論に関して、30年以上にわたって論争が続いている。

この小論では、分散系の熱力学量を「母集団平均」に基づいて構成する。その際、小イオンが粒子の外部領域のみに存在することに注目し、排除体積を系の熱力学変数として選ぶことにより、系のギブス自由エネルギーがルジャンドル変換と化学ポテンシャルの総和の二つの方法でヘルムホルツ自由エネルギーから導出可能であることが示された [1]。

－ポアソン・ボルツマン方程式と母集団平均－ コロイド系では、小イオンに比べると、粒子がもつ質量、半径、電荷は圧倒的に大きい。そこで温度 T 、体積 V の分散溶液中で、質量中心 \mathbf{R}_n の

粒子が暫定的に定常的な配位 $\{\mathbf{R}\} = \{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N\}$ をとると仮定する。その配位中で、小イオン気体は熱平衡状態に達し、ボルツマン分布

$$n_j(\mathbf{r}) = n_{j0} \exp\left(-\frac{z_j e}{k_B T} \Psi(\mathbf{r})\right) \quad (1)$$

で記述され、分散系の電位 $\Psi(\mathbf{r})$ はポアソン方程式

$$\epsilon \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) = -4\pi \sum_j z_j e n_j(\mathbf{r}) \quad (2)$$

をノイマン型の境界条件

$$\boldsymbol{\nu}_n \cdot \nabla \Psi(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi Z_n e}{\epsilon} \sigma_n(\mathbf{r}) \quad (3)$$

の下で解くことにより定められる。ここで、 $Z_n e$ は n -粒子は表面電荷で、 $\sigma_n(\mathbf{r})$ は $\boldsymbol{\nu}_n$ を法線ベクトルとする粒子の表面で規格化される。

n -粒子が占める体積を $v_n(\mathbf{R}_n)$ とすると、分散液中で小イオンが分布する排除領域は

$$\bar{V}(\{\mathbf{R}\}) = \{\mathbf{r} \in V : \mathbf{r} \notin v_n(\mathbf{R}_n) \forall n\} \quad (4)$$

と表される。密度 $Q[\Psi(\mathbf{r})]$ を排除領域 $\bar{V}(\{\mathbf{R}\})$ で積分して得られる量 $Q[\Psi]$ は、電位 $\Psi(\mathbf{r})$ と積分領域 $\bar{V}(\{\mathbf{R}\})$ を通して粒子配位 $\{\mathbf{R}\}$ に依存する。しかし、現実のコロイド分散液中で、特定の粒子配位 $\{\mathbf{R}\}$ が出現する確率は極めて小さい。そのため、積分量 $Q[\Psi]$ は熱力学量には成り得ないことに注意しよう。

同一の熱平衡状態を実現させ得る粒子配位は膨大な数存在するのである。そのため、密度 $Q[\Psi(\mathbf{r})]$ から熱力学量 $Q[\Psi]$ を構成するためには、可能なすべての粒子配位に関して母集団平均 (*Ensemble Averaging* (EA)) を取る必要がある。即ち、熱力学量 $Q[\Psi]$ は排除領域 $\bar{V}(\{\mathbf{R}\})$ 上での積分量に母集団平均操作 EA の手続きを適用して

$$Q[\Psi] = \left[\int_{\bar{V}(\{\mathbf{R}\})} Q[\Psi(\mathbf{r})] dV \right]_{\text{EA}} \quad (5)$$

と定義される。この平均操作 EA は、専ら積分領域に対して行われるため、電位 $\Psi(\mathbf{r})$ を介する配位依存性には影響を与えることはない。

この定義式 (5) を分布関数 $n_j(\mathbf{r})$ に適用すると、分散液中の j -種の小イオン数 ions N_j は

$$N_j = \left[\int_{\bar{V}(\{\mathbf{R}\})} n_j(\mathbf{r}) dV \right]_{\text{EA}} \quad (6)$$

と算出される。ポアソン方程式 (2) を排除領域 $\bar{V}(\{\mathbf{R}\})$ 上で積分し母集団平均 EA を取り、ガウスの積分定理を適用し、境界条件 (3) と (6) 式を用いると、電気的中性条件

$$\sum_j z_j N_j + \sum_n Z_n = 0 \quad (7)$$

が求められる。関係式 (1)、(2)、(3) および (6) が所謂ポアソン・ボルツマン (PB) 方程式を構成する。明らかに、PB 方程式は弱いゲージ変換 $\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow \Psi(\mathbf{r}) + c$ (c は任意の定数) の下で不変である。(5) 式で $Q[\Psi(\mathbf{r})] = 1$ と置くと、EA 形式での排除領域の体積 \bar{V} が

$$\bar{V} \equiv \left[\int_{\bar{V}(\{\mathbf{R}\})} dV \right]_{\text{EA}} = V - \left[\sum_n \langle v_n(\{\mathbf{R}_n\}) \rangle \right]_{\text{EA}} = V - \sum_n \langle v_n \rangle \quad (8)$$

と定義される。ここで、 $\langle v_n \rangle$ は n -粒子が占める排除体積である。

ここまで、母集団平均 EA は具体的には指定されていない。ここで、統計物理学でのミクロカノニカル分布の類推で、熱的平衡状態にあるコロイド分散系中では可能な排除領域はすべて等確率で出現すると仮定し、これをフラットな母集団 (*Flat Ensemble Averaging* (FEA)) 呼ぶことにする。即ち、密度 $Q[\Psi(\mathbf{r})]$ を排除領域で積分しフラットな母集団平均操作を適用すると、熱力学量 $Q[\Psi]$ は体積 V を持つ分散系の全体での積分を用いて

$$Q[\Psi] = \left[\int_{\bar{V}(\{\mathbf{R}\})} Q[\Psi(\mathbf{r})] dV \right]_{\text{FEA}} = \bar{f} \int_V Q[\Psi(\mathbf{r})] dV \quad (9)$$

と与えられる。(9) 式で $Q[\Psi(\mathbf{r})] = 1$ と置くことにより、比例因子 \bar{f} は

$$\bar{f} = \frac{\bar{V}}{V} = 1 - \phi = 1 - \frac{1}{V} \sum_n \langle v_n \rangle \quad (10)$$

と決定される。因子 \bar{f} は分散系の排除体積比であり、 $\phi = \sum \langle v_n \rangle / V$ は n -粒子の体積比である。

— 線形ポアソン・ボルツマン方程式 — 分布関数 (1) を展開し $\Psi(\mathbf{r})$ の 1 位まで残すと、(2) 式は

$$\epsilon(\nabla^2 - \bar{\kappa}^2)\Psi(\mathbf{r}) = -4\pi e \frac{1}{V} \sum_j z_j N_j - \epsilon \bar{\kappa}^2 \frac{1}{V} \int_V \Psi(\mathbf{r}) dV \quad (11)$$

となる。ここで $\bar{\kappa}$ は、デバイの遮蔽因子 κ と

$$\bar{\kappa}^2 = \frac{4\pi e^2}{\epsilon k_B T \bar{V}} \sum_j z_j^2 N_j = \bar{f}^{-1} \kappa^2 \quad (12)$$

で結ばれる新しい遮蔽因子である。この式も弱ゲージ変換の下で不変であり、これからも (7) 式の中性条件が導き出される。この式 (11) の弱ゲージ対称性を固定すると、遮蔽因子 $\bar{\kappa}^2$ 持つ線形化された PB 方程式 (LPB)

$$(\nabla^2 - \bar{\kappa}^2)\Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (13)$$

と新たな一次の積分方程式

$$4\pi e \sum_j z_j N_j + \epsilon \bar{\kappa}^2 \bar{f} \int_V \Psi(\mathbf{r}) dV = 0 \quad (14)$$

が導き出される。

コロイド粒子の外部領域の電位は、LPB 方程式 (13) を境界条件 (3) の下で解くことによって決定することが出来る。積分方程式 (14) は分散系全体での電位 $\Psi(\mathbf{r})$ を定める役割を持ち FEA 形式で初めて求められたものである。

– 電位のフーリエ積分表示、ギブス自由エネルギー、状態方程式 – LPB 方程式 (13) と積分方程式 (14) を満たす分散系の電位は、フーリエ積分によって

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\Psi}^{\text{reg}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dV_k \quad (15)$$

と表示することが出来る。ここで、フーリエ変換

$$\tilde{\Psi}^{\text{reg}}(\mathbf{k}) = \bar{f}^{-1} \sum_n \tilde{\Psi}_n^{\text{reg}}(\mathbf{k}) = 4\pi \bar{f}^{-1} \sum_n \frac{Z_n e}{\epsilon} f_n^{\text{reg}}(\mathbf{k}) \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \bar{\kappa}^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n} \quad (16)$$

に含まれる関数 $f_n^{\text{reg}}(k)$ は

$$f_n^{\text{reg}}(k) = f_n^{\text{reg}}(\mathbf{k}) = \frac{e^{-ia_n\sqrt{\mathbf{k}^2}}}{1 - ia_n\sqrt{\mathbf{k}^2}} \equiv \left[\frac{e^{-ia_n w}}{1 - ia_n w} \right]_{w^2=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}} \quad (17)$$

と定義される二重リーマン面上の解析関数である。この積分表示 (15) を用いることにより、コロイド分散系の熱力学関数を発散の困難なく計算することが出来る。

ギブス自由エネルギーから導出されるコロイド粒子の対ポテンシャル

$$U^G(R) = U^F(R) + U^E(R) = \bar{f}^{-1} \frac{Z^{*2} e^2}{\epsilon} \left[\frac{2 + 2\bar{\kappa}a + (\bar{\kappa}a)^2}{1 + \bar{\kappa}a} \frac{1}{R} - \frac{1}{2\bar{\kappa}} \right] e^{-\bar{\kappa}R} \quad (18)$$

は、中距離の強い引力部分と長距離の弱い引力の尻尾を持ち、コロイド分散系のすべての特性を記述することが出来る。排除体積中で熱平衡状態に達する小イオン気体の浸透圧 P_{osm} について、状態方程式

$$P_{\text{osm}} \bar{V} = k_B T \left(\sum_j N_j - \frac{1}{16\pi} \bar{\kappa}^3 \bar{V} \right) - \bar{V} \frac{\partial G_Z}{\partial \bar{V}} \quad (19)$$

が成り立つ。

References

- [1] I. S. Sogami, Progress of Theoretical and Experimental Physics (2018), in press.

An Approach to Yukawa's Elementary Domain Based on AdS₅ Spacetime

K. Aouda^a, N. Kanda^a, S. Naka^a, and H. Toyoda^b

^{a)} *Department of Physics, College of Science and Technology, Nihon University*

^{b)} *Junior College, Funabashi Campus, Nihon University*

E-mail: naka@phys.cst.nihon-u.ac.jp

Abstract

The field equations of elementary domains proposed by Yukawa in 1968 are studied from the viewpoint of a particle embedded AdS₅ spacetime with warp factor, which is known to produce an energy hierarchy along the direction of the fifth dimension. The boundary conditions in the fifth dimension can also add another insight to the field equations in the IR brane, the low energy end of the fifth dimension, due to a periodic structure of the Green function in the bulk; under suitable initial conditions, those field equations are reduced to Yukawa's elementary domain type of equations.

1 Introduction

The extra dimension in AdS₅ spacetime is known to yield several aspects in particle physics. In the Randall-Sundrum model, it plays a role to generate a energy hierarchy between the both ends, the UV brane and the IR brane, of the fifth dimension through the warp factor [1, 2] e^{ky} , ($k \sim l_P^{-1}$). From a quantum mechanical point of view, it gives rise to an another interesting aspect. The fifth coordinate $0 \leq y \leq L$ of a particle embedded in AdS₅ spacetime can not run off the both ends because of the boundary conditions like the infinite square well potential problem. As a result, the Green function in the bulk of AdS₅ spacetime shows a periodic structure with respect to the fifth coordinate [3, 4]. Then, if the fifth dimension becomes time dependent in some way, the y periodicity of the Green function will be transcribed on a time variable. In previous papers [7, 8], we had discussed a possibility that this timelike periodicity causes a difference type of field equation on IR brane, which has a similar structure as Yukawa's elementary domain [5, 6] equation represented by

$$e^{\lambda \cdot \partial} \Psi = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_\lambda} \Psi \quad (1)$$

under suitable choice of initial state on that brane [8]. Yukawa considered this type of equation as the natural landing form of non-local field theories, though there is no guiding principle to derive it. In spite of Yukawa's expectation, the eq.(1) was not suitable as an elementary field equation, since it allows several types of ghost solutions. However, as an effective field equation derived out of some elementary fields theories, it add an interesting viewpoint to the particle physics.

In this article, we summarize the essential points in [8] shortly; and, the discussion is made on the future constructive analysis.

2 Green function in $M_4 \otimes S^1/Z_2$ spacetime

Though the aim of this work is to study the field equations in the IR brane through the Green function in AdS_5 spacetime, we first consider the case of vanishing warp factor ($k = 0$); that is, we start from the analysis of the Green function in $M_4 \otimes S^1/Z_2$ spacetime. The free field of mass m_0 particle in this spacetime is characterized by the following field equation and the boundary conditions:

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu + \hat{p}_y^2 + (m_0 c)^2) \Psi = 0, \quad (2)$$

$$\Psi|_{y=0} = \Psi|_{y=L} = 0 \quad (3)$$

; and so, the complete basis in y space become $\phi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n y)$, ($k_n = \frac{n\pi}{L}$; $n = 1, 2, \dots$), to which the eigenvalue equations $\hat{p}_y^2 \phi_n = (\hbar k_n)^2 \phi_n$, ($n = 1, 2, \dots$) hold. Then it is not difficult to derive ¹

$$\begin{aligned} G_{ba} &= \langle x_b | \otimes \langle y_b | (\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu + \hat{p}_y^2 + (m_0 c)^2 - i\epsilon)^{-1} | x_a \rangle \otimes | y_a \rangle \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} [K((\bar{x}_{ba})^2 + (2rL + 2\check{y}_{ba})^2) - K((\bar{x}_{ba})^2 + (2rL - \check{y}_{ba})^2)], \end{aligned} \quad (4)$$

where we have used the notations $\bar{f}_{ba} = f_b - f_a$, $\check{f}_{ba} = \frac{1}{2}(f_b + f_a)$, and

$$K(z) = \frac{-1}{2\hbar} \int_0^\infty d\tau \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar i\tau}} \right)^5 e^{\frac{i}{2\hbar} [\frac{z}{\tau} - \tau((m_0 c)^2)]}. \quad (5)$$

The structure of the Green function (4) implies that the G_{ba} is periodic with respect to \bar{y}_{ba} and \check{y}_{ba} in such a way that

$$G_{ba}(\bar{x}_{ba}, \bar{y}_{ba}, \check{y}_{ba}) = G_{ba}(\bar{x}_{ba}, \bar{y}_{ba}, \check{y}_{ba} \pm L) = G_{ba}(\bar{x}_{ba}, \bar{y}_{ba} \pm 2L, \check{y}_{ba}). \quad (6)$$

Those periodic properties may not be so effective for the fields confined in the IR brane, since $\bar{y}_{ba} = 0$ and $\check{y}_{ba} = L$ on its. However, if the extra dimension is time dependent or moving, then the situation will be changed.

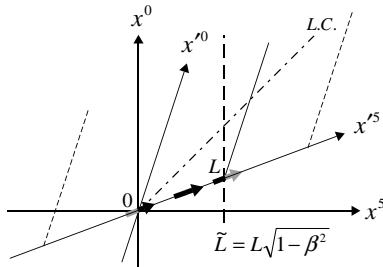


Figure 1: $y(x^5)$ and $y'(x'^5)$ related by a Lorentz boost

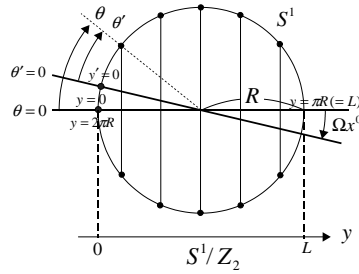


Figure 2: rotation of $dy = Rd\theta$ into $dy' = Rd\theta'$

¹In the derivation, the Poisson summation rule is used.

The fig.1 and fig.2 are examples of time dependent extra dimensions; for example in fig.2, the time-dependent extra dimension due to the rotating S^1 background, the world line element of the particle can be represented by

$$ds^2 = dx'^{\mu} dx'_{\mu} + (Rd\theta')^2 = -(dx^0)^2 + dx^i dx_i + (dy - \beta dx^0)^2, \quad (7)$$

where $c\Omega$ is an angular velocity of the rotation. In what follows, we consider this case only; the line element for fig.1, however, is essentially the same as the above except the coefficients of dy and dx^0 in the rightmost square term of eq.(7). The action of spinless particle can be defined by $dS = -(m_0 c) \sqrt{-ds^2}$, which gives rise to the constraint

$$\mathcal{K} \equiv -(p_0 + \beta p_y)^2 + p^i p_i + p_y^2 + (m_0 c)^2 = 0, \quad (8)$$

where p_{μ} and p_y are respectively the momenta conjugate to x^{μ} and y . In q-number theory, the constraint (8) can be read as the field equation $\hat{\mathcal{K}}\Psi = 0$; or, using $U = e^{\frac{i}{\hbar}\beta x^0 \hat{p}_y}$, one can write

$$U\hat{\mathcal{K}}\Psi = \{\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu} + p_y^2 + (m_0 c)^2\}\tilde{\Psi} = 0 \quad (\tilde{\Psi} = U\Psi) \quad (9)$$

Then, the Green function in $\{\tilde{\Psi}\}$ space is nothing but (4); and with $\mathcal{G}_{ba} = (U^{-1}G_{ba}U)|_{y_a=y_b=L}$, the propagation of fields on the IR brane can be written as

$$\Psi_b(x_b) = \int d^4 x_a \mathcal{G}_{ba} \Phi_a(x_a), \quad (10)$$

where $\Phi_a(x_a)$ is an appropriate initial state. Under the operation of U^{-1} , the \check{y}_{ba} in eq.(6) is replaced by $L - \beta \check{x}_{ba}^0$ in \mathcal{G}_{ba} ; and, there arises the periodicity $\check{x}_{ba}^0 \rightarrow \check{x}_{ba}^0 \pm \beta^{-1}L$ in \mathcal{G}_{ba} . Then, it is not difficult to verify that

$$e^{\pm L_R(\partial_0)_b} \Psi_b(x_b) = \int d^4 x_a \mathcal{G}_{ba} \Phi_a(x_a^0 \pm L_R, x_a^i). \quad (11)$$

Here, if we put the initial state with $m = m_0 e^{-0 \cdot L} = m_0$ so that

$$\Phi_a(x) = \delta(\hat{p}^2 + (mc)^2) \theta(\hat{p}^0) \phi_a(x), \quad (12)$$

one can derive the domain type of equation

$$e^{\pm L_R(\partial_0)_b} \Psi_b = e^{\mp \frac{i}{\hbar} \hat{S}_b} \Psi_b \left(\hat{S} = L_R \sqrt{\hat{p}^2 + (mc)^2} \right), \quad (13)$$

where $L_R = L/\beta$. In this stage, the \pm signs are arbitrary; and the combination of those signs should be chosen by taking into account the asymptotic conditions and the symmetry of system.

3 Green function in AdS₅ spacetime with non-zero warp factor

Until now, we have discussed the specific case with $k = 0$; further, the field equation (13) has been a difference equation along the time direction, in which the Lorentz symmetry is broken.

For the case of $k \neq 0$, one can start from the action $dS = -(m_0c)\sqrt{-ds^2}$ with the world line element

$$ds^2 = e^{-2ky}dx^2 + \{dy - \beta e^{-ky}(dx^0 + du)\}^2, \quad (14)$$

where u is a supplementary variable to fix the operator ordering in q-number theory. The action gives rise to the constraints

$$\mathcal{K}_\beta \equiv e^{2ky} \{-(p_0 - p_u)^2 + p_i p^i\} + \{p_y^2 + (m_0c)^2\} = 0, \quad (15)$$

$$\phi_\beta \equiv p_u + \beta e^{-ky} p_y = 0. \quad (16)$$

We read the eq.(15) as the field equation $e^{-2ky} \hat{\mathcal{K}}_\beta \Psi = 0$, ($z = e^{ky}$) in q-number theory. Then the field $\tilde{\Psi} = \sqrt{z} U \Psi$, ($U = e^{-\frac{i}{\hbar} x^0 \hat{p}_u}$) with $z = e^{ky}$ satisfies

$$\left\{ \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu + \hat{p}_z^2 - (\hbar k)^2 \frac{\Delta}{z^2} \right\} \tilde{\Psi} = 0, \quad \left(\Delta = \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{m_0c}{\hbar k} \right)^2 \right). \quad (17)$$

In this step, we eliminate \hat{p}_u by regarding $\hat{\phi}_\beta = 0$ as the definition of \hat{p}_u ; and, henceforth, we deal with $U^{-1} = e^{-\frac{i}{\hbar} x^0 \beta e^{-ky} \hat{p}_y}$. The field equation for $\tilde{\Psi}$ is reduced to the eq.(9) for $\Delta = 0$, i.e., for $m_0 = \frac{1}{2} \frac{\hbar k}{c} = \frac{1}{2} M_P$. Under this parameter tuning, the Green function in $\{\tilde{\Psi}\}$ space coincides with (4) by the substitution z and $L_{(z)} (= e^{kL} - 1)$ for y and L , respectively. Therefore, retracing the functional space by $\Psi = U^{-1} (z^{-\frac{1}{2}} \tilde{\Psi})$, we arrive at the domain type of field equation

$$e^{\pm L'_R (\partial_0)_b} \Psi_b = e^{\mp \frac{i}{\hbar} \hat{S}_b} \Psi_b, \quad \left(\hat{S} = L'_R \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + (mc)^2}, \quad L'_R = 2L_{(z)}/k\beta \right) \quad (18)$$

by assuming again the initial state (12).

Until now, the difference operation has been taken along the time direction. As a possible way to obtain a covariant difference field equation, we try to modify the $(dx^0 + du)$ in the line element (14) by $(V \cdot dx + du)$, where V^μ is a four vector constructed out of dynamical variables other than x^μ of the particle under consideration. In [8], we studied the V^μ represented by a bi-linear form of two Majorana spinors. Then V^2 and V_\parallel^2 , ($V_\parallel^\mu = p^\mu (p \cdot V)/p^2$) become constants depending on the dimensions of the spin-representation spaces; and, with the $z = \frac{1}{\sqrt{A}} e^{ky}$, ($A = (V^2 - V_\parallel^2)\beta^2 + 1$) defined anew, the counterpart of eq.(17) can be written as

$$\left\{ \hat{p}^2 + \hat{p}_z^2 - (\hbar k)^2 \frac{\Delta'}{z^2} \right\} \tilde{\Psi} = 0, \quad \left(\Delta' = \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{m_0c}{\sqrt{A}\hbar k} \right)^2 \right). \quad (19)$$

The result implies that the field equation in bulk is again reduced to eq.(9) under the parameter tuning $\Delta' = 0$; and so, according to a similar procedure from (9) to (19), we can arrive at the domain type of field equation

$$e^{\pm L' (V \cdot \partial)_b} \Psi_b = e^{\mp \frac{i}{\hbar} \hat{S}_b} \Psi_b \quad (L' = 2L_{(z)}/(k\beta V_\parallel^2)), \quad (20)$$

where $\hat{S} = L' \left(V^0 \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + (mc)^2} + \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right)$.

4 Discussion

In this article, we have shown that Yukawa's domain type of field equations (1) arise naturally as effective one's at the IR brane in the AdS_5 spacetime. The keys to get such a field equation are threefold: some periodic structures of Green functions for elementary fields in bulk associated with a compact fifth dimension, time dependence of the extra dimension giving a time periodicity to the Green function, and a suitable choice of the initial state at the IR brane. One can expect that a similar difference field equation arises at boundaries in higher-dimensional spacetime such as $AdS_5 \otimes$ (compact space) too.

The ways giving the initial states, however, remain in ambiguous situation. Those setup may become clearer by taking the CFT structure at the IR brane into account; we only point out that the initial state (12) with $m = 0$ is able to have a definite scaling dimension provided that $\phi_0(x)$ have a scaling dimension. In the last step to derive the domain type of field equations, we have introduced four vector V^μ that defines a direction of displacement; then, the fields in the IR brane become those with spin's degrees of freedom. The particle model can be extended so as to include internal degrees of freedom of a compact group in addition to spin's degrees of freedom. Then, in the IR brane, there arise a variety of fields including gauge fields, which may add a relevant viewpoint to eq.(1).

References

- [1] L. Randall and R. Sundrum, *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370 [hep-th/9905221][inSPIRE].
- [2] L. Randall and R. Sundrum, *An Alternative to Compactification*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690 [hep-th/9906064][inSPIRE].
- [3] M. Goodman, *Path integral solution to the infinite square well*, Am. J. Phys. **49**, (1981) 843.
- [4] W. Janke and H. Kleinert, *Summing Paths for a Particle in a Box*, Letter al Nuovo Ciment **25** (1979) 297 [inSPIRE].
- [5] Y. Katayama and H. Yukawa, *Field Theory of Elementary Domains and Particles. I*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **41** (1968) 1 [inSPIRE].
- [6] Y. Katayama, I. Umemura and H. Yukawa, *Field Theory of Elementary Domains and Particles. II*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **41** (1968) 22 [inSPIRE].
- [7] K. Aouda, N. Kanda, S. Naka, and H. Toyoda, *Deformed Extra Dimension* in Proceedings of the 6th CST-MISC Joint Symposium on Particle Physics, Soryushiron Kenkyu Vol26 (2017).
- [8] K. Aouda, N. Kanda, S. Naka, and H. Toyoda, *An Approach to Yukawa's Elementary Domain Based on AdS_5 Spacetime*, hep-th 1710.09677 [inSPIRE].

非可換空間上のヤン-ミルズ理論における ホログラフィックエンタングルメントエントロピー

日本大学工学部
中島 唯仁

場同士の積が Moyal 積により定義される非可換空間 (Moyal 空間) 上のゲージ理論に対して、ゲージ・重力対応に基づく重力双対な模型の存在が知られている [1]。非可換空間上のゲージ理論は、紫外領域 (近距離) に現れる発散が、赤外領域 (遠距離) に現れる発散と混合してしまう所謂 UV/IR mixing 等、通常の局所場の理論には見られない興味深い性質を有する。しかしながらこの理論の非局所的な性質により、摂動論的な解析においても理論の性質を調べることは難しい。ゲージ・重力対応に基づく解析により、理論の非摂動的な性質を含む種々の性質を調べることが可能となる。ゲージ・重力対応に基づく解析により、空間の非可換性が理論の非摂動的性質に反映し得ることが明らかにされている [2]。

非局所的な場の理論の一例である非可換空間上のゲージ理論において、エンタングルメントエントロピーがどのような性質を有するかという問題は興味深い問題である。最近、非可換空間上のラージ N ゲージ理論におけるエンタングルメントエントロピーが笠-高柳の処方箋に基づいて評価され、理論の非局所性により、エンタングルメントエントロピーの発散部分が理論の固有のスケールまでは体積則に従う等の報告がなされた [3]。空間の非可換性が理論の物理的性質に反映される非自明な例といえる。今回我々は、非自明な B 場及び D インスタントンを背景とするホログラフィックゲージ理論に基づいて、非可換空間上のゲージ理論のエンタングルメントエントロピーを評価し、その様相について調べた。その結果、エンタングルメントエントロピーの発散部分には D インスタントンの効果は現れず、それは体積則に従うことが確かめられた。一方、エンタングルメントエントロピーの有限部分は、D インスタントンの効果によりそのスケール依存性が修正され、紫外領域における振舞いが、赤外領域における振舞いに近づくことが確認された。D インスタントンを背景とするホログラフィックゲージ理論において、D インスタントンは赤外領域における Wilson ループの振舞いを変えることが知られている [4]。これは、UV/IR mixing を通じた D インスタントンの非自明な効果の表れであると考えられる。また、エンタングルメントエントロピーから評価される相互情報量においても、D インスタントンは非自明な効果を及ぼすことが確かめられた。

References

- [1] A. Hashimoto and N. Itzhaki, Phys. Lett. **B465** (1999) 142-147; J. M. Maldacena and J. G. Russo, JHEP **9909** (1999) 025.
- [2] T. Nakajima, Y. Ohtake and K. Suzuki, Phys. Rev. **D96** 046018 (2017); T. Nakajima, Y. Ohtake and K. Suzuki, JHEP **09** 054 (2011).
- [3] J. L. Karczmarek and C. Rabideau, JHEP **10** (2013) 078; W. Fischler, A. Kundu and S. Kundu, JHEP **01** 137 (2014).
- [4] Hong Liu and A.A. Tseytlin, Nucl. Phys. **B553** 231-249 (1999).

グラディエントフロー方程式とその拡張

京都産業大学益川塾

菊地健吾

kikuchi@cc.kyoto-su.ac.jp

1 グラディエントフロー方程式とその一般化

グラディエントフローの方法とは、2010年、Martin Luscher [1] によって提唱された、ゲージ場の量子論の発散を押さえる新たな機構である。グラディエントフロー方程式は一種の拡散方程式で、その解で与えられる新しいゲージ場によって描かれる相関関数は、複合演算子繰り込み、Zファクター繰り込みを必要とせず、紫外発散が出ないという性質を持つ。この有限性の性質を使って、格子理論を中心に研究が行われている。

1.1 一般化されたグラディエントフロー方程式

オリジナルなグラディエントフロー方程式は $d = 4, \text{SU}(N)$ (格子) ゲージ理論に対するものであったが、我々はこの方程式をより一般的な系にも適用できるように、一般化されたグラディエントフロー方程式を提唱した [2]。

$$\frac{\partial \phi^a(t, x)}{\partial t} = -g^{ab}[\phi(t, x)] \frac{\delta S}{\delta \phi^b(t, x)} \quad (1)$$

ここで、 g^{ab} は、以下で定義されるノルムを不変に保つように導入されたメトリックである。

$$\|\delta\phi\|^2 = \int d^D x g_{ab}(\phi(x)) \delta\phi^a(x) \delta\phi^b(x), \quad a = 1, 2, \dots, M. \quad (2)$$

ここで M は場の component の数である。このようなメトリックを導入することにより、系のもつ対称性の変換に対して、一般化されたグラディエントフロー方程式はその形を変えない。(1) はオリジナルなグラディエントフロー方程式の内容を包括する一方、非線形な対称性をもった理論にも適用が出来る。以下この方程式を適用した例をあげる。

1.2 SUSY グラディエントフロー方程式

(1) を $N = 1, d = 4, \text{SU}(N)$ 超対称 Yang-Mills 理論に適用することで、SUSY グラディエントフロー方程式を得ることが出来る [2]。この方程式はフロー時間発展に対して、超対称性と超ゲージ対称性を明白に保っている。一方で、方程式に無限回の交換関係がでてくるために、解析的に解くことが出来ない。そこで Wess-Zumino ゲージを取ることで解析を試みた。ここで問題となるのは、フロー時間発展に伴い、Wess-Zumino ゲージが保たれるかということであるが、超ゲ

ジ変換で書けている適切な項を方程式に付け加えることにより、Wess-Zumino ゲージ内に閉じた方程式を得ることが可能であることを示した。超対称性理論において、ゲージ場と物質場の方程式は超対称性変換によって結びついているため、我々の結果は物質場のグラディエントフロー方程式の構成という意味でも意義がある。

1.3 ラージ N グラディエントフロー方程式

グラディエントフロー方程式の非摂動的な性質を調べるため、(1) を $d = 2$, $O(N)$ 非線形シグマ模型に適用、解析を行った [3]。この模型はラージ N 極限で厳密に解くことができることが知られている。我々はこの模型に対するグラディエントフロー方程式がラージ N 極限で非常に簡単になること（ラージ N グラディエントフロー方程式）を発見し、この方程式を解析的に解くことにより、2 点相関関数が付加的な繰り込みなしに有限になることを、非摂動的に示した。これは今まで摂動的にしか示されていなかったグラディエントフローの性質を非摂動的に示した初めての例である。

2 作用のグラディエントで書けないフロー方程式

グラディエントフロー方程式は、作用のグラディエントで書けていることからその名が付けられたわけだが、簡単な次元解析からわかることは、 Ω を一般の場合、 d を時空次元、 N を super charge の数とした時、

$$[\Omega] = \frac{d-2}{2} - \frac{N}{4} \quad (3)$$

を満たさない時、フロー方程式はそもそも作用のグラディエントでは書けない。そのような場合においても有限性の性質をもつある種のフロー方程式が得られるかどうか調べることは重要である。本研究では作用のグラディエントでかけないフロー方程式について、その構成方法を提唱した [4]。フロー方程式は以下の 2 つの要求、

1. 系が持っている性質（対称性、constraint）を保存する
2. 拡散方程式で描ける

を満たすとする。このもとで、 $d = 2$, 超対称 $O(N)$ 非線形シグマ模型に対するフロー方程式を構成した。解析の結果、この模型の超場のフローは、そのスカラー項のフローのみに支配されることがわかった。さらにラージ N 極限を取ることで、2 点相関関数が非摂動的に有限であることを示した。

3 今後の展望

グラディエントフロー方程式はその有限性という特殊な性質を使って、主に格子ゲージ理論において様々な研究がなされている。しかし、我々の研究からもわかる通り、この性質は格子ゲージ

理論に限ったことではなく、広く様々な理論で応用に繋げて展開することが可能である。また、何故このような性質を持っているのか、その背景にある物理を考察することも重要である。今後の研究の発展が期待される。

References

- [1] M. Luscher, “Properties and uses of the Wilson flow in lattice QCD,” *JHEP* **1008** (2010) 071, [arXiv:1006.4518 \[hep-lat\]](#).
- [2] K. Kikuchi and T. Onogi, “Generalized Gradient Flow Equation and Its Application to Super Yang-Mills Theory,” *JHEP* **1411** (2014) 094, [arXiv:1408.2185 \[hep-th\]](#).
- [3] S. Aoki, K. Kikuchi, and T. Onogi, “Gradient Flow of $O(N)$ nonlinear sigma model at large N ,” *JHEP* **04** (2015) 156, [arXiv:1412.8249 \[hep-th\]](#).
- [4] S. Aoki, K. Kikuchi, and T. Onogi, “Flow Equation of $N=1$ Supersymmetric $O(N)$ Nonlinear Sigma Model in Two Dimensions,” [arXiv:1704.03717 \[hep-th\]](#).

真空エネルギーと正則化の方法について

日本大学理工学部

二瓶 武史

宇宙観測から得られた真空エネルギー密度 $\rho_{\text{DE}} \sim (\text{meV})^4$ は理論的な見積り ($M_{\text{P}} \sim 10^{19}$ GeV の 4 乗) より 120 桁小さい。これは裸の宇宙項 Λ と量子補正の間の不自然な微調整が必要であることを意味する。これが宇宙項問題である [1]。

ここで、量子補正とは場の理論のゼロ点エネルギーに起因するものである。例として、平坦な時空における質量 m の自由なボソン場を考える。運動量 k を上限 M でカットオフ ($k < M$) する正則化を用いると、エネルギー密度および圧力は、それぞれ次のように書ける。

$$\begin{aligned}\langle \rho \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\omega_k}{2} = \frac{1}{16\pi^2} \left(M^4 + M^2 m^2 - \frac{m^4}{2} \log \frac{2M}{m} \right) \\ \langle p \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\mathbf{k}^2}{6\omega_k} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{M^4}{3} - \frac{M^2 m^2}{3} + \frac{m^4}{2} \log \frac{2M}{m} \right)\end{aligned}$$

ここで、 $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ 。上の式から、対数発散以外は状態方程式 $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ を満たさず、宇宙項の繰り込みで有限に出来ないことが分かる。これはこの正則化が Lorentz 対称性を破るためであり、繰り込みによって有限な値を得るためには、Lorentz 不変な正則化を用いる必要がある。

Lorentz 不変な正則化として次元正則化 [2] や zeta 関数正則化 [3] などが挙げられる。これらはゲージ不変な正則化で、解析接続を用いて正当化されるが、ベキ乗の発散 M^4 , M^2 がなく、 $\log M$ 発散のみが存在する。以下では、特に zeta 関数正則化に関して、解析接続を行わない素朴な物理的モデルとして正則化を実現できないかについて考察する。通常は正則化の方法によらない部分が物理的に意味があると考えられるが、ここでは正則化が UV complete な理論の effective な記述になっている可能性を考える。Zeta 関数正則化では、例えば次のような等式が成り立つ。

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$$

これを実現する物理的モデルとして、3つのうまく行かない試みを紹介する。

1つ目は、次のように和の順序を変えることである。

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n = \sum_{n=1}^{\infty} [F(n) - F(n-1)] \stackrel{?}{=} -C$$

ここで $F(n) = \frac{n(n+1)}{2} + C$ であり、定数 C は条件 $\int_0^1 F(x-1) dx = 0$ から $C = \frac{1}{12}$ と定める。発散する級数の中で和の順序を変えることは出来ず、上の変形は正しくない。また、通常の場合の理論の真空エネルギーに現れる和は変形前の順序であり、このような機構で有限にすることは出来ない。

2つ目の試みは、経路積分を定義する際の時間間隔 Δt を微調整するというものである。1+1次元の massless 自由場を考え、系のサイズを L として固定端条件の下で量子化すると、真空エネルギーは発散級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ に比例する。関数 $f(x) = (1-x)^2$ を用いてこれを次のように正則化する。

$$S_N = \sum_{n=1}^N n f\left(\frac{n}{N}\right) = -\frac{1}{12} + \frac{N^2}{12}$$

これは x を間隔 $\Delta x = \frac{L}{N}$ で離散化して N 個の質点系と考えることに対応している。真空のエネルギーは $E_{\text{vac}} = E_{\text{div}} + E_{\text{finite}}$ と書ける。ここで $E_{\text{div}} = \frac{\pi N^2}{24L}$, $E_{\text{finite}} = -\frac{\pi}{24L}$ である。条件 $\exp(-iE_{\text{div}}\Delta t) = 1$ を満たすように時間間隔を $\Delta t = \frac{48L}{N^2}$ と選ぶと、無限大は見えなくなる。これは無限大の fine tuning であるが、スケーリング $\Delta t \propto \frac{(\Delta x)^2}{L}$ の要請と等価である。無限大は消えるものの、重力が存在する場合には、この方法で発散を消すことは出来ない。

3つ目の試みは、timelike な point-splitting を変形したものである。1 + 1次元の massless 自由場を周期的境界条件 (系のサイズ L) の下で量子化する。同一時空点の演算子の積を、次のように正則化する。

$$T_\varepsilon \mathcal{O}^2(t, x) = \frac{\mathcal{O}(t + \varepsilon, x)\mathcal{O}(t, x) + \mathcal{O}(t, x)\mathcal{O}(t + \varepsilon, x)}{2}$$

ここで、微小時間 $\varepsilon (> 0)$ は計算の最後にゼロに近づける。さらに、減衰関数 $f_\varepsilon(k) = \exp(-\varepsilon|k|)$ を導入して、大きな k の寄与を抑制する。 $\tilde{\varepsilon} = 2\pi\varepsilon/L \rightarrow 0$ の極限を取ると、真空のエネルギーは

$$E_{\text{vac}}^{(\text{reg})} = L \langle 0 | T_\varepsilon \phi^2(t, x) | 0 \rangle = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\tilde{\varepsilon}} \cos(n\tilde{\varepsilon}) = -\frac{\pi}{6L}$$

と有限になる。ただし、4次元ではこの方法で E_{vac} を有限にすることは出来ない。

最後に、通常の point-splitting 正則化を検討する [4]。平坦な4次元時空における自由スカラー場 (質量 m) のエネルギー・運動量テンソルは

$$\begin{aligned} \langle 0 | T^{\mu\nu} | 0 \rangle &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{(\sigma^\rho \sigma_\rho)^2} \left(\eta^{\mu\nu} - 4 \frac{\sigma^\mu \sigma^\nu}{\sigma^\rho \sigma_\rho} \right) - \frac{m^2}{8\pi^2} \frac{1}{\sigma^\rho \sigma_\rho} \left(\eta^{\mu\nu} - 2 \frac{\sigma^\mu \sigma^\nu}{\sigma^\rho \sigma_\rho} \right) \\ &\quad - \frac{m^4}{32\pi^2} \eta^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \log \left| \frac{m^2 \sigma^\rho \sigma_\rho}{4} \right| + \gamma \right) + (\text{finite}) \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 $\sigma^\mu = x'^\mu - x^\mu$ は split 間隔である。超対称性が自発的に破れた時の関係式 $N_B = N_F$ (ボソンとフェルミオンの自由度), $\sum_i m_{Bi}^2 = \sum_i m_{Fi}^2$ が成り立てばベキ乗の発散は出ないが、これが次元正則化の実現と言えるのかもしれない。通常は、 σ^μ によらない Lorentz 不変な結果を得るために平均化 $\langle \sigma^\mu \sigma^\nu \rangle \rightarrow \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} (\sigma^\rho \sigma_\rho)$ の置き換えが行われる [5]。これにより4次発散は相殺するが、2次発散は残る。この置き換えは Euclidean で σ^μ の方向について平均したものを解析接続して得られるが、この過程を解析接続を用いずに理解したいと考えている。

References

- [1] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. 61 (1989) 1.
- [2] G. 't Hooft and M.J.G. Veltman, Nucl. Phys. B44 (1972) 189.
- [3] J.S. Dowker and R. Critchley, Phys. Rev. D13 (1976) 3224; S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 55 (1977) 133.
- [4] B.S. DeWitt, Phys. Rept. 19 (1975) 295; S.M. Christensen, Phys. Rev. D17 (1978) 946.
- [5] S.L. Adler *et.al.*, Annals Phys. 106 (1977) 279.

曲がった時空における真空条件

梅津光一郎

日本大学理工学部

Abstract

量子異常の考察に基づく Hawking 放射の導出法は共変型カレントに対する 2 つの境界条件が必要となる。我々はこの 2 つの境界条件が新たな真空の境界条件となる可能性について議論する。

1 導入

光さえも脱出することができない閉鎖的な空間であるブラックホールは古典的には放射を許さないが、Hawking はブラックホール時空中において量子効果を考察することにより、ブラックホールが放射するメカニズムを提案した。その結果、ブラックホールは Hawking 温度と呼ばれるある特別な温度

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (1)$$

を持つ黒体放射のように振る舞うことが示された [2]。ここで、 κ はブラックホールの表面重力を表す。

Hawking のオリジナル論文以後、様々な Hawking 放射の導出法が提案され、2005 年に、Robinson と Wilczek によって量子異常を用いた新しい Hawking 放射の導出法が提案された。この導出法のエッセンスは次の通りである。我々はブラックホールの外側の領域をブラックホールの極近傍領域とブラックホールから離れた領域との 2 つの領域に分割する。ブラックホールの事象地平面の極近傍において、ブラックホールに落ち込むモードは我々の世界に影響を及ぼさないので、この効果を見捨てることにする。このブラックホールに落ち込むモードを見捨てることにより、カイラルな理論となり、量子異常、すなわちエネルギーの湧き出しが起こり、これが Hawking 放射と一致する。一方、事象地平面から離れた領域においては、量子異常が現れることなく、カレントまたはエネルギー運動量テンソルは保存する。

我々は形式的に経路積分を行い、変分原理から Noether カレントを構築する。その結果、自然に共変型カレントを取り扱うことができる。ホライズンから離れた領域とホライズン極近傍領域において、一般座標変換に対する Ward 恒等式は、それぞれ、

$$\nabla_\mu T_{\nu(O)}^\mu = 0 \quad (2)$$

$$\nabla_\mu T_{\nu(H)}^\mu = -\frac{1}{96\pi\sqrt{-g}}\epsilon_{\mu\nu}\nabla^\mu R \quad (3)$$

となる。ここで簡単のため、背景時空として Schwarzschild ブラックホールを用いた。 $T_{\nu(O)}^\mu$ と $T_{\nu(H)}^\mu$ はそれぞれ、ホライズンから離れた領域とホライズン極近傍領域のカレントと定義した。また、 $\epsilon_{\mu\nu}$ は $\epsilon_{01} = 1$ とする Levi-Civita テンソルを、 R はスカラー曲率を表す。(2) と (3) に

において、 $\mu = t$ のとき、これらの方程式を解くと、

$$T_{t(O)}^r = t_{t(O)}^r, \quad (4)$$

$$T_{t(H)}^r = N_t^r + t_{t(H)}^r \quad (5)$$

を得る。 $t_{t(O)}^r$ と $t_{t(H)}^r$ はそれぞれ積分定数を表し、 N_t^r は

$$N_t^r = \frac{f \partial_r^2 f - (\partial_r f)^2 / 2}{96\pi} \quad (6)$$

とする。ここで、 f は Schwarzschild 背景時空の場合、 $f = 1 - 2M/r$ によって与えられる。これら 2 つの積分定数を一意的に求めるために、我々は共変型カレントに対する物理的に意味のある 2 つの境界条件

$$T_{t(H)}^r(r_H) = 0 \quad (7)$$

$$T_{t(O)}^r = T_{t(H)}^r(\infty) \quad (8)$$

を導入した [3]。結果として、ホライズン遠方でのエネルギーフラックスは

$$T_{t(O)}^r = \frac{\pi}{12\beta_H^2} \quad (9)$$

となり、ホーキング温度 (1) を持つ黒体放射フラックスに一致する。ここで、我々は $\kappa = 2\pi/\beta_H = \partial_r f(r)/2|_{r=r_H}$ を用いた。

ここで用いた 2 つの境界条件 (7), (8) の物理的な意味は次のように解釈することができる。1 つめの境界条件 (7) はカレントと一緒に落ち込む観測者がそのカレントを見るときそのカレントが有限になりなさいという正則条件と解釈することができる。2 つめの境界条件 (8) は、カレント保存則と解釈できる。その理由は、量子異常によるエネルギーフラックスの生成はホライズンの極近傍、プランク長程度の場所に限定される。一旦、ホライズンから離れた領域では量子異常はなく、エネルギーの湧き出しは一切ない。Gauss の定理により、ホライズン極近傍におけるフラックスとホライズンから漸近的に離れた領域におけるトータルフラックスは等しくなる、すなわちホライズン近傍領域とホライズンから離れた領域をつなぐカレント保存則であると考えられる。

この量子異常の考察において、カレントにはコンシステント型のカレントとコバリエント型のカレントとの 2 種類のカレントがあり、どちらのカレントに対して境界条件を課すのかについては問題になりますが、物理的なカレントはゲージ不変なコバリエント型のカレントを用いるべきという観点から、我々は経路積分を形式的に行うことにより、変分原理からネーターカレントを構築した。その結果、コバリエント型カレントだけを自然に取り扱うことができる。その後、Banerjee[4] や森田氏 [?] によって、上記 2 つの境界条件 (7), (8) を用いる代わりに、Unruh 真空 [6], Hartle-Hawking 真空 [7] といったホライズンに起因した真空条件を用いた場合にも Hawking 放射の結果を導出できることが示されている。

2 ブラックホール時空における真空条件

Unruh 真空と Hartle-Hawking 真空は、ingoing mode と outgoing mode を表す Eddington-Finkelstein 座標系を用いて表される。例えば、Unruh 真空の場合、2 つの境界条件として、ホ

ライズンで outgoing mode current が発散しないという正則条件:

$$T_{uu} = 0 \quad (\text{at the horizon}) \quad (10)$$

と, 無限遠方で ingoing mode current が観測されないという条件:

$$T_{vv} = 0 \quad (\text{at } r \rightarrow \infty) \quad (11)$$

が用いられる. また, Hartle-Hawking 真空の場合, どちらのカレントもホライズンでゼロになるという条件:

$$T_{uu} = T_{vv} = 0 \quad (\text{at the horizon}) \quad (12)$$

によって与えられる. 先に述べた 2 つの境界条件 (7), (8) の代わりにこれらの境界条件を用いた場合においても正しい Hawking 放射の結果を導出することができるのは非常に興味深い. このようにして, 我々はよく知られたブラックホールの真空条件を用いて, 量子異常の考察から Hawking 放射の導出方法が明確になった.

逆に考えると, 過去に知られたブラックホールの真空条件を用いて, Hawking 放射を正しく導出できるのであるならば, 我々の提案する境界条件 (7) と (8) もまた極座標系における 1 つの真空条件になり得るのではないかと考えられる. そこで, 我々は実際に Eddington-Finkelstein 座標系において, 同様の解析を行った (Table 1 を見よ). 極座標系の議論では, 系自身に時間依存性がなかったため, 本質的に動径座標のみ用いることができたが, Eddington-Finkelstein 座標系では v と u の中に t と r が混在するため, u と v 成分のカレントに対して, それぞれ積分定数が現れるので, 任意定数の数が増えることになる.

Eddington-Finkelstein 座標系において, Unruh 真空の境界条件 (10), (11) のみを用いると, すべての積分定数を決定することができず, これらを一意的に決定するためには, カレント保存則

$$t_{(O)vv} = t_{(H)vv} + k_{vv} \quad (13)$$

$$t_{(O)uu} = t_{(H)uu} \quad (14)$$

が必要となる. 実際には保存則から, ステップ関数の微分からデルタ関数的な発散が生じ, このカレント保存則は, それらの発散がキャンセルするための条件として現れる [?]. したがって, 我々の用いた境界条件 (7), (8) は, ただの真空条件というわけではなく, 真空の境界条件とカレント保存則を合わせたものとして理解することができる.

3 まとめ

我々は, 量子異常の考察に基づく Hawking 放射の導出法において, 我々が用いた 2 つの境界条件は極座標系での新たな真空の定義を与えている可能性があることを提案した. Eddington-Finkelstein 座標系においては, 真空の境界条件とカレント保存則を用いることによって Hawking 放射の結果を再現することを示した. したがって, 今後は, 他の真空条件を用いた議論を, 極座標系に変換し, 我々の与えた境界条件が先行研究の結果と同様の結果を与えるかについて考察していきたい.

Ingoing mode	Outgoing mode
$T_{vv} = T_{(O)vv}\Theta_+(r) + T_{(H)vv}H(r)$	$T_{uu} = T_{(O)uu}\Theta_+(r) + T_{(H)uu}H(r)$
$T_{(\text{total})vv} = T_{vv} + K_{vv}H(r)$	$T_{(\text{total})uu} = T_{uu}$
$T_{(O)vv} = t_{(O)vv} + \tilde{N}_{vv}$	$T_{(O)uu} = t_{(O)uu} + \tilde{N}_{uu}$
$T_{(H)vv} = t_{(H)vv}$	$T_{(H)uu} = t_{(H)uu} + \tilde{N}_{uu}$
$K_{vv} = k_{vv} + \tilde{N}_{vv}$	$K_{uu} = 0$

Table 1: **Eddington-Finkelstein** 座標系での解析：それぞれ領域におけるエネルギー運動量テンソルの解を示す。 $\Theta_+(r) = \Theta(r - (r_H + \epsilon))$ と $H(r) = 1 - \Theta_+(r)$ は階段関数を表し、 $K_{vv(uu)}$ はホライズン近傍における ingoing mode の寄与を、 $\tilde{N}_{vv(uu)} = \frac{\partial_{v(u)}^2 \varphi - \frac{1}{2}(\partial_{v(u)} \varphi)^2}{24\pi}$ を表す。ここで、 $\varphi = \ln f$ とする。

References

- [1] W. Heisenberg, Z. Phys. **43**, 172 (1927).
- [2] S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. (1975).
- [3] K. Umetsu, Prog. Theor. Phys. **119**, 849 (2008) .
- [4] R. Banerjee and S. Kulkarni, Phys. Rev. D **79**, 084035 (2009) .
- [5] T. Morita, Phys. Lett. B **677**, 88 (2009) .
- [6] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
- [7] J. B. Hartle and S. W. Hawking, Phys. Rev. D **13**, 2188 (1976).

Scale Invariance solves Cosmological Constant Problem

*Department of Physics and Masawa Institute for Science and Culture,
Kyoto Sangyo University, Kyoto 603-8555, Japan*

Taichiro Kugo

1 はじめに：宇宙定数問題の本質

2年前のこの日大理工・益川塾連携シンポジウム(第5回)でも既に指摘したように、宇宙定数(CC)問題の本質的な点は、場の理論におけるボソン場のゼロ点振動エネルギーやフェルミオン場のDiracの海の粒子の負エネルギーの総和が発散することなどではない。この世界にいくつもの対称性の自発的破れが、幅広い階層的なスケールにまたがって存在し、各々のスケールでの自発的破れ毎に、それらに付随する真空凝縮エネルギーがほぼ完璧にキャンセルしている、という奇跡的事実なのである。

例えば、我々は十分に確立した標準模型においても、少なくとも二つの対称性の自発的破れ、すなわち、Higgs凝縮による電弱対称性の破れと、クォーク対凝縮によるカイラル対称性の破れ、があることは間違いない。その凝縮エネルギーのスケールは、

$$\begin{aligned} \text{Higgs 凝縮} : -V_{\text{Higgs}} &\sim (200 \text{ GeV})^4 \sim 10^9 \text{ GeV}^4 \sim 10^{56} \Lambda_0 \\ \text{QCD カイラル凝縮} : -V_{\text{QCD}} &\sim (200 \text{ MeV})^4 \sim 10^{-3} \text{ GeV}^4 \sim 10^{44} \Lambda_0 \end{aligned} \quad (1)$$

現在観測されているCC値 Λ_0 に比べてそれぞれ56桁、44桁大きい。我々のこの平坦で静かな宇宙が存在しているという事実は、間違いなく存在するはずのこれらの凝縮エネルギーが全く宇宙定数に効いていないことを意味する。すなわち、Einstein重力は、これらの凝縮エネルギーを全く感知していないのである。もしこれらの凝縮エネルギーが、初めに用意された「裸の宇宙定数」 c で相殺しているとすると、この二つの自発的破れだけでも、実に56桁もの厳密な相殺が起こっていなければならないことを意味する。この事実をもっと生々しく言えば、それぞれ負のHiggs凝縮のエネルギー V_{Higgs} とカイラル凝縮エネルギー V_{QCD} が、次の様に、各破れの段階で12桁、44桁の数字が厳密に相殺されている、ということである：

$$\begin{aligned} c \text{ (最初に用意した CC)} &= \underbrace{654321, 098765}_{12 \text{ digits}} 4321, 0987654321, 0987654321, 0987654321, 0987654321 \times \Lambda_0 \sim 10^{56} \Lambda_0 \\ c + V_{\text{Higgs}} &= \underbrace{4321, 0987654321, 0987654321, 0987654321, 0987654321}_{44 \text{ digits}} \times \Lambda_0 \sim 10^{44} \Lambda_0 \\ c + V_{\text{Higgs}} + V_{\text{QCD}} &= \text{現在の暗黒エネルギー} \quad 1 \times \Lambda_0 \sim \Lambda_0 \end{aligned}$$

2 真空エネルギー ≃ 真空凝縮エネルギー、有効重力理論

前節で強調したように、宇宙定数問題の本質は、Planck エネルギー以下で、エネルギーのスケールの異なるいくつかの対称性の自発的破れが存在し、付随する真空凝縮エネルギーは、それぞれの破れのエネルギースケールでほぼ完璧に相殺されている、という事実である。

宇宙定数問題の解決は、この奇跡を実現する自然な機構を与えるものでなければならない。Higgs 凝縮やカイラル凝縮といった、これらの対称性の自発的破れは Planck エネルギーよりも遙か下の低エネルギーでの出来事であり、そこでは重力は、量子論的效果も含めて有効低エネルギー理論としてのアインシュタイン重力理論（あるいは超重力理論）で十分記述出来ていて、宇宙定数問題はその有効重力理論の枠内で議論し解決できる問題である。Planck エネルギーよりも大きなエネルギー領域まで妥当な「究極の量子重力理論」は、出来たとしても、せいぜい宇宙定数の Planck エネルギーでの「境界値」を決める程度のものであり、上述の宇宙定数問題の本質の解決には無関係である。

また、シンボジウムでは、場の理論の真空エネルギー（ボソン場の振動エネルギーや Dirac の海の負エネルギー）と（スカラー場のポテンシャルで表される）真空凝縮エネルギーの関係についてもコメントした。すなわち、概念的には別物として我々の頭にインプットされているそれらのエネルギーが実は殆ど同じものであることをカイラル凝縮を例にとって説明した。

3 スケール不変性が問題を解決する！

標準理論は、我々の世界がほとんどスケール不変であることを明らかにした。すなわち、ただ一点、Higgs 場の（タキオンの）質量項を除けば次元を持つパラメータを含まず、完全にスケール不変なのである。それゆえ Higgs の質量項もスケール不変性の自発的破れで供給されれば、この世界の全系がスケール不変という可能性があるということである。これが宇宙定数問題の自然な解決を与える事を示そう。

3.1 古典的スケール不変性

しばらくアノマリーを忘れて古典的スケール不変性があればどのように宇宙定数問題が解決されるのか、を示す。量子論的アノマリーの効果は次節で議論する。

イメージを明確にするべく、対称性の自発的破れを階層的に起こすスケール不変なポテンシャル例を書く：

$$\begin{array}{ccccccc}
 V(\phi) = & V_0(\Phi) & + & V_1(\Phi, h) & + & V_2(\Phi, h, \varphi) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & M & \gg & \mu & \gg & m &
 \end{array}$$

ここで、三つのクラスの間、 $\{\Phi\}$, $\{h\}$, $\{\varphi\}$, は、それぞれ、重力（ないし GUT）、電弱、カイラル凝縮のエネルギースケール M, μ, m ($M \gg \mu \gg m$) で自発的破れを起こすスカラー場を想定して

いる。 h は Higgs 場、 φ はカイラル線形 σ 模型のスカラー場である。従って φ は elementary ではないが、他の場も有効場でも構わない。

ポテンシャルの具体形に依らず、4次元時空でスケール不変性は、ポテンシャルが、場 $\{\phi\} = \{\Phi, h, \varphi\}$ の4次斉次関数であること、

$$\sum_i \phi^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} V(\phi) = 4V(\phi). \quad (2)$$

を意味する。しかし、これはポテンシャルの停留点 $\langle \phi^i \rangle = \phi_0^i$; $dV/d\phi|_{\phi=\phi_0} = 0$ での値が消えることを意味する

$$V(\phi_0) = 0.$$

重要な点は、これが対称性の自発的破れの各段階で起こることである。

実際、もしスケール M での物理を議論する時は、我々は V の中で $\{\Phi\}$ だけを含む部分 $V_0(\Phi)$ だけを保持すれば良い。 h や φ は μ やそれ以下の真空期待値を得ると想定しているからである。 $V_0(\Phi)$ 部分だけで次元4を満たしているので、そこでの自発的破れに伴う凝縮エネルギーであるポテンシャル停留値が消えること $V_0(\Phi_0) = 0$ を意味する。

次の段階のエネルギースケール μ での自発的破れを議論する時は $\{\Phi\}$ と $\{h\}$ を含む部分 $V_0(\Phi) + V_1(\Phi, h)$ を採らねばならないが、そこでのスケール不変性から $V_0(\Phi_0) + V_1(\Phi_0, h_0) = 0$ が言える。

同様にスケール m では、ポテンシャル $V_0(\Phi) + V_1(\Phi, h) + V_2(\Phi, h, \varphi)$ が次元4なので、停留値 $V_0(\Phi_0'') + V_1(\Phi_0'', h_0') + V_2(\Phi_0'', h_0', \varphi_0) = 0$ が言える。

この奇跡を起こす機構は、自発的破れの各段階に関連する場全体のポテンシャル部分がそれぞれでスケール不変だからである。

もっとイメージをハッキリさせるために、ポテンシャルの具体形の例を与えよう。まず、二つの実スカラー場 Φ_0, Φ_1 のポテンシャル

$$V_0(\Phi) = \frac{1}{2} \lambda_0 (\Phi_1^2 - \varepsilon_0 \Phi_0^2)^2,$$

を採って、真空期待値

$$\langle \Phi_0 \rangle = M \quad \text{and} \quad \langle \Phi_1 \rangle = \sqrt{\varepsilon_0} M. \quad (3)$$

を実現する。 Φ_0 の期待値 M は完全に自発的であり、この段階ではゼロでない事だけが重要で、その大きさには何の意味もない。 M は、Planck 質量と見なされる量で、次のスケール不変な重力の作用中の、 Φ_0^2 の掛かった Einstein-Hilbert 項 $\Phi_0^2 R$

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ c_1 \Phi_0^2 R + c_2 R^2 + c_3 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \dots \right\}$$

を通じて Newton 結合定数を与える。もし GUT が存在するなら、 ε_0 は 10^{-4} くらいの小さい定数で、 Φ_1 は GUT 対称性を破るスカラー場である；例えば $SU(5)$ GUT だと、自発的破れ $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を引き起こす Adjoint $\Phi_1 : \mathbf{24}$ である。

$V_1(\Phi, h)$ 部分は、電弱対称性を破る Higgs 場のポテンシャルで

$$V_1(\Phi, h) = \frac{1}{2}\lambda_1 \left(h^\dagger h - \varepsilon_1 \Phi_1^2 \right)^2.$$

パラメータ ε_1 を大変小さな $\simeq 10^{-28}$ に採って、 $\varepsilon_1 \Phi_1^2$ 項を $\text{VEV} \varepsilon_1 \varepsilon_0 M^2 = \mu^2/\lambda_1$ に置き換えれば、このポテンシャルは Higgs 二重項場 h に対する標準模型の Higgs potential を再現する。

$V_2(\Phi, h, \varphi)$ 部分は、カイラル対称性の破れ、例えば、 $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R \rightarrow \text{SU}(2)_V$ を引き起こす。2×2 行列のスカラー場 $\varphi = \sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}$ を使って、さらに小さなパラメータ $\varepsilon_2 \simeq 10^{-34}$ で、同様に書かれる：

$$V_2(\Phi, h, \varphi) = \frac{1}{4}\lambda_2 \left(\text{tr}(\varphi^\dagger \varphi) - \varepsilon_2 \Phi_1^2 \right)^2 + V_{\text{break}}(\Phi, h, \varphi)$$

右辺第 1 項は、 $\varepsilon_2 \Phi_1^2$ を $\text{VEV} \varepsilon_2 \varepsilon_0 M^2 = m^2/\lambda_2$ で置き換えれば、カイラル $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$ 変換 $\varphi \rightarrow g_L \varphi g_R$ で不変な線形 σ -模型を再現する。最後の項 V_{break} は、 u, d クォークの Higgs 場 h との小さな湯川結合 y_u, y_d によって生じたあらわなクォーク質量によるカイラル対称性の破れをあらわす。例えば、($\varepsilon_3 \sim 4\pi\varepsilon_2$)

$$V_{\text{break}}(\Phi, h, \varphi) = \frac{1}{2}\varepsilon_3 \Phi_1^2 \text{tr} \left(\varphi^\dagger \begin{pmatrix} y_u \epsilon h^* & y_d h \end{pmatrix} + \text{h.c.} \right)$$

4 場の理論におけるスケール不変性のアノマリー

しかし、ここまで場の理論に存在するスケール不変性のアノマリーを無視してきた。場の理論ではくり込み点 μ というスケールが入ってきて、このアノマリーはくり込み群方程式 (RGE)

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_a \beta_a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_a} + \sum_i \gamma_i(\lambda) \phi_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) V(\phi) = 0 \quad (4)$$

で表される。素朴な次元勘定の恒等式

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_i \phi_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) V(\phi) = 4V(\phi) \quad (5)$$

から (4) を引けば、

$$\left(\sum_i (1 - \gamma_i(\lambda)) \phi_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} - \sum_a \beta_a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_a} \right) V(\phi) = 4V(\phi) \quad (6)$$

を得る。これは上で述べた素朴なスケール不変性の式 (2)、 $\sum_i \phi_i (\partial/\partial \phi_i) V(\phi) = 4V(\phi)$ 、を置き換える正しい式であり、実際、アノマリー関数 $\beta_a(\lambda)$ や異常次元 $\gamma_i(\lambda)$ が消えればそれに帰着する。

この (6) 式は、異常次元 $\gamma_i(\lambda)$ による破れは、ポテンシャルの停留点の値が消える性質自体には全く無害である、事を示している。他方、 $\beta_a(\lambda)$ による破れ項は大変問題のようで、(6) 式は、停留点 ϕ_0 , $dV/d\phi|_{\phi=\phi_0} = 0$ 、での potential の値 $V(\phi_0)$ に対し

$$4V(\phi_0) = - \sum_a \beta_a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_a} V(\phi_0) \quad (7)$$

を導く。この式は、結合定数 λ_a がちょうど赤外固定点: $\beta_a(\lambda_{\text{IR}}) = 0$ 直上の値 $\lambda_{\text{IR}a}$ をとらない限り、ポテンシャルの停留値 $V(\phi_0)$ が消えない、とっているように見える。

しかし、これから次のことを示したい。もし赤外固定点 $\lambda_{\text{IR}a}$ が存在すれば、ポテンシャルの停留値 $V(\phi_0)$ は、赤外極限 $\mu = 0$ に行かなくても、任意の有限エネルギー μ で 0 である、ということ。すなわち、スケール不変性のアノマリーは、ポテンシャルの停留値 $V(\phi_0)$ が 0 であるという性質を壊さないのである。

まず、元の RGE の式 (4) より、ポテンシャルの任意の停留点 ϕ_0 における値 $V(\phi_0) \equiv V_0(\lambda; \mu^2)$ が RGE

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_a \beta_a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_a} \right) V_0(\lambda; \mu^2) = 0 \quad (8)$$

を満たすことに注意する。(実際この式は、次元から停留点のポテンシャルが $V_0(\lambda; \mu^2) = \mu^4 v(\lambda)$ という形をとるので、この式の第 1 項 $\mu \partial / \partial \mu$ を 4 に置き換えられ、そうすると (7) 式に帰着する)。この RGE (8) 式の解は

$$V_0(\lambda; \mu^2) = V(\bar{\lambda}(t); \mu^2 e^{2t}) \quad (9)$$

で与えられ、 $\bar{\lambda}_a(t)$ は次式で決まる running 結合定数である。

$$\frac{d\bar{\lambda}_a(t)}{dt} = \beta_a(\bar{\lambda}(t)) \quad \text{with} \quad \bar{\lambda}_a(t=0) = \lambda_a.$$

このポテンシャル $V_0(\lambda; \mu^2) = \mu^4 v(\lambda)$ の次元 0 部分 $v(\lambda)$ に対しては、この解は

$$v(\lambda) = e^{4t} v(\bar{\lambda}(t)) \quad \rightarrow \quad v(\bar{\lambda}(t)) = e^{-4t} v(\lambda) \quad (10)$$

の性質を言う。

ここで、理論が有限の赤外固定点 λ_{IR} を持つことを仮定する:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{\lambda}_a(t) = \lambda_{\text{IR},a}. \quad (11)$$

赤外極限 $t \rightarrow -\infty$ ($\bar{\mu} = \mu e^t \rightarrow 0$) をとれば、(10) 式は

$$v(\lambda_{\text{IR}}) = e^{+\infty} v(\lambda)$$

を与える。ところが、有限の赤外固定点の存在の仮定は、固定点直上の理論の存在も意味しているので、赤外固定点でのポテンシャル関数 $v(\lambda_{\text{IR}})$ は有限である。そうすると、この式から

$$v(\lambda) = 0 \quad \text{したがって} \quad V_0(\lambda; \mu^2) = 0 \quad (12)$$

でなければならないことがわかる。すなわち、ポテンシャルの停留点での値 $V_0(\lambda; \mu^2) = \mu^4 v(\lambda)$ は、赤外極限に到達前に、すでに有限のエネルギー μ で消えていなければならない。かくして、我々はポテンシャルが停留点で消える性質は、スケール不変性の量子アノマリーを乗り越え生き残ることを証明した。

5 ゲージ階層性

上では、大きなゲージ階層性は、ポテンシャルの中に 極めて小さなパラメータ $\varepsilon_1 \simeq 10^{-28}$, $\varepsilon_2 \simeq 10^{-34}$ を単に仮定することで実現した:

$$V_2 = \frac{1}{2}\lambda_2 \left(h^\dagger h - \varepsilon_1 \Phi_1^2 \right)^2 \quad \text{and} \quad V_2 \supset \frac{1}{4}\lambda_2 \left(\text{tr}(\varphi^\dagger \varphi) - \varepsilon_2 \Phi_1^2 \right)^2 \quad (13)$$

しかし、物理的には、例えばカイラル対称性の破れのスケール ε_2 は次の様に決められる: GUT を仮定すると、スケール $\langle \Phi_1 \rangle = M_1 = \sqrt{\varepsilon_0} M$ における SU(3) ゲージ結合定数 $\alpha_3 = g_3^2/4\pi$ は RGE にしたがって発展し、running 結合定数 $\bar{\alpha}_3(\mu)$ がスケール $\mu \simeq \Lambda_{\text{QCD}}$ でカイラル対称性を破る臨界値 $\alpha_{\text{cr}} \simeq 1$ に達する、そして線形 σ -模型のスカラー場の期待値がそのスケールになる $\langle \varphi \rangle = \sqrt{\varepsilon_2} M_1 \simeq \Lambda_{\text{QCD}}$ 、ということである。したがって、GUT スケール M_1 と QCD スケール Λ_{QCD} の関係は、スケール M_1 におけるゲージ結合定数 $\alpha_3(M_1)$ で決まる:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{M_1^2} = \exp \frac{1}{b_3} \left(\frac{1}{\alpha_3(M_1)} - \frac{1}{\alpha_{\text{cr}}} \right). \quad \left(\beta_3(\alpha_3) = 2b_3 \alpha_3^2 \right)$$

電弱スケールを決めるパラメータ ε_1 も、もしテクニカラーのような下のレベルのゲージ相互作用があるなら同様に決まるだろう。しかしながら、こういう物理的考察を具体化して、実際に上の (13) 式のような有効ポテンシャルを導くこと、特にスケール M_1 ではなく Φ_1 におけるゲージ結合定数 $\alpha_3(\Phi_1)$ を取り入れるのはなかなか難しく今後の課題である。

Bardeen[1] が随分昔に指摘したように、標準模型の系は、Higgs の質量項以外は、スケール不変なので、Higgs 質量項自身の輻射補正項は Higgs の mass square に必ず比例し、したがって対数発散であり、標準模型自体にはゲージ階層性の問題はない。しかし、標準模型が GUT や Gravity に結合した系を考えると、GUT や Gravity が大きな質量パラメータを含んだり、あるいはスケール不変性があっても、大きな質量パラメータが自発的に生じるようなスカラー場が含まれている場合は、再びゲージ階層性 (fine-tuning) の問題が生じると指摘している [1]。

スケール不変理論では全てが次元 4 の項からなるので、輻射補正は対数補正しかない。しかし、Bardeen の指摘のようにこの事だけでゲージ階層性が安定に保たれるということは言えない。

実際、例えば $\Phi_0^2 R$ 項や $h^\dagger h \Phi_1^2$ 項がある現在の系で、例えば、 $h^\dagger h \Phi_0^2$ 項が対数発散で出て来る。これが必ず $\varepsilon_1 \varepsilon_0 \equiv \varepsilon'_1$ の係数を必ず伴うことが言えないと $\langle \Phi_0 \rangle = M$ が Planck スケールなので、この項は Higgs の質量項として実質 2 次発散の役割を果たし、再びゲージ階層性問題が生じることになる。この極小の係数 ε'_1 を必ず伴い階層性問題がない、という議論が Shaposhnikov-Zenhausern[2] によって与えられている。

スケール不変性が宇宙定数問題の解決のために重要な役割をするという指摘は何人かの著者たちによってなされている [3, 2, 4, 5]。しかし、Rabinovici-Saering-Bardeen[3] と Shaposhnikov-Zenhausern[2, 4] の二つの論文は、量子論的にも厳密なスケール不変性が成立することを要求しており、我々の「アノマリーがあっても停留値はゼロ」というシナリオとは大きく異なる。また、ここで強調した、多段階の自発的対称性の破れごとの奇跡的な凝縮エネルギーの相殺機構、という側面はどの著者も指摘していない。

また、Shaposhnikov-Zenhausern[2, 4] と Wetterich[5] の論文は、重力の **asymptotic safety** という性質を要求している。しかし、Planck エネルギーを越える紫外領域の重力理論の性質は、ここで強調した宇宙定数問題の本質的問題点の解決とは関係が無い筈である。

6 次に何をなすべきか

日大理工・益川塾連携シンポジウムの後に、このアプローチで最もキーとなるのは「scale 不変性を持つ理論で non-zero のスケールを自発的に生成することができるのか？」という点だと認識するに至った。

実際、原点以外の non-zero のスカラー場の期待値 $\phi_0 \equiv (\phi_{0i})$ (スカラー場の空間中のベクトル) の存在がこのアプローチで必須だからである。我々は、実は相当に非自明な可能性を議論しているのである。スカラー場の原点 $\phi_0 = \mathbf{0}$ (自明な停留点) 以外に、非自明な non-zero の停留点 $\phi_0 \neq \mathbf{0}$ が必要なのである。

古典論においては、スケール不変性があるので、その non-zero のスカラー場の期待値 ϕ_0 の方向に定数 ρ 倍したスカラー場 $\rho\phi_0$ でもポテンシャル 0 の停留点でなければならない。すなわち、スケール不変な理論では、

スカラー場が non-zero の停留点 $\phi_0 \neq \mathbf{0}$ の存在 \longleftrightarrow ポテンシャルに flat-direction が存在

の両者が等価である。

ところが、量子論では通常 **flat-direction** は輻射補正では保たれないというのが問題なのである。この方向のポテンシャル関数

$$f(\rho) \equiv V(\rho\phi_0) \quad \text{with } \rho \in \mathbf{R} \quad (14)$$

を考えよう。量子論に於いては、次の二つの可能性が考えられる。

1. **flat direction** が保たれる場合: $f(\rho) \equiv 0$ for $\forall \rho \in \mathbf{R}$.

この場合は、 $\rho = 1$ の真空を選ぶのは完全に spontaneous.

量子論では、アノマリーのためこれが実現するには、何か特別な機構が必要：

- i) 量子論的にも **scale** 不変性を保つ処方: Shaposhnikov-Zenhausern[2] の “Exact SI 処方” を用いれば scale 不変性のアノマリーが無い。(古く Englert-Truffin-Gastmans[6] により提唱された scale 不変性の n 次元化処方と同じ)。この場合、 $n = 4 + \varepsilon$ 次元化処方は一意的でなく、物理がその処方に依存する事が問題である。
- ii) **flat direction** を保つ付加的対称性: アノマリーはあっても、付加的対称性があれば flat direction の存在が保たれる。例えば、超対称性 SUSY があると、ポテンシャルが 0 の停留点上では SUSY のため真空エネルギーが輻射補正を受けず、flat direction は保たれる。しかし、この場合も SUSY などの付加的対称性は最終的には自発的に破らねばならないが、それを如何に破るのかが問題である。

2. **dimensional transmutation** の場合: $f(\rho) = f'(\rho) = 0$ が、 $\rho = 0$ と $\rho = 1$ (or $\rho = \pm 1$) の 2 点 (or 3 点) でのみ成り立つ。

すなわち、この場合はアノマリーによって non-zero 停留点、すなわち世界のスケール、が決められる。筆者は例えば QCD ではこういう事が起こっているように思うので、東島-Miransky 近似の Schwinger-Dyson Approach などを用いて示せないかと思っている。

この仕事は、宇宙進化の熱史における宇宙定数問題を議論していただいた小林誠氏や杉山直氏、佐々木節氏、さらに、スケール不変性の重要性を強調された久保治輔氏をはじめ、柴正太郎、太田信義、山津直樹、山中真人、の益川塾の諸氏との貴重な議論に多くを負っています。彼らに感謝したいと思います。また、この研究は、京都産業大学総合学術研究所の研究活動によるものです。

References

- [1] W. A. Bardeen, “On naturalness in the standard model,” FERMILAB-CONF-95-391-T.
- [2] M. Shaposhnikov and D. Zenhausern, “Quantum scale invariance, cosmological constant and hierarchy problem,” Phys. Lett. B **671** (2009) 162 [arXiv:0809.3406 [hep-th]].
- [3] E. Rabinovici, B. Saering and W. A. Bardeen, “Critical Surfaces and Flat Directions in a Finite Theory,” Phys. Rev. D **36** (1987) 562.
- [4] M. Shaposhnikov and D. Zenhausern, “Scale invariance, unimodular gravity and dark energy,” Phys. Lett. B **671** (2009) 187 [arXiv:0809.3395 [hep-th]].
- [5] C. Wetterich, “Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry,” Nucl. Phys. B **302** (1988) 668 [arXiv:1711.03844 [hep-th]].
- [6] F. Englert, C. Truffin and R. Gastmans, “Conformal Invariance in Quantum Gravity,” Nucl. Phys. B **117** (1976) 407.

Unity of nature

-Nonlinear-supersymmetric general relativity theory-

Laboratory of Physics, Saitama Institute of Technology

Kazunari Shima
shima@sit.ac.jp

We have proposed NLSUSYGR(SGM) scenario[1] for unity of nature, which is described by the Einstein-Hilbert type action on specific space-time just inspired by the nonlinear representation of SUSY(NLSUSY)[2]. The ultimate shape of nature is unstable $d = 4$ space-time specified by $[x^a, \psi_\alpha^N; x^\mu]$ where x^a, ψ_α^N are Minkowski coordinate and Grassmann coordinate of the local frame and x^μ is the ordinary world coordinate of Riemann space-time and is described by the Einstein-Hilbert type action NLSUSYGR $L_{\text{NLSUSYGR}}(w^a{}_\mu)$ with the cosmological term $\Lambda > 0$. computed in terms of the unified vierbein $w^a{}_\mu$. Mach principle is encoded geometrically. Big Collapse of ultimate space-time $\frac{\text{super}GL(4,R)}{GL(4,R)}$ occurs (because of the NLSUSY nature with $V_{\text{P.E.}} = \Lambda > 0$ indicating the robust spontaneous SUSY breaking) which creates ordinary Riemann space-time $[x^a; x^\mu]$ and massless Nambu-Goldstone fermionic matter *superon* ψ_α^N [9] and induces the rapid expansion of space-time due to the Pauli principle.. It is described by SGM action $[L_{\text{SGM}} = L_{\text{EH}}(e) - \Lambda + T(\psi.e)]$ containing Einstein GR with $V_{\text{P.E.}} = \Lambda > 0$ and N superons. The graviton is the universal attractive force and dictates the evolution of SGM world. The phase transition of SGM towards the true vacuum $V_{\text{P.E.}} = 0$ is achieved by forming gravitational composite (massless) LSUSY supermultiplet, which ignites Big Bang of the Universe and the subsequent oscillations around the true vacuum. By linearizing the N -NLSUSY cosmological term of $L_{\text{SGM}}(e, \psi)$ the NLSUSY in flat space-time we have shown that the broken N -LSUSY theory emerges as the composites of ψ_α^N (*NL/L SUSY relation*). The vacua of composite SGM scenario created by the Big Collapse of new space-time possesses rich structures promising for the unified description of nature. SGM gives new insights into the unsolved problems of cosmology, particle physics and mysterious relations between them[21], for example, the origin of three-generations structure for quarks and leptons[3][4, 5, 21], the tiny neutrino mass m_ν , the proton decay, dark matter, the 4-dimensional dark energy density $\rho_{DE} \simeq (m_\nu)^4$, the space-time dimension *four*, the rapid expansion of space and the magnitude of the gauge coupling constant[17], etc. We have shown explicitly in 2 dimensional space-time that $N = 2$ LSUSY QED theory emerges as the composite of NG fermion(*superons*) and simultaneously the true vacuum of $N = 2$ NLSUSY theory on Minkowski space-time is achieved, which bridges the particle physics and the cosmology.

Establishing NL/L SUSY relation on curved space-time, i.e. linearizing SGM action $L_{\text{SGM}}(e, \psi)$ and the extension to large N , especially to $N = 10 = \underline{5} + \underline{5}^*$ for equipping the SU(5) GUT structure[5], is yet to be done for *superon quintet hypothesis* of SGM scenario.

Finally we just mention that NLSUSY GR and the subsequent SGM scenario for the spin $\frac{3}{2}$ NG fermion[8] is in the same scope.
For a recent review with further details see [21].

References

- [1] K. Shima, *Fortschritte Phys.* **50**, 71(2001). Proceedings of Conference, *100 Years Werner Heisenberg-Works and Impact*, September 26-29, 2001, Bamberg, Germany.
- [2] D.V. Volkov and V.P. Akulov, *Phys. Lett. B* **46**, 109 (1973).
- [3] M. Gell-Mann, *Proceedings of supergravity workshop at Stony Brook*, eds. P. van Nieuwenhuisen and D. Z. Freedman(North Holland, Amsterdam, 1977).
- [4] K. Shima, *Z. Phys.* **C18**, 25(1983).
- [5] K. Shima, *European Phys. J.* **C7**, 341 (1999).
- [6] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, Princeton, 1992).
- [7] K. Shima, *Phys. Lett. B* **501**, 237 (2001).
- [8] K. Shima and M. Tsuda, *Phys. Lett. B* **507**, 260 (2001).
- [9] K. Shima, *Phys. Rev. D* **15**, 2165 (1977).
- [10] K. Shima and M. Tsuda, *PoS HEP2005*, 011 (2006);
K. Shima and M. Tsuda, *Phys. Lett. B* **645**, 455 (2007).
- [11] K. Shima, M. Tsuda and M. Sawaguchi, *Int. J. Mod. Phys.* **E13**, 539 (2004).
- [12] E.A. Ivanov and A.A. Kapustnikov, *J. Phys.* **A11**, 2375 (1978).
- [13] K. Shima, Y. Tanii and M. Tsuda, *Phys. Lett. B* **525**, 183 (2002).
- [14] K. Shima, Y. Tanii and M. Tsuda, *Phys. Lett. B* **546**, 162 (2002).
- [15] K. Shima and M. Tsuda, *Mod. Phys. Lett. A* **22**, 1085 (2007).
- [16] K. Shima and M. Tsuda, *Mod. Phys. Lett. A* **22**, 3027(2007).
- [17] K. Shima and M. Tsuda, *Il Nuovo Cimento* **B124**, 645 (2009).
- [18] K. Shima and M. Tsuda, *Class. Quant. Grav.* **19**, 5101 (2002).
- [19] K. Shima, M. Tsuda and W. Lang, *Phys. Lett. B* **659**, 741(2007).
- [20] K. Shima and M. Kasuya, *Phys. Rev. D* **22**, 290(1980).
- [21] K. Shima, Plenary talk given at *Conference on Cosmology, Gravitational Waves and Particles*, 6-10, January, 2017, NTU, Singapore..
Proceeding of CCGWP, ed. Harald Fritzsch, (World Scientific, Singapore, 2017), at press.

リンドラー地平面に創発する重力記憶電荷とブラックホール物理

堀田昌寛

東北大学大学院理学研究科

古典的時空としてのブラックホールでは、地平面を通過する物体は再び外部に戻ることはできない。これは物体に載せられた情報も同様である。物質の量子論の効果を取り入れると、質量の逆数に比例する温度の熱輻射 (いわゆるホーキング輻射) が出るということが知られている。このことからブラックホールは熱力学的対象であると考えられ、第1法則からブラックホールのエントロピーを導入することが可能である。その結果得られるのがベッケンシュタイン-ホーキングエントロピー $S_{BH} = A/(4G)$ である。ここで A は地平面の面積であり、 G は重力定数である。このエントロピーの統計力学的理解は蒸発するブラックホールに関しては全く進んでいない。すくなくとも古典的時空としてのブラックホールには質量、電荷、角運動量以外の物理的特徴量はなく、 S_{BH} の天文学的な巨大な値を説明できるほど多数の独立な微視的状态が見えていないためである。これはブラックホールエントロピー問題と呼ばれる。一方ブラックホール物理学にはもう1つの大きな未解決問題がある。思考実験として重力崩壊を起こす物体が量子的な純粋状態であるとしよう。作られるブラックホールも量子重力理論の1つの純粋状態になると考えられる。時間とともにブラックホールは蒸発して質量を失っていく。最後の爆発で熱輻射だけが空間に残るならば、素朴にはそれは混合状態で記述できる。初期時刻に純粋状態だったものが混合状態に時間発展するならば、量子力学の基礎的性質であるユニタリティが壊れていることを意味する。実際にユニタリティが壊れるのかどうかは量子重力理論構築に対するヒントを与えるとも考えられており、この問題は情報喪失問題と呼ばれる。

2016年にホーキング、ペリーとストロミンジャーはこの2つの問題を同時に解決できるかもしれないソフトヘア蒸発シナリオを提案して、注目を集めている [1]。地平面には重力記憶としてのマイクロ状態が発生しており、その数はオーダーとして S_{BH} を説明できる [2]。また地平面上に創発する重力電荷 (ソフトヘア) が地平面を通過した物質がもつ量子情報を記憶して、蒸発とともにエネルギー零のまま時空無限遠方のボンディー-メツナー-ザックス電荷に転化していくことで、ユニタリティが維持されるという仮説である。ブラックホールの質量を無限大にすると、地平面上の曲率は零に漸近し、状態はミンコフスキー空間の真空状態で記述される。地平面はリンドラー地平面に置き換わる。創発する重力電荷はリンドラー地平面にも残り、そこを通過する物体の量子情報を記憶する。2つのリンドラー地平面を通過する場合、各々の重力電荷が同じ物体の情報を記憶するが、量子論の基礎的定理である量子状態の複製禁止定理との整合性が問題となる。物体が通過したときの重力電荷の変化に対する一般公式を求め、それを量子化することで、複製禁止定理と矛盾するような過程にはなっていないことが証明された [3]。またミンコフスキー時空を伝搬する波束が重力電荷と量子もつれを共有することでデコヒーレンスが起きる可能性も、重力電荷の測定機の設置の有無による文脈依存性で矛盾なく説明できた [3]。

References

- [1] S. W. Hawking, M. J. Perry and A. Strominger, PRL 116, 231301 (2016).
- [2] M. Hotta, K. Sasaki and T. Sasaki, Class. Quantum Grav. 18, 1823 (2001).
- [3] M. Hotta, J. Trevison and K. Yamaguchi, Phys. Rev. D94, 083001 (2016).

円筒対称重力波の厳密解による重力波の非線形現象の解析

日本大学理工学部

三島 隆

1 目的と導入

相対論的重力の本質の一つはその強い非線形性にある。そのため想像を超えた様々な興味深い現象が現れる。同時に、この強い非線形性ゆえに方程式の解の構成が困難であるため電磁気学の解析に比べると物理的な現象の取り扱いが格段に難しくなる。最近では強力な方法として、数値相対論が活躍しているが、このアプローチは一部の専門的研究者を除けば、容易に利用できるものではない。また、数値解はあくまで近似解の一つであり、その設定範囲は局所的であるため、非線形性に起因する興味深く重要な重力的効果がとらえきれない可能性もある。一方、もし、いったん厳密解が得られたならいくつかのパラメータによって物理現象を解析的にコントロールできるため解の振舞いを系統的に調べることによって興味深い物理現象を引き出せる可能性は大きい。

本研究の目的は、Einstein 方程式や Einstein-Maxwell 系の方程式に対して、適当な対称性を課すことで方程式をある種の調和写像（あるいは非線形シグマ型モデル）の方程式に帰着させ、調和写像的手法を用いて重要かつ新しい解を構成し、さらには、その解を調べることによって、強い非線形性に起因した重力現象の一端を明らかにしていくことである。

最近我々は、円筒対称性を課した時空上の重力波が示す非線形現象の興味深い例として、独立な2つの重力波モードの間の転換現象や重力波と電磁波の転換現象の発生を表す扱いの簡便な厳密解を構成し、その解において、転換現象が生じる仕組みをについて解析した [1]。そこで、今回のシンポジウムでは、上述の仕事によって扱われた円筒対称重力波の厳密解の構成の仕方や解の形、また転換現象の特徴や発生時の仕組み等について紹介した。さらに、今回とくに新たに得られた興味深い知見として、この波の表す転換現象では、大きな転換は、必ずしも高エネルギーの波同士の転換で生じるわけではなく、どちらかが大きな振幅（必ずしも高エネルギーを意味しない）であればよいことが見いだされた。

これを受け以下の小文では、論文 [1] に記載されている基礎事項の要約とその後明らかになった若干の知見について報告する。

2 計量と基礎方程式 (Ernst 方程式)

扱う時空は、円筒軸対称性を持つ真空の Einstein 方程式の解に制限する。このとき時空の線素の一般形は、以下の Kompaneets-Jordan-Ehlers 計量となる。

$$ds^2 = e^{2\psi}(dz + \omega d\phi)^2 + 2^{-2\psi}\rho^2 d\phi^2 + e^{2(\gamma-\psi)}(-dt^2 + d\rho^2) \quad (1)$$

ここで ψ , ω , γ は t と ρ の関数である. この計量の下で真空の Einstein 方程式を解くことは

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{2}{\mathbf{E} + \bar{\mathbf{E}}} \nabla \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} = 0 \quad (2)$$

を解くことに帰着する. 上式は, しばしば Ernst 方程式と呼ばれる. ∇ や ∇^2 は 3 次元 Minkowski 時空上で定義されており, 方程式は円筒対称性を持つものとする. また, 関数 \mathbf{E} は Ernst ポテンシャルと呼ばれ, 計量係数 ψ と ω によって次式で定義される:

$$\mathbf{E} = e^{2\psi} + i\Phi. \quad (\Phi_{,t} = \frac{1}{\rho} e^{4\psi} \omega_{,\rho}, \quad \Phi_{,\rho} = \frac{1}{\rho} e^{4\psi} \omega_{,t}). \quad (3)$$

3 一般解

Ernst 方程式は非線形方程式なので一般解の構成は困難である. しかし, 式 (2) は標的空間が 3 次元 Minkowski 時空間から 2 次元双曲空間の調和写像 (あるいは非線形シグマモデル) の方程式と見なせるので, 簡単な調和写像的方法で, 重力波を表す一連の興味深い解を取り出すことが出来る.

得られた解 (計量) の表式は, 次式のように与えられる:

$$e^{2\psi} = \frac{1}{e^{-2\tau} + A^2 e^{2\tau}}, \quad \omega = 4A \int \rho [\tau_{,t} d\rho + \tau_{,\rho} dt], \quad (4)$$

$$\gamma = \int \{ 2\rho \tau_{,t} \tau_{,\rho} dt + \rho [(\tau_{,t})^2 + (\tau_{,\rho})^2] d\rho \}. \quad (5)$$

ここで, A はある種の非線形効果の度合いを表すパラメータであり, τ は 3 次元 Minkowski 時空内の円筒対称性を持つ任意の線形波動関数 ($\nabla^2 \tau = 0$) である. 上式において $A = 0$ とすると $\psi = \tau$ となり解はいわゆる Einstein-Rosen 解に帰着する [2]. 以下 τ のことをシード解と呼ぶ. 軸上で正則な重力波を表す時空解を与えるシード解 τ は, ベッセル関数 $J_0(k\rho)$ と $\cos(kt)$ あるいは $\sin(kt)$ の積を適当に重ね合わせることによって与えられる. 特に Weber-Wheeler [3] と Bonnor [4] による解 (WWB 解: 下の式で $\delta = 0$ に対応) を一般化した解:

$$\tau = c \int_0^\infty e^{-ak} J_0(k\rho) [\cos(kt) \cos \delta + \sin(kt) \sin \delta] dk \quad (6)$$

は, 重力波の波束を表す解であり, 波を軸上に集中させたり二つの波を衝突させる等によって非線形効果を見やすくできる. また, 上式は初頭関数による具体的な表式を持つので解析がしやすいといった長所もある [1].

4 一般解の示す非線形性 (モード転換) の解析

前章で得られた時空解は, 2 つの独立な重力波モード (計量係数 ψ に由来する + モードと ω に由来する \times モード) の間の非線形相互作用を表す. その相互作用の仕方はパラメータ A によってコ

ントロールされる．円筒対称時空では，軸方向の単位長さ当たりの量として重力波のエネルギー（C-エネルギー）ないしはエネルギー密度（C-エネルギー密度）に相当する量を導入できる [5]．以下，この C-エネルギー密度 ($\mathcal{E}(t, \rho)$ とする) に対する + モードと \times モードの寄与 (それぞれ $\mathcal{E}_+(t, \rho)$, $\mathcal{E}_\times(t, \rho)$ とする) の時間的変化を観ることによって，重力波の非線形効果の特徴を調べる．

解 (4), (5) より， \mathcal{E} と各モードの比は

$$\frac{\mathcal{E}_+}{\mathcal{E}} = \left(\frac{e^{-2\tau} - A^2 e^{2\tau}}{e^{-2\tau} + A^2 e^{2\tau}} \right)^2, \quad \frac{\mathcal{E}_\times}{\mathcal{E}} = \left(\frac{2A}{e^{-2\tau} + A^2 e^{2\tau}} \right)^2, \quad \mathcal{E} = \rho [(\tau_{,t})^2 + (\tau_{,\rho})^2] \quad (7)$$

で与えられる．これより，+ モードに対して \times モードが優勢となる場合 ($\mathcal{E}_\times > \mathcal{E}_+$) は，シード解 τ とパラメータ A によって次のように与えられるので

$$\tau_- < \tau < \tau_+, \quad (\tau_- := \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{A}, \quad \tau_+ := \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{A}) \quad (8)$$

A の値から非線形効果の様子を定性的に知ることができる．例えば，図 1 の概略図のように同じシード解に対して A の値に応じて，+ から \times にモードが変化する様子を容易に知ることができる．

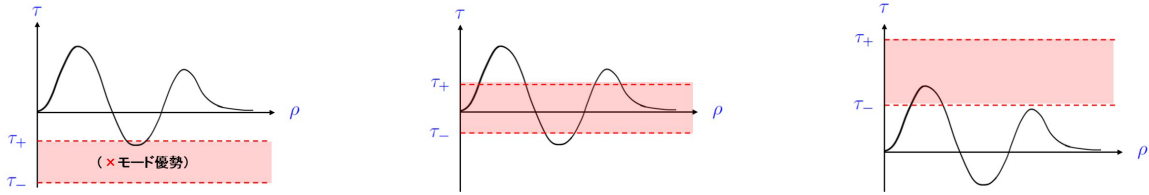


図 1: 左より，それぞれ $A > \sqrt{2}+1$, $\sqrt{2}+1 > A > \sqrt{2}-1$, $\sqrt{2}-1 > A > 0$ に対応したある瞬間の概略図

5 一般化された Weber-Wheeler-Bonnor 解を用いた例示

ここでは，応用例を一つ紹介する．シード解 (6) において $\delta = 0$ とした WWB 解同士を衝突させたときに現れる特徴的な現象を取り上げる．衝突する解を構成するには，シード解を 2 つ用意し単純に重ね合わせればよい．その際 1 つを対称軸 ($\rho = 0$) に入射させた後 (波束 1)，時間を空けてもう 1 つの波束 (波束 2) を入射させるように調整すると 2 つの波の衝突を起こすことができる．例示として， $A = 1/20$ とし，波束 1 と波束 2 についてそれぞれのパラメータを $(a_1, c_1, \delta_1) = (1/20, 2, 0)$, $(a_2, c_2, \delta_2) = (10, 50, 0)$ とし衝突させた場合のスナップショット (縦軸は τ) を図 2 に記す．

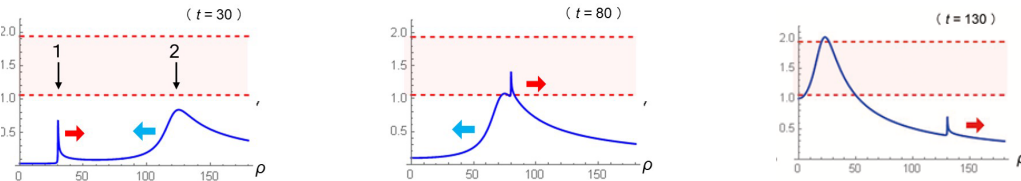


図 2: 左より，それぞれ $t = 30$, $t = 80$, $t = 130$ に対応した瞬間における τ のスナップショット



図 3-a: $t = 30$ における \mathcal{E} のスナップショット 図 3-b: +モードの C-エネルギーに占める割合の変化

図 2 において、見かけ上の大きさは波束 2 が波束 1 を圧倒しているが、 \mathcal{E} に着目すると、実際には鋭いピークを持つ波束 1 にエネルギーが集中していることがわかる (図 3-a)。そこで +モードの C-エネルギー (\mathcal{E} を ρ について積分した量) に占める割合の時間的変化をグラフ化してみると、最初 ($t = 40$) は +モード優勢だった波が、 $t = 80$ の辺りで \times に大きくモード転換していることがわかる (図 3-b)。これはエネルギーは小さいが大きな振幅の波に、高エネルギーの波が乗ると強いモード転換が生じる場合があることを示唆している。

6 Einstein-Maxwell-系への応用 (電磁波-重力波間の転換)

円筒対称時空においては、Bonnor の変換 [6] に類似した変換によって真空の Einstein 方程式の解を Einstein-Maxwell 方程式系の解へ容易に変換できる。これにより、+ と \times の重力波モードの転換現象は、電磁波と重力波の転換現象と見なすことができる。

7 まとめと今後

解の非線形的振舞い (モード転換) は、パラメータ A とシード解 η の間の簡単な関係式を用いて解析できることが分かった。前章で紹介した重力波のモード間の転換は重力波・電磁波間の転換に焼き直せることから、何らかの機構で発生した重力波のエネルギーの大部分を状況によって電磁波のエネルギーに転換できるものと考えられる。例えば、強い重力波の生成時にその重力波のエネルギーに駆動され電磁波のバースト現象のようなものが発生する可能性などが示唆される。

References

- [1] T. Mishima and S. Tomizawa, Phys. Rev. D **90**, 044036 (2014).
- [2] A. Einstein and N. Rosen, J. Franklin Inst. **223**, 43 (1937).
- [3] J. Weber and J. A. Wheeler, Rev. Mod. Phys., **29**, 509 (1957).
- [4] W. B. Bonnor, J. Math. Mech., **6**, 203 (1957).
- [5] K. S. Thorne, Phys. Rev. **138**, B251 (1965).
- [6] W. B. Bonnor, Z. Phys. **161**, 439 (1961)].

Statistics Interpolation in the Unruh Effect: Anyon Exchange Relation in the Timelike Domain

Satoshi Ohya

*Institute of Quantum Science, Nihon University
Kanda-Surugadai 1-8-14, Chiyoda, Tokyo 101-8308, Japan*

Abstract

We study the Unruh–DeWitt detector coupled to a hermitian scalar primary operator of $d(\geq 2)$ -dimensional conformal field theory. We show that, if the anomalous dimension of the primary operator is nonvanishing, the detector’s power spectrum is generally given by the thermal distribution of two-dimensional chiral anyon.

1 Introduction

This article studies a uniformly accelerating detector coupled to a background scalar field. It has been known that, if the spacetime dimension is even and if the background scalar field is massless as well as free, the detector’s power spectrum is proportional to the Bose–Einstein distribution. This is as expected because the power spectrum is simply given by the Fourier transform of two-point Wightman function for background scalar field. If the spacetime dimension is odd, however, the detector’s power spectrum becomes proportional to the Fermi–Dirac distribution. This happens without any fermionic degrees of freedom and is called the statistic inversion [1]. The purpose of this article is to report a generalization of this apparent inversion to a continuous interpolation of Bose–Einstein and Fermi–Dirac distributions [2]. We show that, if the detector couples to a scalar primary operator of background conformal field theory (CFT), the detector’s power spectrum is generally given by the thermal distribution for two-dimensional anyon [3]. The key is the anomalous dimension and resulting branch point singularity in the two-point Wightman function for primary operators. In what follows we shall first see that the two-point Wightman function along the detector’s worldline satisfies the anyon commutation relation as well as the Kubo–Martin–Schwinger (KMS) thermal equilibrium condition. We then show by direct computation that the detector’s power spectrum indeed coincides with the anyon distribution.

2 Detector’s Power Spectrum and Anyon Distribution

To begin with, let us consider a uniformly accelerating pointlike detector—the Unruh–DeWitt detector [4]—in $d(\geq 2)$ -dimensional Minkowski spacetime. Let us suppose that the spacetime is filled with a background CFT. Let us also suppose that the detector has a “monopole moment” m and that m linearly couples to a hermitian scalar primary operator \mathcal{O}_Δ of background CFT, where Δ stands for the scaling dimension of \mathcal{O}_Δ . The action describing

this situation is then given by

$$S_{\text{total}} = S_{\text{CFT}} + S_{\text{detector}} + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau m(\tau) \mathcal{O}_{\Delta}(x(\tau)), \quad (1)$$

where S_{CFT} and S_{detector} respectively stand for actions of the background CFT and the Unruh–DeWitt detector, both of which are irrelevant in the following discussion. τ is the detector’s proper time and $x^{\mu}(\tau)$ is the detector’s worldline given by

$$x^0(\tau) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau), \quad x^1(\tau) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau), \quad x^i(\tau) = \text{constant} \quad (i = 2, \dots, d-1), \quad (2)$$

where $a > 0$ is the proper acceleration of the detector. Note that without any loss of generality we have assumed that the detector moves along the x^1 -direction.

We wish to know the transition probability for the process $|0\rangle \otimes |E_i\rangle \rightarrow |\Phi\rangle \otimes |E_f\rangle$, where $|E_{i/f}\rangle$ are the initial and final states of the detector and $|0\rangle$ is the vacuum state for inertial observers. $|\Phi\rangle$ is an arbitrary basis of background CFT and assumed to satisfy the completeness $\sum_{\Phi} |\Phi\rangle\langle\Phi| = 1$. At the linear order of perturbation theory the transition probability per unit time is given by

$$|\langle E_f | m(0) | E_i \rangle|^2 \mathcal{P}(\omega), \quad (3)$$

where we have summed over all possible final states $|\Phi\rangle$. Here $\mathcal{P}(\omega)$ is the so-called detector’s power spectrum and given by the Fourier transform of two-point Wightman function along the detector’s worldline:

$$\mathcal{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle 0 | \mathcal{O}_{\Delta}(x(\tau)) \mathcal{O}_{\Delta}(x(0)) | 0 \rangle, \quad \omega = E_f - E_i. \quad (4)$$

Note that the detector’s ‘‘monopole moment’’ $m(\tau)$ appears only in the matrix element $\langle E_f | m(0) | E_i \rangle$. The detector’s power spectrum $\mathcal{P}(\omega)$, on the other hand, is independent on the detail of the detector.

Now, the Fourier integral (4) is exactly calculable. But before doing this, let us first take a closer look at the analytic structure of two-point Wightman function along the detector’s worldline. We first note that the two-point Wightman function for \mathcal{O}_{Δ} is determined by conformal symmetry and given by

$$\langle 0 | \mathcal{O}_{\Delta}(x) \mathcal{O}_{\Delta}(y) | 0 \rangle \propto [(x-y)^2 + i\epsilon \text{sgn}(x^0 - y^0)]^{-\Delta}, \quad (5)$$

where ϵ is a positive infinitesimal which is taken to zero at the end of calculations. Note that this function has a branch point at $(x-y)^2 \equiv -(x^0 - y^0)^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 0$. The branch cut should be chosen along the negative real axis in the complex $(x-y)^2$ -plane such that $\langle 0 | \mathcal{O}_{\Delta}(x) \mathcal{O}_{\Delta}(y) | 0 \rangle$ and $\langle 0 | \mathcal{O}_{\Delta}(y) \mathcal{O}_{\Delta}(x) | 0 \rangle$ coincide for spacelike separation $(x-y)^2 > 0$. With this choice of the branch cut, the commutator function $\langle 0 | [\mathcal{O}_{\Delta}(x), \mathcal{O}_{\Delta}(y)] | 0 \rangle$ vanishes for $(x-y)^2 > 0$; that is, spacelike-separated operators commute with each other, which is needed to implement the causality requirement. For timelike-separated operators, on the other hand, $\langle 0 | \mathcal{O}_{\Delta}(x) \mathcal{O}_{\Delta}(y) | 0 \rangle$ and $\langle 0 | \mathcal{O}_{\Delta}(y) \mathcal{O}_{\Delta}(x) | 0 \rangle$ do not coincide anymore. For example, if $x^0 - y^0 > 0$, the Wightman function $\langle 0 | \mathcal{O}_{\Delta}(x) \mathcal{O}_{\Delta}(y) | 0 \rangle$ is given by the boundary

value on the upper-side of the branch cut, while $\langle 0|\mathcal{O}_\Delta(y)\mathcal{O}_\Delta(x)|0\rangle$ is given by that on the lower-side of the branch cut. These two boundary values do not coincide and differ by the phase $(e^{2\pi i})^{-\Delta} = e^{-i2\pi\Delta}$. Similarly, for $(x-y)^2 < 0$ and $x^0 - y^0 < 0$ the Wightman functions $\langle 0|\mathcal{O}_\Delta(x)\mathcal{O}_\Delta(y)|0\rangle$ and $\langle 0|\mathcal{O}_\Delta(y)\mathcal{O}_\Delta(x)|0\rangle$ differ by the phase $(e^{-2\pi i})^{-\Delta} = e^{i2\pi\Delta}$. Putting these things together, we arrive at the following commutation relation in the timelike domain:

$$\langle 0|\mathcal{O}_\Delta(x)\mathcal{O}_\Delta(y)|0\rangle = e^{-i2\pi\Delta \operatorname{sgn}(x^0 - y^0)} \langle 0|\mathcal{O}_\Delta(y)\mathcal{O}_\Delta(x)|0\rangle \quad \text{for } (x-y)^2 < 0. \quad (6)$$

Now there are two important points to be noted. The first is that any two distinct points lying on the detector's worldline (2) are always timelike separated:

$$\begin{aligned} (x(\tau) - x(\tau'))^2 &= -(x^0(\tau) - x^0(\tau'))^2 + (x^1(\tau) - x^1(\tau'))^2 \\ &= -\frac{4}{a^2} \sinh^2\left(\frac{a}{2}(\tau - \tau')\right) < 0 \quad \text{for } \tau \neq \tau'. \end{aligned} \quad (7)$$

The second is that the sign function $\operatorname{sgn}(x^0(\tau) - x^0(\tau'))$ is equivalent to $\operatorname{sgn}(\tau - \tau')$ because $x^0(\tau) = (1/a)\sinh(a\tau)$ is a monotonically increasing function of τ . Hence the Wightman function along the detector's worldline satisfies the following commutation relation:

$$\langle 0|\mathcal{O}_\Delta(x(\tau))\mathcal{O}_\Delta(x(\tau'))|0\rangle = e^{-i2\pi\Delta \operatorname{sgn}(\tau - \tau')} \langle 0|\mathcal{O}_\Delta(x(\tau'))\mathcal{O}_\Delta(x(\tau))|0\rangle, \quad (8)$$

which is nothing but the anyon commutation relations in two dimensions, where τ plays the role of light-cone coordinates $x^\pm = x^0 \pm x^1$ of two-dimensional Minkowski spacetime. This implies that the Wightman function for scalar primary operators along the detector's worldline may well be related to the Wightman function for two-dimensional chiral anyon with statistical parameter $\kappa = 2\Delta$. Furthermore, as generally proved by Sewell [5] the Wightman function along the detector's worldline always satisfies the KMS thermal equilibrium condition:

$$\langle 0|\mathcal{O}_\Delta(x(\tau))\mathcal{O}_\Delta(x(0))|0\rangle = \langle 0|\mathcal{O}_\Delta(x(0))\mathcal{O}_\Delta(x(\tau + i\beta))|0\rangle, \quad (9)$$

where $\beta = 2\pi/a$. This implies that the Wightman function along the detector's worldline is nothing but the thermal Wightman function at temperature $T = a/(2\pi)$. These indicate that $\langle 0|\mathcal{O}_\Delta(x(\tau))\mathcal{O}_\Delta(x(\tau'))|0\rangle$ could be regarded as the thermal anyon Wightman function in two dimensions and hence its Fourier transform (4) may well be related to the thermal anyon distribution.

The above observation can in fact be checked by direct calculations. First, the Wightman function along the detector's worldline is obtained by just substituting (2) into (5) and given by

$$\langle 0|\mathcal{O}_\Delta(x(\tau))\mathcal{O}_\Delta(x(\tau'))|0\rangle \propto \left[\frac{\pi T}{i \sinh(\pi T(\tau - \tau' - i\epsilon))} \right]^{2\Delta}, \quad T = \frac{a}{2\pi}. \quad (10)$$

One can easily check that (10) indeed satisfies the KMS condition (9). The detector's power spectrum is then given by the Fourier transform

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\omega) &\propto \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \left[\frac{\pi T}{i \sinh(\pi T(\tau - i\epsilon))} \right]^{2\Delta} \\ &= \frac{(2\pi T)^{2\Delta-1}}{\Gamma(2\Delta)} \exp\left(-\frac{\omega}{2T}\right) \left| \Gamma\left(\Delta + \frac{i\omega}{2\pi T}\right) \right|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

which, up to the overall factor, exactly coincides with the thermal distribution for two-dimensional chiral anyon [3]. We note that if Δ is an integer the detector's power spectrum (11) becomes proportional to the Bose–Einstein distribution. If Δ is a half-integer, on the other hand, (11) becomes proportional to the Fermi–Dirac distribution. Hence for generic Δ the power spectrum continuously interpolates the Bose–Einstein and Fermi–Dirac distributions.

To conclude, we have seen that the two-point Wightman function for a scalar primary operator satisfies the anyon commutation relations and the KMS condition if it is restricted to lie on the detector's worldline. We have also seen that the detector's power spectrum indeed coincides with the thermal anyon distribution in two dimensions. It was, however, unclear how the braid group entered into the discussion. It would be important to clarify this.

References

- [1] S. Takagi, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **88** (1986) 1–142.
- [2] S. Ohya, *Phys. Rev.* **D96** (2017) 045017, arXiv:1706.03761 [hep-th].
- [3] A. Liguori, M. Mintchev and L. Pilo, *Nucl. Phys.* **B569** (2000) 577–605, arXiv:hep-th/9906205.
- [4] B. S. DeWitt, “Quantum gravity: the new synthesis,” in *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, S. W. Hawking and W. Israel, eds., pp. 680–745 (Cambridge University Press, Cambridge, 1979).
- [5] G. L. Sewell, *Annals Phys.* **141** (1982) 201–224.

超弦理論におけるモジュライと現象論

Maskawa Institute for Science and Culture, Kyoto Sangyo University, Kyoto 603-8555, Japan

Shohei Uemura

1 Introduction

近年、超弦理論とインフレーションの関係について盛んに議論されている。宇宙の平坦性問題やホライズン問題といったビッグバン宇宙論における諸問題を解決し、観測されているCMBの揺らぎを再現するためには、宇宙のインフレーションは重要な要素である。理論的な面からは、インフレーションを引き起こした場（インフラトン）の正体は高エネルギーでの場の理論の姿に迫る上で、重大な問いである。これまで様々なインフレーションモデルが考えられてきた。アクシオンはインフラトンの有力な候補の一つである。アクシオンは併進不変性があるため摂動の範囲ではポテンシャルは平坦である。併進不変性は非摂動的に破られるため、離散的な併進不変性のみが残ったポテンシャルが生成される。そのため、アクシオンインフレーションを考えるうえで、非摂動効果は極めて重要である。

もっとも単純なアクシオンインフレーションモデルはナチュラルインフレーション [1] である。このモデルで十分平坦なポテンシャルを得るためには、プランクスケールやストリングスケールに近いような大きな崩壊定数 f が必要であるが、それが実現できるかは高エネルギーの理論の詳細に依存する。実際、超弦理論ではそのような大きな崩壊定数は実現することが難しいと知られている。また、単純なナチュラルインフレーションはスカラーテンサー比 r が大きくなる傾向があり、観測結果を上手く説明できない可能性がある。そのため、アクシオンポテンシャルへの補正を考えることは重要である。

超弦理論の非摂動効果として、Poly-instanton と呼ばれる非摂動効果が存在する [2, 3]。この非摂動効果は、非摂動効果に対する非摂動補正であり、典型的には次のようなモジュライ場 T の関数になる：

$$\Delta W = \exp[A + Ce^{aT}]. \quad (1)$$

このようなポテンシャルでのインフレーションモデルを考えることは有用である。 T の実成分の方でのインフレーションモデルはすでに考えられている [4]。また、このポテンシャルを用いたモジュライ固定についても議論されている [5]。我々は特に T の虚部であるアクシオンを用いてのアクシオンインフレーションでの可能性について議論した [6]。

2 Poly-instanton Inflation

超弦理論の低エネルギー有効理論は超重力理論を用いて表される。Kähler モジュライはカイラルスーパーフィールド T_i を用いて表される。超弦理論における非摂動効果 (D-brane instanton

や gaugino condensation) によって、非摂動的に次のようなスーパーポテンシャルが生成される。gaugino condensation の場合、非摂動補正は次のように書かれる:

$$W_{np} = A_a e^{-24\pi^2 f_a/b_a}, \quad (2)$$

ここで f_a は gauge kinetic function、 b_a はベータ関数の係数である。

$$f_a = f_{tree} + f_{1-loop} + f_{np}. \quad (3)$$

であるが、 f_{tree} はゲージ理論が局在するブレーンの体積に比例する。 f_{1-loop} は複素構造 U_i にのみ依存する関数である。 f_{np} は非摂動補正であり、非摂動補正を与える D-brane instanton の古典作用を用いて次のように書かれる:

$$f_{np} = \sum_j B_j(U_m) e^{-b_j T_j}. \quad (4)$$

スーパーポテンシャルへの非摂動補正を T_i に依存する項だけ抜き出すと次のようになる:

$$W_{np} = \sum_a A_a \exp[-b_a(\alpha_{a,i} T_i + \sum_j B_{a,j} e^{-b_{j,k} T_k})]. \quad (5)$$

このような補正を poly-instanton 効果と呼ぶ。F-term ポテンシャルは次のようになる。

$$V_F = e^K [K^{T\bar{T}} D_T W D_{\bar{T}} \bar{W} - 3|W|^2], \quad (6)$$

ただしここで K は Kähler ポテンシャルであり $K = K(T + \bar{T})$, $D_T W = (\partial_T K)W + \partial_T W$ である。 $T = \tau + i\phi$ と書く。虚部は非摂動効果を除けば併進対称性があるアクシオンである。 T 以外の場はすべて十分重くなっていると仮定する。F-term ポテンシャルは次のように書ける。

$$V_F \approx 2e^K |\bar{W}_0 A_0| \exp[-\delta \cos(a\phi)] \{ (K^{T\bar{T}} K_T^2 - 3) \cos[\delta \sin(a\phi) + \theta] \\ + K^{T\bar{T}} K_T a \delta \cos[-a\phi + \delta \sin(a\phi) + \theta] \} + (\text{const}), \quad (7)$$

ここで、 $\delta = C \exp[-a < \tau >]$ であり、 θ は W_0, A_0 などの位相をまとめたものである。 δ が十分大きいとき、このポテンシャルは次のように近似できる:

$$V \sim A (e^{-\delta \cos a\phi} \cos[\delta \sin a\phi - a\phi + \theta] + V_0). \quad (8)$$

このポテンシャルの概形を描くと Figure 1 のようになる。Poly-instanton ポテンシャルはその特徴的な構造のため平坦な領域が存在する。このポテンシャルでのインフレーションパラメータを計算すると次のように概算できる:

$$r \sim 10^{-2} \frac{\eta^2}{\delta^4 a^4 \varepsilon}, \quad (9)$$

$n_s \sim 0.965$ とすると、 $\varepsilon^2 \sim \frac{10^{-7}}{\delta^4 a^4}$, であり mall field inflation と呼ばれる模型になっている。また数値を入れ計算すると Table 1 のようになる。

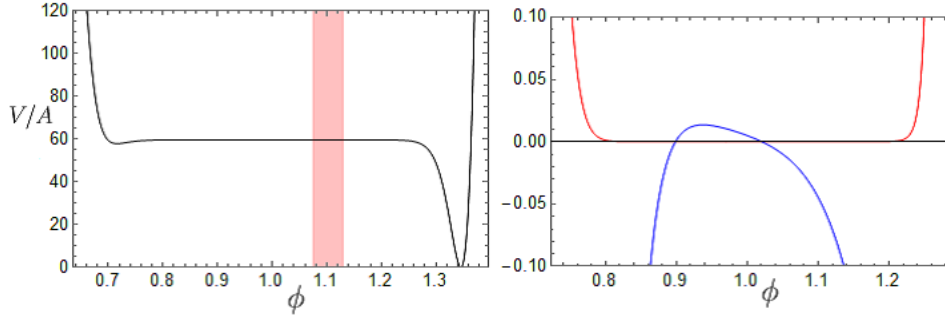


Figure 1: The inflation potential with $\delta = 8.0$. The red and blue curves correspond to ϵ and η , respectively.

δ	θ	A	n_s	r	N_e	α_s	m_ϕ^2
8.0	4.13	3.29×10^{-16}	0.953	6.02×10^{-7}	61.9	-3.66×10^{-4}	6.70×10^{-11}
9.0	3.16	3.46×10^{-16}	0.959	9.30×10^{-7}	58.6	-4.66×10^{-4}	1.27×10^{-10}
10.0	2.11	2.18×10^{-16}	0.963	7.65×10^{-7}	56.8	-4.70×10^{-4}	1.26×10^{-10}
11.0	7.25	1.08×10^{-16}	0.966	4.24×10^{-7}	61.7	-3.98×10^{-4}	8.31×10^{-11}
12.0	6.28	8.89×10^{-17}	0.966	4.89×10^{-7}	55.7	-4.61×10^{-4}	1.12×10^{-10}

Table 1: Examples of parameters and observables.

References

- [1] K. Freese, J. A. Frieman and A. V. Olinto, Phys. Rev. Lett. **65**, 3233 (1990).
- [2] R. Blumenhagen and M. Schmidt-Sommerfeld, JHEP **0807**, 027 (2008) [arXiv:0803.1562 [hep-th]].
- [3] R. Blumenhagen, X. Gao, T. Rahn and P. Shukla, JHEP **1206**, 162 (2012) [arXiv:1205.2485 [hep-th]].
- [4] M. Cicoli, F. G. Pedro and G. Tasinato, JCAP **1112**, 022 (2011) [arXiv:1110.6182 [hep-th]].
- [5] M. Cicoli, C. P. Burgess and F. Quevedo, JHEP **1110**, 119 (2011) [arXiv:1105.2107 [hep-th]].
- [6] T. Kobayashi, S. Uemura and J. Yamamoto, Phys. Rev. D **96**, no. 2, 026007 (2017)

マヨラナニュートリノはボゴリューボフ準粒子か

藤川和男

日大理工/理研

Abstract

標準理論では、ニュートリノはワイルフェルミオンとして定義される。シーソー機構では2個のワイルフェルミオンの組み合わせで2個のマヨラナフェルミオンを作り出す。マヨラナとワイルは似ているが基本的な差がある。マヨラナは荷電共役では自分自身に戻る。他方、ワイル粒子は荷電共役での変換性が正確には定義されていない。したがって、ワイルからマヨラナを導くには、ある種のボゴリューボフ変換が必要になる。すなわち、荷電共役の自発的な破れに類似の真空状態を変える操作が要求される。この考察から、マヨラナニュートリノが観測されれば、素粒子のなかでは最初のボゴリューボフ準粒子となると予想される。

1 Introduction

In the massless case, it is generally believed that the Majorana fermion and the Weyl fermion are identical in $d = 1 + 3$ as is seen by writing them in the two-component spinor notation. But this is shown to be invalid quantum mechanically, and we discuss Majorana and Weyl fermions using a relativistic analogue of Bogoliubov transformation. Surprisingly, this analysis leads to the idea that the Majorana neutrino should be regarded as a Bogoliubov quasi-particle that is consistently understood only by use of the Bogoliubov transformation [1].

2 Majorana fermion from Weyl fermion

The Majorana fermion is defined by

$$\psi_M(x) = C\overline{\psi_M}^T(x)$$

and the chiral Weyl fermion is defined by

$$\gamma_5\psi_W(x)_R = \psi_W(x)_R.$$

It is customary to define

$$\psi_M(x) = \psi_W(x)_R + C\overline{\psi_W(x)_R}^T,$$

so that $\psi_M(x) = C\overline{\psi_M}^T(x)$ where $C = i\gamma^2\gamma^0$ is the charge conjugation matrix.

It is often assumed in the analysis of seesaw mechanism that the charge conjugation is given by

$$(\psi_W(x)_R)^C = C\overline{\psi_W(x)_R}^T$$

or

$$C\psi_W(x)_R C^\dagger = C\overline{\psi_W(x)_R}^T.$$

However, this leads to a puzzling result using $\psi_W(x)_R = \frac{(1+\gamma_5)}{2}\psi_W(x)_R$,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\psi_W(x)_R\mathcal{C}^\dagger &= \frac{(1+\gamma_5)}{2}\mathcal{C}\psi_W(x)_R\mathcal{C}^\dagger \\ &= \frac{(1+\gamma_5)}{2}\mathcal{C}\overline{\psi_W(x)_R}^T = 0.\end{aligned}$$

Moreover, for C- and P-violating weak interaction, which is written as

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Weak}} &= (g/\sqrt{2})\bar{e}_L\gamma^\mu W_\mu^{(-)}(x)\nu_L + h.c. \\ &= (g/\sqrt{2})\bar{e}_L\gamma^\mu W_\mu^{(-)}(x)[(1-\gamma_5)/2]\nu_L + h.c.,\end{aligned}\tag{1}$$

the first expression implies that $\mathcal{L}_{\text{Weak}}$ is invariant under C, while the second expression implies $\mathcal{L}_{\text{Weak}} \rightarrow 0$, if one uses $(\psi_W(x)_R)^C = C\overline{\psi_W(x)_L}^T$. We thus conclude that the quantity

$$(\psi_W(x)_R)^C = C\overline{\psi_W(x)_R}^T$$

represents a convenient auxiliary object, but not a charge conjugation of $\psi_W(x)_R$.

Instead, one may define

$$\mathcal{C}_\psi\psi_W(x)_R\mathcal{C}_\psi^\dagger = C\overline{\psi_W(x)_L}^T\tag{2}$$

by noting that $\psi_W(x)_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi_D(x)$ and using the conventional charge conjugation

$$\mathcal{C}_\psi\psi_D(x)\mathcal{C}_\psi^\dagger = C\overline{\psi_D(x)}^T$$

of a Dirac field $\psi_D(x)$. In this case, no obvious contradictions appear, but

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\psi\psi_M(x)\mathcal{C}_\psi^\dagger &= \mathcal{C}_\psi\psi_W(x)_R\mathcal{C}_\psi^\dagger + \mathcal{C}_\psi C\overline{\psi_W(x)_R}^T\mathcal{C}_\psi^\dagger \\ &= C\overline{\psi_W(x)_L}^T + \psi_W(x)_L \\ &\neq \psi_M(x).\end{aligned}$$

Namely, we can not satisfy the Majorana condition of $\psi_M(x)$. This implies that the issue of the operator charge conjugation is not solved by the *mere change of the convention*, but rooted at a more fundamental level.

However, consistent operatorial CP is satisfied,

$$\mathcal{CP}\psi_M(x)(\mathcal{CP})^\dagger = i\gamma^0\psi_M(t, -\vec{x}),$$

if one adopts C-operation (2) and the $i\gamma^0$ - parity,

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^\dagger = i\gamma^0\psi(t, -\vec{x}),$$

which preserves the reality of the field in the Majorana representation.

3 Relativistic analogue of Bogoliubov transformation

We introduced a relativistic analogue of Bogoliubov transformation, $(\psi, \psi^c) \rightarrow (N, N^c)$,

$$\begin{pmatrix} N(x) \\ N^c(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \psi(x) - \gamma_5 \sin \theta \psi^c(x) \\ \cos \theta \psi^c(x) + \gamma_5 \sin \theta \psi(x) \end{pmatrix},$$

with a suitable parameter θ . Note that $\psi^c = C\bar{\psi}^T$, and the transformation satisfies the (classical) consistency condition

$$N^c = C\bar{N}^T.$$

This Bogoliubov transformation maps a linear combination of a Dirac fermion ψ and its charge conjugate ψ^c to another Dirac fermion N and its charge conjugate N^c , and the original Fock vacuum for ψ is mapped to a new vacuum for N . It is important that the anticommutators are preserved,

$$\begin{aligned} \{N(t, \vec{x}), N^c(t, \vec{y})\} &= \{\psi(t, \vec{x}), \psi^c(t, \vec{y})\}, \\ \{N_\alpha(t, \vec{x}), N_\beta(t, \vec{y})\} &= \{N_\alpha^c(t, \vec{x}), N_\beta^c(t, \vec{y})\} = 0. \end{aligned}$$

namely, canonicity condition of the Bogoliubov transformation is satisfied, irrespective of the masses of the fields ψ and N . The Bogoliubov transformation preserves the CP symmetry, although it does not preserve the transformation properties under operator P and operator C separately.

The Bogoliubov transformation with $\theta = \pi/4$ gives

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(N(x) + N^c(x)) &= \psi_R(x) + C\bar{\psi}_R^T(x), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(N(x) - N^c(x)) &= \psi_L(x) - C\bar{\psi}_L^T(x), \end{aligned}$$

namely, two Majorana fermions,

$$\begin{aligned} \psi_M^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N(x) + N^c(x)), \\ \psi_M^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N(x) - N^c(x)), \end{aligned}$$

are naturally defined in terms of $N(x)$ (*Bogoliubov quasiparticle*), with $\mathcal{C}_N N \mathcal{C}_N^\dagger = N^c = C\bar{N}^T$. Those Majorana fermions satisfy

$$\mathcal{C}_N \psi_M^{(1)} \mathcal{C}_N^\dagger = \psi_M^{(1)}, \quad \mathcal{C}_N \psi_M^{(2)} \mathcal{C}_N^\dagger = -\psi_M^{(2)}$$

the first being even and the second odd eigenfield of the charge conjugation operator \mathcal{C}_N .

In the case of massless Majorana and Weyl fermions, we do not encounter an explicit fermion number violation in the Lagrangian, for example, if one defines $\psi_M^{(1)}(x) = \psi_R(x) +$

$$C\overline{\psi_R(x)}^T,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\overline{\psi_M^{(1)}(x)}i\partial\psi_M^{(1)}(x) \\ &= \overline{\psi_R(x)}i\partial\psi_R(x),\end{aligned}$$

unlike the see-saw mechanism. Yet the chiral Weyl fermion $\psi_R(x)$ is not the eigenstate of charge conjugation \mathcal{C} and parity \mathcal{P} transformations, although \mathcal{CP} is well-defined. Recall that

$$\mathcal{L} = \overline{\psi_R(x)}i\partial\psi_R(x) = \overline{\psi_R(x)}i\partial[(1 + \gamma_5)/2]\psi_R(x)$$

suffers from the same ambiguity as in (1) if one adopts the charge conjugation $(\psi_R(x))^C = C\overline{\psi_R(x)}^T$. Thus the definition of the free Majorana fermion has conflicts with the definition of the charge conjugation for $\psi_R(x)$.

We can solve the Bogoliubov transformation (3) in terms of the Majorana fermions as

$$\begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi^c(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi_M^{(1)}(x) + \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi_M^{(2)}(x) \\ \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi_M^{(1)}(x) - \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi_M^{(2)}(x) \end{pmatrix}.$$

Natural charge conjugation is then \mathcal{C}_N , under which

$$\mathcal{C}_N\psi_M^{(1)}(x)\mathcal{C}_N^\dagger \rightarrow \psi_M^{(1)}(x), \quad \text{and} \quad \mathcal{C}_N\psi_M^{(2)}(x)\mathcal{C}_N^\dagger \rightarrow -\psi_M^{(2)}(x).$$

But, this operation does not send ψ to ψ^c , which would be expected if the operator charge conjugation is preserved, although the classical consistency condition $\psi^c(x) = C\overline{\psi(x)}^T$ is satisfied. The Majorana fermions $\psi_M^{(1,2)}(x)$ are consistently defined in terms of the Bogoliubov $N(x)$ and $N^c(x)$, but not consistently in terms of the chiral projected components $\psi_{L,R}(x)$.

As for the physical implication of the above analysis, it may be natural to accept the description of the Majorana neutrino using the Bogoliubov transformation as a physical one in the Standard Model, since we start with the chiral Weyl fermions as the basic building blocks of gauge theory. *One may thus regard the Majorana neutrino, if it should be observed, as a first Bogoliubov quasiparticle which is consistently understood only by the use of the Bogoliubov transformation.*

We have discussed the basic properties of Majorana and Weyl fermions and the relativistic analogue of Bogoliubov transformation in $d = 1 + 3$. In the Standard Model it is natural to start with Weyl fermions, and we argued that a change of vacuum as is indicated by the Bogoliubov transformation is inevitable to understand the possible Majorana neutrino consistently.

References

- [1] K. Fujikawa and A. Tureanu, "Majorana neutrino as Bogoliubov quasiparticle", Phys. Lett. B 774 (2017) 273, arXiv:1708.01438.

Constraints of neutrino mass by the lensing effect on the m-z relation of type Ia supernovae

Toshifumi Futamase

Department of Astrophysics and Atmospheric Science, Kyoto Sangyo University

Abstract

The lensing effect on the magnitude-redshift relation of the Type Ia Supernovae is investigated. It is pointed out that a severe constraints on the total neutrino mass and the equation of state parameter of the dark energy are obtained by using future planned wide field imaging surveys by Infrared Satellite WFIRST and LSST.

1 Introduction

Large scale structure in the universe brings about inevitable noises on any cosmological observation by its weak lensing effect[4]. However it also carries important cosmological informations if we can predict the detail of the effect. Fortunately the development of N-body simulation of structure formation gives us reasonably accurate informations on the growth of large scale structure based on the cold dark matter (CDM) scenario. Thus it will be possible to make use of the results of N-body simulation to derive the effect of the lensing in the observational data to derive useful information on the cosmology if we know the intrinsic, namely without the effect of lensing, nature of the source object. The object whose intrinsic nature such as luminosity is known or accurately estimated is called the standard candle. Type Ia supernovae is most famous example of the standard candle. In fact it is well known that the Type Ia supernovae are used to show the acceleration of the present universe. Therefore it is natural to consider the lensing effect on the magnitude of the supernovae. Another motivation to study the lensing effect is the existence of the future imaging surveys with the Wide-field Infrared Survey Telescope called WFIRST and Large Synoptic Survey Telescope (LSST). The WFIRST will observe several thousand supernovae with redshift larger than 1, and LSST will observe of the order of hundred thousand supernovae with redshift between 0 to 1. Sufficiently large number of nearby supernovae are used to improve the estimate of the intrinsic luminosity which is essentially important to estimate the lensing effect. The present estimate has the ambiguity of the order of 0.11 magnitude and if the estimate is expected to be improved to 0.06 magnitude or so.

2 Method

On the theoretical side the lensing effect is known from the distance fluctuation due to the inhomogeneous matter distribution. Under the condition that the bending angle of the light ray is sufficiently small and the Newtonian potential is sufficiently weak, the distance fluctuation contrast $\delta_d = \delta d / \delta_{FRW}$ for the object with the redshift z_s and the direction \vec{n} in

the totally flat universe is given as follows [2].

$$\delta_d(z_s, \vec{n}) = -\frac{3H_0^2\Omega_{m,0}}{2} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{\chi_s - \chi}{\chi_s} (1 + z(\chi)) \delta_m(z(\chi), \vec{n}) \quad (1)$$

where d_{FRW} is the standard Friedmann-Robertson-Walker luminosity distance and $H_0, \Omega_{m,0}$ are the Hubble parameter and the density parameter at the present, respectively, Thus the distance contrast in an inhomogeneous universe is given by the line of sight integral over the matter density contrast $\delta_m = \delta\rho/\rho_0$ with ρ_0 the averaged matter density. The relation between the observed apparent magnitude and the distance contrast is given by

$$\delta m(z, \vec{n}) \simeq \frac{5}{\ln 10} \delta_d(z, \vec{n}) \quad (2)$$

One can calculate, for example, the dispersion of the lensing effect at fixed redshift from the above formula[3]. This is given by

$$\sigma_{\text{lens}}^2(z_s) = \left(\frac{15H_0^2\Omega_{m,0}}{2 \ln 10} \right)^2 \int_0^{z_s} d\chi \left[\frac{\chi_s - \chi}{\chi_s} \right]^2 \int_0^{k_{max}} \frac{kd k}{2\pi} P_m(z, k) \quad (3)$$

where $P_m(z, k)$ is the nonlinear matter power spectrum and k_{max} is of the order of 10, the largest scale where our small angle approximation applies. Unfortunately no theoretical approximation is available for such higher value of wave number. Thus we have to employ the result of numerical simulation of structure formation. Here we used the result by Smith et al. [1]. We have also used the fitting formula of the effect of neutrino mass on the structure formation by Bird et al[5].

3 Results

The effect of neutrino as hot dark matter on the structure formation is well known. It erases small scale structure by the free streaming. The free streaming scale is given by [7][6]

$$k_{\text{fs}}(z) \simeq \frac{0.677}{(1+z)^{1/2}} \left(\frac{m_\nu}{1\text{eV}} \right) (\Omega_{m,0} h^2)^{1/2} \text{Mpc}^{-1} \quad (4)$$

In this work we focus on the neutrino mass constraint from the lensing effect. We found that the constraint expected from both WFIRST and LSST is $m_\nu < 1.1\text{eV}$ if we assume the present ambiguity of the absolute magnitude. If we can reduce the ambiguity to half, then we will reach the current tightest limit, $m_\nu \leq 0.2\text{eV}$.

We can improve the constraint if we are able to observe more higher redshift sources and source with very small intrinsic ambiguity. In the latter respect, we can make use of gravitational waves from binary systems composed of neutron stars. It is known that such binaries are potentially powerful standard candles (1% accuracy for determination of distance[8]). Although the first gravitational waves from binary neutron stars was already observed, the distance is too short to apply for the cosmology. It is expected that next generation of gravitational wave detectors will be able to observe neutron star binaries up to the redshift of the order of 2. Thus the method to constrain the neutrino mass adopted in the work will become very powerful when many gravitational wave sources are available.

References

- [1] R. E. Smith et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **43**, 172 (2003).
- [2] T. Futamase and M. Sasaki, *Phys. Rev. D* **40**, 2502 (1989).
- [3] R. Hada & T. Futamase, *Astrophys. J.* **828**, no. 2, 112 (2016).
- [4] T. Futamase, *Inter. J. Mod. Phys. D* 24, 1530011 (2015).
- [5] S. Bird, M. Viel, & M. Haehnet, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 420, 2551 (2012).
- [6] M. Takada, E. Komatsu & T. Futamase, *Phys. Rev. D* **73**, 083520 (2006).
- [7] J. R. Bond, G. Efstathiou & J. Silk, *Phys. Lett.* 45, 1980 (1980).
- [8] D. E. Holtz & S. A. Hughes, *Astrophys. J.* 629, 15, 2005

レプトンフレーバー非保存相互作用の検証に向けたレプトン-核子散乱の高精度定式化

山中 真人

京都産業大学・益川塾

Abstract

ヒッグスを媒介とするレプトンフレーバー非保存散乱 $l_i N \rightarrow \tau X$ の断面積を高精度に定式化する¹。ヒッグスとグルーオンの有効結合を介した素過程 $l_i g \rightarrow l_j g$ を考案し、これが優勢な寄与となることを示す。さらに、先行研究で取り込まれていなかったクォーク数保存に注意を払いながらクォーク終状態反応のあるべき姿を検討する。本講演は研究 [1] に基づく。

1 導入

世代の起源、フェルミオン質量の階層性など、フレーバーに関わる諸問題の解決は標準理論を超える新物理の導入無くして考えられない。言い方を換えれば、そういった諸問題の解決・検証は新物理解明のカギとなり得る。1つのプロブとして、標準理論における保存量の破れの探索、すなわち、レプトンフレーバーの破れ (lepton flavor violation, LFV) の探索が有効である。

LFV を探る方法の1つにレプトン-核子散乱 $l_i N \rightarrow l_j X$ (N は核子) が挙げられる [2, 3, 4]。本研究では、LFV を媒介する粒子が主に重いクォークやグルーオンと相互作用するシナリオに注目する。話を具体的にするため、本講演ではヒッグス粒子を LFV 媒介粒子とする [5, 6]。本講演では $l_i N \rightarrow l_j X$ の正しい素過程を考案する。先行研究では、 $l_i q \rightarrow l_j q$ ($q \ni c, b, t$) が素過程として調べられてきた。しかし、核子内に c, b, t は存在せず、海クォークとしてのみ現れる。そのため、クォーク数保存を課すと以下の素過程が正しいものとなる。

$$l_i g \rightarrow l_j q\bar{q} \quad (1)$$

また、LHC におけるヒッグス生成の優勢過程がヒッグスとグルーオンの有効結合によるものであることを思い出すと、 $l_i N \rightarrow l_j X$ にも同様の素過程が大きな寄与をもたらすと予測できる。すなわち、

$$l_i g \rightarrow l_j g \quad (2)$$

の素過程を導入すべきである。本研究では、これらの素過程と共に $l_i N \rightarrow l_j X$ の断面積を定式化する。後に示すように、散乱 $l_i N \rightarrow l_j X$ の探索に適した固定標的ビーム実験では、ここで考案した $l_i g \rightarrow l_j g$ が優勢な寄与をもたらす。そのため、以下で行う断面積定式化は近未来実験における LFV 検証を新物理に確実に繋ぐうえで不可欠なものとなる。

¹本研究の結果はフレーバーの破れを媒介する粒子が主に重いクォークやグルーオンと相互作用するシナリオ全てに対しそのまま成り立つ。例えば、余剰次元模型における KK ゲージボソン、フレーバー対称性模型が预言する flavon、種々のシナリオで現れる leptoquark など。

2 断面積定式化

LFV 散乱 $\ell_i N \rightarrow \ell_j X$ の断面積を定式化する。導入で述べたように (1) $\ell_i g \rightarrow \ell_j g$ (2) $\ell_i g \rightarrow \ell_j q\bar{q}$ の素過程で扱うことが肝である。これらはラグランジアン $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \mathcal{L}_{\text{LFV}}$ で記述される。

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = - \sum_q y_q h \bar{q} q + g_{hgg} h G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_{\text{LFV}} = -\rho_{ij} \bar{\ell}_j P_L \ell_i h - \rho_{ji} \bar{\ell}_j P_R \ell_i h. \quad (3)$$

$G_{\mu\nu}^a$ はグルーオン場の強さ、 g_{hgg} はグルーオンとヒッグスの有効結合定数を表す。LFV 相互作用を結合定数 ρ_{ij} でパラメーター化した。添字 i, j はフレーバーを表し、 $i \neq j$ とする。これらに対し、LHC におけるヒッグス LFV 崩壊探索から制限が課されている： $\sqrt{|\rho_{e\tau}|^2 + |\rho_{\tau e}|^2} < 2.4 \times 10^{-3}$ 、及び、 $\sqrt{|\rho_{\mu\tau}|^2 + |\rho_{\tau\mu}|^2} < 3.16 \times 10^{-3}$ [7, 8, 9, 10]。 g_{hgg} はヒッグスの移行運動量 q_h ($q_h^2 = -Q^2 < 0$) の関数として次の形に得られる (Fig. 1 (a)) [11, 12]。

$$g_{hgg} = \sum_{q=c,b,t} \frac{\alpha_s}{8\pi v} \frac{4m_q^2}{q_h^2} \left[1 + \left(1 - \frac{4m_q^2}{q_h^2} \right) f\left(\frac{4m_q^2}{q_h^2}\right) \right], \quad (4)$$

$v = 246 \text{ GeV}$ は真空期待値、 $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ 、 m_q は内線クォークの質量を表す。関数 $f(r)$ は

$$f(r) = -\frac{1}{4} \log^2 \left[-\frac{1 + \sqrt{1-r}}{1 - \sqrt{1-r}} \right] \quad (r < 0). \quad (5)$$

t -チャンネル散乱 $\ell_i g \rightarrow \tau g$ では $q_h^2 < 0$ なので関数 $f(r)$ は虚部を持たない。これはスケールが $q_h^2 = m_h^2$ で固定され、軽いクォークが虚部をもたらす LHC でのヒッグス生成と大きく異なる点である。各クォークによる g_{hgg} への寄与は、次のように、 $Q^2 \rightarrow 0$ に対し定数値へ漸近する。

$$r [1 + (1-r) f(r)] \rightarrow \begin{cases} 2/3 & (r \rightarrow -\infty, Q^2 \rightarrow 0). \\ 0 & (r \rightarrow 0, Q^2 \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (6)$$

そのため、 $\ell_i N \rightarrow \ell_j X$ では、 g_{hgg} に対する b や c の寄与も丁寧に考えることが重要となる²。
 $\ell_i N \rightarrow \ell_j X$ の全断面積は次の形に定式化される。

$$\sigma_{\ell_i N \rightarrow \tau X} = \sum_{\hat{X}=g,q\bar{q}} \int dx dy \int_0^1 d\xi \frac{d^2 \hat{\sigma}_{\ell_i g \rightarrow \tau \hat{X}}}{dxdy} f_g(\xi, Q^2). \quad (7)$$

$x \equiv Q^2/2P \cdot q_h$ は Bjorken 変数、 $y \equiv 2P \cdot q_h/2P \cdot p_i$ は弾性度を表す。 P, p_i は始状態核子、始状態レプトンの運動量である。 x と y の積分範囲は [13, 14] などで導かれている。本研究 [1] の (9) 式に表式を示す。 $f_g(\xi, Q^2)$ はグルーオン PDF、 ξ は始状態核子の運動量とパートン運動量の比である： $p_g = \xi P$ 。 ξ の範囲は素過程ごとに決まる。素過程 $\ell_i g \rightarrow \tau g$ の微分断面積は

$$\frac{d\hat{\sigma}_{\ell_i g \rightarrow \tau g}}{dxdy} = \frac{Q^4 (Q^2 + m_\tau^2)}{8\pi \hat{s}} \frac{|g_{hgg}|^2 (|\rho_{i\tau}|^2 + |\rho_{\tau i}|^2)}{(Q^2 + m_h^2)^2} \delta(\xi - x). \quad (8)$$

²一方、LHC におけるヒッグス粒子生成では、 $q_h^2 = m_h^2$ なので、トップだけが寄与する。

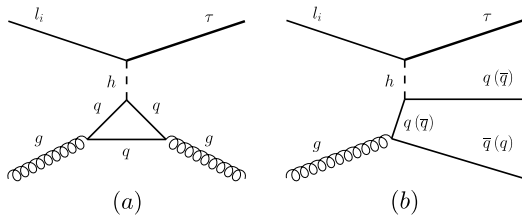


Figure 1: $l_i N \rightarrow \tau X$ の素過程 (a) グルーオン有効演算子を介した $l_i g \rightarrow \tau g$ (b) $l_i g \rightarrow \tau q \bar{q}$

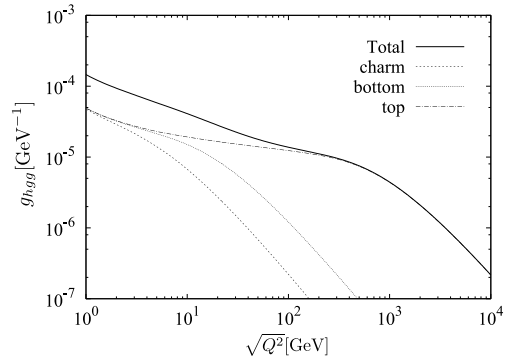


Figure 2: g_{hgg} とそれに対する各クォーク寄与の移行運動量依存性。

この素過程の不変質量は $\hat{s} = (p_i + p_g)^2$ となる。 $l_i g \rightarrow \tau q \bar{q}$ の微分断面積は次式で与えられる。

$$\frac{d\hat{\sigma}_{l_i g \rightarrow \tau q \bar{q}}}{dx dy} = \frac{\alpha_s y (Q^2 + m_\tau^2)}{64\pi^2 \xi (Q^2 + w^2)^2} \left\{ 2K w^2 (4m_q^2 + Q^2) + \left[(Q^2 + w^2)^2 - 2(4m_q^2 + Q^2)(w^2 - 2m_q^2) \right] \log \left| \frac{1+K}{1-K} \right| \right\} \frac{y_q^2 (|\rho_{i\tau}|^2 + |\rho_{\tau i}|^2)}{(Q^2 + m_h^2)^2} \theta \left(\xi - x \frac{Q^2 + 4m_q^2}{Q^2} \right). \quad (9)$$

ここで $K \equiv \sqrt{1 - 4m_q^2/w^2}$ 。また、 $q\bar{q}$ の不変質量を $w^2 = (p_g + q_h)^2 = (p_q + p_{\bar{q}})^2 = Q^2(\xi/x - 1)$ と置いた。素過程 $l_i g \rightarrow \tau q \bar{q}$ の場合、終状態クォークの質量が断面積に及ぼす効果を正しく取り込むため、 ξ を次の形に取る： $\xi = x(Q^2 + w^2)/Q^2$ [15]。

3 数値結果

ビームエネルギーの関数として、ヒッグスを媒介とする LFV 散乱 $l_i N \rightarrow \tau X$ の断面積を図 3 に示す。グルーオン PDF の大きさと終状態位相空間の抑圧が小さいことにより、今回考案した素過程 $l_i g \rightarrow \tau g$ が主たる寄与となる。この素過程により、 $E_\ell = 50 \text{ GeV}$ (500 GeV) に対し、全断面積がおおよそ 7.8 倍 (1.8 倍) 増大する。素過程 $l_i g \rightarrow \tau c \bar{c}$ ($l_i g \rightarrow \tau b \bar{b}$) は、位相空間の抑圧が原因となり、 $E_\ell \sim 100 \text{ GeV}$ (500 GeV) からようやく有意な寄与となる。[4] などの先行研究では、ボトム寄与が $E_\ell \sim 50 \text{ GeV}$ から寄与すると評価されていたので、大きな修正となる。

4 まとめ

ヒッグス媒介 LFV 散乱 $l_i N \rightarrow \tau X$ の断面積定式化について講演した。この散乱の正しい素過程を明らかにした：(i) ヒッグスとグルーオンの有効結合を介した反応 $l_i g \rightarrow \tau g$ 、(ii) クォーク数保存を課した反応 $l_i g \rightarrow \tau q \bar{q}$ ($q = c, b, t$)。先行研究が用いていた $l_i q \rightarrow \tau q$ は、クォーク

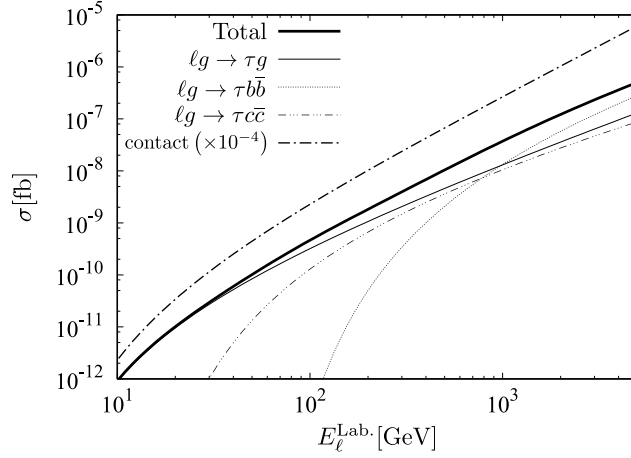


Figure 3: ビームエネルギーの関数として求めた $l_i N \rightarrow \tau X$ の断面積。一点鎖線は有効相互作用による断面積 ([1] を参照)。他はヒッグスを媒介とした場合の全断面積と部分断面積を表す ($\sqrt{|\rho_{\ell\tau}|^2 + |\rho_{\tau\ell}|^2} = 2.4 \times 10^{-3}$)。

ク数保存が破れており、現実の実験とは繋がらない。 $E_\ell \lesssim 1 \text{ TeV}$ のビームを用いる固定標的実験では、本研究が考案した $l_i g \rightarrow \tau g$ により $l_i N \rightarrow \tau X$ の断面積は大きく増大する。また、 $l_i N \rightarrow \tau X$ の終状態クォークは必ず対で生成されるため、先行研究の見積りに比べクォーク終状態素過程の寄与は抑圧されることを示した。ここでの結果は、ヒッグスに限らず、LFV 媒介粒子が重いクォークと主に相互作用する場合、そのまま適用できる。

References

- [1] M. Takeuchi, Y. Uesaka and M. Yamanaka, Phys. Lett. B **772** (2017) 279
- [2] S. N. Gninenko, M. M. Kirsanov, N. V. Krasnikov and V. A. Matveev, Mod. Phys. Lett. A **17** (2002) 1407.
- [3] M. Sher and I. Turan, Phys. Rev. D **69** (2004) 017302.
- [4] S. Kanemura, Y. Kuno, M. Kuze and T. Ota, Phys. Lett. B **607** (2005) 165.
- [5] A. Goudelis, O. Lebedev and J. h. Park, Phys. Lett. B **707** (2012) 369.
- [6] R. Harnik, J. Kopp and J. Zupan, JHEP **1303** (2013) 026.
- [7] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Lett. B **749** (2015) 337.
- [8] CMS Collaboration [CMS Collaboration], CMS-PAS-HIG-16-005.
- [9] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Eur. Phys. J. C **77** (2017) no.2, 70.
- [10] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Lett. B **763** (2016) 472.
- [11] H. M. Georgi, S. L. Glashow, M. E. Machacek and D. V. Nanopoulos, Phys. Rev. Lett. **40** (1978) 692.

- [12] M. Spira, A. Djouadi, D. Graudenz and P. M. Zerwas, Nucl. Phys. B **453** (1995) 17.
- [13] C. H. Albright and C. Jarlskog, Nucl. Phys. B **84** (1975) 467.
- [14] K. Hagiwara, K. Mawatari and H. Yokoya, Nucl. Phys. B **668** (2003) 364.
- [15] H. Georgi and H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **36** (1976) 1281.

Electromagnetic currents for quark-antiquark meson systems and the dimension of bilocal meson fields

Kenji Yamada and Tomohito Maeda

*Department of Science and Manufacturing Technology, Junior College Funabashi Campus,
Nihon University*

Abstract

The present talk consists of two parts. The first one is allocated for consideration of the dimension of bilocal meson fields for quark-antiquark meson systems, which have been so far treated as the bosonic fields independent of constituent quark flavors, in the covariant oscillator quark model. Revisiting the electromagnetic currents of quark-antiquark meson systems, we show that the bilocal meson fields should be bosonic for light-quark systems, while fermionic for heavy-light and heavy-heavy systems. In the second part we apply the effective electromagnetic interactions of meson systems derived in the first part to radiative decay processes for the excited states of light-quark mesons. The calculated results for the $\pi\gamma$ decay widths of the $a_1(1260)$, $a_2(1320)$, $b_1(1235)$ and $\pi_2(1670)$ mesons are in fair agreement with experiment, except for the $b_1(1235)$ meson.

1 Introduction

Importance of the investigation of radiative decays for hadrons is to offer a rather direct probe of the internal charge structure of hadrons. The coupling to the charges and spins of constituent quarks reveals detailed information about wave functions and is therefore useful in determining hadronic structure. Furthermore, radiative decays are a much better probe than are hadronic decays, since the former can access final states which are kinematically forbidden for the latter. In particular they can help distinguish possible exotic states, such as tetraquarks, hybrids, and glueballs, from conventional quark-antiquark mesons. Radiative transitions between various hadrons can also provide significant help in testing models, since the electromagnetic interaction is much better known than the interaction for hadronic decays.

In dealing with radiative decays some typical approximations, such as long wavelength and nonrelativistic approximations, which are not always justified, are usually used. For instance, the recoil effect of final-state mesons is neglected, though the momenta of those mesons are often comparable to their masses, especially in light-quark meson sectors. There is also ambiguity associated with a choice of the relativistic or nonrelativistic phase space in the nonrelativistic quark model. When the decays become relativistic, no one knows the rigorous way of deriving the relationship between nonrelativistic decay amplitudes and relativistic decay widths.

In the covariant oscillator quark model (COQM), on the other hand, hadrons themselves and their interactions are formulated in a manifestly covariant way. Since both the interaction operator and wave functions are relativistic, the gauge invariance is preserved and the

conserved electromagnetic currents of hadrons are given explicitly in terms of the constituent quark variables [1]. In the COQM it should be noted here that there is no ambiguity associated with a choice of the relativistic or nonrelativistic phase space, as in the nonrelativistic quark model.

There is another difficulty in the case of dealing with a pion within the constituent quark model. The pion has an exceptionally light mass compared with other ground-state hadrons. Decay form factors, which come from overlaps between initial- and final-state wave functions, have anomalous behaviors due to too small mass of the pion. In actual applications to decay processes the ‘‘physical or symmetric’’ mass ambiguity exists on the treatment of the pion and other hadron masses [2]. The cause of this difficulty with a pion in view of QCD is that the pion is a pseudo-Nambu-Goldstone (NG) boson associated with the spontaneous breaking of chiral symmetry. The NG boson nature of the pion is not incorporated into the constituent quark model, including the COQM.

In this talk we give careful consideration to the dimension of bilocal meson fields in the COQM. Bilocal meson fields for quark-antiquark meson systems have been so far treated as the bosonic fields, independent of constituent quark flavors, in our previous works. Here we argue that the bilocal meson fields should be bosonic for light-quark systems, while fermionic for heavy-light and heavy-heavy systems, by revisiting the electromagnetic currents of quark-antiquark meson systems [3].

2 The covariant oscillator quark model

Basic framework of the COQM. In the COQM quark-antiquark meson systems are described by the bilocal field

$$\Psi(x_1, x_2)_\alpha^\beta = \Psi(X, x)_\alpha^\beta, \quad (1)$$

where x_1^μ (x_2^μ) is the space-time coordinate, α (β) the Dirac spinor index of the constituent quark (antiquark), and the center-of-mass and relative coordinates are defined, respectively, by

$$X^\mu = \frac{m_1 x_1^\mu + m_2 x_2^\mu}{m_1 + m_2}, \quad x^\mu = x_1^\mu - x_2^\mu \quad (2)$$

with the constituent quark (antiquark) mass m_1 (m_2). The bilocal meson field is required to satisfy the Klein-Gordon-type equation

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial X_\mu \partial X^\mu} - \mathcal{M}^2(x) \right) \Psi(X, x)_\alpha^\beta = 0 \quad (3)$$

with the squared-mass operator, in the pure confining force limit,

$$\mathcal{M}^2(x) = 2(m_1 + m_2) \left(\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x^\mu} + U(x) \right), \quad U(x) = -\frac{1}{2} K x_\mu x^\mu + \text{const.} \quad (4)$$

where $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ is the reduced mass and K is the spring constant. A solution of this equation can be written as

$$\Psi(X, x)_\alpha^\beta = N e^{\mp i P_\mu X^\mu} \Phi(v, x)_\alpha^\beta, \quad v^\mu = P^\mu / M, \quad (5)$$

where N is the normalization constant for the plane wave, P^μ and M are the center-of-mass momentum and mass, respectively, of the whole meson system, and $\Phi(v, x)_\alpha^\beta$ is the internal wave function which is given by the direct product of eigenfunctions of the squared-mass operator and the Bargmann-Wigner spinor functions, defined by the direct tensor product of respective Dirac spinors, with the meson four velocity v^μ , for the constituent quark and antiquark.

Key features of the COQM. In order to freeze the redundant freedom of relative time for the four-dimensional harmonic oscillator, which gives here the squared-mass operator, the definite-metric-type subsidiary condition is adopted [4]. The space-time wave functions satisfying this condition is normalizable and leads to the desirable asymptotic behavior of electromagnetic form factors of hadrons. The eigenvalues of the squared-mass operator are given by

$$M_N^2 = M_0^2 + N\Omega, \quad \Omega = 2(m_1 + m_2)\sqrt{\frac{K}{\mu}}, \quad (6)$$

where $N = 2N_r + L$, N_r (L) being the radial (orbital angular momentum) quantum number. This squared-mass formula gives linear Regge trajectories with the slope Ω^{-1} , in accord with the well-known experimental fact.

3 The dimension of bilocal meson fields in the COQM

Electromagnetic currents for quark-antiquark meson systems. The above Klein-Gordon-type equation is rewritten in terms of the quark and antiquark coordinates as

$$2(m_1 + m_2) \left(\sum_{i=1}^2 \frac{-1}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_{i\mu} \partial x_i^\mu} - U(x_1, x_2) \right) \Psi(x_1, x_2)_\alpha^\beta = 0 \quad (7)$$

or, equivalently,

$$\left(\sum_{i=1}^2 \frac{-1}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_{i\mu} \partial x_i^\mu} - U(x_1, x_2) \right) \Psi(x_1, x_2)_\alpha^\beta = 0. \quad (8)$$

This equation is derived from either of the actions

$$S_{\text{free}}^{(\text{KG}, \text{S})} = \int d^4x_1 \int d^4x_2 \mathcal{L}_{\text{free}}^{(\text{KG}, \text{S})}(\Psi, \partial_{1\mu}\Psi, \partial_{2\mu}\Psi) \quad (9)$$

with the Klein-Gordon-like Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{free}}^{(\text{KG})} = \bar{\Psi}(x_1, x_2) 2(m_1 + m_2) \left(\sum_{i=1}^2 \frac{-1}{2m_i} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - U(x_1, x_2) \right) \Psi(x_1, x_2) \quad (10)$$

and the Schrödinger-like Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{free}}^{(\text{S})} = \bar{\Psi}(x_1, x_2) \left(\sum_{i=1}^2 \frac{-1}{2m_i} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - U(x_1, x_2) \right) \Psi(x_1, x_2), \quad (11)$$

where the bilocal field $\Psi(x_1, x_2)$ has the dimension of bosons $[M^1]$ and fermions $[M^{3/2}]$ for $\mathcal{L}_{\text{free}}^{(\text{KG})}$ and $\mathcal{L}_{\text{free}}^{(\text{S})}$, respectively, except for the dimension of internal wave functions $[M^2]$.

The interaction of quark-antiquark meson systems with an electromagnetic field can be obtained [5] by the minimal substitutions

$$\frac{\partial}{\partial x_i^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} + ieQ_i A_\mu(x_i) \quad (12)$$

in the free Lagrangians $\mathcal{L}_{\text{free}}^{(\text{KG,S})}$, in which the heuristic prescription by Feynman, Kislinger and Ravndal [6] with some extension is adopted as the following replacements

$$\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{i\mu}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i^\mu} \rightarrow (1 - g_M^{(i)}) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{i\mu}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i^\mu} + g_M^{(i)} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_i^\mu} \gamma^\mu \gamma^\nu \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i^\nu}, \quad (13)$$

where Q_i ($i = 1, 2$) are the quark and antiquark charges in units of e and $g_M^{(i)}$ are the parameters related to the anomalous magnetic moments of constituent quarks. Then the action for the electromagnetic interaction of meson systems is obtained, up to the first order of e , as

$$S_{\text{int}}^{(\text{KG,S})} = \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \sum_{i=1}^2 j_i^{(\text{KG,S})\mu}(x_1, x_2) A_\mu(x_i) \equiv \int d^4 X J^{(\text{KG,S})\mu}(X) A_\mu(X) \quad (14)$$

with the conserved currents

$$j_i^{(\text{KG})\mu}(x_1, x_2) = 2(m_1 + m_2) \left\langle \bar{\Psi}(x_1, x_2) \frac{-ieQ_i}{2m_i} \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{i\mu}} - ig_M^{(i)} \sigma^{\mu\nu} \left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i^\nu} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_i^\nu} \right) \right) \Psi(x_1, x_2) \right\rangle \quad (15)$$

and

$$j_i^{(\text{S})\mu}(x_1, x_2) = \frac{j_i^{(\text{KG})\mu}(x_1, x_2)}{2(m_1 + m_2)} \quad (16)$$

where $\langle \dots \rangle$ means taking trace concerning the Dirac indices. The electric charges of meson systems are given by the diagonal elements

$$Q_{\text{meson}}^{(\text{KG,S})} = \int d^3 X \langle i | J^{(\text{KG,S})0}(X) | i \rangle. \quad (17)$$

Features of the Klein-Gordon-like current. The meson charge is given by

$$Q_{\text{meson}}^{(\text{KG})} = (Q_1 + Q_2)e, \quad (18)$$

which reproduces the physical one correctly. The currents $j_i^{(\text{KG})\mu}(x_1, x_2)$ have no absolute mass scales of constituent quarks. This would seem to be natural for light-quark systems from the viewpoint of QCD in the chiral limit.

Features of the Schrödinger-like current. In this case the meson charge becomes

$$Q_{\text{meson}}^{(\text{S})} = \frac{M}{m_1 + m_2} (Q_1 + Q_2)e, \quad (19)$$

where M is the meson mass. This expression does not generally coincide with the physical meson charge. However, it gives the correct charge in the heavy quark limit. This means that the Schrödinger-like current is applicable to heavy-light and heavy-heavy systems. If the meson masses for nonrelativistic quark systems are written as

$$M_n = (m_1 + m_2) + \mathcal{E}_n \quad (20)$$

with the n -th excitation energy \mathcal{E}_n , then the meson charge can be expressed as

$$Q_{\text{meson}}^{(S)} = \left(1 + \frac{\mathcal{E}_n}{M_0}\right) (Q_1 + Q_2)e, \quad (21)$$

where M_0 is a mass of the ground-state meson. From this expression it is found that the applicability of the schrödinger-like current is estimated by the ratio of the excitation energy to the ground-state mass. The currents $j_i^{(S)\mu}(x_1, x_2)$, unlike $j_i^{(KG)\mu}(x_1, x_2)$, have the absolute mass scales of constituent quarks, which is a desirable feature in describing the nonrelativistic quark systems.

The dimension of bilocal meson fields. From the above considerations, it is concluded that the dimension of bilocal meson fields is bosonic for light-quark systems, while fermionic for heavy-light and heavy-heavy systems, except for the dimension of internal wave functions [M^2]. Our recent studies of the pionic decays of excited heavy-light, charmed and charmed-strange, mesons support this conclusion for heavy-light systems [7].

4 Radiative decay widths of light-quark mesons

The above effective electromagnetic interactions $S_{\text{int}}^{(KG,S)}$ describe systematically all the electromagnetic interactions of quark-antiquark meson systems. For the radiative decays of light-quark mesons the decay width is obtained, following the usual procedure with the Klein-Gordon-like interaction $S_{\text{int}}^{(KG)}$, as

$$\Gamma = \frac{1}{2J_i + 1} \frac{|\mathbf{q}|}{8\pi M_i^2} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (22)$$

where M_i (J_i) are the mass (spin) of the initial-state meson and $|\mathbf{q}|$ is the photon three-momentum. In the actual applications of the above formula to radiative decay widths of light-quark mesons the physical masses are used for initial- and final-state mesons, except for the pion.

Parameter determination. Here we restrict ourselves to a discussion on the radiative decays of light-quark mesons only with nonstrange quarks. Then the present radiative decay model has two parameters, Ω and g_M ($\equiv g_M^{(u)} = g_M^{(d)}$), the inverse of the Regge slope and the parameter related to the anomalous magnetic moment of u and d quarks. We take the value of $\Omega = 1.14 \text{ GeV}^2$ with the slope of the leading $\rho(770)$ -meson trajectory and determine a value of g_M so as to fit the experimental width for $\rho(770)^\pm \rightarrow \pi^\pm \gamma$.

We also treat the pion mass as an additional parameter, which is determined in the following ways: Assuming that the pion lies on the spin-singlet, $b_1(1235)$ - $\pi_2(1670)$, trajectory, the

Table 1: Theoretical and experimental widths in keV for radiative decays of light-quark mesons. The experimental values of the initial-state masses and radiative widths are taken from the Particle Data Group (PDG) [8].

Initial state $n^{2S+1}L_J$	Decay process	M_i (MeV)	Theory	Experiment
1^3S_1	$\rho(770)^\pm \rightarrow \pi^\pm\gamma$	775.26 ± 0.25	68 (fit)	68 ± 7
1^3P_1	$a_1(1260)^\pm \rightarrow \pi^\pm\gamma$	1230 ± 40	464	640 ± 246
1^3P_2	$a_2(1320)^\pm \rightarrow \pi^\pm\gamma$	$1318_{-0.6}^{+0.5}$	340	311 ± 25
1^1P_1	$b_1(1235)^\pm \rightarrow \pi^\pm\gamma$	1229.5 ± 3.2	42	230 ± 60
1^1D_2	$\pi_2(1670)^\pm \rightarrow \pi^\pm\gamma$	1672.2 ± 3.0	88	181 ± 29

effective pion mass becomes 0.476 GeV. Calculating the numerical width for $\rho(770)^\pm \rightarrow \pi^\pm\gamma$ with this pion mass, $g_M = 1.51$ is obtained.

Numerical results. Numerical results of the radiative decay widths are shown in comparison with experiment in Table 1. The agreement with the measured widths for $\pi\gamma$ decays is satisfactory, though that for $\pi_2(1670)^\pm \rightarrow \pi^\pm\gamma$ less so, except for $b_1(1235)^\pm \rightarrow \pi^\pm\gamma$. It should be noted that only the electric (convection) current, independent of g_M , contributes to the decay processes $b_1(1235)^\pm \rightarrow \pi^\pm\gamma$ and $\pi_2(1670)^\pm \rightarrow \pi^\pm\gamma$.

5 Summary

The dimension of bilocal meson fields should be bosonic for light-quark meson systems, while fermionic for heavy-light and heavy-heavy ones, except for the dimension of internal wave functions. The calculated results for the radiative decay widths of the $a_1(1260)$, $a_2(1320)$, $b_1(1235)$ and $\pi_2(1670)$ mesons to the pion are in fair agreement with experiment, aside from $b_1(1235)^\pm \rightarrow \pi^\pm\gamma$.

References

- [1] S. Ishida, K. Yamada and M. Oda, Phys. Rev. D **40**, 1497 (1989).
- [2] See, for example, S. Godfrey and N. Isgur, Phys. Rev. D **32**, 189 (1985).
- [3] This result has been reported: K. Yamada and T. Maeda, ‘‘Radiative decays of light-quark mesons to a pion revisited in the covariant oscillator quark model’’, in proceedings of ‘‘XVII International Conference on Hadron Spectroscopy and Structure’’, PoS(Hadron2017)080.

- [4] T. Takabayasi, *Nuovo Cim.* **33**, 668 (1964).
- [5] R. G. Lipes, *Phys. Rev. D* **5**, 2849 (1972);
S. Ishida and J. Otokozawa, *Prog. Theor. Phys.* **53**, 217 (1975).
- [6] R. P. Feynman, M. Kislinger and F. Ravndal, *Phys. Rev. D* **3**, 2706 (1971).
- [7] T. Maeda et al., *AIP Conference Proceedings* **1735**, 050012 (2016);
T. Maeda, K. Yamada and M. Oda, “Pionic transitions of excited charmed mesons in the covariant oscillator quark model”, in proceedings of “XVII International Conference on Hadron Spectroscopy and Structure”, PoS(Hadron2017)230.
- [8] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys. C* **40**, 100001 (2016) and 2017 update.

Classical and Quantum Properties of Unimodular Gravity

Nobuyoshi Ohta

*Department of Physics, Kindai University, Higashi-Osaka, Osaka 577-8502, Japan and
Maskawa Institute for Science and Culture, Kyoto Sangyo University, Kyoto 603-8555, Japan*

概要

現在の宇宙は加速膨張している。それを説明する最も簡単な方法が宇宙項を導入することだが、そのために必要な宇宙項の大きさは、理論に素直に期待される値よりも 120 桁も小さい。この問題には古典的な側面と量子論的な側面があり、これらを説明するのはなかなか難しい問題である。ここでは unimodular 重力の古典的および量子論的な側面を調べ、それがこれらの問題を解決する可能性について議論する。

1 始めに

宇宙項問題と呼ばれている問題は次のような問題である。現在の宇宙は加速膨張している。一方、重力は常に引力を与えるので、最初に膨張していてもそれは減速するはずである。これは如何にして説明できるだろうか？

それを説明する 1 つの可能性が、アインシュタイン方程式に正の宇宙項があるためであることである。しかしそれには古典的な問題と、量子論的な問題がある。

古典的な問題は、宇宙初期には対称性が回復している時期があり、それが相転移を経て現在の宇宙になってきていると考えられることである。その相転移ごとに、宇宙の真空エネルギー、すなわち宇宙項は大きく変化するので、これらの相転移が起きた後に現在の加速膨張を起こしている $(3 \times 10^{-3} \text{eV})^4$ という小さなエネルギーが残るように最初のエネルギーを調節するのは難しい。

量子論的な問題は、真空の揺らぎにより生成されるエネルギーは 4 次で発散しており、その切断はプランクエネルギー程度になると期待されることである。これと観測されているエネルギーは、120 桁もの差があり、自然に説明することは困難である。

これを簡単に説明できる可能性のあるのが、Unimodular 重力 (UG) であることを議論する。

2 古典的 UG

UG とは、一般相対論 (GR) に、計量の行列式が固定されているという条件をつけた理論である。今、

$$\omega \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d} \quad (1)$$

を固定した体積要素とする。これを用いて計量に

$$\sqrt{|\det g|} = \omega \quad (2)$$

という条件を課す。このとき作用は一般に

$$S(g) = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \omega \left(R - \underbrace{\Lambda}_{\text{定数}} \right) \quad (3)$$

となる。最後の項は通常は宇宙項だが、今の場合どの場とも作用していない定数なので、捨てて構わない。実際、以下に見るように、理論を支配している運動方程式に影響しない。これに物質場の作用を付け加えて

$$S_m = \int d^d x \omega \mathcal{L}_m . \quad (4)$$

とする。この変分をとる際には

$$\delta \sqrt{|\det g|} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = 0 . \quad (5)$$

という条件を課さなくてはならない。すなわち、揺らぎ $\delta g_{\mu\nu}$ はトレースが 0 なので、得られるアインシュタイン方程式もトレースが 0 のものになる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{d} g_{\mu\nu} R = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{d} g_{\mu\nu} T \right) . \quad (6)$$

両辺を共変微分して、Bianchi 恒等式を縮約した式を用いると $\nabla_\mu T = -\frac{d-2}{16\pi G} \nabla_\mu R$ が得られるので、これを積分すると

$$T = -\frac{d-2}{16\pi G} R + \frac{d\Lambda}{4\pi G} \quad (7)$$

を得る。こうして、宇宙項 Λ が積分定数として運動方程式に生じる。これは、積分の際の境界条件によって決まる定数であり、作用にあった（捨てて構わないと言った）「宇宙定数」とは無関係であることに注意しよう。これをもって、真空エネルギーは gravitate しないということもある。

3 量子論的 UG

それでは、次の問題は量子論を考えたときに、この理論はどんなことを予言するのか気になる。これは少しは調べられているが、文献はいろいろな主張が混在していて、混乱している。

これを調べるために、重力の計量を背景場とその周りの揺らぎに分けて考える。このとき指数関数的パラメトリゼーション

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\rho} (e^h)^\rho{}_\nu \quad (8)$$

を用いる。UG の定義の仕方には 2 通りの方法がある。

1. 単純な方法：単に $h_\mu{}^\mu = 0$ とおく。
2. ワイル不変な方法

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} \left(\frac{|\gamma|}{\omega^2} \right)^{-1/d} \quad (9)$$

と書けば、計量としてどんな $\gamma_{\mu\nu}$ を持ってきても (2) の条件が満たされている。作用は

$$S(\gamma) = Z_N \int d^d x |\gamma|^{1/d} \omega^{\frac{d-2}{d}} \left[R[\gamma] + \frac{(d-1)(d-2)}{4d^2} (|\gamma|^{-1} \nabla|\gamma| - 2\omega^{-1} \nabla\omega)^2 \right] \quad (10)$$

ただし ∇ は $\gamma_{\mu\nu}$ による共変微分である。この定式化では横波の座標変換不変性の他にワイル群

$$\gamma_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 \gamma_{\mu\nu} ; \quad \omega \rightarrow \omega , \quad (11)$$

による不変性がある。

いずれの定式化も同じ理論を与えるが、文献には自由度を間違えているものが多々ある。そこで、ここで正しい自由度勘定を与える。

4 GR と単純な定義による UG のハミルトン解析

GR の場合、10 個のラグランジアン変数 (= 20 個のハミルトニアン変数) と、4 つのラグランジアンゲージパラメーターがあって 8 つの第 1 種拘束 (4 つの primary 拘束と、4 つの secondary 拘束) がある。これらのそれぞれが 2 つのハミルトニアン変数を除くので、 $20 - 2 \times 8 = 4$ 個の正準変数が残り、グラビトンの 2 つの物理的自由度が残る。

UG の場合、 $h = 0$ とおくので、9 個の場があり、横波の座標変換不変性から 3 つのラグランジアンゲージパラメーターが生じて 6 つの拘束がある。したがって $9 - 2 \times 3 = 3$ 個の物理的自由度が残ると思うかもしれない。実際そう誤解している文献が結構ある。一般の横波座標変換不変性しか持たない理論ではこれは正しいが、UG では正しくない。そもそも UG は GR に拘束を課して得られた理論なのだから、そのために自由度は減りこそすれ増えるというのは考えにくい。実は、UG には第 3 の (tertiary) 拘束が存在して、自由度が 2 つになることがわかる。しかしこれは共変的な記述が難しいので、経路積分による共変的な議論を与える。

5 単純な定義による UG の 1 ループ計算

以下の議論では、York 分解

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{\text{TT}} + \bar{\nabla}_\mu \xi_\nu + \bar{\nabla}_\nu \xi_\mu + \left(\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\nabla}^2 \right) \sigma + \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} h, \quad (12)$$

を用いることにする。ただし

$$\bar{\nabla}^\mu h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = 0, \quad \bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = 0, \quad \bar{\nabla}^\mu \xi_\mu = 0, \quad h = \bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}. \quad (13)$$

である。バーは背景場による量であることを表す。 Δ_L は Lichnerowicz 演算子である。このときヤコビアン

$$J_1 = \det \left(\Delta_{L1} - \frac{2\bar{R}}{d} \right)^{1/2} \det(\Delta_{L0})^{1/2} \det \left(\Delta_0 - \frac{\bar{R}}{d-1} \right)^{1/2} \quad (14)$$

が生じることに注意する。古典的なレベルで $h = 0$ を要求し、

$$\bar{\nabla}_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_\mu = \epsilon_\mu^T + \bar{\nabla}_\mu \phi \quad (15)$$

を満たすベクトルが生成する $SDiff$ をゲージ固定する。ゲージ固定関数を

$$F_\mu = T_{\mu\nu} \bar{\nabla}_\rho h^{\rho\nu} = - \left(\Delta_{L1} - \frac{2\bar{R}}{d} \right) \xi_\mu \quad ; \quad T^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \bar{\nabla}^\mu \frac{1}{\bar{\nabla}^2} \bar{\nabla}_\nu \quad (16)$$

にとる。標準的な計算により ($d\xi_\mu d\sigma dh d\epsilon^T d\sigma d\phi$)

$$Z_{UG} = \left(\int (d\epsilon^T) \right) e^{-S(\bar{g})} \frac{\det_1 \left(\Delta_{L1} - \frac{2\bar{R}}{d} \right)^{1/2}}{\det_2 \left(\Delta_{L2} - \frac{2\bar{R}}{d} \right)^{1/2} \det \Delta_{L0}^{1/2}} \quad (17)$$

を得る。ここで右辺の第 1 項が $SDiff$ の体積だとすると、2 つの横波物理的モードの他にスカラーモードが残ることになっておかしい。実はそうではなく、 $V_{SDiff} = \int d\epsilon (\bar{\nabla}_\mu \epsilon^\mu) =$

$\int d\epsilon^T d\phi \det \Delta_{L0}^{-1/2}(\phi)$ より、 $\int (d\epsilon^T) \det \Delta_{L0}^{-1/2}$ が $SDiff$ の体積である。したがって、GR と同じく

$$Z_{UG} = e^{-S(\bar{g})} \frac{\det_1 \left(\Delta_{L1} - \frac{2\bar{R}}{d} \right)^{1/2}}{\det_2 \left(\Delta_{L2} - \frac{2\bar{R}}{d} \right)^{1/2}} : \quad (18)$$

であることがわかる。有効作用の発散部分は、これから熱核を使った標準的な方法で求めることができる。この結果 4次元の普遍的な対数発散の項は

$$\Gamma_{\log}(\bar{g}) = -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{\bar{g}} \log \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) \left(\frac{53}{45} \bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{R}^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{29}{40} \bar{R}^2 \right) \quad (19)$$

を得る。ここで k は切断を表す。これは、よく知られている結果と一致する。

6 結論

UG と GR は古典的には宇宙項の取り扱い以外は同じである。運動方程式やツリーレベルの振幅も同じになる。ここでは、量子論的にはどうなのかという問題を考察し、次の結果を得た。

1. 量子論でも、古典論と同じくハミルトン形式で自由度が同じになっている。
2. 経路積分で、場 σ についての積分で残る非自明な行列式があって、それをきちんと除けば UG と GR は同等である。

したがって

1. この 2つの理論は大域的なスケールの自由度と宇宙項の取り扱いを除いては、同等。
2. 真空エネルギーは gravitate しないという古典的議論は、量子論でも成り立つ。

最後に一言付け加えると、unimodular 理論の有効作用は、時空の曲率がプランクスケールになるという結論にはならないことがわかった。しかし、なぜ宇宙項が現在の値なのかを説明することはできていない。これをどう説明するかは、重要な課題である。

謝辞

この報告の内容は、R. Ardon と Roberto Percacci との共同研究 [1] によるものであり、1 振は [2, 3] にも基づく。これらの共同研究者に感謝します。また、この研究は科研費 (C) No. 16K05331 の支援を受けて行われています。

References

- [1] R. d. L. Ardon, N. Ohta and R. Percacci, “The path integral of unimodular gravity,” to be published in PRD, arXiv:1710.02457 [gr-qc].
- [2] N. Ohta, R. Percacci and A. D. Pereira, “Gauges and functional measures in quantum gravity I: Einstein theory,” JHEP **1606** (2016) 115 [arXiv:1605.00454 [hep-th]].
- [3] N. Ohta, R. Percacci and A. D. Pereira, “Gauges and functional measures in quantum gravity II: Higher derivative gravity,” Eur. Phys. J. C **77** (2017) no.9, 611 [arXiv:1610.07991 [hep-th]].

Special Grand Unification

山津 直樹

京都産業大学益川塾

Abstract

最近提唱した大統一ゲージ群の特殊部分群への破れに基づく大統一理論についての紹介をしたいと思います。本講演は主に文献 [1, 2] に基づいています。

1 はじめに

素粒子標準理論は現在までの加速器実験で探索可能な低エネルギー領域のほぼ全ての自然現象を無矛盾に記述していますが、標準理論は高いエネルギー領域では何らかのより基本的な理論に置き換わると考えられています。これまでに様々な研究が行われている理論としては、大統一理論、超対称性理論、余剰次元理論、超弦理論などが挙げられます。

大統一ゲージ対称性を考える動機はいくつかありますが、一例として、標準理論の物質場クォークとレプトンのゲージ群の表現の組み合わせに注目してみると、なぜか四次元のカイラル量子異常が奇跡的に相殺している、なぜか $U(1)_Y$ の電荷が量子化されている、なぜか $SU(3)_C$ と $SU(2)_L$ の基本表現と自明な表現しかない、なぜか標準理論のゲージ群 $G_{\text{SM}}(:= SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y)$ を 5 次元ユニタリ群 $SU(5)_{\text{GUT}}$ 群に埋め込むとフェルミオンのゲージ群の表現を $SU(5)$ の基本表現 **10** と **5** に埋め込めることなどが知られています [3]。特に、10 次元直行群 $SO(10)_{\text{GUT}}$ のスピノル表現 **16** に全ての標準理論のクォークとレプトンが埋め込まれることは特出すべきことと思われまます [4]。上記すべてが解決する分けではありませんが少なくとも一部は G_{SM} を G_{GUT} に埋め込むことにより自然に理解できるように見えます。

これまで様々な大統一ゲージ群とその部分群への破れに基づく大統一理論が議論されて来ました。例えば、四次元時空では $SU(5)$ [3], $SU(6)$ [5], $SO(10)$ [4], E_6 [6] ゲージ対称性；余剰次元理論では $SO(11)$ [7] ゲージ対称性なども考えられています。すでに認識している方もいるかと思いますが、通常大統一ゲージ理論では以下のような正則部分群を用いています：

$$E_6 \supset SO(10) \supset SU(5) \supset G_{\text{SM}}. \quad (1)$$

しかしながら、部分群には正則部分群だけでなく特殊部分群 (非正則部分群) もあります [8–10]。ただし、特殊部分群とは正則部分群以外の部分群のことである。(紙面の関係上有限次元リー群の正則部分群と特殊部分群の説明は省略する。)

以下 Sec. 2 で特殊部分群を用いた大統一理論を行い、Sec. 3 で簡単なまとめをします。

2 特殊大統一理論

特殊大統一理論を考える動機はいくつか言い方がありますがここでは弦理論からの大統一理論の模型構築の観点から述べたいと思います [2]。まず、正則部分群だけを用いる場合には、 $SO(32) \supset SO(10) \times U(1)^{11} \supset G_{\text{SM}} \times U(1)^{12}$ であり、 $SO(32)$ のベクトル表現 **32** は $SO(10)$ のスピノル表現 **16** と $\overline{\mathbf{16}}$ に分解されません： $\mathbf{32} \neq \mathbf{16} \oplus \overline{\mathbf{16}}$ 。一方、正則と特殊部分群を用いると、 $SO(32) \supset SU(16) \times U(1) \supset SO(10) \times U(1) \supset G_{\text{SM}} \times U(1)^2$ であり、 $SO(32)$ のベクトル

ル表現 $\mathbf{32}$ は $SO(10)$ のスピノル表現 $\mathbf{16}$ と $\overline{\mathbf{16}}$ に分解されます： $\mathbf{32} = \mathbf{16} \oplus \overline{\mathbf{16}}$. 注意としては、様々な文献で $SO(32)$ ヘテロ型超弦理論では $SO(10)$ のスピノル表現の構造を出せないとありますが、それらの議論は正則部分群だけを用いている限定された議論の範囲あり、少なくとも $SO(32)$ 群の一般論ではありません. すでに文献 [2] において $SO(32)$ ゲージ群を用いた特殊大統一理論での模型構築を議論していますが、ここではその基本となる文献 [1] で行った $SU(16)$ ゲージ群を用いた特殊大統一理論に限定して話を進めたいと思います.

まずは、特殊な埋め込み $SU(16) \supset SO(10)$ での表現分解を確認し、どの表現の場が $SU(16)$ 特殊大統一理論においてどのような役割があるかを見てみたいと思います. $SU(16)$ の正則部分群や他の特殊部分群やそれらの表現分解については文献 [10] を参照してください. $SU(16)$ リー群の表現の特殊部分群 $SO(10)$ での表現分解は例えば以下ようになります [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{16} &= (\mathbf{16}), \quad \overline{\mathbf{16}} = (\overline{\mathbf{16}}), \quad \mathbf{120} = (\mathbf{120}), \quad \overline{\mathbf{120}} = (\mathbf{120}), \quad \mathbf{255} = (\mathbf{210}) \oplus (\mathbf{45}), \\ \mathbf{5440} &= (\mathbf{4125}) \oplus (\overline{\mathbf{1050}}) \oplus (\mathbf{54})(\mathbf{210}) \oplus (\mathbf{1}). \end{aligned} \quad (2)$$

まず、四次元 $SU(16)$ $\mathbf{16}$ ワイルフェルミオンを SM フェルミオンと見なせます. なぜなら、 $SO(10) \supset G_{\text{SM}} \times U(1)_X$ に対して、

$$\begin{aligned} \mathbf{16} &= (\mathbf{3}, \mathbf{2})(-1)(1) \oplus (\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1})(4)(1) \oplus (\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1})(-2)(-3) \\ &\quad \text{Quark doublet} \quad \text{Up-type quark} \quad \text{Down-type quark} \\ &\oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})(3)(-3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})(-6)(1) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})(0)(5). \end{aligned} \quad (3)$$

Lepton doublet Charged lepton Neutrino

$SU(16)$ $\mathbf{5440}$ 複素スカラーの真空期待値は $SU(16)$ を $SO(10)$ に破れます. なぜなら、 $SU(16)$ $\mathbf{5440}$ 表現は $SO(10)$ $\mathbf{1}$ を含む. $SO(10)$ $\mathbf{210}$ 表現スカラーは $SU(16)/SO(10)$ 南部-ゴールドストーン (NG) モードです. 四次元 $SU(16)$ $\mathbf{120}$ ワイルフェルミオンは $SU(16)$ の破れた真空でカイラルではありません. なぜなら、 $SU(16)$ $\mathbf{120}$ 表現は $SO(10)$ 部分群の下で実表現です.

次に対称性の破れのパターンを確認します [1]. $SU(16)$ の G_{SM} への破れは例えばヒッグス機構で実現されます:

$$SU(16) \xrightarrow{\langle \phi_{\mathbf{5440}} \rangle \neq 0} SO(10) \xrightarrow{\langle \phi_{\mathbf{16}} \rangle \neq 0} SU(5) \xrightarrow{\langle \phi_{\mathbf{255}} \rangle \neq 0} SU(3) \times SU(2) \times U(1). \quad (4)$$

ただし、 $SU(16)$ $\mathbf{5440}$, $\mathbf{16}$, $\mathbf{255}$ スカラーが $SU(16)$ を G_{SM} への破れを引き起こす.

次に、四次元 $SU(n)$ カイラルゲージ理論での量子異常の相殺条件について見てみます. 一般論と具体的な量子異常数の値は文献 [10] に書かれています. $SU(5)$ 大統一理論で良く知られているように四次元の $SU(5)$ ($\mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{5}}$) ワイルフェルミオンの四次元量子異常数はゼロです： $A(\mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{5}}) = 0$; 四次元の $SU(6)$ ($\mathbf{15} \oplus 2 \times \overline{\mathbf{6}}$) ワイルフェルミオンの四次元量子異常数はゼロです. 一般に、四次元の $SU(n)$ ($\frac{n(n-1)}{2} \oplus (n-4) \times \overline{n}$) ワイルフェルミオンの四次元量子異常数はゼロです. このことから、四次元の $SU(16)$ ($\mathbf{120} \oplus 12 \times \overline{\mathbf{16}}$) ワイルフェルミオンの四次元量子異常数はゼロです.

四次元時空での $SU(16)$ 特殊大統一理論を考えてみます [1]. この場合、四次元 $SU(16)$ ($12 \times \mathbf{16} \oplus \overline{\mathbf{120}}$) ワイルフェルミオンは四次元の量子異常相殺の観点から単独でも問題ありません. しかし、 $SU(16)$ が特殊部分群 $SO(10)$ に破れる場合を考えると、12 世代の標準理論のカイラルフェルミオンが現れます. 良い点としては、 $SU(16)$ $\overline{\mathbf{120}}$ は部分群 $SO(10)$ の下で実表現であり、 $SO(10)$ $\mathbf{120}$ のワイルフェルミオンはカイラルではありません. 四次元理論では三世代の標準理論フェルミオンを実現できないと考えられます.

六次元オービフォルド時空 $M^4 \times T^2/\mathbb{Z}_2$ [11,12] での $SU(16)$ 特殊大統一理論を考えてみます [1]. ただし, $ds^2 = e^{-2\sigma(y)}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dv^2) + dy^2$. 各固定点まわりの \mathbb{Z}_2 パリティ変換 ($j = 1, 2, 3, 4$) は $P_j : (x_\mu, y_j + y, v_j + v) \rightarrow (x_\mu, y_j - y, v_j - v)$ と与えられます. 例えば, 六次元 $SU(16)$ **16** ワイルフェルミオンに対するオービフォルド境界条件は次のように与えられます:

$$\Psi_{\mathbf{16}\pm}(x, y_j - y, v_j - v) = \eta_j(-i\Gamma^5\Gamma^6)P_{j\mathbf{16}}\Psi_{\mathbf{16}\pm}(x, y_j + y, v_j + v). \quad (5)$$

対称性の破れのパターンとしてはオービフォルド境界条件で $SU(16)$ 対称性を保つ場合を考えると, 四次元時空と同様に $SU(16)$ の G_{SM} への破れは例えばヒッグス機構で実現されます:

$$SU(16) \xrightarrow[\text{BCs}]{\text{BCs}} SU(16) \xrightarrow[\langle\phi_{\mathbf{5440}}\rangle \neq 0]{\text{BCs}} SO(10) \xrightarrow[\langle\phi_{\mathbf{16}}\rangle \neq 0]{\text{BCs}} SU(5) \xrightarrow[\langle\phi_{\mathbf{255}}\rangle \neq 0]{\text{BCs}} SU(3) \times SU(2) \times U(1). \quad (6)$$

ただし, $SU(16)$ **5440**, **16**, **255** スカラーが $SU(16)$ を G_{SM} への破れを引き起こす.

六次元 $SU(16)$ 特殊大統一理論の場の種類を考えてみます. ゲージ理論なので明らかにゲージ場 A_M ($M = 0, 1, 2, 3, 5, 6$) が必要です. 次に, 三世代の標準理論のクォークとレプトンが必要なので六次元の正のカイラリティのフェルミオン $\Psi_{\mathbf{16}+}^{(a=1,2,3)}$ が必要です. さらに, 対称性の破れのセクターが必要なので $\Phi_{\mathbf{x}}$ ($\mathbf{x} = \mathbf{5440}, \mathbf{255}, \mathbf{16}$) が必要です. 最小限ではこれだけですがこのままでは 6D と 4D $SU(16)$ の量子異常があり, 追加の寄与が必要です. それらの相殺も考慮すると例えば Table 1 の場の種類があれば良いことがわかります.

6D Bulk field	A_M	$\Psi_{\mathbf{16}+}^{(a)}$	$\Psi_{\mathbf{16}+}^{(b)}$	$\Psi_{\mathbf{16}-}^{(c)}$	$\Psi_{\mathbf{16}-}^{(d)}$
$SU(16)$	255	16	16	16	16
$SO(5,1)$	6	4₊	4₊	4₋	4₋
Orbifold BC		$\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}$
5D Brane field	$\Phi_{\mathbf{5440}}$	$\Phi_{\mathbf{255}}$	$\Phi_{\mathbf{16}}$	4D Brane field	$\psi_{\mathbf{120}}$
$SU(16)$	5440	255	16	$SU(16)$	120
$SO(4,1)$	1	1	1	$SL(2, \mathbb{C})$	(1/2, 0)
Orbifold BC	$\begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}$	Spacetime (y, v)	(0, 0)
Spacetime	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$		

Table 1: 六次元 $SU(16)$ 特殊大統一理論の場の種類 [1]

3 まとめ

最近提唱した特殊な埋め込み $SU(16) \supset SO(10)$ を用いた六次元 $SU(16)$ 特殊大統一理論の説明をしました. 重要な結果としては, 六次元の正のワイルフェルミオン $\Psi_{\mathbf{16}+}^{(a)}$ ($a = 1, 2, 3$) のゼロモードを標準理論カイラルフェルミオンの三世代とみなせる; $SU(16)$ ゲージ群の六次元と四次元の量子異常は六次元バルクと四次元ブレーンフェルミオンにより相殺される; 四次元のエキゾチックなカイラルフェルミオンは現れない.

$SO(32)$ 特殊大統一理論 [2] についていくつかコメントします. $SO(32) \supset SU(16) \times U(1) \supset SO(10) \times U(1)$ を考えると, $SO(32)$ のベクトル表現 $\mathbf{32}$ は $SO(10)$ のスピノル表現 $\mathbf{16}$ と $\overline{\mathbf{16}}$ に分解される. 三世代の標準理論フェルミオンは六次元の正のワイルフェルミオン $\Psi_{\mathbf{32}^+}^{(a)}$ ($a = 1, 2, 3$) のゼロモードと見なせる. 6D と 4D のゲージの量子異常は 6D バルクと 4D ブレーンのフェルミオンで相殺される. 四次元のエキゾチックなカイラルフェルミオンは現れない.

あと, 対称性の破れの機構 (特殊部分群への破れ) についていくつかのコメントをします. ヒッグス機構を用いた $SU(n)$ の特殊部分群への自発的対称性の破れは文献 [13] などで議論されている. オービフォールド境界条件を用いた対称性の破れとして, $SU(n)$ の $SO(n)$ 特殊部分群, E_6 の F_4 の破れなどが知られている [14]. 力学的対称性の破れを用いた E_6 の F_4, G_2, \dots への破れが知られている [15].

References

- [1] N. Yamatsu, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017** (2017) 061B01, [arXiv:1704.08827 \[hep-ph\]](#).
- [2] N. Yamatsu, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017** (2017) 101B01, [arXiv:1708.02078 \[hep-ph\]](#).
- [3] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 438–441.
- [4] H. Fritzsch and P. Minkowski, *Ann. Phys.* **93** (1975) 193–266.
- [5] K. Inoue, A. Kakuto, and Y. Nakano, *Prog. Theor. Phys.* **58** (1977) 630.
- [6] F. Gursey, P. Ramond, and P. Sikivie, *Phys. Lett.* **B60** (1976) 177.
- [7] Y. Hosotani and N. Yamatsu, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015** (2015) 111B01, [arXiv:1504.03817 \[hep-ph\]](#).
- [8] R. Slansky, *Phys. Rept.* **79** (1981) 1–128.
- [9] R. Cahn, *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations*. Benjamin-Cummings Publishing Company, 1985.
- [10] N. Yamatsu, [arXiv:1511.08771 \[hep-ph\]](#).
- [11] Y. Hosotani and N. Yamatsu, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017** (2017) 091B01, [arXiv:1706.03503 \[hep-ph\]](#).
- [12] Y. Hosotani and N. Yamatsu, [arXiv:1710.04811 \[hep-ph\]](#).
- [13] L.-F. Li, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 1723–1739.
- [14] A. Hebecker and J. March-Russell, *Nucl. Phys.* **B625** (2002) 128–150, [arXiv:hep-ph/0107039 \[hep-ph\]](#).
- [15] T. Kugo and J. Sato, *Prog. Theor. Phys.* **91** (1994) 1217–1238, [arXiv:hep-ph/9402357 \[hep-ph\]](#).

On bulk field propagator and Wilson loop in AdS/CFT correspondence

日本大学理工学部

三輪光嗣

1 はじめに

本講演では $\text{AdS}_5 \times S^5$ 時空上の IIB 型超弦理論と、平坦な四次元時空上で定義された超対称性を四つ持つ $\text{SU}(N)$ 超対称ヤン-ミルズ理論の間の対応関係について、ウィルソンループ演算子に着目して議論を行った。参考文献 [1] ではこの対応におけるウィルソンループの解析に AdS 時空を伝搬する超重重力モードの効果を取り入れることで、種数の高い弦の世界面からの寄与を読み取る手法が議論されている。本講演ではこの手法を紹介するとともに、この手法を理解・検証し、さらに進展させることを目標とする試みの現状報告を行った。

2 AdS/CFT 対応とウィルソンループ

$\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ 対応は $\text{AdS}_5 \times S^5$ 時空上の IIB 型超弦理論と平坦な四次元時空上で定義された超対称性を四つ持つ $\text{SU}(N)$ 超対称ヤン-ミルズ理論の間の対応関係である。この対応関係では超弦理論の持つ典型的な長さスケール l_s と $\text{AdS}_5 \times S^5$ 時空の曲率半径 R の比、つまり R/l_s が、ヤン-ミルズ理論におけるトーフト結合定数 λ と $R/l_s = \lambda^{1/4}$ のように対応する。また、弦の相互作用の結合定数 g_s がゲージ群のランクを与える N と $g_s = \lambda/N$ のように対応する。予言される様々な対応関係が実際に成り立つことを検証する際は超弦理論側とヤン-ミルズ理論側で対応する物理量を別々に計算する必要がある。ヤン-ミルズ理論側では、超対称性の高い演算子の期待値や相関関数を有限のパラメータ N 、 λ に対して厳密に計算できる場合がある。一方で超弦理論側の現状としては、弦の世界面の揺らぎが制限される $R/l_s \gg 1$ ($\lambda \gg 1$) という極限や弦の相互作用を摂動論的に扱うことのできる $g_s \ll 1$ ($\lambda \ll N$) という極限をとる必要があり、こうした極限における主要部の計算を行ってヤン-ミルズ理論側の計算結果と比較する研究が盛んに行われてきた。

AdS/CFT 対応においてウィルソンループ演算子 $W(C)$ を議論する際は、まず AdS 時空の境界に存在する四次元時空上に、今着目しているループ C を描く。次に AdS 時空内でこのループによって境界条件を与えられる弦の経路積分を考える。するとこの弦理論側での経路積分の値がヤン-ミルズ理論側でのウィルソンループの期待値と一致するというのが AdS/CFT 対応の仮説である。

$$\int_C e^{-S_{\text{string}}} = \langle W(C) \rangle_{\text{SYM}}$$

この対応も上で述べたように N および λ が大きな極限における解析が盛んに行われており、様々な形や対称性を持ったウィルソンループに関して、この極限において計算された超弦理論側およ

びヤン-ミルズ理論側の主要部の計算結果の一致が確認されている。主要部に対する高次補正の研究としては弦の世界面の揺らぎを摂動論的に取り扱うことで $1/\sqrt{\lambda}$ 補正を取り入れる研究が行われている [2]-[6]。また $1/\sqrt{\lambda}$ に関する補正としては [7][8] の手法も興味深い。その一方で、 $1/N^2$ 補正を議論する研究はあまり進んでいない。ウィルソンループが大きな巻き数を持つ場合は超弦理論側で弦の代わりに D ブレーンを用いることで $1/N^2$ に関する高次補正を部分的に議論することができるが、巻き数の少ない通常のウィルソンループに関する $1/N^2$ 補正の研究は理解が進んでいないと言える。AdS/CFT 対応におけるウィルソンループ演算子を議論した初期の重要な論文 [1] では $1/N^2$ 補正を取り入れる手法がいくつか議論されている。ここでは λ は大きいものとして、種数の高い弦の世界面はディスク状の古典的な弦に細く縮んだハンドルが付与されたものであろうと考察している。 λ の大きな極限では弦の経路積分は弦の古典的な配位、つまり極小曲面が支配的な寄与を与える。しかしながら種数の高い世界面の場合、面積を極小にしようとするハンドルの縮んでしまい、結果的には境界条件によって決まるディスク状の極小曲面に縮みきったハンドル（つまり太さの無い単なる線）が付与されたものになるという議論である。AdS 時空内でハンドルが有限のまま極小となる世界面が存在する可能性を追求するのは一つの方向性ではある。しかしながら、同じく論文 [1] で求められているヤン-ミルズ理論側の計算結果を見ると λ の大きな極限における主要部は $1/N^2$ 展開の各次数で共通した因子 $e^{\sqrt{\lambda}}$ となっており、このことは縮んだハンドルという描像をサポートしている。

3 AdS₅ 時空における場の伝搬関数とウィルソンループ

文献 [1] では縮んだハンドルの効果を扱う手法の一つとして、縮んだハンドルを AdS 時空を伝搬する超重力モードと解釈する手法が議論されている。AdS 時空を伝搬する超重力モードと弦の世界面を同時に用いる研究は [1] 以前に先行する論文 [11] において行われている。後者の論文では、ヤン-ミルズ理論側で離れた二つのウィルソンループの相関関数を考え、弦理論側ではこれに対応して離れた二つの弦の世界面を繋ぐ伝搬関数が議論された。特に AdS 時空内の二点 (z_1, \vec{x}_1) 、 (z_2, \vec{x}_2) をつなぐ以下の伝搬関数を用いられている。

$$G_J(z_1, \vec{x}_1; z_2, \vec{x}_2) \sim \frac{1}{N^2} w^J {}_2F_1\left(J, J - \frac{3}{2}, 2J - 3, -4w\right) \quad (1)$$

ただし、 ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, t)$ は超幾何関数を表す。またパラメータ J は S^5 上の KK モードの角運動量を表し、変数 w は伝搬関数がつなぐ二点の座標を用いて $w = z_1 z_2 / ((z_1 - z_2)^2 + (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2)$ のように定義されている。こうした研究はその後いくつかの系において有効に応用され、ウィルソンループ演算子と局所演算子の間の相関関数に関して AdS/CFT 対応の肯定的な検証を与えている [13]。式 (1) の伝搬関数を使用するに当たって、離れた演算子の相関関数の解析と、本講演で着目した単一のウィルソンループの期待値の解析との間には幾つかの相違点が存在する。まずその一つ目として、ウィルソンループと離れた局所演算子の間の相関関数を解析する場合はこれらの間を伝搬する場は局所演算子によって指定されており、 S^5 の KK モードを足しあげる必要が無いという点である。ウィルソンループに対応する単一の弦の世界面はあらゆる KK モードの源となり

うるため、これらのモードに関する和をとる必要がある。また、低エネルギー極限をとるために通常は弦の高い励起モードの効果を見捨てるが、すぐ後で説明するように単一のウィルソンループをつなぐ伝搬関数を議論する場合はこうした扱いが正当化できるかどうか自明では無い。二つ目の相違点として、単一の世界面をつなぐ伝搬関数の場合、伝搬関数の扱いそのものが少し難しくなるという点があげられる。離れた二つの世界面や離れた局所的な源をつなぐ伝搬関数の場合は伝搬関数が同一点をつなぐことがないため発散を生じることなく解析を行うことができる。一方で同一の世界面をつなぐ伝搬関数の場合は伝搬関数が同一点をつなぐ場合も考慮する必要があり発散が生じる。弦理論においてはこうした発散はハンドルの有限な拡がりによって回避されると期待されるが、これを高々有限個の局所的な場によって近似してしまった場合にはこのような有限性は期待できない。この点が上で触れた弦の高い振動モードを見捨てるのが正当化できるかどうか非自明であると述べた点である。

参考文献 [1] ではこうした点に対して適当なカットオフを導入して議論が行われている。まず伝搬関数から生じる発散が一次発散であると評価し、短距離のカットオフを弦の典型的スケール l_s に設定することで、この発散は $R/l_s = \lambda^{1/4}$ の因子を与えると議論している。また S^5 の KK モードの和に関しても同様のスケールにおいてカットオフを導入する必要があるため、さらに $\lambda^{1/4}$ の因子がかかると評価をしている。これとは別に弦と重力場の結合により張力の二乗の因子 $(\sqrt{\lambda})^2$ が、また伝搬関数そのものから $1/N^2$ の因子が生じる。これらを全て合わせると、単一の世界面をつなぐ伝搬関数は世界面上の積分も合わせて $\lambda^{3/2}/N^2$ の因子を与えることになる。伝搬関数が p 個ある場合は $\lambda^{3p/2}/N^{2p}$ となる。文献 [1] ではヤン-ミルズ理論側でのウィルソンループ演算子の期待値を $1/N^2$ および $1/\sqrt{\lambda}$ で二重に展開し、種数 p における $1/\sqrt{\lambda}$ 展開の一次補正が上記のものとは一致することを確認している。この研究は巻き数の大きな極限をとることなく高い種数の寄与を議論している数少ない研究例であり、こうした方向性を追求するのは興味深いと考えられる。そこで私は円形ではなく、より解析が簡単になると期待される直線状のウィルソンラインに着目して、弦理論側での伝搬関数の評価を試みた。残念ながら現状としては一定の成果報告をする段階まで研究が進んでいないため、本講演では現状報告という形での発表を行った。

本研究で着目した超重力モードは文献 [11]-[13] 等でも用いられた計量の揺らぎであり、具体的には以下の形で与えられる。ただし角運動量 J を持つ KK モードに着目し、現時点での計算に関係のある AdS 部分のみを示す。

$$\delta g_{\mu\nu}^{(J)}(z, \vec{x}) = \left(-\frac{6J}{5} g_{\mu\nu} + \frac{4}{J+1} D_{(\mu} \partial_{\nu)} \right) s^J(z, \vec{x}) \quad (2)$$

微分の添え字についている丸い括弧はトレースを持たない対称化を表す。 $s^J(z, \vec{x})$ は AdS₅ 時空のスカラー場であり、この場の伝搬関数 $\langle s^J(z_1, \vec{x}_1) s^J(z_2, \vec{x}_2) \rangle$ が式 (1) で与えられる。このため、計量の揺らぎに対しては $\langle \delta g_{\mu\nu}(z_1, \vec{x}_1) \delta g_{\rho\sigma}(z_2, \vec{x}_2) \rangle$ は G_J に対して式 (2) の微分演算子を二度作用させた形で与えられる。今回は簡単のため、 S^5 の KK モードのうち、最も簡単な $J=2$ のモードに着目し、二点 (z_1, \vec{x}_1) と (z_2, \vec{x}_2) が一致するところから生じる発散項に焦点を絞って発表を行った。超幾何関数で与えられる $G_2(z_1, \vec{x}_1; z_2, \vec{x}_2)$ はそれ自身が三次の発散を持つため、これを四度微分して得られる $\langle \delta g_{\mu\nu}(z_1, \vec{x}_1) \delta g_{\rho\sigma}(z_2, \vec{x}_2) \rangle$ は七次の発散項を持つことが期待される。今回は式 (1) の

下で定義した w を $w \rightarrow w_\epsilon \equiv z_1 z_2 / ((z_1 - z_2)^2 + (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 + \epsilon^2)$ と正則化することで伝搬関数を評価した。得られた表式は煩雑なものであるためここでは示さないが、直線状のウィルソンループの解析に必要となる成分に含まれる典型的な発散項として以下のようなものが含まれていた。

$$\frac{w_\epsilon^7}{z_1^2 z_2^2 (1 + 4w_\epsilon)^{7/2}}, \quad \frac{\epsilon^2 w_\epsilon^9}{z_1^3 z_2^3 (1 + 4w_\epsilon)^{9/2}}, \quad \frac{\epsilon^4 w_\epsilon^{11}}{z_1^4 z_2^4 (1 + 4w_\epsilon)^{11/2}} \quad (3)$$

ここに挙げた項は全て七次の発散項であるが、容易に期待されるように五次および三次の発散項も含まれていた。直線という非常に大きな対称性を持つ系を考えたが、今回考えたモードの寄与だけでは伝搬関数の効果は（少なくとも世界面上の積分を実行しない段階では）キャンセルしないことが分かった。

4 今後の課題

今後、得られた伝搬関数を弦の世界面上で積分する必要がある。また、今回考えたモード以外の超重重力モードの寄与を取り入れる必要がある。ディラトンや反対称テンソル場の伝搬関数を評価したい。今回は弦の作用を揺らぎの一次まで展開し、この項の二乗の形で現れる寄与を考えた。これと同じ二次のオーダーの寄与として作用そのものの展開に含まれる揺らぎの二次の項も存在する。今後この項の寄与に関しても考察を行いたい。

References

- [1] N. Drukker and D. J. Gross, J. Math. Phys. **42** (2001) 2896.
- [2] N. Drukker, D. J. Gross and A. A. Tseytlin, JHEP **0004** (2000) 021.
- [3] M. Kruczenski and A. Tirziu, JHEP **0805** (2008) 064.
- [4] C. Kristjansen and Y. Makeenko, JHEP **1209** (2012) 053.
- [5] V. Forini, V. Giangreco M. Puletti, L. Griguolo, D. Seminara and E. Vescovi, JHEP **1602** (2016) 105.
- [6] V. Forini, A. A. Tseytlin and E. Vescovi, JHEP **1703** (2017) 003.
- [7] N. Drukker, JHEP **0609** (2006) 004.
- [8] A. Miwa, Phys. Rev. D **91** (2015) no.10, 106003.
- [9] N. Drukker and B. Fiol, JHEP **0502** (2005) 010.
- [10] S. Yamaguchi, JHEP **0605** (2006) 037.
- [11] D. E. Berenstein, R. Corrado, W. Fischler and J. M. Maldacena, Phys. Rev. D **59** (1999) 105023.
- [12] S. Giombi, R. Ricci and D. Trancanelli, JHEP **0610** (2006) 045.
- [13] G. W. Semenoff and D. Young, Phys. Lett. B **643** (2006) 195.

減衰調和振動子の正準量子化¹

–Two quantization approaches based on the Bateman oscillator model–

出口 真一²

日本大学理工学部 量子科学研究所

1 Introduction

The Bateman oscillator model [1], or simply the Bateman model, has been investigated as a Lagrangian model for the damped harmonic oscillator [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. The Bateman Lagrangian, which governs the Bateman model, in actuality describes a doubled system consisting of the (uncoupled) damped and amplified harmonic oscillators. Nevertheless, the Bateman model is widely recognized as a standard model for the damped harmonic oscillator, because the Bateman Lagrangian yields the correct equation of motion of the damped harmonic oscillator and has the desirable property that the Lagrangian itself does not explicitly depend on time.

Canonical quantization of the Bateman model was first performed by Feshbach and Tikochinsky with the aid of the representation theory of the $SU(1,1)$ Lie algebra [4]. They obtained the eigenvalues of the Hamiltonian operator of the Bateman model and their corresponding eigenvectors. These eigenvalues are necessarily complex numbers, and hence the corresponding eigenstates (in the Schrödinger picture) turn out to be either decaying or growing states. Also, it is seen that the real parts of the Hamiltonian eigenvalues, which can be identified as possible values of energy of the system, are unbounded from below. From a purely dynamical point of view, this will cause the problem of dynamical instability of the system if interactions are turned on. After Feshbach and Tikochinsky performed the quantization of the Bateman model, their results have been reconsidered in some different contexts [5, 6, 7, 8, 9, 10]. However, it seems that the problem of unbounded-below energy spectrum has not been resolved yet.

In this study, we apply the imaginary-scaling quantization scheme developed by Bender and Mannheim [12] and by Mostafazadeh [13] to the Bateman model to obtain the Hamiltonian eigenvalues whose real parts are bounded from below. Before proceeding to the imaginary-scaling quantization approach to the Bateman model, we first attempt to concisely reformulate Feshbach-Tikochinsky's quantization approach by exploiting a pseudo Bogoliubov transformation without invoking the $SU(1,1)$ Lie algebra. After that, we consider the imaginary-scaling quantization approach to the Bateman model by exploiting the combination of an imaginary-scaling transformation and a homogeneous transformation. We will see that the two quantiza-

¹ この講演は藤原侑樹氏, 中野邦彦氏との共同研究に基づく.

² E-mail: deguchi@phys.cst.nihon-u.ac.jp

tion approaches are realized on an equal footing on the basis of different transformations of the annihilation and creation operators.

2 Bateman model and its canonical quantization

The Bateman model is defined by the Lagrangian [1]

$$L = m\dot{x}\dot{y} + \frac{\gamma}{2}(xy - \dot{x}y) - kxy, \quad (2.1)$$

where $x = x(t)$ and $y = y(t)$ are real coordinate variables, being functions of time t , and m , γ , and k are real positive constants. A dot over a variable denotes its derivative with respect to t . From this Lagrangian, the Euler-Lagrange equation for y is derived as

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0, \quad (2.2)$$

and similarly, the Euler-Lagrange equation for x is derived as

$$m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + ky = 0. \quad (2.3)$$

Equation (2.2) is precisely the classical equation of motion for the damped harmonic oscillator of mass m , spring constant k , and damping constant γ . Equation (2.3) is the classical equation of motion for the amplified harmonic oscillator whose amplitude exponentially grows with time while the amplitude of the damped harmonic oscillator exponentially decays with time. We thus see that the Bateman Lagrangian (2.1) describes a doubled system consisting of the (uncoupled) damped and amplified harmonic oscillators.

Let us introduce the new variables [7, 11]

$$x_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad x_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \quad (2.4)$$

with which the Lagrangian (2.1) can be written as

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) - \frac{\gamma}{2}(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2) - \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2). \quad (2.5)$$

The momenta conjugate to x_1 and x_2 are found to be

$$p_1 := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 + \frac{\gamma}{2}x_2, \quad p_2 := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = -m\dot{x}_2 - \frac{\gamma}{2}x_1. \quad (2.6)$$

The Hamiltonian is obtained by the Legendre transformation of L as follows:

$$H = \left(\frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x_1^2 \right) - \left(\frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x_2^2 \right) - \frac{\gamma}{2m}(x_1p_2 + x_2p_1), \quad (2.7)$$

where $\omega := \sqrt{(k/m) - (\gamma^2/4m^2)}$. In this study, we treat only the underdamped-underamplified case by assuming that ω is real and positive.

Now, regarding the canonical variables x_i and p_i ($i = 1, 2$) as Hermitian operators satisfying $x_i^\dagger = x_i$ and $p_i^\dagger = p_i$, we perform the canonical quantization of the Bateman model by imposing the commutation relations

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}\mathbb{1} \quad (i, j = 1, 2), \quad \text{all others} = 0, \quad (2.8)$$

where $\mathbb{1}$ denotes the identity operator. In terms of the operators

$$a_i := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_i + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} p_i, \quad a_i^\dagger := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_i - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} p_i, \quad (2.9)$$

which satisfy

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}\mathbb{1}, \quad \text{all others} = 0, \quad (2.10)$$

the Hamiltonian operator corresponding to the Hamiltonian (2.7) can be expressed as

$$H = H_0 + H_1, \quad (2.11)$$

with

$$H_0 := \hbar\omega (a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2), \quad (2.12a)$$

$$H_1 := i\frac{\hbar\gamma}{2m} (a_1 a_2 - a_1^\dagger a_2^\dagger). \quad (2.12b)$$

As can be readily seen, H_0 and H_1 are Hermitian (with respect to the \dagger -conjugation) and commute. Adopting the naive vacuum state vector $|0\rangle$ specified by

$$a_i|0\rangle = 0, \quad (2.13)$$

we can construct the Fock basis vectors

$$|n_1, n_2\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} |0\rangle \quad (n_i = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.14)$$

In this case, a_i and a_i^\dagger are identified as annihilation and creation operators, respectively. The dual forms of Eqs. (2.13) and (2.14) are given by

$$\langle 0|a_i^\dagger = 0, \quad (2.15)$$

$$\langle n_1, n_2 | := \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \langle 0 | (a_1)^{n_1} (a_2)^{n_2}. \quad (2.16)$$

Using Eqs. (2.10), (2.13), and (2.15), and imposing the normalization condition $\langle 0 | 0 \rangle = 1$, we can show that

$$\langle m_1, m_2 | n_1, n_2 \rangle = \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2}. \quad (2.17)$$

Hence, it follows that the Fock basis vectors $|n_1, n_2\rangle$ have the positive squared-norm 1, and the Fock space spanned by the orthonormal basis $\{|n_1, n_2\rangle\}$ is a positive-definite Hilbert space. In this space, the completeness condition of the orthonormal basis reads

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2| = \mathbb{1}. \quad (2.18)$$

We see that the vectors $|n_1, n_2\rangle$ are eigenvectors of H_0 but not eigenvectors of H_1 , although H_0 and H_1 commute. In order to find the simultaneous eigenvectors of H_0 and H_1 , which are of course eigenvectors of H , we hereafter consider invertible transformations.

3 Feshbach-Tikochinsky's quantization approach revisited

We first define the operators \bar{a}_i and \bar{a}_i^\dagger by

$$\bar{a}_i := e^{\theta X} a_i e^{-\theta X}, \quad \bar{a}_i^\dagger := e^{\theta X} a_i^\dagger e^{-\theta X}, \quad (3.1)$$

where θ is a complex parameter, and X is defined by

$$X := a_1 a_2 + a_1^\dagger a_2^\dagger. \quad (3.2)$$

It is obvious that $X^\dagger = X$. The unitarity of $e^{\theta X}$ and its associated property $(\bar{a}_i)^\dagger = \bar{a}_i^\dagger$ hold only when θ is purely imaginary. From Eq. (2.11), we see that

$$[\bar{a}_i, \bar{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \mathbb{1}, \quad \text{all others} = 0. \quad (3.3)$$

Equation (3.1) can be written as

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2^\dagger \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{a}_1^\dagger \\ \bar{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^\dagger \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

The transformation $(a_i, a_i^\dagger) \rightarrow (\bar{a}_i, \bar{a}_i^\dagger)$ looks like a Bogoliubov transformation, but actually it is not the case unless the parameter θ is purely imaginary.

Using Eqs. (3.4) and (3.3), we can express the operators H_0 and H_1 as follows:

$$H_0 = \hbar\omega \left(\bar{a}_1^\dagger \bar{a}_1 - \bar{a}_2^\dagger \bar{a}_2 \right), \quad (3.5a)$$

$$H_1 = i \frac{\hbar\gamma}{2m} \left\{ \left(\bar{a}_1 \bar{a}_2 - \bar{a}_1^\dagger \bar{a}_2^\dagger \right) \cos(2\theta) + \left(\bar{a}_1^\dagger \bar{a}_1 + \bar{a}_2^\dagger \bar{a}_2 + \mathbb{1} \right) \sin(2\theta) \right\}. \quad (3.5b)$$

Since our present purpose is to find the eigenvalues of H , we choose θ in such a way that H_1 takes the form of a linear combination of $\bar{a}_1^\dagger \bar{a}_1$, $\bar{a}_2^\dagger \bar{a}_2$, and $\mathbb{1}$. Upon comparison with Feshbach-Tikochinsky's quantization approach, we set $\theta = \pm\pi/4$. Then H_1 becomes

$$H_1^{(\pm)} := \pm i \frac{\hbar\gamma}{2m} \left(\bar{a}_1^\dagger \bar{a}_1 + \bar{a}_2^\dagger \bar{a}_2 + \mathbb{1} \right). \quad (3.6)$$

The transformation $(a_i, a_i^\dagger) \rightarrow (\bar{a}_i, \bar{a}_i^\dagger)$ with $\theta = \pm\pi/4$ is hereafter referred to as a *pseudo* Bogoliubov transformation, with the connotation that it is not unitary. Such a non-unitary transformation was also considered in Feshbach-Tikochinsky's quantization approach based on the $SU(1, 1)$ Lie algebra. The Hermiticity of $H_1^{(\pm)}$ with respect to the \ddagger -conjugation, i.e., $(H_1^{(\pm)})^\ddagger = H_1^{(\pm)}$ is valid under the conditions

$$i^\ddagger = -i, \quad \gamma^\ddagger = -\gamma. \quad (3.7)$$

Clearly, H_0 and X are Hermitian with respect to the \ddagger -conjugation.

The Hamiltonian operator (2.11) now reads $H^{(\pm)} = H_0 + H_1^{(\pm)}$. With $H^{(\pm)}$, the Heisenberg equation for an implicitly time-dependent operator $A(t)$ reads $dA/dt = (i\hbar)^{-1} [A, H^{(\pm)}]$. Using the commutation relations in Eq. (3.3), we can solve the Heisenberg equations for \bar{a}_i and \bar{a}_i^\dagger and obtain

$$\bar{a}_1(t) = \bar{a}_1(0) e^{(-i\omega \pm \lambda)t}, \quad \bar{a}_1^\dagger(t) = \bar{a}_1^\dagger(0) e^{-(-i\omega \pm \lambda)t}, \quad (3.8a)$$

$$\bar{a}_2(t) = \bar{a}_2(0) e^{(i\omega \pm \lambda)t}, \quad \bar{a}_2^\dagger(t) = \bar{a}_2^\dagger(0) e^{-(i\omega \pm \lambda)t}, \quad (3.8b)$$

where $\lambda := \gamma/2m$. By virtue of the conditions in Eq. (3.7), the \ddagger -conjugation relation $(\bar{a}_i(t))^\ddagger = \bar{a}_i^\dagger(t)$ holds at an arbitrary time. As can be seen from Eq. (3.8), the \ddagger -conjugation involves time reversal. This fact reminds us that in Feshbach-Tikochinsky's quantization approach, the time reverse, rather than the complex conjugate, is used to define an appropriate normalization integral for a wave function. It is evident that the Hamiltonian operator $H^{(\pm)}$ is independent of time.

Next we define the new vectors

$$|0\rangle\rangle := e^{\theta X} |0\rangle, \quad \langle\langle 0| := \langle 0| e^{-\theta X}, \quad (3.9)$$

which satisfy

$$\bar{a}_i|0\rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle 0|\bar{a}_i^\dagger = 0 \quad (3.10)$$

owing to Eqs. (2.13) and (2.15). Hence, $|0\rangle\rangle$ and $\langle\langle 0|$ are established as the vacuum state vectors of the $(\bar{a}_i, \bar{a}_i^\dagger)$ -system, and \bar{a}_i and \bar{a}_i^\dagger turn out to be annihilation and creation operators, respectively. In this system, we can construct the Fock basis vectors and their dual vectors as follows:

$$|n_1, n_2\rangle\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!}} (\bar{a}_1^\dagger)^{n_1} (\bar{a}_2^\dagger)^{n_2} |0\rangle\rangle, \quad \langle\langle n_1, n_2| := \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!}} \langle\langle 0|(\bar{a}_1)^{n_1} (\bar{a}_2)^{n_2}. \quad (3.11)$$

They are related to the old basis vectors in Eqs. (2.14) and (2.16) by

$$|n_1, n_2\rangle\rangle = e^{\theta X} |n_1, n_2\rangle, \quad \langle\langle n_1, n_2| = \langle n_1, n_2| e^{-\theta X}. \quad (3.12)$$

It is easily shown, using Eq. (2.17), that

$$\langle\langle m_1, m_2|n_1, n_2\rangle\rangle = \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2}. \quad (3.13)$$

Hence, it follows that the Fock basis vectors $|n_1, n_2\rangle\rangle$ also have the positive squared-norm 1, and the Fock space spanned by the orthonormal basis $\{|n_1, n_2\rangle\rangle\}$ is a positive-definite Hilbert space. The completeness condition (2.18) leads to

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} |n_1, n_2\rangle\rangle \langle\langle n_1, n_2| = \mathbf{1}. \quad (3.14)$$

We readily see that the vectors $|n_1, n_2\rangle\rangle$ with $\theta = \pm\pi/4$ are simultaneous eigenvectors of H_0 and $H_1^{(\pm)}$ and satisfy the Hamiltonian eigenvalue equation

$$H^{(\pm)}|n_1, n_2\rangle\rangle = h_{n_1, n_2}^{(\pm)}|n_1, n_2\rangle\rangle \quad (3.15)$$

with

$$h_{n_1, n_2}^{(\pm)} := \hbar\omega(n_1 - n_2) \pm i\hbar\lambda(n_1 + n_2 + 1). \quad (3.16)$$

The Hamiltonian eigenvalues $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ are identical to those found earlier by Feshbach and Tikochinsky [4]. In this way, the pseudo Bogoliubov transformation makes it possible to solve the eigenvalue problem of the Hamiltonian operator H given in Eq. (2.11).

Let us now consider the Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle\rangle = H |\psi(t)\rangle\rangle. \quad (3.17)$$

In order to solve this equation, we expand $|\psi(t)\rangle$ in terms of the basis $\{|n_1, n_2\rangle\}$ at $t = 0$ rather than the basis $\{|n_1, n_2\rangle\}$ at $t = 0$. Then, using Eq. (3.15), we obtain the particular solutions

$$|\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle := \exp\left(-ih_{n_1, n_2}^{(\pm)}t/\hbar\right) |n_1, n_2\rangle_{t=0}, \quad (3.18)$$

which specify the Hamiltonian eigenstates at the time t . The general solution of Eq. (3.17) is given by $|\psi^{(\pm)}(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2} c_{n_1, n_2} |\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$, with c_{n_1, n_2} being complex constants. We see that $|\psi_{n_1, n_2}^{(-)}(t)\rangle$ represent decaying states while $|\psi_{n_1, n_2}^{(+)}(t)\rangle$ represent growing states, regardless of the possible values of n_1 and n_2 . This result is due to the presence of the constant term $\pm i\hbar\lambda$ that remains in $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ even when $n_1 = n_2 = 0$. Since H is Hermitian with respect to the \dagger -conjugation, the dual Schrödinger equation for $\langle\psi(t)|$ reads $d\langle\psi(t)|/dt = (-ih)^{-1}\langle\psi(t)|H$. Expanding $\langle\psi(t)|$ in terms of the dual basis $\{\langle n_1, n_2|\}$ at $t = 0$, and using the eigenvalue equation $\langle n_1, n_2|H^{(\pm)} = h_{n_1, n_2}^{(\pm)}\langle n_1, n_2|$, we have the particular solutions

$$\langle\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)| := \exp\left(ih_{n_1, n_2}^{(\pm)}t/\hbar\right) \langle n_1, n_2|_{t=0}. \quad (3.19)$$

It is clear, by taking into account the condition $(h_{n_1, n_2}^{(\pm)})^\ddagger = h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ ensured by Eq. (3.7), that $|\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ and $\langle\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)|$ are related to each other by the \ddagger -conjugation. Equation (3.13) leads to $\langle\psi_{m_1, m_2}^{(\pm)}(t)|\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle = \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2}$, which demonstrates that the squared-norm of $|\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ does not change in time. A similar fact was also pointed out by Feshbach and Tikochinsky [4].

4 Imaginary-scaling quantization approach

We define the operators \tilde{a}_i and \tilde{a}_i^\S by

$$\tilde{a}_i := e^{\phi Y} a_i e^{-\phi Y}, \quad \tilde{a}_i^\S := e^{\phi Y} a_i^\dagger e^{-\phi Y}, \quad (4.1)$$

where ϕ is a complex parameter, and Y is defined by

$$Y := -\frac{i}{2} \left(a_2^2 - a_2^{\dagger 2} \right). \quad (4.2)$$

It is obvious that $Y^\dagger = Y$. The unitarity of $e^{\phi Y}$ and its associated property $(\tilde{a}_i)^\dagger = \tilde{a}_i^\S$ hold only when ϕ is purely imaginary. We can express Y as $Y = -i(\tilde{a}_2^2 - \tilde{a}_2^{\S 2})/2$, from which we see that Y is Hermitian with respect to the \S -conjugation, i.e., $Y^\S = Y$. Equation (2.11) leads to

$$\left[\tilde{a}_i, \tilde{a}_j^\S \right] = \delta_{ij} \mathbb{1}, \quad \text{all others} = 0. \quad (4.3)$$

From the definition of Y , we immediately see that

$$\tilde{a}_1 = a_1, \quad \tilde{a}_1^\S = a_1^\dagger. \quad (4.4)$$

Thus it turns out that the transformation $(a_i, a_i^\dagger) \rightarrow (\tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\S)$ is essentially a squeeze transformation of (a_2, a_2^\dagger) , provided that ϕ is purely imaginary and hence $e^{\phi Y}$ is unitary. From now on, we rather choose ϕ to be the real value $\phi = \pi/2$. Then, from Eq. (4.1), we have

$$\tilde{a}_2 = -ia_2^\dagger, \quad \tilde{a}_2^\S = -ia_2. \quad (4.5)$$

The transformation $(a_2, a_2^\dagger) \rightarrow (\tilde{a}_2, \tilde{a}_2^\S) = (-ia_2^\dagger, -ia_2)$ is precisely the imaginary-scaling transformation argued in Refs. [12, 13]. Since this transformation can be derived as a non-unitary analog of the squeeze transformation, it can be said to be a *pseudo* squeeze transformation.

Next we define the operators \check{a}_i and \check{a}_i^\S by

$$\check{a}_i := e^{\chi Z} \tilde{a}_i e^{-\chi Z}, \quad \check{a}_i^\S := e^{\chi Z} \tilde{a}_i^\S e^{-\chi Z}, \quad (4.6)$$

where χ is assumed to be a purely imaginary parameter satisfying $\chi^\S = -\chi$, and Z is defined by

$$Z := \tilde{a}_1^\S \tilde{a}_2 + \tilde{a}_2^\S \tilde{a}_1. \quad (4.7)$$

Obviously, Z is Hermitian with respect to the \S -conjugation. The unitarity of $e^{\chi Z}$ with respect to the \S -conjugation and the \S -conjugation relation $(\check{a}_i)^\S = \check{a}_i^\S$ are ensured accordingly. Equation (4.3) leads to

$$[\check{a}_i, \check{a}_j^\S] = \delta_{ij} \mathbf{1}, \quad \text{all others} = 0. \quad (4.8)$$

The operators \check{a}_i can be written as linear combinations of \tilde{a}_1 and \tilde{a}_2 ; similarly, the operators \check{a}_i^\S can be written as linear combinations of \tilde{a}_1^\S and \tilde{a}_2^\S . The transformation $(\tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\S) \rightarrow (\check{a}_i, \check{a}_i^\S)$ is thus realized as a homogeneous transformation. Combining the expressions of the linear combinations with Eqs. (4.4) and (4.5), we obtain

$$\begin{pmatrix} \check{a}_1 \\ \check{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & i \sinh \chi \\ -\sinh \chi & -i \cosh \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2^\dagger \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \check{a}_1^\S \\ \check{a}_2^\S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & -i \sinh \chi \\ \sinh \chi & -i \cosh \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^\dagger \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Now, using Eqs. (4.9) and (4.8), we can express the operators H_0 and H_1 defined in Eq. (2.12) as follows:

$$H_0 = \hbar\omega \left(\check{a}_1^\S \check{a}_1 + \check{a}_2^\S \check{a}_2 + \mathbf{1} \right), \quad (4.10a)$$

$$H_1 = \frac{\hbar\gamma}{2m} \left\{ \left(\check{a}_1^\S \check{a}_2 - \check{a}_2^\S \check{a}_1 \right) \cosh(2\chi) + \left(\check{a}_1^\S \check{a}_1 - \check{a}_2^\S \check{a}_2 \right) \sinh(2\chi) \right\}. \quad (4.10b)$$

Our present purpose is to find the eigenvalues of $H = H_0 + H_1$ within the framework of imaginary-scaling quantization. To this end, we choose χ to be the imaginary value $\chi = \pm i\pi/4$ so that H_1 can take the form of a linear combination of $\check{a}_1^\S \check{a}_1$ and $\check{a}_2^\S \check{a}_2$. After setting $\chi = \pm i\pi/4$, the operator H_1 reduces to

$$\check{H}_1^{(\pm)} := \pm i \frac{\hbar\gamma}{2m} \left(\check{a}_1^\S \check{a}_1 - \check{a}_2^\S \check{a}_2 \right). \quad (4.11)$$

The Hermiticity of $\check{H}_1^{(\pm)}$ with respect to the \S -conjugation, i.e., $(\check{H}_1^{(\pm)})^\S = \check{H}_1^{(\pm)}$ is valid under the conditions

$$i^\S = -i, \quad \gamma^\S = -\gamma. \quad (4.12)$$

It is obvious that H_0 and Z are Hermitian with respect to the \S -conjugation.

The Hamiltonian operator (2.11) now reads $\check{H}^{(\pm)} = H_0 + \check{H}_1^{(\pm)}$. Correspondingly, the Heisenberg equation for an implicitly time-dependent operator $A(t)$ reads $dA/dt = (i\hbar)^{-1} [A, \check{H}^{(\pm)}]$. By using the commutation relations in Eq. (4.8), we can solve the Heisenberg equations for \check{a}_i and \check{a}_i^\S , obtaining

$$\check{a}_1(t) = \check{a}_1(0)e^{(-i\omega\pm\lambda)t}, \quad \check{a}_1^\S(t) = \check{a}_1^\S(0)e^{-(-i\omega\pm\lambda)t}, \quad (4.13a)$$

$$\check{a}_2(t) = \check{a}_2(0)e^{(-i\omega\mp\lambda)t}, \quad \check{a}_2^\S(t) = \check{a}_2^\S(0)e^{-(-i\omega\mp\lambda)t}, \quad (4.13b)$$

with $\lambda := \gamma/2m$. By virtue of the conditions in Eq. (4.12), the \S -conjugation relation $(\check{a}_i(t))^\S = \check{a}_i^\S(t)$ holds at an arbitrary time. We see from Eq. (4.13) that just like the \ddagger -conjugation treated in Sec. 3, the \S -conjugation also involves time reversal. It is evident that the Hamiltonian operator $\check{H}^{(\pm)}$ is independent of time.

Let us define the new vectors

$$|0\rangle\rangle := e^{\phi Y} |0\rangle, \quad \langle\langle 0| := \langle 0| e^{-\phi Y}, \quad (4.14)$$

which satisfy

$$\tilde{a}_i |0\rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle 0| \tilde{a}_i^\S = 0 \quad (4.15)$$

owing to Eqs. (2.13) and (2.15). Also, using Eqs. (4.6) and (4.15), we can show that

$$\check{a}_i |0\rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle 0| \check{a}_i^\S = 0. \quad (4.16)$$

Hence, $|0\rangle\rangle$ and $\langle\langle 0|$ are established as the vacuum state vectors common to both the $(\tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\S)$ and $(\check{a}_i, \check{a}_i^\S)$ systems. From Eqs. (4.15) and (4.16), it turns out that \tilde{a}_i and \check{a}_i are annihilation

operators, while \tilde{a}_i^{\S} and \check{a}_i^{\S} are creation operators. In the $(\check{a}_i, \tilde{a}_i^{\S})$ -system, we can construct the Fock basis vectors and their dual vectors as follows:

$$|n_1, n_2\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \left(\check{a}_1^{\S} \right)^{n_1} \left(\tilde{a}_2^{\S} \right)^{n_2} |0\rangle, \quad \langle\langle n_1, n_2| := \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \langle\langle 0| (\tilde{a}_1)^{n_1} (\check{a}_2)^{n_2}. \quad (4.17)$$

They are related to the old basis vectors in Eqs. (2.14) and (2.16) by

$$|n_1, n_2\rangle = e^{\chi Z} e^{\phi Y} |n_1, n_2\rangle, \quad \langle\langle n_1, n_2| = \langle n_1, n_2| e^{-\phi Y} e^{-\chi Z}. \quad (4.18)$$

It is easy to show by using Eq. (2.17) that

$$\langle\langle m_1, m_2| n_1, n_2\rangle\rangle = \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2}. \quad (4.19)$$

From this, it follows that the Fock basis vectors $|n_1, n_2\rangle$ have the positive squared-norm 1, and the Fock space spanned by the orthonormal basis $\{|n_1, n_2\rangle\rangle\}$ is a positive-definite Hilbert space. The completeness condition (2.18) now leads to

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} |n_1, n_2\rangle\rangle \langle\langle n_1, n_2| = \mathbf{1}. \quad (4.20)$$

We immediately see that the vectors $|n_1, n_2\rangle\rangle$ with $\phi = \pi/2$ and $\chi = \pm i\pi/4$ are simultaneous eigenvectors of H_0 and $\check{H}_1^{(\pm)}$ and satisfy the Hamiltonian eigenvalue equation

$$\check{H}^{(\pm)} |n_1, n_2\rangle\rangle = \check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)} |n_1, n_2\rangle\rangle \quad (4.21)$$

with

$$\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)} := \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) \pm i\hbar\lambda(n_1 - n_2). \quad (4.22)$$

This expression of the Hamiltonian eigenvalues is completely different from the one obtained by Feshbach and Tikochinsky, namely Eq. (3.16). In fact, the eigenvalues of H_0 , which are given at present by $\text{Re}\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1)$, are bounded from below, and therefore the dynamical stability of the system is ensured. Also, $\text{Re}\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ include the vacuum state energy $\hbar\omega$. In this way, the combination of the imaginary-scaling transformation and a homogeneous transformation makes it possible to solve the eigenvalue problem of the Hamiltonian operator H given in Eq. (2.11), resolving the problem of dynamical instability encountered in Feshbach-Tikochinsky's quantization approach.

Now we recall the Schrödinger equation (3.17) and expand the state vector $|\psi(t)\rangle$ in terms of the basis $\{|n_1, n_2\rangle\rangle\}$ at $t = 0$, instead of the basis $\{|n_1, n_2\rangle\rangle\}$ at $t = 0$. Then, using Eq. (4.21), we obtain the particular solutions of the Schrödinger equation,

$$|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle := \exp\left(-i\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)} t/\hbar\right) |n_1, n_2\rangle\rangle_{t=0}, \quad (4.23)$$

which specify the Hamiltonian eigenstates at the time t . The general solution is found to be $|\check{\psi}^{(\pm)}(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2} \check{c}_{n_1, n_2} |\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$, with \check{c}_{n_1, n_2} being complex constants. We see that both $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(+)}(t)\rangle$ and $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(-)}(t)\rangle$ can represent either of decaying or growing states depending on the possible values of n_1 and n_2 . If $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(+)}(t)\rangle$ is the state vector of a decaying (growing) state, then $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(-)}(t)\rangle$ is the state vector of a growing (decaying) state. It is remarkable that the state vectors $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ with $n_1 = n_2$ contain no γ and represent stable states, because $\text{Im} \check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ vanish when $n_1 = n_2$. Therefore, unlike Feshbach-Tikochinsky's quantization approach, the imaginary-scaling quantization approach allows to have stable states in addition to decaying states and growing states. Recall here the dual Schrödinger equation $d\langle\psi(t)|/dt = (-i\hbar)^{-1}\langle\psi(t)|H$. Expanding $\langle\psi(t)|$ in terms of the dual basis $\{|(n_1, n_2|\rangle\}$ at $t = 0$, and using the eigenvalue equation $\langle(n_1, n_2|\check{H}^{(\pm)} = \check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}\langle(n_1, n_2|$, we have the particular solutions

$$\langle\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)| := \exp\left(i\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}t/\hbar\right) \langle(n_1, n_2|_{t=0}. \quad (4.24)$$

Taking into account the condition $(\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)})^\S = \check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ ensured by Eq. (4.12), we see that $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ and $\langle\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)|$ are related to each other by the \S -conjugation. Equation (4.19) leads to $\langle\check{\psi}_{m_1, m_2}^{(\pm)}(t)|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle = \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2}$, which implies that the squared-norm of $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ does not change in time. A similar result was also found in Sec 3.

5 Summary and discussion

We have investigated two quantization approaches to the Bateman model. One is Feshbach-Tikochinsky's quantization approach reformulated concisely without invoking the $SU(1, 1)$ Lie algebra, and the other is the imaginary-scaling quantization approach. The former has been developed by applying a pseudo Bogoliubov transformation to the Bateman model, while the latter has been developed by applying the imaginary-scaling transformation and a homogeneous transformation to the Bateman model. The two quantization approaches can thus be realized on an equal footing on the basis of the different transformations of a_i and a_i^\dagger . Also, we have pointed out that the imaginary-scaling transformation can be said to be a pseudo squeeze transformation.

We have indeed solved the eigenvalue problem for the Hamiltonian operator H of the Bateman model. By means of the pseudo Bogoliubov transformation, we have simply derived the Hamiltonian eigenvalues $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ found earlier by Feshbach and Tikochinsky [4]. In addition, we have derived the alternative Hamiltonian eigenvalues $\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ by employing the imaginary-scaling quantization scheme [12, 13]. It has been seen that the real part of $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ is proportional to $n_1 - n_2$ and the imaginary part is proportional to $n_1 + n_2 + 1$. In contrast, the real part of $\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ is proportional to $n_1 + n_2 + 1$ and the imaginary part is proportional to $n_1 - n_2$. As has

been clarified above, the eigenvalues $\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ are desirable than $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ from a purely dynamical point of view because $\text{Re}\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ are bounded from below. With $\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$, we have obtained the particular solutions of the Schrödinger equation as in Eq. (4.23). Then we have pointed out that the particular solutions with $n_1 = n_2$ represent stable states. Such states do not appear in Feshbach-Tikochinsky's quantization approach. Also, the stable states cannot be understood at the classical-mechanical level, because all the solutions of Eq. (2.2) represent damped oscillations and all the solutions of Eq. (2.3) represent amplified oscillations, provided that $4mk > \gamma^2$. The emergence of the stable states might be viewed as a stabilization of the Bateman model occurring at the quantum-mechanical level.

References

- [1] H. Bateman, Phys. Rev. 38 (1931) 815.
- [2] H. Dekker, Phys. Rep. 80 (1981) 1.
- [3] M. Razavy, Classical and Quantum Dissipative Systems, 2nd Edition, World Scientific, Singapore, 2017.
- [4] H. Feshbach, Y. Tikochinsky, Quantization of the damped harmonic oscillator, Transact. N.Y. Acad. Sci. 38, Ser. II (1977) 44.
- [5] E. Celeghini, M. Rasetti, G. Vitiello, Ann. Phys. 215 (1992) 156.
- [6] Y. N. Srivastava, G. Vitiello, A. Widom, Ann. Phys. 238 (1995) 200.
- [7] M. Blasone, E. Graziano, O. K. Pashaev, G. Vitiello, Ann. Phys. 252 (1996) 115.
- [8] M. Blasone, P. Jizba, Ann. Phys. 312 (2004) 354.
- [9] D. Chruściński, J. Jurkowski, Ann. Phys. 321 (2006) 854.
- [10] D. Chruściński, Ann. Phys. 321 (2006) 840.
- [11] R. Banerjee, P. Mukherjee, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 5591.
- [12] C. M. Bender, P. D. Mannheim, Phys. Rev. Lett. 100 (2008) 110402.
- [13] A. Mostafazadeh, Phys. Rev. D 84 (2011) 105018.